CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

JULIEN BICHON

Trivialisations dans les catégories tannakiennes

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 39, nº 4 (1998), p. 243-270.

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1998__39_4_243_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE CATEGORIQUES *Volume XXXIX-4 (1998)*

TRIVIALISATIONS DANS LES CATEGORIES TANNAKIENNES

par Julien BICHON

Abstract. In the paper [D], Deligne gives a representation theorem for a certain kind of symmetric tensor categories, and thus shows that these categories are tannakian categories. His proof uses a trivialisation property: for every object V of such a category $\mathcal{V}$ he builds a ring A_V of Ind($\mathcal{V}$) such that $A_V \otimes V \cong A_V \otimes I^{\dim V}$ (I is the monoidal unit of $\mathcal{V}$ and $\dim V$ is the internal dimension of V). We give a direct construction of the trivialisation rings A_V (that Deligne builds by an iteration). They are categorical versions of the Hopf algebras GL_n. While checking the trivialisation properties, we are led to a theory of determinant and cofactors in an abstract symmetric tensor category.

1 Introduction

Rappelons brièvement les définitions et résultats relatifs aux catégories tannakiennes. Soit k un corps commutatif, fixé dans tout le chapitre.

1.1 Catégories tensorielles

Une *catégorie tensorielle* sur k est la donnée:

(CT1) d'une catégorie $\mathcal{V}$, abélienne et k-linéaire,

(CT2) d'un bifoncteur k-bilinéaire $-\otimes- : \mathcal{V}\times\mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ et d'un objet I de $\mathcal{V}$ tels que $(\mathcal{V}, \otimes, I)$ est une catégorie monoïdale,

(CT3) pour chaque objet V de $\mathcal{V}$, d'un dual à gauche (voir 2.2),

(CT4) on suppose de plus que l'algèbre des endomorphismes de l'unité monoïdale est réduite à k.

1.2 Catégories tannakiennes neutres

Une *catégorie tannakienne neutre* sur k est la donnée d'un couple $(\mathcal{V}, \omega)$ où $\mathcal{V}$ est une catégorie tensorielle sur k (essentiellement petite) et $\omega : \mathcal{V} \longrightarrow \mathrm{Vect}_f(k)$ (k-espaces vectoriels de dimension finie) est un $\otimes$-foncteur k-linéaire exact et fidèle. On dira que ω est un *foncteur fibre neutre* sur $\mathcal{V}$.

Exemple. Soit A une k-algèbre de Hopf. Soit $\mathrm{Co}_f(A)$ la catégorie des A-comodules à droite de dimension finie et soit ω le foncteur oubli $\mathrm{Co}_f(A) \longrightarrow \mathrm{Vect}_f(k)$. Alors $(\mathrm{Co}_f(A), \omega)$ est une catégorie tannakienne neutre.

On a alors (résultat que l'on obtient en combinant [S] et [U], voir aussi [B1], 8.1) :

Théorème 1 *1) Soit $(\mathcal{V}, \omega)$ une catégorie tannakienne neutre sur k. Alors il existe une algèbre de Hopf $\mathrm{End}^\vee(\omega)$ telle que le foncteur ω se factorise en une $\otimes$-équivalence de catégories suivie du foncteur oubli :*

$$\bar{\omega} : \mathcal{V} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Co}_f(\mathrm{End}^\vee(\omega)) \ .$$

2) Si A est une k-algèbre de Hopf et si $\omega : \mathrm{Co}_f(A) \longrightarrow \mathrm{Vect}_f(k)$ est le foncteur oubli, alors on a un isomorphisme d'algèbres de Hopf $\mathrm{End}^\vee(\omega) \xrightarrow{\sim} A$.

(La notation $\mathrm{End}^\vee(\omega)$ est tirée de [JS1], d'où on peut également déduire ce résultat.)

1.3 Catégories tannakiennes

Une *catégorie tannakienne* sur k est la donnée d'un couple $(\mathcal{V}, \omega)$ où $\mathcal{V}$ est une catégorie tensorielle sur k, essentiellement petite, et $\omega : \mathcal{V} \longrightarrow \mathrm{Mod}(B)$ (modules sur une k-algèbre commutative B) est un $\otimes$-foncteur k-linéaire exact et fidèle. On dira que ω est un *foncteur fibre* sur $\mathcal{V}$.

Dans [B1], Bruguières décrit les objets pour lesquels on a un analogue du théorème 1 : ce sont les k-bigébroïdes de Hopf transitifs de base B (voir aussi [D]).

Remarque. La terminologie "catégorie tannakienne" est traditionnellement réservée aux catégories tensorielles symétriques munies d'un foncteur fibre symétrique ([D]). Celles-ci seront appelées *catégories tannakiennes symétriques.*

1.4

Un problème naturel se pose alors : si on se donne une catégorie tensorielle $\mathcal{V}$ sur k, est-elle tannakienne? En d'autres termes peut-on construire un foncteur fibre sur $\mathcal{V}$?

Deligne donne une réponse à ce problème dans le cadre symétrique (commutatif) :

Théorème 2 *Soit $\mathcal{V}$ une catégorie tensorielle symétrique (essentiellement petite) sur un corps k de caractéristique nulle, telle que la dimension interne de chaque objet soit un entier positif. Alors $\mathcal{V}$ possède un foncteur fibre symétrique : elle est tannakienne symétrique.*

Notons que ce résultat n'est plus vrai si la caractéristique de k n'est pas supposée nulle ([GK]). Notons également qu'un résultat de même nature a été obtenu dans [DR], avec une preuve bien différente.

La preuve du théorème 2 est basée sur un phénomène de trivialisation : Deligne construit pour chaque objet V de $\mathcal{V}$ un anneau commutatif A_V de la catégorie des Ind-objets de $\mathcal{V}$ tel que $A_V \otimes V \xrightarrow{\sim} A_V \otimes I^{\dim V}$. La construction de ces anneaux est faite par itérations et peut paraitre obscure. Nous donnons une construction directe des anneaux A_V : ce sont des versions catégoriques des algèbres de Hopf GL_n, où encore des algèbres de fonctions polynomiales sur les variétés $\mathrm{Is}(k^n, V)$.

En montrant que les anneaux ainsi construits vérifient les propriétés de trivialisation, nous serons amenés à une théorie du déterminant et des cofacteurs dans une catégorie tensorielle symétrique.

Le problème sera alors résolu pour les catégories semi-simples, problème déjà difficile ([DR], par. 6).

En revanche, il est moins ardu de définir un quasi-foncteur fibre ([B2]) sur une catégorie tensorielle semi-simple: il suffit de définir un caractère sur la catégorie ([B2]) (ce résultat est prouvé dans [B2], mais est déjà noté dans [DR], par. 6, alors que les quasi-objets n'étaient pas popularisés).

En utilisant notre construction des $A_{\mathcal{V}}$, nous montrons de façon élémentaire que si $\mathcal{V}$ est une catégorie tannakienne symétrique semi-simple sur $\mathbb{C}$, algébrique, elle admet un foncteur fibre symétrique neutre (Le résultat est vrai si on élimine l'hypothèse semi-simple et si on remplace $\mathbb{C}$ par un corps algébriquement clos quelconque, par les résultats généraux de [D]). Ce résultat, combiné avec le théorème 1, montre qu'une telle catégorie est monoïdalement équivalente avec la catégorie des représentations d'un groupe algébrique complexe réductif.

1.5 Plan

Le paragraphe 2 est consacré à divers rappels et constructions bien connues, qui nous ont paru difficiles à éviter.

Dans la partie 3, nous rappelons le principe de construction d'un foncteur fibre dû à Deligne, qui repose sur l'existence d'anneaux de trivialisation. Nous montrons qu'une catégorie tannakienne rigide neutre (ceci correspond à la bijectivité de l'antipode pour l'algèbre de Hopf du théorème 1) possède toujours un anneau de trivialisation.

Dans la partie 4, nous donnons notre construction des anneaux de trivialisation, puis vérifions les propriétés de trivialisation.

Enfin, dans le chapitre 5, nous utilisons notre construction pour établir de façon simple l'existence d'un foncteur fibre symétrique neutre sur certaines catégories tannakiennes symétriques.

Nous ne rappellerons pas certaines définitions, désormais classiques, comme celle de catégorie monoïdale. L'unité d'une catégorie monoïdale sera toujours notée I.

La lettre k désignera un corps commutatif.

2 Rappels

2.1 Foncteurs monoïdaux

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie monoïdale (non supposée stricte). Alors, on peut trouver une catégorie monoïdale stricte monoïdalement équivalente à $\mathcal{C}$. Ce résultat, dû à MacLane, est montré de manière très simple dans [JS2] (1.3 et 1.4). Il nous permet de ne considérer que des catégories monoïdales strictes. En effet, il est équivalent de définir :
- un foncteur fibre sur une catégorie tensorielle non supposée stricte, ou
- un foncteur fibre sur une catégorie tensorielle stricte monoïdalement équivalente.

Rappelons la définition de *foncteur monoïdal*.

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories monoïdales. Un *foncteur monoïdal* (on dira un $\otimes$-foncteur le plus souvent) de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}'$ est la donnée :
- d'un foncteur $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$,
- d'isomorphismes fonctoriels $\widetilde{F}_{X,Y} : F(X) \otimes F(Y) \xrightarrow{\sim} F(X \otimes Y)$,
- d'un isomorphisme $\widetilde{F}_I : I \xrightarrow{\sim} F(I)$,

tels que :

$$\widetilde{F}_{X\otimes Y,Z} \circ (\widetilde{F}_{X,Y} \otimes 1_{F(Z)}) = \widetilde{F}_{X,Y\otimes Z} \circ (1_{F(X)} \otimes \widetilde{F}_{Y,Z}) \ ,$$

$$\widetilde{F}_{I,X} \circ (\widetilde{F}_I \otimes 1_{F(X)}) = 1_{F(X)} = \widetilde{F}_{X,I} \circ (1_{F(X)} \otimes \widetilde{F}_I) \ .$$

2.2 Dualité

Soient $\mathcal{C}$ une catégorie monoïdale et X un objet de $\mathcal{C}$. Un *dual à gauche* pour X est la donnée d'un triplet $(X^\vee, e_X, \delta_X)$ où $X^\vee$ est un objet de $\mathcal{C}$, alors que $e_X : X^\vee \otimes X \to I$ et $\delta_X : I \to X \otimes X^\vee$ sont des flèches de $\mathcal{C}$ vérifiant :

$$(1_X \otimes e_X) \circ (\delta_X \otimes 1_X) = 1_X \ ,$$

$$(e_X \otimes 1_{X^\vee}) \circ (1_{X^\vee} \otimes \delta_X) = 1_{X^\vee} \ .$$

Si un objet X d'une catégorie monoïdale admet un dual à gauche, alors le foncteur $s_X = X \otimes -$ admet un adjoint à gauche, qui est de plus de la forme $s_{X^\vee}$ ([JS1], par. 9). On hérite alors des résultats d'unicité pour les foncteurs adjoints.

Définition. On dit qu'une catégorie monoïdale est *rigide à gauche* si tout objet admet un dual à gauche.

On peut définir de même la notion de dual à droite pour un objet X (voir par exemple [B1]) : le foncteur $s_X = X \otimes -$ admet alors un adjoint à droite de la forme $s_{X'}$, pour un objet X'. On dit alors qu'une catégorie monoïdale est *rigide à droite* si tout objet admet un dual droite.

Définition. Une catégorie monoïdale rigide à droite et à gauche est dite *rigide.*

2.3 Transposée

Soit $f : X \longrightarrow Y$ une flèche dans une catégorie monoïdale rigide à gauche $\mathcal{C}$. On définit la *transposée* de f, notée ${}^t f : Y^\vee \to X^\vee$, ainsi:

$$ {}^t f = (e_Y \otimes 1_{X^\vee}) \circ (1_{Y^\vee} \otimes f \otimes 1_{X^\vee}) \circ (1_{Y^\vee} \otimes \delta_X) \ . $$

Il est clair que ${}^t f$ est l'unique flèche $Y^\vee \longrightarrow X^\vee$ telle que :

$$ e_X \circ ({}^t f \otimes 1_X) = e_Y \circ (1_{Y^\vee} \otimes f) \ . $$

C'est aussi l'unique élément de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y^\vee, X^\vee)$ tel que : $(1_Y \otimes {}^t f) \circ \delta_Y = (f \otimes 1_{X^\vee}) \circ \delta_X$.

Si f et g sont des flèches composables de $\mathcal{C}$, alors ${}^t(g \circ f) = {}^t f \circ {}^t g$.

En fixant pour chaque objet de $\mathcal{C}$ un triplet de dualité, on obtient ainsi un foncteur contravariant dualité, dont la classe d'isomorphisme ne dépend pas du choix des triplets, qui est pleinement fidèle. Si de plus $\mathcal{C}$ est rigide, ce foncteur est une anti-équivalence de catégories.

2.4 Symétrie

Une *symétrie* sur une catégorie monoïdale $\mathcal{C}$ est un isomorphisme fonctoriel $C_{X,Y} : X \otimes Y \longrightarrow Y \otimes X$ tel que :

$$ C_{Y,X} \circ C_{X,Y} = 1_{X \otimes Y} \ , $$

$$(C_{X,Z} \otimes 1_Y) \circ (1_X \otimes C_{Y,Z}) = C_{X \otimes Y,Z} \ .$$

Une catégorie monoïdale munie d'une symétrie sera dite *monoïdale symétrique.*

Remarquons qu'une catégorie monoïdale symétrique qui est rigide à gauche est nécessairement rigide.

Si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont des catégories monoïdales symétriques, un $\otimes$-fonteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ est dit *symétrique* si pour tous objets X et Y de $\mathcal{C}$, on a:

$$F(C_{X,Y}) \circ \widetilde{F}_{X,Y} = \widetilde{F}_{Y,X} \circ C_{F(X),F(Y)} \ .$$

Soit $\mathbb{P}$ la catégorie dont les objets sont les entiers naturels, avec $(m,n) = \emptyset$ si $m \neq n$ et $(n,n) = S_n$, le groupe des permutations d'un ensemble à n éléments.
Alors $\mathbb{P}$ est une catégorie monoïdale symétrique: le produit de deux objets m et n de $\mathbb{N}$ est donné par addition, c'est à dire $m \otimes n = m + n$ et si $\sigma \in S_m$, $\tau \in S_n$, on pose:

$$\sigma \otimes \tau = \begin{pmatrix} 1 & \dots & m & m+1 & \dots & m+n \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(m) & m+\tau(1) & \dots & m+\tau(n) \end{pmatrix} .$$

La symétrie est donnée par les permutations:

$$(m,n) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & m & m+1 & \dots & m+n \\ n+1 & \dots & n+m & 1 & \dots & n \end{pmatrix} .$$

Alors $\mathbb{P}$ est la catégorie monoïdale symétrique libre engendrée par un objet, c'est à dire:

Théorème 3 *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie monoïdale symétrique. Alors pour tout objet X de $\mathcal{C}$, il existe un unique (à isomorphisme près) $\otimes$-foncteur symétrique $P_X : \mathbb{P} \longrightarrow \mathcal{C}$ tel que $P_X(1) = X$.*

La preuve est donnée par exemple dans [JS2], dans le cadre plus général des catégories tressées. On a $P_X(n) = X^{\otimes n}$; si $s_i \in S_n$ est la transposition $(i, i+1)$, $P_X(s_i) = 1_{X^{\otimes i-1}} \otimes C_{X,X} \otimes 1_{X^{\otimes n-i-1}}$; $P_X((m,n)) = C_{X^{\otimes m},X^{\otimes n}}$.

2.5 Trace et dimension

Fixons une catégorie monoïdale symétrique et rigide $\mathcal{C}$. Alors $\mathrm{End}(I)$ est un anneau commutatif.

Nous allons définir, pour chaque objet X, une application :

$$\mathrm{Tr}_X : \mathrm{End}(X) \longrightarrow \mathrm{End}(I)$$

vérifiant les propriétés de la trace usuelle.
Si $f \in \mathrm{End}(X)$, posons :

$$\mathrm{Tr}_X(f) = e_X \circ (1_{X^\vee} \otimes f) \circ C_{X,X^\vee} \circ \delta_X \ .$$

Le résultat d'unicité du dual montre que $\mathrm{Tr}_X(f)$ ne dépend pas du choix de $(X^\vee, e_X, \delta_X)$. On le note simplement $\mathrm{Tr}(f)$. Soit $\dim(X) = \mathrm{Tr}(1_X)$, c'est la *dimension* de X. Voici les principaux résultats :

Si f et g sont des flèches composables dans les deux sens, on a $\mathrm{Tr}(g \circ f) = \mathrm{Tr}(f \circ g)$. En particulier, si $X \tilde{\to} Y$, alors $\dim(X) = \dim(Y)$.
Si $f \in \mathrm{End}(X)$, alors $\mathrm{Tr}(f) = \mathrm{Tr}({}^t f)$, donc $\dim(X) = \dim(X^\vee)$.
Si f et g sont des endomorphismes, alors $\mathrm{Tr}(f \otimes g) = \mathrm{Tr}(f) \circ \mathrm{Tr}(g)$, donc $\dim(X \otimes Y) = \dim(X) \circ \dim(Y)$.
Si $X = X_1 \oplus X_2$, alors $\dim(X) = \dim(X_1) + \dim(X_2)$ (quand la catégorie est linéaire).

Dans $\mathrm{Vect}_f(k)$, ces applications sont les traces et dimensions usuelles, pourvu que $\mathrm{car}(k) = 0$.

2.6 Puissances extérieures

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie monoïdale symétrique abélienne et k-linéaire (c'est à dire vérifiant **CT1** et **CT2**). Si X un objet de $\mathcal{C}$ et n un entier positif, on définit la n-ième *puissance extérieure* de X par :

$$\Lambda^n(X) = X^{\otimes n} / \sum_{\sigma \in S_n} (\mathrm{Im}(\varepsilon(\sigma) P_X(\sigma) - 1)) \ .$$

Supposons k de caractéristique nulle. Pour un objet X, posons pour chaque entier n,

$$A_n(X) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) P_X(\sigma)$$

(notations du théorème dans 2.4). Alors $A_n(X) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X^{\otimes n}, X^{\otimes n})$. C'est une projection (la projection totalement antisymétrique). On vérifiera facilement que $\mathrm{Im}(A_n(X)) \cong \Lambda^n(X)$.

Pour tous objets X et Y de $\mathcal{C}$, on a un isomorphisme:

$$\Lambda^n(X \oplus Y) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{k=0}^{n} \Lambda^k(X) \otimes \Lambda^{n-k}(X) .$$

Les morphismes de sommes directes se définissent naturellement, et il faut ensuite écrire $A_n(X \oplus Y)$ en fonction des $A_k(X) \otimes A_{n-k}(X)$ (voir [DR], relation 3.4).

Supposons maintenant que $\mathcal{C}$ est rigide.
Notons la relation ${}^tA_n(X) = A_n(X^\vee)$, car $\forall \sigma \in S_n$, on a ${}^tP_X(\sigma) = P_{X^\vee}(\sigma^{-1})$.

La dimension d'un objet X est liée avec celle de $\Lambda^n(X)$:

Théorème 4 *Pour tout objet X de $\mathcal{C}$, on a:*

$$\dim(\Lambda^n(X)) = \mathrm{Tr}(A_n(X)) = \frac{\dim X(\dim X - 1)\ldots\ (\dim X - n + 1)}{n!}$$

On peut trouver la preuve dans [DR], où la trace est décomposée, ou dans [D].

2.7 Puissances symétriques

On garde les mêmes hypothèses et notations que dans le numéro précédent. Soient X un objet de $\mathcal{C}$ et n un entier positif. On définit la n-ième *puissance symétrique* de X par:

$$S^n(X) = X^{\otimes n} / \sum_{\sigma \in S_n} (\mathrm{Im}(P_X(\sigma) - 1)) .$$

Si k est de caractéristique nulle, on pose $B_n(X) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} P_X(\sigma)$ et on a $S^n(X) \cong \mathrm{Im}(B_n(X))$.

2.8 Ind-objets

Considérons une catégorie abélienne k-linéaire $\mathcal{C}$ (et essentiellement petite).

On définit la catégorie des Ind-objets de $\mathcal{C}$, notée Ind($\mathcal{C}$) ([AGV]), ainsi : un objet (X) de Ind($\mathcal{C}$) est un foncteur $(X) : \mathbb{I} \to \mathcal{V}$ où $\mathbb{I}$ est une petite catégorie filtrante. On notera $(X) = (X_i)_{i\in\mathbb{I}}$, ou bien $X =$ "$\varinjlim_{i\in\mathbb{I}} X_i$" .

Si $(X) = (X)_{i\in\mathbb{I}}$ et $Y = (Y)_{j\in\mathbb{J}}$ sont des Ind-objets, on pose

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ind}(\mathcal{C})}((X_i)_{i\in\mathbb{I}}, (Y_j)_{j\in\mathbb{J}}) = \varprojlim_{i\in\mathbb{I}} \varinjlim_{j\in\mathbb{J}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, Y_j) \ .$$

On vérifie directement que ceci fait de Ind($\mathcal{C}$) une catégorie.

On a un foncteur pleinement fidèle évident de $\mathcal{C}$ dans Ind($\mathcal{C}$). Si (X) est un Ind-objet de $\mathcal{C}$, alors la limite inductive de (X) est représentable dans Ind($\mathcal{C}$) (par définition des morphismes).

Une autre desciption de Ind($\mathcal{C}$) ([AGV]) : Ind($\mathcal{C}$) est la catégorie dont les objets sont les foncteurs contravariants exacts à gauche de $\mathcal{C}$ dans $\mathrm{Vect}_f(k)$. On sait alors de [Ga] que Ind($\mathcal{C}$) est abélienne.

Prolongement de foncteurs : soit $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ un foncteur. Il se prolonge alors en un foncteur $\mathrm{Ind}(F) : \mathrm{Ind}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathrm{Ind}(\mathcal{C})$ tel que $\mathrm{Ind}(F)((X_i)_{i\in\mathbb{I}}) = (F(X_i))_{i\in\mathbb{I}}$. On sait alors de [AGV] que Ind(F) commute aux limites inductives filtrantes et que si F est exact, il en est de même de Ind(F).

Soit maintenant $\mathcal{V}$ une catégorie tensorielle symétrique sur k (1.1). Le produit tensoriel de $\mathcal{V}$ est alors exact en chaque variable (car $\mathcal{V}$ est autonome) et se prolonge à Ind($\mathcal{V}$). Donc Ind($\mathcal{V}$) est abélienne k-linéaire, est une catégorie monoïdale symétrique (la symétrie de $\mathcal{V}$ se prolonge) dont le produit tensoriel est exact en chaque variable et commute aux limites inductives filtrantes.

2.9 Anneaux

Soit $\mathcal{V}$ une catégorie tensorielle symétrique sur k.

Un *anneau* de Ind($\mathcal{V}$) est un objet A de Ind($\mathcal{V}$) muni d'un produit $m : A \otimes A \to A$ associatif, et d'une unité $u : I \to A$ tels que $m \circ (u \otimes 1_A) = 1_A = m \circ (1_A \otimes u)$. On imagine la définition de morphisme d'anneaux.

On définit alors les *A-modules*: un A-module est un objet M muni d'une flèche $\mu : A \otimes M \to M$ telle que $\mu \circ (u \otimes 1_M) = 1_M$ et $\mu \circ (m \otimes 1_M) = \mu \circ (1_A \otimes \mu)$.

Extension des scalaires: pour tout objet M, on munit $A \otimes M$ d'une structure évidente de A-module.

Quand A est commutatif ($m \circ C_{A,A} = m$), et M et N sont deux A-modules, on pose $M \otimes_A N = \text{coker}\big(1_M \otimes \mu_N - ((\mu_M \otimes 1_N) \circ (C_{M,A} \otimes 1_N))\big)$. Il est facile de vérifier que A-Mod est une catégorie abélienne k-linéaire monoïdale symétrique.

Idéaux: un sous-objet $i : J \to A$ est un idéal (à gauche) si on a un morphisme $\mu_J : A \otimes J \to J$ qui fasse de J un A-module et tel que $m \circ (1_A \otimes j) = i \circ \mu_J$.
Quand A est commutatif, le quotient de A par J peut être muni d'une structure évidente d'anneau.

2.10 Algèbre tensorielle et symétrique

Soit $\mathcal{V}$ une catégorie tensorielle symétrique sur k.

Algèbre tensorielle: pour $V \in ob(\mathcal{V})$, on pose $T(V) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} V^{\otimes n}$ ($V^0 = I$) et on note $\alpha_k : V^{\otimes k} \to T(V)$ les morphismes évidents. La commutation du produit tensoriel aux limites inductives filtrantes permet de définir $m : T(V) \otimes T(V) \to T(V)$ tel que $m \circ \alpha_k \otimes \alpha_j = \alpha_{k+j}$. Alors $T(V)$ est un anneau de Ind($\mathcal{V}$) et $\text{Hom}_{ann}(T(V), B) \tilde{\to} \text{Hom}(V, B)$ pour tout anneau B de Ind($\mathcal{V}$).

Algèbre symétrique: Soit $V \in ob(\mathcal{V})$ et soit $\tau_k : V^{\otimes k} \longrightarrow S^k(V)$ la projection canonique pour tout entier k. Notons d'abord l'existence d'un morphisme $\mu_{k,j}$, $\forall i, j \in \mathbb{N} : S^k(V)) \otimes S^j(V) \to S^{k+j}(V)$ tel que $\mu_{k,j} \circ \tau_k \otimes \tau_j = \tau_{k+j}$.

Posons maintenant
$$\mathrm{Sym}(V) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} S^n(V) \ .$$
et soit $m : \mathrm{Sym}(V)\otimes\mathrm{Sym}(V) \to \mathrm{Sym}(V)$ tel que $m\circ\alpha_k\otimes\alpha_j = \alpha_{k+j}\circ\mu_{k,j}$, où $\alpha_k : S^k(V) \to \mathrm{Sym}(V)$ est le morphisme évident.
Alors $\mathrm{Sym}(V)$ est un anneau commutatif de $\mathrm{Ind}(\mathcal{V})$ et

$$\mathrm{Hom}_{ann}(\mathrm{Sym}(V), B) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(V, B)$$

pour tout anneau commutatif B.

3 Principe de construction d'un foncteur fibre

Rappelons la méthode de Deligne ([D]).

Supposons que k soit de caractéristique nulle et fixons $\mathcal{V}$, une catégorie tensorielle symétrique sur k dont la dimension de chaque objet est un entier positif. Alors un objet de $\mathcal{V}$ est non nul si et seulement si sa dimension est un entier strictement positif ([D], 7.3).

Définition. Soit V un objet non nul de $\mathcal{V}$, de dimension n. On dit qu'un anneau A de $\mathrm{Ind}(\mathcal{V})$ *trivialise* V s'il existe un isomorphisme A-linéaire $A\otimes V \xrightarrow{\sim} A\otimes I^n$.

Supposons que l'on ait un anneau commutatif *non nul* A de $\mathrm{Ind}(\mathcal{V})$ qui trivialise chaque objet de $\mathcal{V}$. Posons $\Gamma_A = \mathrm{Hom}(I, A) = \mathrm{Hom}_A(A, A)$ (c'est une k-algèbre). Définissons un foncteur $\Gamma : \mathcal{V} \longrightarrow \Gamma_A$ -Mod par :

$$\Gamma(V) = \mathrm{Hom}_A(A, A\otimes V) = \mathrm{Hom}(I, A\otimes V) \ .$$

Il est clair que Γ est exact à gauche (le produit tensoriel de $\mathrm{Ind}(\mathcal{V})$ est exact). D'autre part on on a des isomorphismes Γ_A-linéaires (car A trivialise les objets) :

$$\mathrm{Hom}_A(A, A\otimes V) \otimes_{\Gamma_A} \mathrm{Hom}_A(A, A\otimes W) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(A, A\otimes V\otimes W)$$
$$f\otimes_{\Gamma_A} g \longmapsto f\otimes_A g$$

La seule propriété qui manque à Γ pour être un foncteur fibre est l'exactitude à droite (c'est d'ailleurs la plus importante: [B1]). Quand $\mathcal{V}$ est semi-simple (c'est à dire les suites exactes courtes sont scindées), ce n'est plus un problème et nous avons ainsi un foncteur fibre symétrique sur $\mathcal{V}$.

Dans le cas général, Deligne ([D], 7.14) construit un anneau B tel que après extension des scalaires à B, les suites exactes courtes sont scindées et on obtient ainsi un foncteur fibre symétrique en utilisant $A\otimes B$.

Le résultat suivant montre qu'une catégorie tannakienne symétrique neutre (ce qui correspond à la bijectivité de l'antipode pour l'algèbre de Hopf du théorème 1) possède toujours un anneau qui trivialise tous les objets:

Proposition 1 *Soit A une algèbre de Hopf d'antipode inversible (c'est le cas si A est commutative). Alors, pour tout comodule V, il existe un isomorphisme de comodules A-linéaire: $A\otimes V \xrightarrow{\sim} A\otimes V_0$. ($V_0$ est le comodule trivial dont l'espace sous-jacent est V, les structures de A-modules sont données par extension des scalaires). Donc A trivialise tous les objets de $Co_f(A)$.*

Preuve. Suposons V de dimension finie et soient $\alpha_V : V \longrightarrow V\otimes A$ la coaction, $v_1,\dots,v_n$ une base de V et $(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ des éléments de A tels que $\alpha_V(v_i) = \sum_{j=1}^n v_j\otimes a_{ji}$, $\forall i\in\{1,\dots,n\}$. Soit $f = m_A\otimes 1_V \circ 1_A\otimes C_{A,A}\circ 1_A\otimes\alpha_V$. Si $a\in A$, on a $f(a\otimes v_i) = \sum_j aa_{ji}\otimes v_j$, donc f est A-linéaire, et un calcul direct montre que f est un morphisme de comodules: $A\otimes V \longrightarrow A\otimes V_0$.

Soit $g : A\otimes V_0 \longrightarrow A\otimes V$, définie par $g(a\otimes v_i) = \sum_j aS^{-1}(a_{ji})\otimes v_j$: g est inverse de f.

Un A-comodule quelconque est limite inductive de ses sous-comodules de dimension finie, et ainsi on a le résultat. □

Remarque. Si A est une algèbre de Hopf quelconque, on a pour tout comodule V, des isomorphismes de comodules qui sont A-linéaires à droite : $V \otimes A \longrightarrow V_0 \otimes A$. On peut ainsi introduire la notion de trivialisation à droite, moins restrictive que la précédente. Evidemment, quand la catégorie est symétrique, les deux notions de trivialisation sont les mêmes.

4 Trivialisations

On fixe dans tout le chapitre une catégorie tensorielle symétrique $\mathcal{V}$ sur un corps k de caractéristique 0, telle que la dimension de chaque objet soit un entier positif.

Nous voulons trouver un anneau non nul de $\mathrm{Ind}(\mathcal{V})$ qui trivialise tous les objets de $\mathcal{V}$. Nous commençons par construire, pour chaque objet V de $\mathcal{V}$, un anneau commutatif non nul A_V tel que $A_V \otimes V \xrightarrow{\sim} A_V \otimes I^{\dim V}$.

4.1 Notations et préliminaires

Soit A un anneau de $\mathrm{Ind}(\mathcal{V})$. Alors $\mathrm{Hom}(I, A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(A, A)$: si $f \in \mathrm{Hom}(I, A)$, on lui associe le morphisme A-linéaire $m_A \circ 1_A \otimes f$. L'application réciproque associe à $g \in \mathrm{Hom}_A(A, A)$ le morphisme $g \circ u_A$. Si $f \in \mathrm{Hom}(I, A)$, alors $\mathrm{Im}(m_A \circ 1_A \otimes f)$ est un sous A-module de A, c'est-à-dire un idéal de A, que nous noterons $\langle f \rangle$. Alors $A/\langle f \rangle$ vérifie la propriété universelle usuelle.

Produit tensoriel d'anneaux : soit A et B deux anneaux de $\mathrm{Ind}(\mathcal{V})$, on définit un produit sur $A \otimes B$ ainsi : $m_{A\otimes B} = m_A \otimes m_B \circ 1_A \otimes C_{B,A} \otimes 1_B$. L'unité est donnée par $u_{A\otimes B} = u_A \otimes u_B$. Si A, B, C sont des anneaux commutatifs, on a :

$$\mathrm{Hom}_{Ann}(A \otimes B, C) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{Ann}(A, C) \times \mathrm{Hom}_{Ann}(B, C).$$

Fixons maintenant un objet V de $\mathcal{V}$, tel que $n = \dim V > 0$. On sait alors du théorème 2.6 que $\Lambda^n(V)$ est de dimension un et que $\Lambda^k(V) = 0$

si $k > n$. Soit V^n la somme directe de n cories de V. Posons :

$$B_V := \mathrm{Sym}(V^n) \otimes \mathrm{Sym}(\Lambda^n(V^\vee)) .$$

Soient $(\mu_i)_{1\leq i\leq n} : I^n \to I$, et $(\nu_i)_{1\leq i\leq n}$: $I \to I^n$ les morphismes tels que $\sum_{i=1}^n \nu_i \circ \mu_i = 1_{I^n}$, et $\mu_i \circ \nu_j = \delta_{ij} 1_I$.

Soient $(u_i)_{1\leq i\leq n} : V \longrightarrow V^n$, et $(r_i)_{1\leq i\leq n} : V^n \longrightarrow V$ les morphismes tels que $\sum_{i=1}^n u_i \circ r_i = 1_{V^n}$, et $r_i \circ u_j = \delta_{ij} 1_V$.

On notera A_k la projection totalement antisymétrique de $V^{\otimes k}$ (respectivement $A_k^\vee$ celle de $V^{\vee\otimes k}$).

Soit $w_k : \Lambda^k(V) \longrightarrow V^{\otimes k}$, et $\pi_k : V^{\otimes k} \longrightarrow \Lambda^k(V)$
(resp. $w_k^\vee : \Lambda^k(V^\vee) \longrightarrow V^{\vee\otimes k}$, et $\pi_k^\vee$: $V^{\vee\otimes k} \longrightarrow \Lambda^k(V^\vee)$)
les morphismes tels que : $\pi_k \circ w_k = 1_{\Lambda^k(V)}$, et $w_k \circ \pi_k = A_k$ (resp. $\pi_k^\vee \circ w_k^\vee = 1_{\Lambda^k(V^\vee)}$, et $w_k^\vee \circ \pi_k^\vee = A_k^\vee$).

Notons $i_k : (V^n)^{\otimes k} \longrightarrow \mathrm{Sym}(V^n)$ le composé des morphismes

$$(V^n)^{\otimes k} \xrightarrow{\tau_k} S^k(V^n) \xrightarrow{\alpha_k} \mathrm{Sym}(V^n) .$$

On définit de même $j_k : \Lambda^n(V^\vee)^{\otimes k} \longrightarrow \mathrm{Sym}(\Lambda^n(V^\vee))$.

Enfin, soit $\delta_n : I \longrightarrow V^{\otimes n} \otimes V^{\vee\otimes n}$, défini par :
$\delta_n = (1_{V^{\otimes n-1}} \otimes \delta \otimes 1_{V^{\vee\otimes n-1}}) \circ \ldots \circ (1_V \otimes \delta \otimes 1_{V^\vee}) \circ \delta$. On a $\delta_n = \delta_{V^{\otimes n}}$.

4.2 Construction d'un anneau de trivialisation

Définissons $D : I \longrightarrow B_V$ ainsi :

$$D = (i_n \otimes j_1) \circ (u_1 \otimes \ldots \otimes u_n \otimes 1_{\Lambda^n(V^\vee)}) \circ (1_{V^{\otimes n}} \otimes \pi_n^\vee) \circ \delta_n$$

et soit $f = D - u_{B_V}$ ($u_{B_V} = i_0 \otimes j_0$). Soit $A_V := B_V/\langle f\rangle = B_V/\langle D - 1\rangle$.

Nous devons montrer que A_V est non nul. Notons d'abord que D est non nul : si $D = 0$, alors on voit facilement que $(1_{V^{\otimes n}} \otimes \pi_n^\vee) \circ \delta_n = 0$, donc $\mathrm{Tr}(A_n) = 0 = \dim \Lambda^n(V)$, ce qui est contraire à l'hypothèse $\dim V = n$.

On utilise alors le lemme suivant :

Lemme 1 *Soit A un anneau commutatif de Ind($\mathcal{V}$) et soit $g : A \longrightarrow A$ un épimorphisme A-linéaire. Alors g est un isomorphisme.*

Preuve. Soit $i : J \longrightarrow A$ un idéal. Soit h le morphisme A-linéaire obtenu en composant les flèches $J \tilde{\to} A \otimes_A J \xrightarrow{g \otimes_A 1_J} A \otimes_A J \tilde{\to} J$. C'est un épimorphisme A-linéaire par exactitude à droite du produit tensoriel de A-modules. Alors $i \circ h = g \circ i$, et si $J = \mathrm{Ker} g$, on a $i \circ h = 0$ donc $i = 0$.

□

Si maintenant l'anneau A_V est nul, cela signifie que l'application B_V-linéaire déduite de f est un épimorphisme, et donc un isomorphisme en vertu du lemme précédent. En remarquant que B_V est un anneau gradué, un argument de degré montre que c'est impossible (D est non nul de degré strictement positif). Par conséquent A_V est non nul.

4.3

Théorème 5 *Soit V un objet non nul de dimension $n > 0$. Alors on a un isomorphisme A_V-linéaire $A_V \otimes V \xrightarrow{\sim} A_V \otimes I^n$.*

4.4 Construction des morphismes

Dans les parties 4.4 et 4.5, on notera $A_V = A$.

Pour i, $1 \leq i \leq n$, soit $\theta_i : I^n \longrightarrow A \otimes V$ défini ainsi :

$\theta_i = (p \otimes 1_V) \circ (i_{n-1} \otimes j_1 \otimes 1_V) \circ ((-1)^{i-1} u_1 \otimes \ldots \hat{u}_i \ldots \otimes u_n \otimes 1_{\Lambda^n(V^\vee)} \otimes 1_V) \circ C_{V, V^{\otimes n-1} \otimes 1_{\Lambda^n(V^\vee)}} \circ (1_{V^{\otimes n}} \otimes \pi_n^\vee) \circ \delta_n \circ \mu_i$

(où $p : B = B_V \longrightarrow A = A_V$ est le morphisme canonique).

Soit :

$$\Psi = \sum_{i=1}^{n} (m_A \otimes 1_V) \circ (1_A \otimes \theta_i) : A \otimes I^n \longrightarrow A \otimes V.$$

Pour $1 \leq i \leq n$, soit $\lambda_i : V \longrightarrow A \otimes I^n$ défini par : $\lambda_i = (p \circ (i_1 \otimes j_0) \circ u_i) \otimes \nu_i$.

Soit :

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} (m_A \otimes 1_{I^n}) \circ (1_A \otimes \lambda_i) : A \otimes V \longrightarrow A \otimes I^n.$$

Il est clair que Φ et Ψ sont A-linéaires, et nous allons montrer que Φ et Ψ sont réciproques.

4.5

Pour le confort du lecteur, écrivons la preuve de 4.3 dans un cas concret. Nous relions ainsi le déterminant usuel à l'application D et les cofacteurs aux applications θ_i.

Soient G un groupe, et V une représentation de G de dimension $n > 0$, de base $\psi_1, \dots, \psi_n$. Soit V^n la somme directe de n copies de V, et soient $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$ et$(r_i)_{1 \leq i \leq n}$ les morphismes de somme directe. Posons $\psi_{i,j} = u_i(\psi_j)$. L'algèbre $\mathrm{Sym}(V^n)$ s'identifie avec $k[\psi_{i,j}]$. L'espace vectoriel de dimension un $\Lambda^n(V^\vee)$ a pour base l'élément

$$S^* = \sum_{\tau \in S_n} \varepsilon(\tau) \psi^*_{\tau(1)} \otimes \dots \psi^*_{\tau(n)}$$

et G opère sur $\Lambda^n(V^\vee)$ par $g.S^* = \det(g^{-1})S^*$. Ainsi $B_V = \mathrm{Sym}(V^n) \otimes \mathrm{Sym}(\Lambda^n(V^\vee))$ s'identifie donc à $k[\psi_{i,j}, Z]$ avec action de G sur la variable Z donnée par $g.Z = \det(g^{-1})Z$.

Définissons maintenant l'élément invariant D de B_V (4.2). Soit

$$D' = \sum_{\tau \in S_n} \varepsilon(\tau) \psi_{1,\tau(1)} \cdots \psi_{n,\tau(n)} \, .$$

On a $g.D' = \det(g)D'$ et donc $g.D'Z = D'Z$. Soit $D_0 = D'Z$. Vérifions que D_0 coïncide effectivement (à un coefficient 1 près dont nous n'aurons pas à tenir compte) avec le D défini en 4.2 (on a $A_V = B_V/(D-1)$).

Notons tout d'abord que $\pi_n^\vee(\psi^*_{k_1} \otimes \dots \otimes \psi^*_{k_n}) = 0$ si il existe i différent de j tels que $k_i = k_j$ et que $\pi_n^\vee(\psi^*_{\tau(1)} \otimes \dots \otimes \psi^*_{\tau(n)}) = \varepsilon(\tau)S^*$ pour $\tau \in S_n$.

On a $\delta_n(1) = \sum_{k_1, \dots, k_n} \psi_{k_1} \otimes \dots \otimes \psi_{k_n} \otimes \psi^*_{k_n} \otimes \dots \otimes \psi^*_{k_1}$, donc

$$1_{V^{\otimes n}} \otimes \pi_n^\vee \circ \delta_n(1) = (-1)^{E(n/2)} \sum_{\tau \in S_n} \varepsilon(\tau) \psi_{\tau(1)} \otimes \dots \otimes \psi_{\tau(n)} \otimes S^*$$

($E(n/2)$ est la partie entière de $n/2$). Ainsi $D_0 = (-1)^{E(n/2)}D$. Nous ne tenons pas compte du coefficient $(-1)^{E(n/2)}$ en ne le mentionnant pas dans l'écriture du morphisme Ψ de 4.4.

Ecrivons maintenant les morphismes Ψ et Φ de 4.4.

Calculons d'abord $\theta_i(e_j)$. Posons :

$$\beta_{ik} = (-1)^{i-1} \sum_{\tau \in S_n(k)} \varepsilon(\tau)\psi_{1,\tau(2)} \dots \psi_{i-1,\tau(i)}\psi_{i+1,\tau(i+1)} \dots \psi_{n,\tau(n)} ,$$

où $S_n(k)$ est formé des permutations τ telles que $\tau(1) = k$.

Un calcul direct montre que $\theta_i(e_j) = \delta_{ij}(-1)^{E(n/2)} \sum_k \beta_{ik} Z \otimes \psi_k$, et donc $\Psi(1_{A_V} \otimes e_i) = (-1)^{E(n/2)} \sum_k \beta_{ik} Z \otimes \psi_k$.

D'autre part, $\lambda_k(\psi_i) = \psi_{ki} \otimes e_k$, donc $\Phi(1_{A_V} \otimes \psi_i) = \sum_k \psi_{ki} \otimes e_k$.

Les relations $\sum_k \psi_{ki}\beta_{kj} = \delta_{ij}D'$ et $\sum_k \psi_{ik}\beta_{jk} = \delta_{ij}D'$ (formules classiques qui permettent de montrer qu'un matrice est inversible si et seulement si son déterminant est inversible) permettent de voir que Ψ et Φ sont réciproques.

L'objet du lemme à venir dans la preuve de 4.3 est d'établir ces formules.

4.6 Preuve de 4.3

Montrons tout d'abord que $\Phi \circ \Psi = 1_A \otimes 1_{I^n}$.

$$\begin{aligned}
\Phi \circ \Psi &= \sum_{i,j} (m_A \otimes 1_{I^n}) \circ (1_A \otimes \lambda_i) \circ (m_A \otimes 1_V) \circ (1_A \otimes \theta_j) \\
&= \sum_{i,j} (m_A \otimes 1_{I^n}) \circ (m_A \otimes 1_A \otimes 1_{I^n}) \circ (1_A \otimes 1_A \otimes \lambda_i) \circ (1_A \otimes \theta_j) \\
&= \sum_{i,j} (m_A \otimes 1_{I^n}) \circ (1_A \otimes m_A \otimes 1_{I^n}) \circ (1_A \otimes ((1_A \otimes \lambda_i) \circ \theta_j)) \\
&= \sum_{i,j} (m_A \otimes 1_{I^n}) \circ (1_A \otimes ((m_A \otimes 1_{I^n}) \circ (1_A \otimes \lambda_i) \circ \theta_j)) . \quad (*)
\end{aligned}$$

Développons $(1_A \otimes \lambda_i) \circ \theta_j : I^n \longrightarrow A \otimes V \longrightarrow A \otimes A \otimes I^n$.

$(1_A \otimes \lambda_i) \circ \theta_j =$

$$
\begin{aligned}
&= (1_A \otimes (p \circ i_1 \otimes j_0 \circ u_i) \otimes \nu_i) \circ (p \otimes 1_V) \circ (i_{n-1} \otimes j_1 \otimes 1_V) \circ \\
&\quad (-1)^{j-1} u_1 \otimes \dots \hat{u}_j \dots \otimes u_n \otimes 1_{\Lambda^n(V^\vee)} \otimes 1_V \\
&\quad \circ C_{V,V^{\otimes n-1} \otimes \Lambda^n(V^\vee)} \circ (1_{V^{\otimes n}} \otimes \pi_n^\vee) \circ \delta_n \circ \mu_j
\end{aligned}
$$

(faisons passer ν_i à la fin de l'expression)

$$
\begin{aligned}
&=(1_A \otimes (p \circ i_1 \otimes j_0 \circ u_i) \otimes 1_{I^n}) \circ (p \otimes 1_V \otimes 1_{I^n}) \\
&\quad \circ (i_{n-1} \otimes j_1 \otimes 1_V \otimes 1_{I^n}) \\
&\quad \circ (-1)^{j-1} u_1 \otimes \dots \hat{u}_j \dots \otimes u_n \otimes 1_{\Lambda^n(V^\vee)} \otimes 1_V \otimes 1_{I^n} \\
&\quad \circ (C_{V,V^{\otimes n-1} \otimes \Lambda^n(V^\vee)} \otimes 1_{I^n}) \circ (1_{V^{\otimes n}} \otimes \pi_n^\vee \otimes 1_{I^n}) \circ (\delta_n \otimes 1_{I^n}) \circ \nu_i \circ \mu_j
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (p \otimes p \otimes 1_{I^n}) \circ (1_B \otimes i_1 \otimes j_0 \otimes 1_{I^n}) \circ (1_B \otimes u_i \otimes 1_{I^n}) \\
&\quad \circ (i_{n-1} \otimes j_1 \otimes 1_V \otimes 1_{I^n}) \\
&\quad \circ (-1)^{j-1} u_1 \otimes \dots \hat{u}_j \dots \otimes u_n \otimes 1_{\Lambda^n(V^\vee)} \otimes 1_V \otimes 1_{I^n} \\
&\quad \circ (C_{V,V^{\otimes n-1} \otimes \Lambda^n(V^\vee)} \otimes 1_{I^n}) \circ (1_{V^{\otimes n}} \otimes \pi_n^\vee \otimes 1_{I^n}) \circ (\delta_n \otimes 1_{I^n}) \circ \nu_i \circ \mu_j
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (p \otimes p \otimes 1_{I^n}) \circ (i_{n-1} \otimes j_1 \otimes i_1 \otimes j_0 \otimes 1_{I^n}) \circ \\
&\quad (-1)^{j-1} u_1 \otimes \dots \hat{u}_j \otimes \dots u_n \otimes 1_{\Lambda^n(V^\vee)} \otimes u_i \otimes 1_{I^n} \\
&\quad \circ (C_{V,V^{\otimes n-1} \otimes \Lambda^n(V^\vee)} \otimes 1_{I^n}) \circ (1_{V^{\otimes n}} \otimes \pi_n^\vee \otimes 1_{I^n}) \circ \delta_n \otimes 1_{I^n} \circ \nu_i \circ \mu_j.
\end{aligned}
$$

Par définition du produit sur un anneau quotient, on a $m_A \circ (p \otimes p) = p \circ m_B$, donc

$$
\begin{aligned}
&(m_A \otimes 1_{I^n}) \circ (1_A \otimes \lambda_i) \circ \theta_j = \\
&= (p \otimes 1_{I^n}) \circ (m_B \otimes 1_{I^n}) \circ (i_{n-1} \otimes j_1 \otimes i_1 \otimes j_0 \otimes 1_{I^n}) \circ \\
&\quad (-1)^{j-1} u_1 \otimes \dots \hat{u}_j \dots \otimes u_n \otimes 1_{\Lambda^n(V^\vee)} \otimes u_i \otimes 1_{I^n} \\
&\quad \circ (C_{V,V^{\otimes n-1} \otimes \Lambda^n(V^\vee)} \otimes 1_{I^n}) \circ (1_{V^{\otimes n}} \otimes \pi_n^\vee \otimes 1_{I^n}) \circ (\delta_n \otimes 1_{I^n}) \circ \nu_i \circ \mu_j.
\end{aligned}
$$

D'autre part, $m_B \circ (i_{n-1} \otimes j_1 \otimes i_1 \otimes j_0) = (i_n \otimes j_1) \circ (1_{(V^n)^{\otimes n-1}} \otimes C_{\Lambda^n(V^\vee),V^n})$. (cf. fin du paragraphe 2.10).

Donc

$$\begin{aligned}
&(m_A \otimes 1_{I^n}) \circ (1_A \otimes \lambda_i) \circ \theta_j = \\
&\qquad (p \otimes 1_{I^n}) \circ (i_n \otimes j_1 \otimes 1_{I^n}) \\
&\qquad \circ (-1)^{j-1} u_1 \otimes \ldots \hat{u}_j \ldots \otimes u_n \otimes u_i \otimes 1_{\Lambda^n(V^\vee)} \otimes 1_{I^n} \\
&\qquad \circ (1_{V^{\otimes n-1}} \otimes C_{\Lambda^n(V^\vee),V} \otimes 1_{I^n}) \circ (C_{V,V^{\otimes n-1} \otimes \Lambda^n(V^\vee)} \otimes 1_{I^n}) \\
&\qquad \circ (1_{V^{\otimes n}} \otimes \pi_n^\vee \otimes 1_{I^n}) \circ (\delta_n \otimes 1_{I^n}) \circ \nu_i \circ \mu_j.
\end{aligned}$$

Comme $i_n = i_n \circ C_{(V^n)^{\otimes n-1},V^n}$, on a :

$$\begin{aligned}
&(m_A \otimes 1_{I^n}) \circ (1_A \otimes \lambda_i) \circ \theta_j = \\
&\qquad (p \otimes 1_{I^n}) \circ (i_n \otimes j_1 \otimes 1_{I^n}) \\
&\qquad \circ (-1)^{j-1} u_i \otimes u_1 \otimes \ldots \hat{u}_j \ldots \otimes u_n \otimes 1_{\Lambda^n(V^\vee)} \otimes 1_{I^n} \\
&\qquad \circ (C_{V^{\otimes n-1},V} \otimes 1_{\Lambda^n(V^\vee)} \otimes 1_{I^n}) \circ (1_{V^{\otimes n-1}} \otimes C_{\Lambda^n(V^\vee),V} \otimes 1_{I^n}) \\
&\qquad \circ (C_{V,V^{\otimes n-1} \otimes \Lambda^n(V^\vee)} \otimes 1_{I^n}) \circ (1_{V^{\otimes n}} \otimes \pi_n^\vee \otimes 1_{I^n}) \circ (\delta_n \otimes 1_{I^n}) \\
&\qquad \circ \nu_i \circ \mu_j.
\end{aligned}$$

Or $(C_{V^{\otimes n-1},V} \otimes 1_{\Lambda^n(V^\vee)}) \circ (1_{V^{\otimes n-1}} \otimes C_{\Lambda^n(V^\vee),V}) \circ C_{V,V^{\otimes n-1} \otimes \Lambda^n(V^\vee)} = 1_{V^{\otimes n}} \otimes 1_{\Lambda^n(V^\vee)}$, donc on a :

$$\begin{aligned}
&(m_A \otimes 1_{I^n}) \circ (1_A \otimes \lambda_i) \circ \theta_j = \\
&\qquad (p \otimes 1_{I^n}) \circ (i_n \otimes j_1 \otimes 1_{I^n}) \\
&\qquad \circ (-1)^{j-1} u_i \otimes u_1 \otimes \ldots \hat{u}_j \ldots \otimes u_n \otimes 1_{\Lambda^n(V^\vee)} \otimes 1_{I^n} \\
&\qquad \circ (1_{V^{\otimes n}} \otimes \pi_n^\vee \otimes 1_{I^n}) \circ (\delta_n \otimes 1_{I^n}) \circ \nu_i \circ \mu_j. \quad (**)
\end{aligned}$$

Nous avons maintenant besoin du résultat suivant :

Lemme 2 *On a les formules de Cramer suivantes :*
1) pour tout i, avec $1 \leq i \leq n$:

$$\begin{aligned}(i_n \otimes j_1) \circ ((-1)^{i-1} u_i \otimes u_1 \otimes ..\hat{u}_i.. \otimes u_n \otimes 1_{\Lambda^n(V^\vee)}) \circ (1_{V^{\otimes n}} \otimes \pi_n^\vee) \circ \delta_n \\ = (i_n \otimes j_1) \circ (u_1 \otimes \ldots \otimes u_n \otimes 1_{\Lambda^n(V^\vee)}) \circ (1_{V^{\otimes n}} \otimes \pi_n^\vee) \circ \delta_n, \\ = D \;;\end{aligned}$$

2) si $i \neq j$:
$(i_n \otimes j_1) \circ ((-1)^{j-1} \circ u_i \otimes u_1 \otimes \ldots \hat{u}_j \ldots \otimes u_n \otimes 1_{\Lambda^n(V^\vee)}) \circ (1_{V^{\otimes n}} \otimes \pi_n^\vee) \circ \delta_n = 0.$

Preuve du lemme.
1) Soit $\sigma_i \in S_n$ la permutation : $\sigma_i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & i & \ldots & n \\ i & 1 & \ldots & i-1 & \ldots & n \end{pmatrix}$,
c'est à dire $\sigma_i = s_{i-1} \ldots s_1$ où $s_k = (k, k+1)$. Alors $i_n = i_n \circ P_{V^n}(\sigma_i)$ et

$$P_{V^n}(\sigma_i) \circ (u_i \otimes u_1 \otimes \ldots \hat{u}_i \ldots \otimes u_n) = (u_1 \otimes \ldots \otimes u_n) \circ P_V(\sigma_i),$$

donc

$$\begin{aligned}(i_n \otimes j_1) \circ ((-1)^{i-1} u_i \otimes u_1 \otimes ..\hat{u}_i.. \otimes u_n \otimes 1_{\Lambda^n(V^\vee)}) \circ (1_{V^{\otimes n}} \otimes \pi_n^\vee) \circ \delta_n \\ = (i_n \otimes j_1) \circ ((-1)^{i-1} u_1 \otimes \ldots \otimes u_n \otimes 1_{\Lambda^n(V^\vee)}) \circ (P_V(\sigma_i) \otimes 1_{\Lambda^n(V^\vee)}) \\ \circ (1_{V^{\otimes n}} \otimes \pi_n^\vee) \circ \delta_n.\end{aligned}$$

D'autre part, $\pi_n^\vee = \pi_n^\vee \circ A_n^\vee$ entraine

$$(1_{V^{\otimes n}} \otimes \pi_n^\vee) \circ \delta_n = (1_{V^{\otimes n}} \otimes \pi_n^\vee) \circ (1_{V^{\otimes n}} \otimes A_n^\vee) \circ \delta_n = (A_n \otimes \pi_n^\vee) \circ \delta_n \;,$$

car ${}^tA_n = A_n^\vee$.
Enfin, pour toute permutation $\sigma \in S_n$, on a $P_V(\sigma) \circ A_n = \varepsilon(\sigma) A_n$, et comme $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{i-1}$, on a prouvé 1).

2) On a :

$$
\begin{aligned}
&(i_n \otimes j_1) \circ (u_i \otimes u_1 \ldots \hat{u}_j \ldots \otimes u_n \otimes 1_{\Lambda^n(V^\vee)}) \circ (A_n \otimes 1_{\Lambda^n(V^\vee)}) = \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)(i_n \otimes j_1) \circ (u_i \otimes u_1 \ldots \hat{u}_j \ldots \otimes u_n \otimes 1_{\Lambda^n(V^\vee)}) \circ \\
&\qquad (P_V(\sigma) \otimes 1_{\Lambda^n(V^\vee)}) \\
&= \Big(\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) i_n \circ (u_i \otimes u_1 \otimes \ldots \hat{u}_j \ldots \otimes u_n) \circ P_V(\sigma)\Big) \otimes j_1.
\end{aligned}
$$

Fixons $\sigma \in S_n$ et si $i < j$, soit $\alpha_i = (1, i+1)$. Alors $i_n \circ P_{V^n}(\alpha_i) = i_n$ et $P_{V^n}(\alpha_i) \circ (u_i \otimes u_1 \otimes \ldots \hat{u}_j \ldots \otimes u_n) = (u_i \otimes u_1 \otimes \ldots \hat{u}_j \ldots \otimes u_n) \circ P_{V^n}(\alpha_i)$, donc

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon(\sigma) i_n \circ (u_i \otimes u_1 \otimes \ldots \hat{u}_j \ldots \otimes u_n) \circ P_V(\sigma) \\
&\qquad = \varepsilon(\sigma) i_n \circ (u_1 \otimes \ldots \hat{u}_j \ldots \otimes u_n) \circ P_V(\alpha_i \circ \sigma).
\end{aligned}
$$

À chaque terme x_σ de la somme $\sum_{\sigma \in S_n}$ correspond donc un terme $x_{\sigma'}$ tel que $x_\sigma = -x_{\sigma'}$, ce qui montre que cette somme est nulle.
Si $i > j$, on prend $\alpha_i = (1, i)$ et on obtient le même résultat.

□

Ce lemme et l'expression (**) montrent donc que :
1) si $i \neq j$, on a $(m_A \otimes 1_{I^n}) \circ (1_A \otimes \lambda_i) \circ \theta_j = 0$;
2) $(m_A \otimes 1_{I^n}) \circ (1_A \otimes \lambda_i) \circ \theta_i = \big((p \circ D) \otimes 1_{I^n}\big) \circ \nu_i \circ \mu_i = (u_A \otimes 1_{I^n}) \circ \nu_i \circ \mu_i$.

Alors l'expression (*) montre quant à elle que

$$
\begin{aligned}
\Phi \circ \Psi &= \sum_i (m_A \otimes 1_{I^n}) \circ \big(1_A \otimes (u_A \otimes 1_{I^n} \circ \nu_i \circ \mu_i)\big) \\
&= \sum_i (m_A \otimes 1_{I^n}) \circ (1_A \otimes u_A \otimes 1_{I^n}) \circ \nu_i \circ \mu_i \\
&= \sum_i 1_A \otimes (\nu_i \circ \mu_i) = 1_A \otimes 1_{I^n} .
\end{aligned}
$$

On finit maintenant la preuve de 4.3 de la même façon que Deligne en ([D], 7.17):

$$\Phi \circ \Psi = 1_A \otimes 1_{I^n} \quad \text{entraine} \quad A \otimes V \xrightarrow{\sim} N \oplus (A \otimes I^n)$$

où N est un A-module.

Rappelons que A-Mod est une catégorie monoïdale symétrique k-linéaire abélienne, et donc le début du paragraphe 2.6 s'applique: pour tout A-module M et tout entier k, on peut considérer $\Lambda^k_A(M)$ et la formule de la somme directe de 2.6 est valable. On a $\Lambda^k_A(A \otimes V) \simeq A \otimes \Lambda^k(V)$. Alors N est facteur direct de $\Lambda^{n+1}_A(A \otimes V) \simeq A \otimes \Lambda^{n+1}(V) = 0$ car $\dim V = n$, donc $N = 0$.

4.7

Nous sommes maintenant capables de construire un anneau qui trivialise tous les objets de la catégorie tensorielle symétrique $\mathcal{V}$, supposée essentiellement petite.

Soit $A := \bigotimes_{V \in ob(\mathcal{V})} A_V$ (soit $\mathbb{I}$ l'ensemble des parties finies de $ob(\mathcal{V})$, et soit $i \in \mathbb{I}$, $i = \{W_{i_1}, \ldots, W_{i_j}\}$, on pose alors

$$A_i = A_{W_1} \otimes \ldots \otimes A_{W_k} \quad \text{et} \quad A = \varinjlim_{i \in \mathbb{I}} A_i).$$

On vérifie directement que A est un anneau de $\mathrm{Ind}(\mathcal{V})$ et que pour tout objet V de $\mathcal{V}$, on a $A \otimes V \xrightarrow{\sim} A \otimes I^{\dim V}$.

Ainsi ce résultat, combiné avec le paragraphe 3, assure qu'une catégorie tensorielle symétrique semi-simple (essentiellement petite) sur un corps de caractéristique nulle dont la dimension de chaque objet est un entier positif est tannakienne symétrique.

4.8 Le cas général

Expliquons très brièvement comment on obtient le théorème de Deligne dans le cas général. Nous avons déjà dit en 3 qu'il suffit, après trivialisation, de construire un anneau non nul de $\mathrm{Ind}(\mathcal{V})$ tel que après extension des scalaires, les suites exactes courtes soient scindées. Un argument similaire à celui utilisé en 4.7 ramène ce problème à construire, pour chaque suite exacte courte, un anneau non nul tel que cette suite exacte soit localement scindée (c'est à dire après extension des scalaires). Deligne montre alors dans la preuve de 7.14 ([D]) qu'il suffit de trouver une section locale à tout épimorphisme $f : V \longrightarrow I$. Soit alors l'anneau :

$$A = \mathrm{Sym}(V^\vee)/\langle {}^t f - u \rangle$$

(où u est l'unité de $\mathrm{Sym}(V^\vee)$). Deligne (7.12, [D]) note cet anneau $\mathrm{Sym}(V^\vee) \otimes_{\mathrm{Sym}(I)} I$. Un argument de même nature que celui utilisé en 4.2 montre que A est non nul. Notons $j : V^\vee \longrightarrow A$ le morphisme évident. Alors l'application A-linéaire $g : A \longrightarrow A \otimes V$, définie par :

$$g = (m_A \otimes 1_V) \circ (1_A \otimes j \otimes 1_V) \circ (1_A \otimes (C_{V,V^\vee} \circ \delta_V)),$$

vérifie $(1_A \otimes f) \circ g = 1_A$. Ainsi on a le résultat désiré.

5 Foncteurs fibre neutres

On sait de [S] ou [D] qu'une catégorie tannakienne symétrique algébrique (voir 5.2) admet un foncteur fibre symétrique à valeurs dans $\mathrm{Vect}_f(k')$, ou $k \subset k'$ est une extension finie.

Nous allons obtenir une preuve simple, dans un cas particulier, de ce résultat important (sous une forme un peu plus faible, mais largement suffisante pour couvrir le cas $k = \mathbb{C}$).

5.1

Rappelons d'abord une construction classique.

Soit $\mathcal{V}$ une catégorie tannakienne sur un corps k avec foncteur fibre $\omega : \mathcal{V} \longrightarrow \mathrm{Mod}(A)$. Rappelons ([D], [B1]) que ω est nécessairement à valeurs dans les A-modules projectifs de type fini. Si J est un idéal de A, en composant ω avec le foncteur $\mathrm{Mod}(A) \longrightarrow \mathrm{Mod}(A/J)$, $M \longrightarrow M/JM$, on obtient un nouveau foncteur fibre $\mathcal{V} \longrightarrow \mathrm{Mod}(A/J)$. En prenant un idéal maximal, on voit ainsi qu'une catégorie tannakienne sur k admet nécessairement un foncteur fibre à valeurs dans $\mathrm{Vect}_f(K)$ où K est une extension de corps de k.

5.2 Catégories tensorielles algébriques

Soient $\mathcal{V}$ une catégorie tensorielle sur k et V un objet de $\mathcal{V}$. On dit que V est un *$\otimes$-générateur* si tout objet de $\mathcal{V}$ est sous-quotient d'une somme $V^{\otimes n} \otimes (V^\vee)^{\otimes m}$ pour des entiers n et m.

Une catégorie tensorielle possédant un $\otimes$-générateur sera dite *algébrique.*

5.3

En utilisant les anneaux de trivialisation, on obtient le résultat suivant :

Proposition 2 *Soit $\mathcal{V}$ une catégorie tannakienne symétrique algébrique semi-simple sur un corps k de caractéristique nulle non dénombrable. Alors $\mathcal{V}$ admet un foncteur fibre à valeurs sur les espaces vectoriels de dimension finie sur une extension algébrique de k.*

Preuve. Soit X un $\otimes$-générateur. Quitte à prendre $X \oplus X^\vee$, on peut supposer que $X \xrightarrow{\sim} X^\vee$. Notons $\mathcal{V}_X$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{V}$ dont les objets sont les $X^{\otimes n}$, $n \in \mathbb{N}$. Un foncteur fibre symétrique préserve les dimensions, nous sommes ainsi dans les hypothèses du paragraphe 4.

Soit A_X l'anneau de trivialisation de X. On a alors un $\otimes$-foncteur $\Gamma : \mathcal{V}_X \longrightarrow \Gamma_{A_X}$-Mod défini comme dans la partie 3. Il s'agit alors, pour montrer que $\Gamma : \mathcal{V} \longrightarrow \Gamma(A_X)$-mod est un foncteur fibre, de construire pour tous objets Y et Z de $\mathcal{V}$, des isomorphismes

$$\Gamma_{A_X}(Y) \otimes_{\Gamma_{A_X}} \Gamma_{A_X}(Z) \xrightarrow{\sim} \Gamma_{A_X}(Y \otimes Z)$$

satisfaisant les conditions de 2.1. Utilisons maintenant un raisonnement similaire à [DR], 6.5.

Soit Y un objet de C. Alors $Y \xrightarrow{\sim} \oplus_i Y_i$ où Y_i est un sous objet de $X^{\otimes s_i}$, pour un entier s_i. On a alors pour tout i des morphismes $u_i^Y : Y \longrightarrow X^{\otimes s_i}$, $p_i^Y : X^{\otimes s_i} \longrightarrow Y$ tels que $1_Y = \sum_i p_i^Y \circ u_i^Y$, $u_i^Y \circ p_j^Y = 0$ si $i \neq j$, $u_i^Y \circ p_i^Y \circ u_i^Y = u_i^Y$ $\forall i$. On pose:

$$\widetilde{\Gamma}_{Y,Z} = \sum_{i,j} \Gamma(p_i^Y \otimes p_j^Z) \circ \widetilde{\Gamma}_{s_i,t_j} \circ \Gamma(u_i^Y) \otimes \Gamma(u_j^Z) .$$

Un calcul direct montre que ceci définit un foncteur fibre sur les Γ_{A_X}-modules.

L'algèbre Γ_{A_X} est de dimension dénombrable sur k , donc un idéal maximal de Γ_{A_X} fournit un foncteur fibre sur un corps K de dimension dénombrable sur k. Alors K est algébrique sur k, car k étant non dénombrable, le corps $k(X)$ est de dimension non dénombrable sur k (les $\{\frac{1}{(X-a)}\ a \in K\}$ forment une famille libre), ce qui montre que K ne contient pas d'élément transcendant. □

Corollaire 1 *Soit $\mathcal{V}$ une catégorie tannakienne symétrique algébrique semi-simple sur un corps k de caractéristique nulle, non dénombrable et algébriquement clos. Alors $\mathcal{V}$ est neutre, c'est-à-dire il existe un foncteur fibre neutre $\omega : \mathcal{V} \longrightarrow \mathrm{Vect}_f(k)$.*

5.4

En combinant le théorème 1, le paragraphe 4 et le dernier corollaire, on a finalement le résultat suivant (on pourra consulter [D] pour l'unicité, mais la preuve est très simplifiée dans le cas semi-simple) :

Théorème 6 *Soit $\mathcal{V}$ une catégorie tensorielle symétrique sur $\mathbb{C}$. Supposons que $\mathcal{V}$ est algébrique, semi-simple et que la dimension de chaque objet est un entier positif. Alors il existe un foncteur fibre symétrique (unique à isomorphisme fonctoriel monoïdal près) $\omega : \mathcal{V} \longrightarrow \mathrm{Vect}_f(\mathbb{C})$, et un groupe algébrique réductif complexe G, unique à isomorphisme près, tels que ω se factorise en une $\otimes$-équivalence suivie du foncteur oubli*

$$\bar{\omega} : \mathcal{V} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Rep}(G) \ .$$

Concluons par une remarque. Dans les hypothèses du théorème précédent on peut reconstruire le groupe G sans utiliser le foncteur fibre ω (dont on doit toutefois connaitre l'existence) : voir [Ka], par. 11. Là encore l'algèbre des fonctions polynomiales sur la variété $\mathrm{Is}(k^n, V)$ joue un rôle essentiel.

Références

[AGV] M. ARTIN, A. GROTHENDIECK, J.L. VERDIER, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas (SGA4)*, Lecture Notes in Math. 269, Springer-Verlag, 1972.

[B1] A. BRUGUIÈRES, *Théorie tannakienne non commutative*, Comm. Algebra 22 (14), 5817–5860, 1994.

[B2] A. BRUGUIÈRES, *Dualité tannakienne pour les quasi-groupoïdes quantiques*, Comm. Algebra 25 (3), 737-769, 1997.

[D] P. DELIGNE, *Catégories tannakiennes*, Grothendieck Festchrift, Vol. II, 111-195, Birkhaüser, 1990.

[DR] S. DOPLICHER, J.E. ROBERTS, *A new duality theory for compact groups*, Invent. Math. 98, 157–218, 1989.

[Ga] P. GABRIEL, *Des catégories abéliennes*, Bull. Soc. Math. France 90, 323–448, 1962.

[GK] S. GELFAND, D. KAZHDAN, *Examples of tensor categories*, Invent. Math. 109, 595-617, 1992.

[JS1] A. JOYAL, R. STREET, *An introduction to Tannaka duality and quantum groups*, Lecture Notes in Math. 1488, 413–492, Springer-Verlag, 1991.

[JS2] A. JOYAL, R. STREET, *Braided tensor categories*, Adv. Math. 102, 20–78, 1993.

[Ka] N. KATZ, *Exponential sums and differential equations*, Ann. of Math. Studies 124, Princeton University Press, 1990.

[S] N. SAAVEDRA RIVANO, *Catégories tannakiennes*, Lecture Notes in Math. 265, Springer-Verlag, 1972.

[U] K.H. ULBRICH, *On Hopf algebras and rigid monoidal categories*, Israel J. Math. 72, 252–256, 1990.

Laboratoire AGATA
Département des sciences mathématiques, case 051
Université Montpellier II, place Eugène Bataillon
34095 Montpellier cedex 5
e-mail : bichon@math.univ.montp2.fr