Quelques nouvelles déformations du groupe symétrique

Julien Bichon

Université Grenoble I. Institut Fourier, Mathématiques. 100 rue des maths, BP 74, 38402 Saint-Martin d'Hères. E-mail : bichon@ujf-grenoble.fr

Résumé. On présente de nouvelles algèbres de Hopf, qui sont des déformations du groupe symétrique par des 2-cocycles.

Some new deformations of the symmetric group

Abstract. We use the 2-cocycle twisting method to construct new Hopf algebras deformations of the symmetric groups.

La méthode de déformation d'une algèbre de Hopf par un 2-cocycle est issue d'une idée de Drinfeld [3]. Elle a été utilisée avec succès par Enock-Vainerman [4, 9] puis Nikshych [5] pour construire de nouvelles algèbres de Hopf de dimension finie. En particulier, Nikshych construit pour chaque groupe symétrique S_n ($n \geq 4$) une algèbre de Hopf non commutative et non cocommutative possédant une catégorie de représentations monoïdalement équivalente à celle de S_n. Dans cette note on construit une famille de déformations du groupe symétrique qui contient strictement celle de Nikshych. On présente également un énoncé qui généralise un résultat classique de théorie des invariants pour le groupe symétrique.

On se place du point de vue dual de celui de [3, 4, 5, 9] : une algèbre de Hopf est vue comme l'algèbre des fonctions sur un groupe quantique, et on déforme le produit des algèbres de fonctions usuelles. On obtient ainsi pour nos algèbres un description analogue à celle des quantifications des groupes de Lie classiques [6]. Dans ce contexte une représentation est un comodule (à droite).

Notations. On fixe un corps k de caractéristique différente de 2. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit $i \in \{1, .., 2n\}$ (pour simplifier les notations on ne considère que les groupes S_{2n}, voir en fin de note). On pose si i est pair $i' = i - 1$ et $i^* = i/2$; si i est impair $i' = i + 1$ et $i^* = i'/2$. On a $i'^* = i^*$. On considère également une matrice $\mathbf{p} = (p_{ij}) \in M_n(k)$ telle que $p_{ii} = 1$ et $p_{ij} = p_{ji} = \pm 1$ pour tous i et j.

Définition 1 *L'algèbre $\mathcal{O}_{\mathbf{p}}(S_{2n})$ est l'algèbre universelle avec génerateurs $(x_{ij})_{1 \leq i,j \leq 2n}$ et soumise aux relations $(1 \leq i, j, k, l \leq 2n)$:*

$$x_{ij}x_{ik} = \delta_{jk}x_{ij} \quad ; \quad x_{ji}x_{ki} = \delta_{jk}x_{ji} \quad ; \quad \sum_{l=1}^{2n} x_{il} = 1 = \sum_{l=1}^{2n} x_{li} \ . \tag{1}$$

$$\begin{aligned}(3 + p_{i^*j^*})x_{kj}x_{li} + (1 - p_{i^*j^*})x_{kj}x_{li'} + (1 - p_{i^*j^*})x_{kj'}x_{li} + (p_{i^*j^*} - 1)x_{kj'}x_{li'} = \\ (3 + p_{l^*k^*})x_{li}x_{kj} + (1 - p_{l^*k^*})x_{l'i}x_{kj} + (1 - p_{l^*k^*})x_{li}x_{k'j} + (p_{l^*k^*} - 1)x_{l'i}x_{k'j} \ .\end{aligned} \tag{2}$$

Quand $p_{ij} = 1$ pour tous i et j, alors $\mathcal{O}_{\mathbf{p}}(S_{2n})$ n'est autre que l'algèbre des fonctions sur S_{2n} (voir [10]). On vérifie directement que $\mathcal{O}_{\mathbf{p}}(S_{2n})$ est une algèbre de Hopf avec coproduit $\Delta(x_{ij}) = \sum_k x_{ik} \otimes x_{kj}$, counité $\varepsilon(x_{ij}) = \delta_{ij}$ et antipode $S(x_{ij}) = x_{ji}$. Notre but est de montrer le résultat suivant :

Théorème 2 *On a une équivalence de catégories monoïdales entre la catégorie des représentations de dimension finie de S_{2n} et la catégorie des $\mathcal{O}_{\mathbf{p}}(S_{2n})$-comodules de dimension finie.*

On va décrire $\mathcal{O}_{\mathbf{p}}(S_{2n})$ comme la déformation de $\mathcal{O}(S_{2n})$ par un 2-cocycle. Soit H le sous-groupe de S_{2n} engendré par les transpositions $t_i = (2i-1, 2i)$ avec $1 \leq i \leq n$ ($H \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$). À la manière d'Artin-Schelter-Tate [1], on définit un 2-cocycle $\omega_{\mathbf{p}} : H \times H \to k^*$ de la facon suivante : $\omega_{\mathbf{p}}$ est l'unique fonction bimultiplicative telle que $\omega_{\mathbf{p}}(t_i, t_j) = p_{ij}$ pour $i < j$ et $\omega_{\mathbf{p}}(t_i, t_j) = 1$ pour $i \geq j$. Soit $\pi : \mathcal{O}_{\mathbf{p}}(S_{2n}) \to k[H]$ la projection donnée par $\pi(x_{ij}) = 0$ si $i^* \neq j^*$, $\pi(x_{ii}) = (1 + t_{i^*})/2$ et $\pi(x_{ii'}) = (1 - t_{i^*})/2$. En composant l'unique extension linéaire de $\omega_{\mathbf{p}}$ à $k[H] \otimes k[H]$ avec $\pi \otimes \pi$, on obtient un 2-cocycle sur l'algèbre de Hopf $\mathcal{O}(S_{2n})$ (voir [2]), toujours noté $\omega_{\mathbf{p}}$. C'est la méthode de construction de 2-cocycles induits par un sous-groupe abélien de [4]. On peut alors former l'algèbre de Hopf $\mathcal{O}(S_{2n})^{\omega_{\mathbf{p}}}$ ([2]). La coalgèbre sous-jacente est celle de $\mathcal{O}(S_{2n})$ et le produit est défini par :

$$x.y = \sum \omega_{\mathbf{p}}(x_{(1)}, y_{(1)}) \omega_{\mathbf{p}}^{-1}(x_{(3)}, y_{(3)}) x_{(2)} y_{(2)}.$$

Ici on utilise les notations de Sweedler et $\omega_{\mathbf{p}}^{-1}$ est l'inverse de $\omega_{\mathbf{p}}$ pour le produit de convolution (avec $\omega_{\mathbf{p}}^{-1} = \omega_{\mathbf{p}}$). L'algèbre $\mathcal{O}(S_{2n})^{\omega_{\mathbf{p}}}$ est évidemment engendrée par les x_{ij}. On vérifie alors sans difficulté que ces éléments satisfont les relations (1). Pour voir qu'ils satisfont également les relations (2), on peut procéder de la manière suivante : d'après [2], 1.6, la forme bilinéaire $\widehat{\omega_{\mathbf{p}}}(x, y) = \sum \omega_{\mathbf{p}}(y_{(1)}, x_{(1)}) \omega_{\mathbf{p}}^{-1}(x_{(2)}, y_{(2)})$ est un cotressage sur $\mathcal{O}(S_{2n})^{\omega_{\mathbf{p}}}$. On a $\widehat{\omega_{\mathbf{p}}}(x_{ii}, x_{jj}) = \frac{1}{4}(3 + p_{i^*j^*})$; $\widehat{\omega_{\mathbf{p}}}(x_{ii}, x_{jj'}) = \frac{1}{4}(1 - p_{i^*j^*})$; $\widehat{\omega_{\mathbf{p}}}(x_{ii'}, x_{jj}) = \frac{1}{4}(1 - p_{i^*j^*})$; $\widehat{\omega_{\mathbf{p}}}(x_{ii'}, x_{jj'}) = \frac{1}{4}(p_{i^*j^*} - 1)$ et $\widehat{\omega_{\mathbf{p}}}(x_{ij}, x_{kl}) = 0$ si $i^* \neq j^*$ ou $k^* \neq l^*$. Ceci implique que l'opérateur de Yang-Baxter $R_{\mathbf{p}} : V \otimes V \to V \otimes V$ (où V est le k-espace vectoriel standart de base $(e_i)_{1 \leq i \leq 2n}$) défini par

$$R_{\mathbf{p}}(e_i \otimes e_j) = (3 + p_{i^*j^*}) e_j \otimes e_i + (1 - p_{i^*j^*}) e_{j'} \otimes e_i + (1 - p_{i^*j^*}) e_j \otimes e_{i'} + (p_{i^*j^*} - 1) e_{j'} \otimes e_{i'} \quad (3)$$

est un morphisme de $\mathcal{O}(S_{2n})^{\omega_{\mathbf{p}}}$-comodules, et on obtient ainsi les relations (2) dans $\mathcal{O}(S_{2n})^{\omega_{\mathbf{p}}}$ ([6]). On pourrait alors certainement montrer directement que $\mathcal{O}_{\mathbf{p}}(S_{2n}) \cong \mathcal{O}(S_{2n})^{\omega_{\mathbf{p}}}$, et conclure la preuve du théorème 2 par les résultats de [7]. Cependant une description précise de l'équivalence annoncée permet de montrer très facilement la proposition 4 à venir.

Soit $Z_{\mathbf{p}}$ l'algèbre universelle avec générateurs $(z_{ij})_{1 \leq i,j \leq 2n}$ et soumise aux relations (1) et

$$4 z_{kj} z_{li} = (3 + p_{l^*k^*}) z_{li} z_{kj} + (1 - p_{l^*k^*}) z_{l'i} z_{kj} + (1 - p_{l^*k^*}) z_{li} z_{k'j} + (p_{l^*k^*} - 1) z_{l'i} z_{k'j} \ . \quad (4)$$

On veut montrer que Z_p est une $\mathcal{O}(S_{2n}) - \mathcal{O}_{\mathbf{p}}(S_{2n})$ extension bigaloisienne ([7]), ce qui démontrera le théorème 3. Vérifions d'abord que $Z_{\mathbf{p}}$ est non nulle. On peut définir une structure d'algèbre associative sur $\mathcal{O}(S_{2n})$ par $x.y = \sum \omega_{\mathbf{p}}^{-1}(x_{(1)}, y_{(1)}) x_{(2)} y_{(2)}$. Les éléments x_{ij} sont encore des générateurs pour cette structure d'algèbre et on vérifie sans peine qu'ils satisfont les relations (1) et (4) : ainsi $Z_{\mathbf{p}}$ est non-nulle. Il est immédiat que les formules $\alpha(z_{ij}) = \sum_k x_{ik} \otimes z_{kj}$ et $\beta(z_{ij}) = \sum_k z_{ik} \otimes x_{kj}$ munissent $Z_{\mathbf{p}}$ d'une structure d'algèbre $\mathcal{O}(S_{2n})$-comodule à gauche et d'algèbre $\mathcal{O}_{\mathbf{p}}(S_{2n})$-comodule à droite respectivement.

Proposition 3 *L'algèbre $Z_{\mathbf{p}}$ est une $\mathcal{O}(S_{2n}) - \mathcal{O}_{\mathbf{p}}(S_{2n})$ extension bigaloisienne.*

Preuve de la proposition 3. Il s'agit de montrer que les applications (m est la multiplication de $Z_{\mathbf{p}}$)

$$\kappa_1 : Z_{\mathbf{p}} \otimes Z_{\mathbf{p}} \xrightarrow{(1 \otimes m) \circ (\alpha \otimes 1)} \mathcal{O}(S_{2n}) \otimes Z_p \quad \text{et} \quad \kappa_2 : Z_{\mathbf{p}} \otimes Z_{\mathbf{p}} \xrightarrow{(m \otimes 1) \circ (1 \otimes \beta)} Z_{\mathbf{p}} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{p}}(S_{2n})$$

sont bijectives. On a un morphisme d'algèbres $\gamma : \mathcal{O}(S_{2n}) \to Z_{\mathbf{p}} \otimes Z_{\mathbf{p}}^{\mathrm{op}}$ défini par $\gamma(x_{ij}) = \sum_k z_{ik} \otimes z_{jk}$. Alors l'application $(1 \otimes m) \circ (\gamma \otimes 1)$ est réciproque de κ_1. On démontre de manière analogue que κ_2 est bijective. $\square$

La proposition 3 et les résultats 5.5-5.7 de [7] achèvent la preuve du théorème 2. □

Quand $p_{12} = p_{21} = -1$ et $p_{ij} = 1$ pour tous les autres i et j, on retrouve de façon duale la déformation décrite par Nikshych [5], 5.1. En effet le 2-cocycle utilisé dans [5] se prolonge en un 2-cocycle sur H, et est cohomologue à $\omega_{\mathbf{p}}$. Pour s'assurer que la famille construite ici contient bien de nouvelles algèbres, on s'intéresse au groupe $G_{\mathbf{p}} = \mathrm{Hom}_{k-\mathrm{alg}}(\mathcal{O}_{\mathbf{p}}(S_{2n}), k)$. On montre alors que $G_{\mathbf{p}} \cong \{\sigma \in S_{2n} \ / \ p_{\sigma(i)^*\sigma(j)^*} = p_{i^*j^*}$ et $\sigma(i') = \sigma(i)'$ s'il existe j tel que $p_{i^*j^*} = -1\}$. Ainsi pour l'algèbre de Nikshych on a $|G_{\mathbf{p}}| = 8.(2n-4)!$. Supposons maintenant que $n \geq 3$ et soit k un entier compris entre 3 et n. Soit $\mathbf{p} \in M_n(k)$ telle que $p_{1l} = -1 = p_{l1}$ si $l \leq k$ et $p_{ij} = 1$ pour tous les autres i et j : on a $|G_{\mathbf{p}}| = 2.[(2k-2)(2k-4)...2].(2n-2k)!$. Enfin soit $\mathbf{p}$ telle que $p_{ij} = -1$ si $i \neq j$, on trouve alors $|G_{\mathbf{p}}| = 2n.(2n-2)...2$. On obtient ainsi pour $n \geq 3$, n algèbres de Hopf non deux à deux isomorphes. Notons toutefois que l'on peut trouver des matrices distinctes $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$ mais telles que $\mathcal{O}_{\mathbf{p}}(S_{2n}) \cong \mathcal{O}_{\mathbf{q}}(S_{2n})$.

Il est bien connu que l'algèbre des invariants pour l'action naturelle du groupe symétrique sur une algèbre de polynômes est elle-même une algèbre de polynômes. On présente un énoncé qui généralise ce résultat classique pour le groupe quantique $\mathcal{O}_{\mathbf{p}}(S_{2n})$. La preuve utilise le résultat classique et l'équivalence de catégories du théorème 2.

Soit V le comodule fondamental de dimension $2n$ de $\mathcal{O}_{\mathbf{p}}(S_{2n})$. On considère l'algèbre symétrique $\mathrm{Sym}_{\mathbf{p}}(V)$ (dans la catégorie monoïdale symétrique des $\mathcal{O}_{\mathbf{p}}(S_{2n})$-comodules). Cette algèbre s'identifie à l'algèbre universelle avec générateurs $(x_i)_{1\leq i\leq 2n}$ et soumise aux relations

$$4x_ix_j = (3 + p_{i^*j^*})x_jx_i + (1 - p_{i^*j^*})x_{j'}x_i + (1 - p_{i^*j^*})x_jx_{i'} + (p_{i^*j^*} - 1)x_{j'}x_{i'} \ . \qquad (5)$$

La structure d'algèbre $\mathcal{O}_{\mathbf{p}}(S_{2n})$-comodule à droite est donnée par $\delta(x_i) = \sum_k x_k \otimes x_{ki}$. On peut considérer l'algèbre des (co-)invariants $\mathrm{Sym}_{\mathbf{p}}(V)^{\mathcal{O}_{\mathbf{p}}(S_{2n})} = \{x \in \mathrm{Sym}_{\mathbf{p}}(V)/\delta(x) = x \otimes 1\}$.

Proposition 4 *L'algèbre* $\mathrm{Sym}_{\mathbf{p}}(V)^{\mathcal{O}_{\mathbf{p}}(S_{2n})}$ *est une algèbre (commutative) de polynômes.*

Preuve. L'équivalence de catégories monoïdales (notée F) du théorème 2 est construite de la façon suivante (voir [8, 7]). Soit $Z_{\mathbf{p}}$ l'algèbre introduite plus haut. Si X est un $\mathcal{O}(S_{2n})$-comodule (la coaction est notée α_X), on a $F(X) = X \wedge Z_{\mathbf{p}}$ où $X \wedge Z_{\mathbf{p}}$ est le noyau de l'application $\alpha_X \otimes 1 - 1 \otimes \alpha$: $X \otimes Z_{\mathbf{p}} \to X \otimes \mathcal{O}(S_{2n}) \otimes Z_{\mathbf{p}}$. Le foncteur F transforme le S_{2n}-module V en un $\mathcal{O}_{\mathbf{p}}(S_{2n})$-comodule isomorphe à V et par abus de notation on écrit $F(V) = V$. Il transforme l'opérateur de symétrie usuel en l'opérateur de Yang-Baxter $R_{\mathbf{p}}$ (3) et ainsi $F(\mathrm{Sym}(V)) \cong \mathrm{Sym}_{\mathbf{p}}(V)$. Il induit alors un isomorphisme entre les algèbres d'invariants. Le résultat classique permet de conclure. □

Remarques. 1) Considérons les polynômes $R_i = \sum_{l=1}^{2n} x_l^i$, $1 \leq i \leq 2n$. On peut les interprèter comme des morphismes de S_{2n}-modules $k \to V^{\otimes i}$. Alors notre foncteur F "préserve" ces polynômes. Ainsi en caractéristique 0 on a $\mathrm{Sym}_{\mathbf{p}}(V)^{\mathcal{O}_{\mathbf{p}}(S_{2n})} \cong k[R_1, ..., R_{2n}]$.
2) Pour définir le groupe quantique $\mathcal{O}_{\mathbf{p}}(S_{2n+1})$ on utilise encore le sous-groupe abélien H. Pour avoir une description analogue à celle de la définition 1 on doit s'écarter quelque-peu de nos conventions. La matrice $\mathbf{p} = (p_{ij})_{0\leq i,j\leq n}$ appartient désormais à $M_{n+1}(k)$, avec $p_{0i} = p_{i0} = 1$. On pose $(2n+1)^* = 0$, on garde les autres notations et on n'a pas besoin de définir $(2n+1)'$. Alors $\mathcal{O}_{\mathbf{p}}(S_{2n+1})$ est l'algèbre universelle avec générateurs $(x_{ij})_{1\leq i,j\leq 2n+1}$ et soumises aux relations (1) et (2). Le théorème 2 et la proposition 4, adaptés d'une manière évidente, restent valables.
3) Quand $k = \mathbb{C}$, les algèbres de Hopf $\mathcal{O}_{\mathbf{p}}(S_{2n})$ et $\mathcal{O}_{\mathbf{p}}(S_{2n+1})$ sont des algèbres de Kac ([4, 9]) avec involution définie par $x_{ij}^* = x_{ij}$.

Références

[1] M. ARTIN, W. SCHELTER, J. TATE, Quantum deformations of GL_n, Commm. on Pure and Appl. Math. 44, 1991, 879-895.

[2] Y. DOI, Braided bialgebras and quadratic algebras, Comm. Algebra 21(5), 1993, 1731-1749.

[3] V.G. DRINFELD, Quasi-Hopf algebras, Leningrad Math. J. 1, 1990, 1419-1457.

[4] M. ENOCK, L. VAINERMAN, Deformation of a Kac algebra by an abelian subgroup, Comm. Math. Phys. 178, 1996, 571-596.

[5] D. NIKSHYCH, K_0-rings and twisting of finite dimensional semi-simple Hopf algebras, Comm. Algebra 26(1), 1998, 321-342.

[6] N. Yu RESHETHIKIN, L.A. TAKHTAJAN, L.D. FADDEEV, Quantizations of Lie groups and Lie algebras, Leningrad Math. J. 1, 1990, 193-225.

[7] P. SCHAUENBURG, Hopf bigalois extensions, Comm. Algebra 24(12), 1996, 3797-3825.

[8] K.H. ULBRICH, Fiber functors on finite-dimensional comodules, Manuscripta Math. 65, 1989, 39-46.

[9] L. VAINERMAN, 2-cocycles and twisting of Kac algebras, Comm. Math. Phys. 191, 1998, 697-721.

[10] S. WANG, Quantum symmetry groups of finite spaces, Comm. Math. Phys. 195, 1998, 195-211.