UFR MATHÉMATIQUES
Université Clermont Auvergne

# *Mathématiques 2 pour PC*

Julien Bichon
Notes de cours
L1 2022-23

julien.bichon@uca.fr

# *Table des matières*


**I Analyse asymptotique** **2**

A Comparaison de fonctions au voisinage d'un point . . . 2

A.1 Négligeabilité, la notation $o$ . . . 2

A.2 Equivalence . . . 3

B Développements limités . . . 4

B.1 Définition, exemples, applications . . . 4

B.2 Opérations sur les DL . . . 7

B.3 Développement limité au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$ . . . 7

B.4 Développement limité au voisinage de $+\infty$ . . . 8

**II Algèbre linéaire** **9**

A Espaces vectoriels : définitions et exemples . . . 9

B Parties génératrices, parties libres, bases . . . 11

C Matrices . . . 16

C.1 Rappels . . . 16

C.2 Déterminant . . . 20

D Applications linéaires . . . 23

D.1 Définitions et premiers exemples . . . 23

D.2 Applications linéaires de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ . . . 24

D.3 Etude des applications linéaires . . . 25

D.4 La classification des espaces vectoriels de dimension finie . . . 28

# I Analyse asymptotique

Nous définissons deux notions de comparaison de fonctions, qui permettent de donner du sens à des propositions du type "sin$(x)$ est équivalente à $x$ au voisinage de 0" , ou encore " $e^x$ tend plus vite vers $+\infty$ que tout polynôme ".
Nous introduisons ensuite les développements limités, qui permettent de comparer une fonction, donnée au voisinage d'un point, à un *polynôme*.

## A Comparaison de fonctions au voisinage d'un point

### A.1 Négligeabilité, la notation $o$

On fixe $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

**Définition A.1.** Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies au voisinage de $a$. On dit que $f$ **est négligeable devant** $g$ **en** $a$ si on a $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.
On écrit alors $f \underset{a}{=} o(g)$ et on dit aussi que $f$ **est négligeable devant** $g$ **au voisinage de** $a$.

La négligeabilité mesure les vitesses de convergence (ou divergence) *relatives* de deux fonctions en un point donné de $\mathbb{R}$ mais aussi en $\pm\infty$.

**Exemples A.2.**

1. Une fonction $f$ est négligeable devant la fonction constante et égale à 1 en $a$, ce qu'on écrit $f \underset{a}{=} o(1)$, si et seulement si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.
2. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha < \beta$. Alors $x^\beta \underset{0}{=} o(x^\alpha)$. Pour le voir, il suffit d'utiliser que pour tout $\gamma > 0$, on a $\lim\limits_{x \to 0} x^\gamma = 0$. En appliquant cette propriété à des entiers, on a donc en particulier $x \underset{0}{=} o(1)$ , $x^2 \underset{0}{=} o(x)$ , $x^3 \underset{0}{=} o(x^2)$...
3. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha < \beta$. Alors $x^\alpha \underset{+\infty}{=} o(x^\beta)$. Pour le voir, il suffit d'utiliser que pour tout $\gamma > 0$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^\gamma} = 0$.

La proposition suivante donne les opérations autorisées sur les $o$ :

**Proposition A.3.** Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et $f$ , $g$ , $h$ , $k$ des fonctions réelles définies au voisinage de $a$.

- Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et $g \underset{a}{=} o(h)$, alors $f \underset{a}{=} o(h)$.
- Si $f \underset{a}{=} o(h)$ et $g \underset{a}{=} o(h)$, alors $f + g \underset{a}{=} o(h)$.
- Si $f \underset{a}{=} o(h)$ et $g \underset{a}{=} o(k)$, alors $fg \underset{a}{=} o(hk)$.

**Opération interdite** : on n'a pas la propriété suivante : $f \underset{a}{=} o(h)$ et $g \underset{a}{=} o(k)$ alors $f+g \underset{a}{=} o(h+k)$. En effet, on a $x-1 \underset{+\infty}{=} o(x^2)$ et $1 \underset{+\infty}{=} o(1-x^2)$, mais $x \underset{+\infty}{\neq} o(1)$ ! Un autre exemple est : $\frac{1}{x} - 1 \underset{0}{=} o(\frac{1}{x^2})$, $1 \underset{0}{=} o(1-\frac{1}{x^2})$, alors que $\frac{1}{x} \underset{0}{\neq} o(1)$

**Exemples A.4.** Les exemples suivants sont fondamentaux.
Au voisinage de $a = 0$.

— *Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha < \beta$. Alors $x^\beta \underset{0}{=} o(x^\alpha)$*

— *Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $0 < \beta$. Alors $\mid \ln(x) \mid^\alpha \underset{0}{=} o(\frac{1}{x^\beta})$, i.e $\lim\limits_{x\to 0} x^\beta \mid \ln(x) \mid^\alpha = 0$.*

Au voisinage de $a = +\infty$.

— *Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha < \beta$. Alors $x^\alpha \underset{+\infty}{=} o(x^\beta)$.*

— *Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $0 < \beta$. Alors $(\ln(x))^\alpha \underset{+\infty}{=} o(x^\beta)$, i.e $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta} = 0$.*

— Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $0 < \beta$. Alors $x^\alpha \underset{+\infty}{=} o(e^{\beta x})$, i.e $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^\alpha}{e^{\beta x}} = 0$.

Au voisinage de $a = -\infty$.

— *Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $0 < \beta$. Alors $e^{\beta x} \underset{-\infty}{=} o(\dfrac{1}{\mid x \mid^\alpha})$, i.e $\lim\limits_{x\to-\infty} \mid x \mid^\alpha e^{\beta x} = 0$.*

## A.2 Equivalence

On fixe $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

**Définition A.5.** Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies au voisinage de $a$. On dit que $f$ et $g$ sont **équivalentes en** $a$ si on a $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.
On écrit alors $f \underset{a}{\sim} g$ et on dit que $f$ et $g$ sont équivalentes au voisinage de $a$ (il est clair qu'on a aussi $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 1$) .

**Exemples A.6.** 1. $x^2 + 5x + 4 \sim_{+\infty} x^2$.

2. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} \sim_0 \dfrac{1}{x^2}$.

**Remarque A.7.** Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies au voisinage de $a$.

— Si $f \underset{a}{\sim} g$, alors $f$ et $g$ ont le même signe au voisinage de $a$.

— Les assertions $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ et $\lim_{x\to a}(f(x) - g(x)) = 0$, ne sont pas du tout équivalentes. On ne peut même pas dire que l'une implique l'autre. En effet :
- On a $x^2 + x \sim_{+\infty} x^2$ mais $\lim_{x\to+\infty}(x^2 + x - x^2) = +\infty$.
- On a $\lim\limits_{x\to+\infty} (\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}) = 0$ mais $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x} = +\infty$.

Les propriétés suivantes sont des conséquences des théorèmes sur les limites :

**Proposition A.8.** Soient $f$, $g$, $h$, $k$ des fonctions réelles définies au voisinage de $a$.
- Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $g \underset{a}{\sim} f$ (symétrie).
- Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$ alors $f \underset{a}{\sim} h$ (transitivité).
- Si $f \underset{a}{\sim} h$ et $g \underset{a}{\sim} k$, alors $\dfrac{f}{g} \underset{a}{\sim} \dfrac{h}{k}$.
- Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $\lim_{x\to a} g = l$, alors $\lim_{x\to a} f = l$.

**Opérations interdites** :
• On n'additionne pas les équivalents :

$$f \underset{a}{\sim} h \quad \text{et} \quad g \underset{a}{\sim} k \quad \not\Rightarrow \quad f+g \underset{a}{\sim} h+k$$

Par exemple, on a $x+1 \sim_{+\infty} x + 2\ln x$ et $-x \sim_{+\infty} -x - \ln x$, mais on $1 \not\sim_{+\infty} \ln x$.
• On ne compose pas à gauche :

$$f \sim_a g \quad \not\Rightarrow \quad \varphi \circ f \sim_a \varphi \circ g$$

Par exemple, on a $x \sim_{+\infty} x + \ln x$ ; si on compose à gauche avec $\varphi : x \mapsto e^x$, on a $e^x \not\sim_{+\infty} x\, e^x$.

**Exemples A.9.** Les exemples suivants sont fondamentaux.
Au voisinage de $a = 0$.

1. **Polynômes, puissance, logarithme, exponentielle**
   - Un polynôme est équivalent en 0 à son monôme non nul de plus bas degré.
   - Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$, on a $(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$.
   - On a : $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$.
   - On a : $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$.
2. **Fonctions circulaires**
   - On a : $\sin x \underset{0}{\sim} x$.
   - On a : $\tan x \underset{0}{\sim} x$.
   - On a : $1 - \cos x \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$ (cette dernière formule s'obtient grâce à un développement limité à l'ordre 2, voir le paragraphe suivant).

Au voisinage de $a = \pm\infty$.
Un polynôme est équivalent en $\pm\infty$ à son monôme non nul de plus haut degré.

# B Développements limités

## B.1 Définition, exemples, applications

Les développements limités sont l'outil principal d'approximation des fonctions au voisinage d'un point. Plus précisément, un développement limité en 0 à l'ordre $n$ d'une fonction

$f$, nous donne un polynôme $P$ de degré $\leq n$ tel que la différence $f(x) - P(x)$ est négligeable devant $x^n$ en 0.

**Définition B.1.** Soit $f$ une fonction définie au voisinage de 0. On dit que $f$ **admet en** $0$ **un développement limité (DL) à l'ordre** $n$ s'il existe des constantes $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ telles que

$$f(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \cdots + \lambda_n x^n + o(x^n)$$

Le polynôme $P(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \cdots + \lambda_n x^n$ s'appelle **la partie régulière** du DL de $f$. La différence $f(x) - P(x)$ s'appelle **le reste à l'ordre** $n$ du DL de $f$. Par définition , ce reste est négligeable devant $x^n$, c'est-à-dire :

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - P(x)}{x^n} = 0$$

On a les propriétés suivantes :

**Proposition B.2.**

1. S'il existe, le DL à l'ordre $n$ en 0 d'une fonction $f$ est unique.

2. Si $f$ est une fonction paire, alors la partie régulière de son DL en 0 est un polynôme pair, c'est-à-dire un polynôme qui ne contient que des puissances paires $(1, x^2, x^4, \cdots)$.

3. Si $f$ est une fonction impaire, alors la partie régulière de son DL en 0 est un polynôme impair, c'est-à-dire un polynôme qui ne contient que des puissances impaires $(x, x^3, x^5, \cdots)$.

Le DL des fonctions usuelles s'obtient par le résultat suivant :

**Théorème B.3** (Formule de Taylor-Young)**.** Soit f une fonction $n$ fois dérivable au voisinage de 0. Alors $f$ admet au voisinage de 0 le DL à l'ordre $n$ :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

La formule de Taylor-Young pour $f$ à l'ordre $n$ en 0, qui permet de donner la liste suivante de DL des fonctions usuelles :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

**ATTENTION : quand on écrit un développement limité, on ne doit jamais oublier le $o$ à la fin !!!**

**Exemple B.4. L'écriture d'un développement limité permet de calculer des limites non triviales**. Par exemple la limite
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$
est une conséquence immédiate du développement limité $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

En pratique, **le DL d'une fonction $f$ permet d'obtenir un équivalent très simple pour** $f$. Plus précisément, on a :

**Proposition B.5.** Si $f$ admet un DL en 0 à l'ordre $n$ , et que la partie régulière $P(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \cdots + \lambda_n x^n$ du DL n'est pas le polynôme nul, alors
$$f(x) \underset{0}{\sim} \lambda_k x^k$$
où $\lambda_k x^k$ est le monôme de plus bas degré non nul de $P$, i.e $\lambda_k \neq 0$ et $\lambda_j = 0$ pour tout $0 \leq j < k$.

Comme on a vu que de fonctions équivalentes en un point ont même signe au voisinage de ce point, **les DL permettent donc d'étudier la position relative de deux courbes**, et **en particulier la position de la courbe de la fonction par rapport à la tangente en un point**.

**Proposition B.6.** Si $f$ admet un DL en 0 à l'ordre $n \geq 2$ de la forme
$$f(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \mu x^n + o(x^n), \text{ avec } \mu \neq 0,$$
alors la courbe de $f$ est au dessus de la tangente à cette courbe en $(0, f(0))$ lorsque $\mu x^n \geq 0$, et en dessous lorsque lorsque $\mu x^n \leq 0$.

**Exemple B.7.** Soit $f$ une fonction ayant le DL suivant en 0 : $f(x) = x - x^3 + o(x^3)$. Alors la courbe de $f$ est au dessus de la tangente à cette courbe en $(0, f(0))$ lorsque $x \leq 0$, et au dessous lorsque $x \geq 0$.

**Exemple B.8.** Soient $f$ et $g$ des fonctions définies au voisinage de 0, vérifiant $f(0) = g(0)$ et $f(x) - g(x) = -x^2 + o(x^2)$. Alors la courbe de $f$ est en dessous de celle de $g$ au voisinage de 0.

## B.2 Opérations sur les DL

**Proposition B.9.** Si $f$ et $g$ admettent toutes les deux un DL en 0 à l'ordre $n$, alors on a :

1. La fonction $f+g$ admet un DL en 0 à l'ordre $n$, dont la partie régulière est la somme des parties régulières des DL de $f$ et $g$.
2. La fonction $fg$ admet un DL en 0 à l'ordre $n$, dont la partie régulière est la somme des monômes de degré $\leq n$ dans le produit des parties régulières des DL de $f$ et $g$.
3. Si de plus $f(0) = 0$, alors la fonction $g \circ f$ admet un DL en 0 à l'ordre $n$, dont la partie régulière s'obtient en substituant la partie régulière du DL de $f$ dans la partie régulière du DL de $g$, et en ne conservant que les monômes de degré $\leq n$.

**Exemples B.10.** 1. Pour la fonction $f(x) = \sin(x) + \ln(1-x)$, on a le DL à l'ordre 3 en 0 suivant :

$$f(x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

En particulier $f(x) \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$. La tangente à la courbe de $f$ en $(0,0)$ a pour équation $y = 0$, et ainsi la courbe de $f$ est au-dessous de la tangente en $(0,0)$ (car $-\frac{x^2}{2} \leq 0$ au voisinage de 0).

2. Pour la fonction $f(x) = \cos(x)\sqrt{1+x}$, on a le DL à l'ordre 2 en 0 suivant :

$$f(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{5}{8}x^2 + o(x^2)$$

3. Pour la fonction $f(x) = \cos(\sin(x))$, on a le DL à l'ordre 3 en 0 suivant :

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - \frac{(x - \frac{x^3}{6})^2}{2} + o(x^3) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \end{aligned}$$

**Remarque B.11.** Il n'est en général pas conseillé d'utiliser la formule de Taylor-Young pour trouver le DL d'une fonction obtenue comme somme, produit ou composée de fonctions dont on connait les DL. Les règles que nous avons données sont beaucoup plus efficaces.

## B.3 Développement limité au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$

**Définition B.12.** Soit $f$ une fonction définie au voisinage de $a$. On dit que $f$ **admet un DL en $a$ à l'ordre $n$** s'il existe des constantes $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n$ telles que

$$f(x) = \lambda_0 + \lambda_1(x-a) + \cdots + \lambda_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

Pour calculer un DL au voisinage de $a$, on se ramène au voisinage de 0 en posant $h(t) = f(t+a)$. Si $h$ admet un DL en 0 à l'ordre $n$ de la forme $h(t) = \lambda_0 + \lambda_1 t + \cdots + \lambda_n t^n + o(t^n)$, alors on a $f(x) = \lambda_0 + \lambda_1(x-a) + \cdots + \lambda_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$.

**Exemple B.13.** On a $\frac{1}{x} = \frac{1}{1+(x-1)}$. En posant $t = x - 1$, et en utilisant le DL à l'ordre 3 en 0

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + o(t^3)$$

on obtient le DL à l'ordre 3 en 1

$$\frac{1}{x} = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + o((x-1)^3)$$

Si $f$ est $n$ fois dérivable au voisinage de $a$, on peut aussi calculer son DL en $a$ à l'ordre $n$ par la formule de Taylor-Young au voisinage de $a$ :

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

De même qu'en 0, les DL en un point quelconque $a$ permettent de déterminer des positions relatives de courbes.

**Proposition B.14.** Si $f$ admet un DL en $a$ à l'ordre $n \geq 2$ de la forme

$$f(x) = \lambda_0 + \lambda_1(x-a) + \mu(x-a)^n + o((x-a)^n), \text{ avec } \mu \neq 0,$$

alors la courbe de $f$ est au dessus de la tangente à cette courbe en $(a, f(a))$ lorsque $\mu(x-a)^n \geq 0$, et en dessous lorsque lorsque $\mu(x-a)^n \leq 0$.

## B.4 Développement limité au voisinage de $+\infty$

Soit $f$ une fonction définie au voisinage de $+\infty$. Dans le cas où $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$, posons :

$$h(t) = \begin{cases} f(\frac{1}{t}) & \text{si } t \neq 0 \\ l & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

Si $h$ admet un DL en 0 à l'ordre $n$ de la forme : $h(t) = \lambda_0 + \lambda_1 t + \cdots + \lambda_n t^n + o(t^n)$, alors on a :

$$f(x) = \lambda_0 + \frac{\lambda_1}{x} + \frac{\lambda_2}{x^2} \cdots + \frac{\lambda_n}{x^n} + o(\frac{1}{x^n})$$

C'est le DL de $f$ au voisinage de $+\infty$ à l'ordre $n$.

**Exemple B.15.** Soit $f\ :]1, +\infty[\to \mathbf{R} : x \mapsto f(x) = \frac{x}{x-1}$. On a $f(x) = \frac{1}{1-\frac{1}{x}}$, donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

Le DL en 0 à l'ordre $n$ de la fonction $h$ correspondante est donc $h(t) = \frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \cdots + t^n + o(t^n)$.

Le DL de $f$ au voisinage de $+\infty$ à l'ordre $n$ est :

$$f(x) = \frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \cdots + \frac{1}{x^n} + o(\frac{1}{x^n})$$

# II Algèbre linéaire

Ce chapitre présente les objets de base de l'*algèbre linéaire* : les espaces vectoriels et les applications linéaires.

## A Espaces vectoriels : définitions et exemples

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble $\mathbb{R}^n$ est muni de deux lois

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \quad \underline{\text{addition}}$$

$$\lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n), \text{ pour } \lambda \in \mathbb{R} \quad \underline{\text{multiplication par un scalaire}}$$

Ces deux lois vérifient des conditions de compatibilité bien naturelles, et font de $\mathbb{R}^n$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. La définition formelle est la suivante.

**Définition A.1.** Un $\mathbb{R}$-**espace vectoriel** (ou en abrégé $\mathbb{R}$-ev) est un ensemble $E$ muni de deux lois

$$\begin{array}{rcl} E \times E & \longrightarrow & E \text{ (addition)} \\ (u, v) & \longmapsto & u + v \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \times E & \longrightarrow & E \text{ (produit externe)} \\ (\lambda, u) & \longmapsto & \lambda u \end{array}$$

satisfaisant aux axiomes suivants ($\forall u, v, w \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$) :

1. $u + (v + w) = (u + v) + w$,
2. $u + v = v + u$,
3. Il existe un élément (unique) $0_E \in E$ tel que $u + 0_E = u = u + 0_E$,
4. $\forall u \in E$, il existe un (unique) élément $-u \in E$ tel que $u + (-u) = 0_E$,
5. $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$,
6. $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$,
7. $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$,
8. $1u = u$.

Les éléments d'un espaces vectoriel sont appelés **vecteurs**.

La définition ci-dessus a pour but de formaliser les règles de calculs, nous ne l'utiliserons pas vraiment en tant que telle, car les espaces vectoriels que nous rencontrerons ($\mathbb{R}^n$ est ses sous-espaces, les matrices) seront suffisament concrets pour que les calculs se fassent de manière très naturelle. Il est tout de même très intéressant de pouvoir raisonner dans un cadre général tel que celui-ci, en particulier pour éviter des calculs fastidieux (même si cela demande un gros effort d'abstraction à la base).

**Exemples A.2.** • $\mathbb{R}$, muni de l'addition usuelle et de la multiplication, est un $\mathbb{R}$-ev (en fait $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$).

- $\mathbb{R}^n$, muni des lois
$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$
$$\lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$
est un $\mathbb{R}$-ev. On a $0_{\mathbb{R}^n} = (0, \dots, 0)$ et $-(x_1, \dots, x_n) = (-1)(x_1, \dots, x_n) = (-x_1, \dots, -x_n)$.
- Si $E$ et $F$ sont des $\mathbb{R}$-ev, alors $E \times F = \{(u, v),\ u \in E, v \in F\}$ est un $\mathbb{R}$-ev pour les opérations
$$(u, v) + (u', v') = (u + u', v + v'), \quad \lambda(u, v) = (\lambda u, \lambda v)$$
Bien sûr, par exemple, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ s'identifie à $\mathbb{R}^2$.

**Définition A.3.** Soit $E$ un $\mathbb{R}$-ev. Un **sous-espace vectoriel de** $E$ (sev de $E$) est une partie $F \subset E$ telle que
1. $0_E \in F$,
2. $\forall u, v \in F$, on a $u + v \in F$.
3. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in F$, on a $\lambda u \in F$.

**Un sous-espace vectoriel, muni des lois induites, devient un espace vectoriel**. Nous nous intéresserons particulièrement aux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.

**Exemples A.4.**
1. $\{0\}$ et $E$ sont des sev de $E$.
2. $E = \{(x, 2x),\ x \in \mathbb{R}\}$ est un sev de $\mathbb{R}^2$. C'est la droite d'équation $y = 2x$.
3. $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ est un sev de $\mathbb{R}^3$, c'est le plan d'équation $x + y + z = 0$.
4. $E = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \dots + x_n = 0\}$ est un sev de $\mathbb{R}^n$.
5. Si $F$ et $G$ sont des sev de $E$, alors
$$F \cap G = \{u \in E \mid u \in F \text{ et } u \in G\}$$
et
$$F + G = \{y + z, y \in F, z \in G\}$$
sont des sev de $E$.

**Définition A.5.** Soient $E$ un $\mathbb{R}$-ev, et $F, G \subset E$ des sev. On dit que $E$ **est somme directe de** $F$ **et** $G$, et on note $E = F \oplus G$, si les deux conditions suivantes sont vérifiées :
1. $E = F + G$;
2. $F \cap G = \{0_E\}$.

**Proposition A.6.** Soient $E$ un $\mathbb{R}$-ev, et $F, G \subset E$ des sev. Alors $E = F \oplus G$ si et seulement si tout vecteur $u \in E$, il existe un unique $v \in F$ et un unique $w \in G$ tels que $u = v + w$.

**Exemple A.7.** Dans $\mathbb{R}^2$, soient
$$F = \{(x, 0),\ x \in \mathbb{R}\}, \quad G = \{(0, y),\ y \in \mathbb{R}\}$$
On voit facilement que $F$ et $G$ sont des sev de $\mathbb{R}^2$ et que $\mathbb{R}^2 = F \oplus G$

L'exemple précédent est élémentaire, mais il y a beaucoup d'autres situations où on rencontre des sommes directes. On donnera plus loin des outils pour montrer qu'un espace vectoriel est somme directe de deux sous-espaces vectoriels.

# B Parties génératrices, parties libres, bases

**Définition-Proposition B.1.** Soient $E$ un $\mathbb{R}$-ev et $u_1, \ldots, u_p \in E$. Alors

$$\operatorname{Vect}(u_1, \ldots, u_p) := \{\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}\} \subset E$$

est un sev de $E$, appelé **le sev de $E$ engendré par** $u_1, \ldots, u_p$. Les éléments de $\operatorname{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$ sont **les combinaisons linéaires des éléments** $u_1, \ldots, u_p$.
Si $F \subset E$ est un sev tel que $u_1, \ldots, u_p \in F$, alors on a $\operatorname{Vect}(u_1, \ldots, u_p) \subset F$.

**Exemples B.2.**

1. Dans $\mathbb{R}^2$, on a $(2,3) = 2(1,-1) + 5(0,1)$ : le vecteur $(2,3)$ est une combinaison linéaire des vecteurs $(1,-1)$ et $(0,1)$.
2. Dans $\mathbb{R}^2$, soit $v = (1,0)$. Les combinaisons linéaires de $v$ sont les vecteurs de la forme $\lambda v = (\lambda, 0)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Donc en particulier, le vecteur $(1,1)$ de $\mathbb{R}^2$ n'est pas une combinaison linéaire de $v$.
3. Toujours dans $\mathbb{R}^2$, soient $v_1 = (1,0)$ et $v_2 = (2,1)$. Soit $(x,y)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^2$. Alors $(x,y) = (x-2y)v_1 + yv_2$ est une combinaison linéaire de $v_1$ et $v_2$.
4. Dans $\mathbb{R}^n$, soient

   $$e_1 = (1,0,\ldots,0),\ e_2 = (0,1,0,\ldots,0),\ \ldots,\ e_n = (0,\ldots,0,1)$$

   Pour $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a

   $$(x_1, \ldots, x_n) = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$$

   et ainsi $\mathbb{R}^n = \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$.
5. Soit $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 0\}$. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Alors

   $$\begin{aligned}(x,y,z) \in E &\iff x+y+z=0 \iff (x,y,z) = (x,y,-x-y)\\ &\iff (x,y,z) = x(1,0,-1) + y(0,1,-1)\end{aligned}$$

   Donc $E = \operatorname{Vect}((1,0,-1),(0,1,-1))$ et cela montre que $E$ est un sev de $\mathbb{R}^3$.

Le résultat suivant est souvent utile.

**Proposition B.3.** Soit $E$ un $\mathbb{R}$-ev

1. Soient $u_1, \ldots, u_p \in E$. Si $u_p \in \operatorname{Vect}(u_1, \ldots, u_{p-1})$ ($u_p$ est une combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_{p-1}$), alors

   $$\operatorname{Vect}(u_1, \ldots, u_p) = \operatorname{Vect}(u_1, \ldots, u_{p-1})$$

2. Soient $u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots v_q \in E$. Alors

   $$\operatorname{Vect}(u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots v_q) = \operatorname{Vect}(u_1, \ldots, u_p) + \operatorname{Vect}(v_1, \ldots, v_q)$$

On en vient à trois définitions très importantes.

**Définition B.4.** Soient $E$ un $\mathbb{R}$-ev et $u_1, \ldots, u_p \in E$.

1. On dit que $\{u_1, \ldots, u_p\}$ est **une partie génératrice de** $E$ si $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p) = E$.
2. On dit que $\{u_1, \ldots, u_p\}$ est **une partie libre de** $E$ (ou encore **linéairement indépendante**) si
$$\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}, \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$$
Une partie non libre est dite **liée** ou encore **linéairement dépendante**.
3. On dit que $\{u_1, \ldots, u_p\}$ est une **base de** $E$ si c'est à la fois une partie libre et génératrice de $E$.

**Exemples B.5.**

1. $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$, où comme dans l'exemple précédent
$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0),\ e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0),\ \ldots,\ e_n = (0, \ldots, 0, 1)$$
Cette base de $\mathbb{R}^n$ est appelée la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
2. Dans $\mathbb{R}^2$, soient $v_1 = (1, 0)$ et $v_2 = (2, 1)$. Si on a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = (0, 0)$, pour $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, alors $(\lambda_1 + 2\lambda_2, \lambda_2) = (0, 0)$ et donc $\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$ et $\lambda_2 = 0$, donc $\lambda_1 = 0 = \lambda_2$ est la seule solution. Donc $v_1$ et $v_2$ sont linéairement indépendants. Le calcul fait dans l'exemple précédent (3) montre que $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ : $\{v_1, v_2\}$ est une partie génératrice de $\mathbb{R}^2$. Ainsi $\{v_1, v_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
3. Dans $\mathbb{R}^2$, soient $v_1 = (1, 0)$ et $v_2 = (2, 0)$. Si $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = (0, 0)$, alors $(\lambda_1 + 2\lambda_2, 0) = (0, 0)$ et donc $\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$. Ceci a une infinité de solutions, par exemple on peut prendre $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_1 = -2$. Donc $v_1$ et $v_2$ sont liés, et $-2v_1 + v_2 = (0, 0)$ (soit $v_2 = 2v_1$).
4. Si $u \in E$ est un vecteur non nul, alors $\{u\}$ est une partie libre de $E$.
5. Si $u, v \in E$ sont deux vecteurs, la partie $\{u, v\}$ est liée si et seulement si les vecteurs $u$ et $v$ sont colinéaires, et donc la partie $\{u, v\}$ est libre si et seulement si les vecteurs $u$ et $v$ ne sont pas colinéaires. Quand il y a au moins 3 vecteurs, on ne parle **jamais** de colinéarité entre eux.
6. Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$. On a vu que $E = \mathrm{Vect}((1, 0, -1), (0, 1, -1))$, ce qui montre que $E$ est un sev de $\mathbb{R}^3$, et on vérifie ensuite que $\{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}$ est une famille libre, et donc est une base de $E$.
7. Si $\{u_1, \ldots, u_p\}$ est une partie libre de $E$ alors toute sous-partie de $\{u_1, \ldots, u_p\}$ est encore une partie libre.

**En pratique**

Pour déterminer si une famille $v_1, \ldots, v_p$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est libre ou liée, on résout l'équation en $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ :
$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p = (0, 0, \ldots, 0).$$
C'est en réalité un système de $n$ équations à $p$ inconnues, en regardant les vecteurs composante à composante. On constate qu'il y a une solution évidente qui est $\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_p = 0$. Alors :

— Les vecteurs $v_1, \dots, v_p$ sont linéairement indépendants si et seulement si $\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_p = 0$ est l'unique solution.
— Les vecteurs $v_1, \dots, v_p$ sont linéairement dépendants si et seulement s'il existe une autre solution (qui n'est pas $\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_p = 0$).

**Exemple B.6.** Dans $\mathbb{R}^3$, considérons les vecteurs

$$v_1 = (1,1,0),\ v_2 = (1,0,-1),\ v_3 = (4,2,-1),\ v_4 = (1,1,1)$$

Ils ne sont pas linéairement indépendants car

$$v_1 + 2v_2 - v_3 + v_4 = (0,0,0)$$

Par contre les parties $\{v_1, v_2, v_3\}$ et $\{v_1, v_2, v_4\}$ sont libres.

**Définition B.7.** Soit $E$ un $\mathbb{R}$-ev. On dit que $E$ est de **dimension finie** si $E$ admet une partie génératrice finie.

Par exemple $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie.

**Théorème B.8.** Soit $E$ une espace vectoriel de dimension finie, avec $E = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_n)$. Alors toute famille de vecteurs ayant $p > n$ éléments est liée.

Le résultat suivant est alors le résultat fondamental sur les espaces vectoriels de dimension finie.

**Théorème B.9.** Soit $E$ un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie. Alors $E$ possède une base, et toutes les bases de $E$ ont le même nombre d'éléments. Le nombre d'éléments d'une base de $E$ est appelé **la dimension de** $E$, et est noté $\dim(E)$.

**Exemples B.10.**

1. L'espace vectoriel nul $\{0\}$ est de dimension 0 (c'est essentiellement une convention), et c'est le seul espace vectoriel de dimension 0.
2. Dans $\mathbb{R}^n$, soient

$$e_1 = (1,0,\dots,0),\ e_2 = (0,1,0,\dots,0),\ \dots,\ e_n = (0,\dots,0,1)$$

Alors $\{e_1, \dots, e_n\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$, appelée **la base canonique de** $\mathbb{R}^n$. On a donc

$$\dim(\mathbb{R}^n) = n$$

3. Soit $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 0\}$. On a vu que $\{(1,0,-1),(0,1,-1)\}$ est une base de $E$, et donc $\dim(E) = 2$.

On a en fait des résultats plus précis que le théorème d'existence d'une base.

**Théorème B.11 (Théorème de la base incomplète).** Soit $E$ un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et soit $\{u_1, \dots, u_p\}$ une famille libre d'éléments de $E$. Alors il existe $u_{p+1}, \dots, u_n \in E$ tels que $\{u_1, \dots, u_p, u_{p+1}, \dots, u_n\}$ soit une base de $E$.

**Exemple B.12.** Considérons, dans $\mathbb{R}^4$, les vecteurs $v_1 = (1,1,0,1)$ et $v_2 = (-1,1,1,1)$. On vérifie qu'ils sont linéairement indépendants, et donc, comme $\mathbb{R}^4$ est de dimension 4, le théorème de la base incomplète assure l'existence de $v_3, v_4 \in \mathbb{R}^4$ tels que $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ soit une base de $\mathbb{R}^4$.

**Théorème B.13 (Théorème de la base extraite).** Soit $E$ un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et soit $\{u_1, \dots, u_p\}$ une partie génératrice de $E$. Alors $\dim(E) \leq p$ et on peut trouver une sous-famille de $\{u_1, \dots, u_p\}$ qui est une base de $E$.

**Exemple B.14.** Dans $\mathbb{R}^3$, soit

$$E = \text{Vect}((1,1,0),(2,-1,2),(1,-2,2))$$

Alors $\dim(E) \leq 3$ et le théorème de la base extraite assure l'existence d'une sous-famille de

$$\{(1,1,0),(2,-1,2),(1,-2,2)\}$$

qui est une base de $E$. En fait on constate que $(2,-1,2) = (1,1,0) + (1,-2,2)$, et donc

$$E = \text{Vect}((1,1,0),(1,-2,2))$$

On voit que la famille $\{(1,1,0),(1,-2,2)\}$ est libre, et donc est une base de $E$.

Le prochain résultat est quant à lui très utile pour déterminer une base d'un espace vectoriel dont on connait déjà la dimension.

**Théorème B.15.** Soient $E$ un $\mathbb{R}$-ev de dimension $n$ et $u_1, \dots, u_n \in E$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. $\{u_1, \dots, u_n\}$ est une base de $E$.
2. $\{u_1, \dots, u_n\}$ est une partie génératrice de $E$.
3. $\{u_1, \dots, u_n\}$ est une partie libre de $E$.

**Exemple B.16.** Dans $\mathbb{R}^4$, on vérifie que les vecteurs

$$v_1 = (1,1,0,0),\ v_2 = (1,0,-1,1),\ v_3 = (0,4,2,-1),\ v_4 = (1,1,1,1)$$

sont linéairement indépendants, et donc, comme $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$, on en déduit que $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

Nous verrons plus loin également un critère matriciel pour déterminer si une famille de $n$ vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est une base.

Pour les sous-espaces vectoriels, on a le résultat important suivant.

**Théorème B.17.** Soient $E$ un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et $F \subset E$ un sev. Alors $F$ est de dimension finie avec $\dim(F) \leq \dim E$. De plus $F = E \iff \dim(F) = \dim(E)$.

**En particulier les sev de $\mathbb{R}^n$ sont des espaces vectoriels de dimension $\leq n$.**

**Exemples B.18.**
1. Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}$ sont de dimension 0 ou 1, et donc les seuls sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}$ sont $\{0\}$ et $\mathbb{R}$.
2. Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ sont soit
   — de dimension 0 (le sous-espace vectoriel nul $\{0_{\mathbb{R}^2}\}$),
   — de dimension 1 : ce sont les droites de $\mathbb{R}^2$,
   — de dimension 2 : il s'agit de $\mathbb{R}^2$.
3. Soit $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-z=0\}$. C'est un sev de $\mathbb{R}^3$, donc un espace vectoriel de dimension finie $\leq 3$. Comme $E \subsetneq \mathbb{R}^3$, on a donc $\dim(E) \leq 2$. Vérifions que $\dim(E) = 2$. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$\begin{aligned}(x,y,z) \in E &\iff x+y-z=0 \iff (x,y,z) = (x,y,x+y)\\ &\iff (x,y,z) = x(1,0,1) + y(0,1,1)\end{aligned}$$

   Donc $E = \mathrm{Vect}((1,0,1),(0,1,1))$. On vérifie ensuite que $\{(1,1,0),(0,1,1)\}$ est une famille libre, et donc est une base de $E$. On a bien $\dim(E) = 2$.

On applique maintenant le théorème de la base incomplète aux sommes de sous-espaces.

**Théorème B.19.** Soient $E$ un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie, et $F, G \subset E$ des sev. On a

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

**Exemple B.20.** Dans $\mathbb{R}^3$, soient

$$F = \mathrm{Vect}((1,1,-2),(0,4,2)), \quad G = \mathrm{Vect}((1,0,1),(1,-1,2))$$

On a $\dim(F) = 2 = \dim(G)$, donc

$$\dim(F+G) = 2+2-\dim(F\cap G) = 4 - \dim(F \cap G)$$

Comme $F+G$ est un sev de $\mathbb{R}^3$, on a $\dim(F+G) \leq 3$, et donc $\dim(F\cap G) \geq 1$.
On voit facilement que $(1,0,1) \notin F$, donc $F \subsetneq F+G$, et ainsi $2 = \dim(F) < \dim(F+G) \leq 3$, ce qui donne $\dim(F+G) = 3$, donc $F+G = \mathbb{R}^3$, et $\dim(F \cap G) = 1$.

On termine le paragraphe en appliquant le théorème de la base incomplète à l'existence de « supplémentaires » pour les sous-espaces vectoriels.

**Théorème B.21.** Soit $E$ un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et $F \subset E$ un sev. Alors il existe un sev $G \subset E$ tel que $E = F \oplus G$, et on a alors $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$.

Concrètement, le résultat suivant est le plus utile pour déterminer si un espace vectoriel est somme directe de deux sous-espaces.

**Théorème B.22.** Soient $E$ un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie, et $F, G \subset E$ des sev. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. $E$ est somme directe de $F$ et $G$ : $E = F \oplus G$ ;
2. On a $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ et $F \cap G = \{0_E\}$ ;
3. Il existe une base $\{u_1, \dots u_p\}$ de $F$ et une base $\{v_1, \dots, v_q\}$ de $G$ telle que $\{u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q\}$ soit une base de $E$ ;
4. Pour toute base $\{u_1, \dots, u_p\}$ de $F$ et toute base $\{v_1, \dots, v_q\}$ de $G$, $\{u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q\}$ est une base de $E$.

**Exemples B.23.** 1. Dans $\mathbb{R}^3$, soient

$$F = \{(x, 2x, x),\ x \in \mathbb{R}\} \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = 0\}$$

En utilisant le deuxième critère, on voit que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

2. Dans $\mathbb{R}^4$, soient

$$F = \mathrm{Vect}((1, 1, 0, -2), (0, 4, 2, 0)), \quad G = \mathrm{Vect}((1, 0, 0, 1), (1, -1, 2, 0))$$

En utilisant le troisième critère, on voit que $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$.

Enfin, on a en général une formule reliant la dimension d'une somme de sous-espaces et les dimensions des sous-espaces.

# C Matrices

## C.1 Rappels

Les principales définitions et propriétes sur les matrices sont vues dans le cours "outils mathématiques S2". Nous les rappelons brièvement.

Rappelons tout d'abord qu'une **matrice** $m \times n$ est un tableau rectangulaire de nombres, à $m$ lignes et $n$ colonnes :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

où les $a_{ij}$, pour $1 \leqslant i \leqslant m$ et $1 \leqslant j \leqslant n$ sont des réels. On la note aussi $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ Les indices $i$ et $j$ de $a_{ij}$ signifient que $a_{ij}$ est situé sur la $i$-ème ligne et la $j$-ème colonne. On dit que $a_{ij}$ est le coefficient $(i, j)$ de la matrice $A$.

L'ensemble de toutes les matrices à $m$ lignes et $n$ colonnes est noté $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

**Quelques matrices particulières**

• **Matrices lignes**. Ce sont les éléments de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$. Ils sont de la forme $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}$. $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ s'identifie naturellement à $\mathbb{R}^n$.

• **Matrices colonnes**. Ce sont les éléments de $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$. Ils sont de la forme $\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$.

• **Matrices carrées**. Ce sont les matrices ayant le même nombre de lignes et le même nombre de colonnes. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ les matrices carrées $n \times n$. Par exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

• **Matrices triangulaires inférieures**. Ce sont les matrices carrées dont tous les coefficients strictement au dessus de la diagonale (c'est-à-dire d'indices $(i,j)$ avec $j > i$) sont nuls. Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & -3/2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

• **Matrices triangulaires supérieures**. Ce sont les matrices carrées dont tous les coefficients strictement en dessous de la diagonale (c'est-à-dire d'indices $(i,j)$ avec $i > j$) sont nuls. Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

• **Matrices diagonales**. Ce sont les matrices carrées à la fois triangulaires supérieures et triangulaires inférieures. Les seuls coefficients pouvant être non nuls sont donc ceux de la diagonale. Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

• **Matrices scalaires**. Ce sont les matrices diagonales dont tous les coefficients diagonaux sont égaux. Par exemple :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$$

• **Matrice identité**. C'est la matrice scalaire $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficientrs diagonaux valent 1. Par exemple

$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

• **Matrice nulle**. C'est la matrice $0_{m,n} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls.

Rappelons que l'on dispose de **deux opérations sur les matrices** :

— **l'addition de deux matrices** : si $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ et $B = \left(b_{ij}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ on pose

$$A + B = \left(a_{ij} + b_{ij}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$$

soit

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

— **la multiplication d'une matrice par un réel** : si $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ et $\lambda$ est réel, on pose

$$\lambda A = \left(\lambda a_{ij}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$$

soit

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

**Remarque C.1.** On ne peut additionner des matrices que si elles sont du même type (même nombre de lignes et même nombre de colonnes).

**Exemple C.2.**

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 4 & -7 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 8 & -9 \\ -10 & 13 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+6 & -1+8 & -3-9 \\ 4-10 & -7+13 & 5+11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 7 & -12 \\ -6 & 6 & 16 \end{pmatrix}$$

**Proposition C.3.** Muni de l'addition et de la multiplication par une scalaire, $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. De plus, $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $mn$, dont une base est donnée par l'ensemble

$$\{E_{ij},\ 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n\}$$

où $E_{ij}$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls, à l'exception de celui situé sur la ligne $i$ et la colonne $j$, qui vaut 1.

**Exemples C.4.** 1. $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-ev de dimension 4 avec pour base les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-ev de dimension 6 avec pour base les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rappelons également que l'on peut aussi définir un **produit de matrices**, qui existe dans certaines conditions, et qui est un peu plus complexe que les opérations précédentes.

**Définition C.5.** Etant données deux matrices $A$ de $\mathcal{M}_{m,\mathbf{n}}(\mathbb{R})$ et $B$ de $\mathcal{M}_{\mathbf{n},p}(\mathbb{R})$ telles que le nombre $\mathbf{n}$ de colonnes de $A$ est égal au nombre de lignes de $B$, on définit leur produit $AB$, qui est une matrice de $\mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$, de la façon suivante : notons $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ et $B = (b_{jk})_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ 1 \leqslant k \leqslant p}}$, alors $AB = (c_{ik})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant k \leqslant p}}$ avec $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk}$.

Les principales propriétés du produit de matrices sont résumées ci-dessous.

**Propriétés C.6.**
— $(AB)C = A(BC)$ pour toutes matrices convenables $A, B, C$ (c'est-à-dire telles que les produits existent). On peut donc oublier les parenthèses et écrire $ABC$. On dit que le produit est **associatif**.
— $AI_n = A$ et $I_mA = A$ pour toute matrice $A$ de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.
— $(A + A')B = AB + A'B$ pour toutes matrices $A, A', B$ convenables. On dit que le produit est **distributif** (à droite) par rapport à l'addition.
— $A(B + B') = AB + AB'$ pour toutes matrices $A, B, B'$ convenables. On dit que le produit est **distributif** (à gauche) par rapport à l'addition.
— $(\alpha A)B = \alpha(AB) = A(\alpha B)$ pour toutes matrices $A, B$ convenables et tout réel $\alpha$.

**Remarque C.7.** **Attention :** Ce produit n'est **pas commutatif** ! C'est-à-dire qu'on peut avoir $AB \neq BA$ pour certaines matrices (on peut même avoir $AB$ définie alors que $BA$ n'est pas définie).

**Remarque C.8.** Les matrices unité $I_n$ jouent un rôle semblable au "1" de $\mathbb{R}$.

**Définition C.9.** On définit la **transposée** $A^t$ d'une matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ de la façon suivante : $A^t = \left(a'_{ij}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant m}}$ est une matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ avec $a'_{ij} = a_{ji}$. Elle est obtenue en écrivant en lignes les colonnes de $A$.

**Exemple C.10.** Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. Alors $A^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$

**Proposition C.11.** Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On a $(AB)^t = B^tA^t$.

**Définition C.12.** On dit qu'une matrice $A$ de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est **inversible** s'il existe une matrice $B$ de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ telle que $AB = I_n$ et $BA = I_n$. On dit alors que $B$ est **inverse** de $A$ et on la note $A^{-1}$.
On a donc $AA^{-1} = I_n$ et $A^{-1}A = I_n$.

Attention : On ne doit jamais diviser par une matrice, mais on peut multiplier par son inverse si elle est inversible. (La division de matrices n'existe pas).

**Remarque C.13.** On peut montrer que l'une des égalités ci-dessus suffit, c'est-à-dire que s'il existe une matrice $B$ telle que $AB = I_n$ (*ou* $BA = I_n$), alors $A$ est inversible (on rappelle que $A$ est dans $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$).

**Remarque C.14.** Pour qu'une matrice soit inversible, il faut qu'elle ait le même nombre de lignes et de colonnes (c'est-à-dire qu'elle soit carrée). Mais **attention**, cela ne suffit pas : toutes les matrices carrées ne sont pas inversibles.

Le cours "outils mathématiques S2" donne une méthode pour déterminer si une matrice est inversible, et déterminer son inverse. Nous ne la rappelons pas ici.

Le critère matriciel suivant peut être utile pour montrer qu'une famille d'un espace vectoriel de dimension finie est une base.

**Théorème C.15.** Soient $E$ un $\mathbb{R}$-ev de dimension $n$ et $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une base $E$. Soient $u_1, \ldots, u_n \in E$. Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice déterminée par

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ u_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j$$

Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est une base $E$.
2. La matrice $A$ est inversible.

**Exemple C.16.** Dans $\mathbb{R}^2$, soient $u_1 = (1, 1)$ et $u_2 = (2, 3)$. Alors $\{u_1, u_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$, pour l'une des raisons suivantes.

- $\{u_1, u_2\}$ est une partie libre de $\mathbb{R}^2$, qui est de dimension 2.
- la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ est inversible.

## C.2 Déterminant

On étudie maintenant une application $\det : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, appelée le déterminant, qui permet de vérifier si une matrice est inversible ou pas.

Si $n = 1$, une matrice $A = (a)$ est inversible si et seulement si $a \neq 0$. Il n'y a donc rien à faire.

Le cas $n = 2$ est traité par le résultat suivant.

**Théorème C.17.** Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Alors la matrice $A$ est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$, et dans le cas où $A$ est inversible, on a

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

**Exemples C.18.**

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$. Alors $A$ n'est pas inversible.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Alors $A$ est inversible, avec $A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

**Définition C.19.** Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée. Le déterminant de $A$, noté $\det(A)$, est défini de la manière inductive suivante.

— Si $n = 1$, alors $A = (a_{11})$ et $\det(A) = a_{11}$.

— Si $n = 2$, alors $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ et $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

— Si $n \geq 2$, $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, alors

$$\det(A) = a_{11}\Delta_{11} - a_{21}\Delta_{21} + a_{31}\Delta_{31} - \cdots + (-1)^{n-1}a_{n1}\Delta_{n1}$$

où $\Delta_{i1}$ est le déterminant de la matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ obtenue à partir de $A$ en enlevant la ligne $i$ et la colonne 1.

**Exemple C.20.** Pour $n = 3$,

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})$$

Par exemple $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = 0$.

Les principales propriétés du déterminant sont résumées dans le théorème suivant.

**Théorème C.21.** Le déterminant $\det : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfait les propriétés suivantes.

1. $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R})$, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
2. $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$, $A$ est inversible $\iff \det(A) \neq 0$.
3. Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est triangulaire supérieure ou inférieure, alors $\det(A)$ est le produit des coefficients diagonaux de $A$.
4. $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$, on a $\det(A^t) = \det(A)$.

Pour calculer des déterminants en pratique, on peut faire des manipulations sur les lignes et les colonnes. Cela est résumé dans la proposition suivante.

**Proposition C.22.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée, donc les lignes sont notées $L_1, \ldots, L_n$ et le colonnes $C_1, \ldots, C_n$. Alors les opérations suivantes sur les lignes et les colonnes de $A$ transforment le déterminant de $A$ de la manière indiquée dans le tableau.

| Opération | Déterminant |
|---|---|
| $L_i \leftrightarrow L_j (i \neq j)$ | multiplié par -1 |
| $C_i \leftrightarrow C_j (i \neq j)$ | multiplié par -1 |
| $L_i \to \lambda L_i$ | multiplié par $\lambda$ |
| $C_i \to \lambda C_i$ | multiplié par $\lambda$ |
| $L_i \to L_i + \lambda L_j \ (i \neq j)$ | inchangé |
| $C_i \to C_i + \lambda C_j \ (i \neq j)$ | inchangé |

En particulier si $A$ est une matrice ayant une ligne nulle, ou une colonne nulle, ou deux lignes égales, ou deux colonnes égales, on a $\det(A) = 0$.

On a d'autres résultats utiles.

**Proposition C.23.** (calcul du déterminant suivant un développement en lignes) Si $n \geq 2$, $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, alors

$$\det(A) = a_{11}\Delta_{11} - a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13} - \cdots + (-1)^{n-1}a_{1n}\Delta_{1n}$$

où $\Delta_{1i}$ est le déterminant de la matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ obtenue à partir de $A$ en enlevant la ligne 1 et la colonne $i$.

**Proposition C.24.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de la forme (en blocs)

$$A \begin{pmatrix} B & C \\ 0_{s,r} & D \end{pmatrix}$$

où $B \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$, $D \in \mathcal{M}_s(\mathbb{R})$ $r + s = n$, $C \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{R})$ $0_{s,r}$ est la matrice nulle $s \times r$. Alors $\det(A) = \det(B)\det(D)$.

**Exemple C.25.** Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -2 \\ 4 & 7 & -2 & 3 \\ 5 & 6 & -3 & 4 \end{pmatrix}$. On trouve $\det(A) = 316$, et $A$ est donc inversible.

**Exemple C.26.** Dans $\mathbb{R}^3$, soient $u_1 = (1,0,1)$ et $u_2 = (1,-1,0)$. On vérifie qu'ils sont linéairement indépendants. Le théorème de la base incomplète assure qu'il existe $u_3$ tel que $\{u_1, u_2, u_3\}$ soit une base de $\mathbb{R}^3$. Pour trouver concrètement un $u_3$ convenanble, on peut procèder ainsi. Si $u_3 = (a, b, c)$, alors $\{u_1, u_2, u_3\}$ sera une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & b \\ 1 & 0 & c \end{pmatrix}$$

est inversible (par le théorème C.15), si et seulement si $-c+b+a \neq 0$. On peut donc prendre par exemple $u_3 = (1,0,0)$.

# D Applications linéaires

Les applications linéaires sont les outils qui servent à comparer les espaces vectoriels.

## D.1 Définitions et premiers exemples

**Définition D.1.** Soient $E$ et $F$ des espaces vectoriels. Une **application linéaire de $E$ dans $F$** est une application $f : E \longrightarrow F$ telle que
- $f(u+v) = f(u) + f(v), \forall u, v \in E$,
- $f(\lambda u) = \lambda f(u), \forall u \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

**Exemples D.2.** L'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y,z) &\longmapsto x \end{aligned}$$

est une application linéaire.

**Remarque D.3.** $f : E \longrightarrow F$ est une application linéaire si et seulement si elle vérifie la condition suivante

$$f(u+\lambda v) = f(u) + \lambda f(v),\ \forall u, v \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

**Proposition D.4.** Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. On a
1. $f(0_E) = 0_F$,
2. $f(\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n) = \lambda_1 f(u_1) + \cdots + \lambda_n f(u_n), \forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}, \forall u_1, \ldots, u_n \in E$.

**Remarque D.5.** On constate aisément que la composition de deux applications linéaires est encore une application linéaire, et que l'application identité d'un espace vectoriel est linéaire.

**Définition D.6.** Une application linéaire $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est appelée **forme linéaire** sur $E$.
Un **endomorphisme de** $E$ est une application linéaire $E \longrightarrow E$.

**Définition D.7.** Soient $E$ et $F$ des $\mathbb{R}$-ev. Un **isomorphisme** de $E$ vers $F$ est une application linéaire bijective $f : E \longrightarrow F$. On dit que $E$ et $F$ sont **isomorphes** s'il existe un isomorphisme de $E$ vers $F$.

**Exemples D.8.** Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\longmapsto (y,x) \end{aligned}$$

On vérifie que c'est une application linéaire, et qu'elle est bijective (en fait $f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$).

**Remarque D.9.** Si $f : E \longrightarrow F$ est un isomorphisme, alors la bijection inverse $f^{-1} : F \longrightarrow E$ est aussi un isomorphisme.

## D.2 Applications linéaires de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$

**Théorème D.10.** Soit $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.

1. $f$ est linéaire.
2. Il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ telle que $\forall (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, on a

$$f(x_1, \ldots, x_p)^t = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

Si $f$ est linéaire, la matrice $A$, appelée matrice de $f$, est construite de la manière suivante. Notons $e_1, \ldots, e_p$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$. Pour tout $1 \leq i \leq p$, la $i$-ème colonne de $A$ est la matrice colonne $f(e_i)^t$.

**Exemples D.11.**

1. La matrice de l'application identité $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est la matrice identité $I_n$.
2. Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) &\longmapsto (2x - z, 5x + 2y + z, y - z) \end{aligned}$$

Alors on a

$$f(x,y,z)^t = \begin{pmatrix} 2x - z \\ 5x + 2y + z \\ y - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

On en déduit que $f$ est linéaire et que sa matrice est $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire. Alors il existe $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a
$$f(x_1, \dots, x_n) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$$

**Proposition D.12** (Composition des applications linéaires)**.** Soient $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ des applications linéaires. Alors $g \circ f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est linéaire, et si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ sont les matrices respectives de $f$ et $g$, alors $BA \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$ est la matrice de $g \circ f$.

**Corollaire D.13.** Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application linéaire. Alors $f$ est un isomorphisme si et seulement si sa matrice est inversible.

**Exemples D.14.** 1. Considérons les applications linéaires
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y) &\longmapsto (x-y, 2x+y, -y) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) &\longmapsto (x-z, 2y+z) \end{aligned}$$
Leurs matrices respectives sont
$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
et ainsi les matrices respectives de $f \circ g$ et $g \circ f$ sont
$$MN = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad NM = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

2. L'application linéaire
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) &\longmapsto (2x-z, 5x+2y+z, y-z) \end{aligned}$$
de l'exemple précédent est un isomorphisme car sa matrice est inversible.

## D.3 Etude des applications linéaires

On commence par étudier les liens entre sous-espaces vectoriels et applications linéaires.

**Proposition D.15.** Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire.

1. Si $G \subset E$ est un sev de $E$, alors $f(G)$ est un sev de $F$. En particulier, **l'image** de $f$, $\mathrm{Im}(f) = f(E)$ est un sev de $F$.
2. Si $u_1, \dots, u_n \in E$, on a $f(\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_n)) = \mathrm{Vect}(f(u_1), \dots, f(u_n))$.
3. Si $G \subset F$ est un sev de $F$, alors $f^{-1}(G) = \{u \in E \mid f(u) \in G\}$ est un sev de $E$. En particulier $\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(\{0_F\}) = \{u \in E \mid f(u) = 0_F\}$, le **noyau** de $f$, est un sev de $E$.
4. $f$ est injective $\iff \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$ et $f$ est surjective $\iff \mathrm{Im}(f) = F$.

L'étude d'une application linéaire comprend la détermination de son noyau et de son image.

**Exemples D.16.** 1. Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. L'application linéaire

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \end{aligned}$$

a pour noyau

$$H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0\}$$

qui est donc un sev de $\mathbb{R}^n$. Si $(a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$, son image, qui est un sev non nul de $\mathbb{R}$, est donc un sev de dimension $> 0$ et $\leq 1$, donc de dimension 1, et est égale à $\mathbb{R}$.

2. Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x - y + 2z, 2x + z) \end{aligned}$$

Alors on vérifie que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(1, -3, -2)$ et $f$ n'est donc pas injective.

**Théorème D.17.** Soient $E$ et $F$ des $\mathbb{R}$-ev de dimensions respectives $n$ et $p$, et $f : E \to F$ une application linéaire. Soient $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ et $\mathcal{B}' = \{e'_1, \dots, e'_p\}$ des bases de $E$ et $F$ respectivement.

1. $f$ est injective $\iff$ $\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$ est une partie libre de $F$.
2. $f$ est surjective $\iff$ $\forall j \in \{1, \dots, p\}, e'_j \in \mathrm{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$.
3. $f$ est un isomorphisme $\iff$ $\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$ est une base de $F$.

**Corollaire D.18.** Soit $f : E \longrightarrow E$ une application linéaire. Si $E$ est de dimension finie, alors les assertions suivantes sont équivalentes.

1. $f$ est un isomorphisme.
2. $f$ est injective.
3. $f$ est surjective.

**Théorème D.19 (Théorème du rang).** Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire entre espaces vectoriels de dimension finie. On a

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(E)$$

**Exemples D.20.** 1. Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x - y + 2z, 2x + z) \end{aligned}$$

Alors on a $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$, donc $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3 - 1 = 2$, et ainsi $f$ est surjective.

2. Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) &\longmapsto (x-y+2z, 2x+z, x+y-z) \end{aligned}$$

Alors on montre que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$, donc $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3-1 = 2$, et ainsi $f$ n'est pas surjective. Par ailleurs $f(1,0,0) = (1,2,1)$ et $f(0,1,0) = (-1,0,1)$, ces deux vecteurs sont linéairement indépendants, et forment donc une base de $\mathrm{Im}(f)$.

3. Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. L'application linéaire

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \end{aligned}$$

est surjective si $(a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$. Ainsi

$$\mathrm{Ker}(f) = H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0\}$$

est un sev de dimension $n-1$ de $\mathbb{R}^n$.

**Définition D.21.** Le **rang d'une application linéaire** est la dimension de son image. Le **rang d'une matrice** est le rang de l'application linéaire associée.

Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est une matrice, une sous-matrice de $A$ est une matrice obtenue à partir de $A$ en enlevant des lignes ou des colonnes. Le résultat suivant permet de calculer le rang de manière pratique.

**Proposition D.22.** Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est une matrice, alors le rang de $A$ est la taille maximale d'une sous-matrice carrée inversible de $A$. Le rang de $A$ ne change pas si l'on

- ajoute à une ligne un multiple d'une autre ligne ;
- ajoute à une colonne un multiple d'une autre colonne ;
- multiplie une ligne ou une colonne par un scalaire non nul ;
- échange deux lignes ou deux colonnes.

De plus, s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$A = \begin{pmatrix} a & * \cdots * \\ 0 & \\ \vdots & A_1 \\ 0 & \end{pmatrix}$$

pour une matrice $A_1 \in \mathcal{M}_{n-1,r-1}(\mathbb{R})$, alors si $a = 0$ on a $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A_1)$, et si $a \neq 0$, on a $\mathrm{rang}(A) = 1 + \mathrm{rang}(A_1)$.

**Exemple D.23.** Les rangs des matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

sont respectivement 2, 3 et 2.

## D.4 La classification des espaces vectoriels de dimension finie

Le résultat suivant permet de construire facilement des applications linéaires.

**Théorème D.24.** Soient $E$ et $F$ des espaces vectoriels, soient $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de $E$ et $u_1, \dots, u_n \in F$. Il existe alors une unique application linéaire $f : E \longrightarrow F$ telle que

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad f(e_i) = u_i$$

L'application linéaire $f$ associe à $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \in E$ l'élément $\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i \in F$.

**Théorème D.25** (Classification des espaces vectoriels de dimension finie)**.**

1. Si $E$ est un espace vectoriel de dimension $n$, alors $E$ est isomorphe à $\mathbb{R}^n$.
2. Si $n \neq p$, alors les espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ ne sont pas isomorphes.

Ainsi, si $E$ et $F$ sont des espaces vectoriels de dimension finie, alors $E$ et $F$ sont isomorphes si et seulement si $\dim(E) = \dim(F)$

La première partie du théorème de classification est conséquence du théorème précédent, et la deuxième partie est quant à elle conséquence de l'unicité du nombre d'éléments dans une base et du théorème D.17.

Le dernier résultat du chapitre est une caractérisation concrète des sev de $\mathbb{R}^n$.

**Théorème D.26** (Caractérisation des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$)**.** Soit $F$ une partie de $\mathbb{R}^n$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. $F$ est un sev de dimension $p \leq n$ de $\mathbb{R}^n$ ;
2. il existe une matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n-p \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in \mathcal{M}_{n-p,n}(\mathbb{R})$ de rang $n - p$ telle que $F$ est l'ensemble des solutions $(x_1, \dots, x_n)$ du système d'équations

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n-p,1}x_1 + a_{n-p,2}x_2 + \cdots + a_{n-p,n}x_n = 0 \end{cases}$$