Mathématiques optimales

Atelier Math C2+

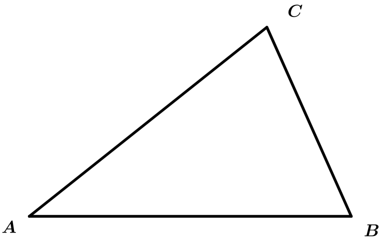
Nicolas Billerey

Laboratoire de mathématiques Blaise Pascal
Université Clermont Auvergne

Jeudi 1er juillet 2021

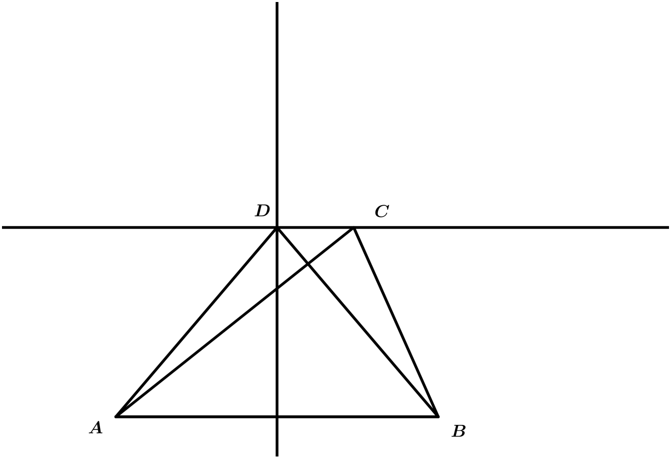
Sommaire

Triangle isocèle d'aire donnée



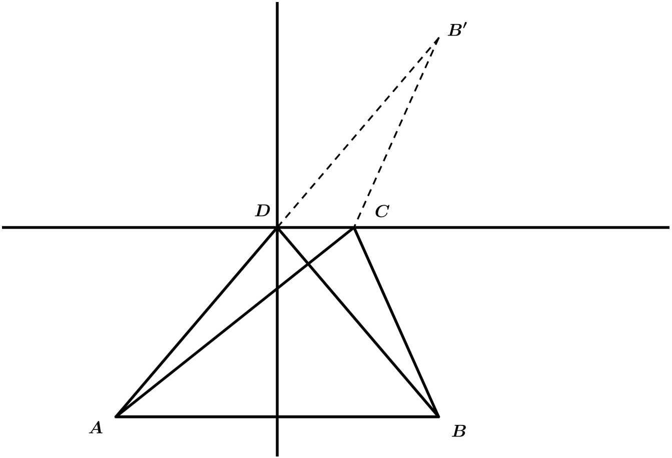
Triangle isocèle d'aire donnée

Les triangles ABC et ABD ont même aire.



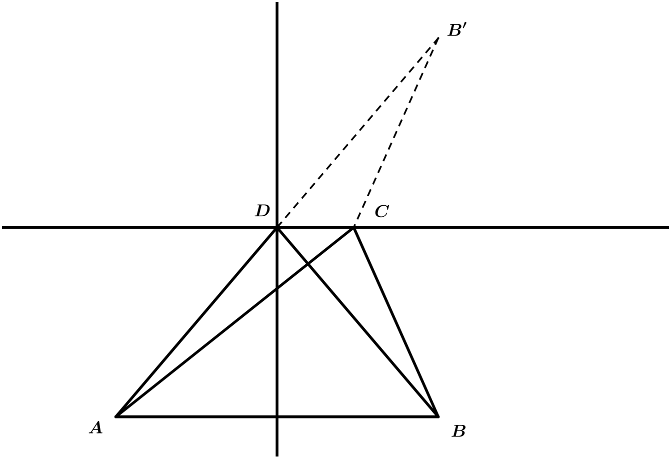
Triangle isocèle d'aire donnée

Les triangles ABC et ABD ont même aire.
Le point B' est le symétrique de B par rapport à la droite (CD).



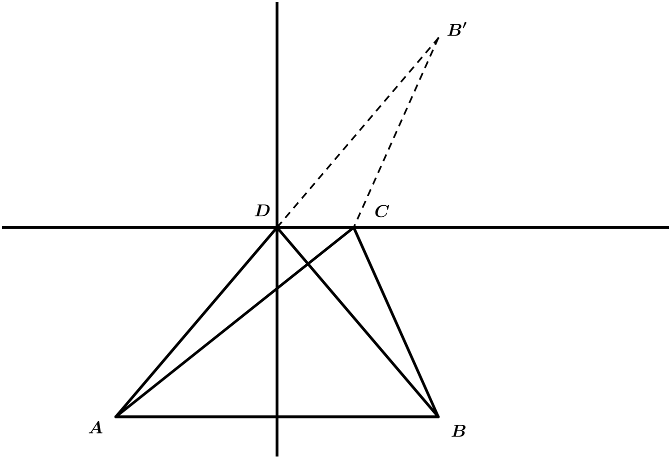
Triangle isocèle d'aire donnée

Les triangles ABC et ABD ont même aire.
Les points A, D et B' sont alignés.

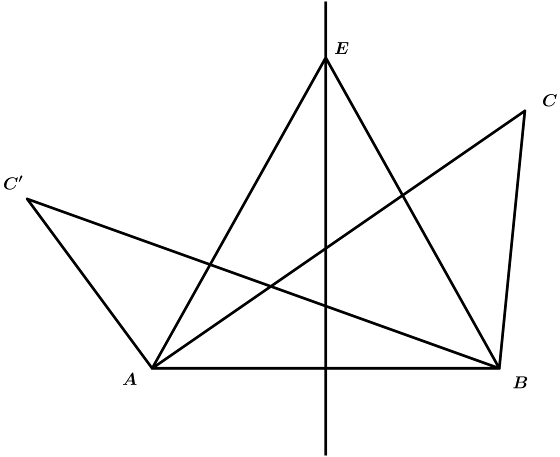


Triangle isocèle d'aire donnée

Les triangles ABC et ABD ont même aire.
Les points A, D et B' sont alignés.
Le périmètre du triangle ABD est inférieur au périmètre du triangle ABC.

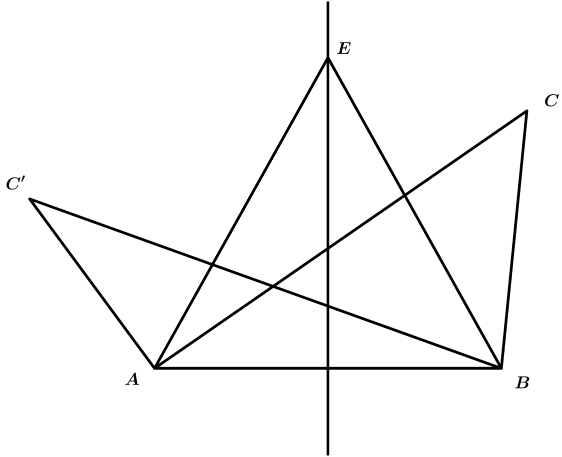


Triangles isopérimétriques de même base



Triangles isopérimétriques de même base

Parmi tous les triangles de base $[AB]$ et de même périmètre, le triangle isocèle est celui qui a la plus grande aire.



Triangles isopérimétriques

Question

Parmi tous les triangles de même périmètre, y en a-t-il un qui a une aire plus grande que tous les autres ?

Triangles isopérimétriques

Question

Parmi tous les triangles de même périmètre, y en a-t-il un qui a une aire plus grande que tous les autres ?

Théorème

Parmi tous les triangles de même périmètre, le **triangle équilatéral** est celui qui a la plus grande aire. Et c'est le seul.

Triangles isopérimétriques

Question

Parmi tous les triangles de même périmètre, y en a-t-il un qui a une aire plus grande que tous les autres ?

Théorème

Parmi tous les triangles de même périmètre, le **triangle équilatéral** est celui qui a la plus grande aire. Et c'est le seul.

Attention !

Dans ce résultat, il y a deux assertions : l'une affirme l'**existence** d'un tel triangle, l'autre son **unicité**.

Polygones isopérimétriques

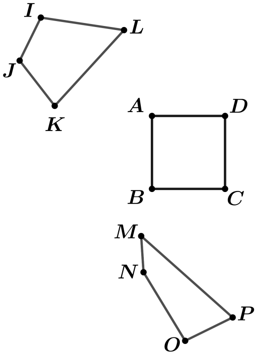


Figure – Quadrilatères isopérimétriques

Polygones isopérimétriques

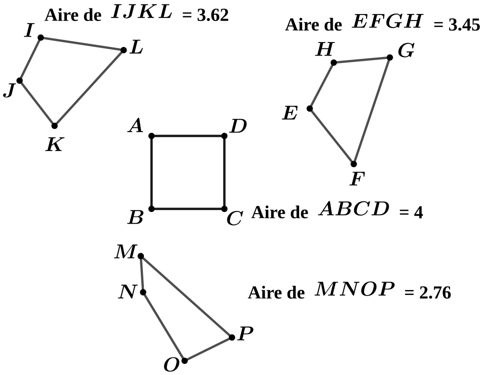


Figure – Quadrilatères isopérimétriques : le carré est celui qui a la plus grande aire

Polygones isopérimétriques

Théorème

Parmi tous les polygones à n côtés et de même périmètre, le **polygone régulier** est celui qui a la plus grande aire. Et c'est le seul.

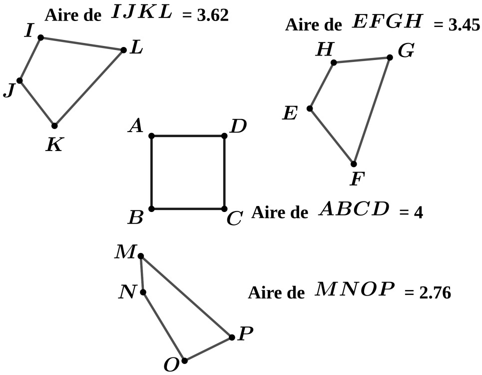


Figure – Quadrilatères isopérimétriques : le carré est celui qui a la plus grande aire

Polygones isopérimétriques

Théorème

Parmi tous les polygones à n côtés et de même périmètre, le **polygone régulier** est celui qui a la plus grande aire. Et c'est le seul.

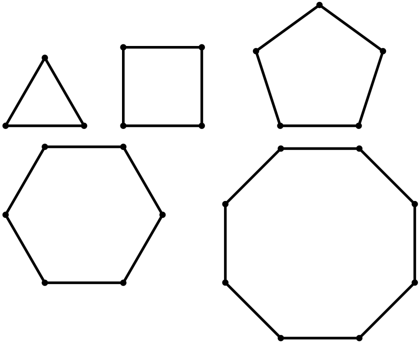


Figure – Polygones réguliers à 3, 4, 5, 6 et 8 côtés

Un enclos de plus en plus grand ?

Un enclos de plus en plus grand ?

Théorème (inégalité isopérimétrique)

Étant donnée une courbe plane $\mathcal{C}$ (fermée et simple) de périmètre p, l'aire A de son intérieur vérifie l'inégalité :

$$4\pi A \leq p^2.$$

Un enclos de plus en plus grand ?

Théorème (inégalité isopérimétrique)

Étant donnée une courbe plane $\mathcal{C}$ (fermée et simple) de périmètre p, l'aire A de son intérieur vérifie l'inégalité :

$$4\pi A \leq p^2.$$

De plus, cette inégalité est une **égalité** si et seulement si $\mathcal{C}$ est un **cercle**.

Un enclos de plus en plus grand ?

Théorème (inégalité isopérimétrique)

Étant donnée une courbe plane $\mathcal{C}$ (fermée et simple) de périmètre p, l'aire A de son intérieur vérifie l'inégalité :

$$4\pi A \leq p^2.$$

De plus, cette inégalité est une **égalité** si et seulement si $\mathcal{C}$ est un **cercle**.

Démonstration incomplète par Jakob Steiner (1838) ; démonstration par Adolf Hurwitz (1902) pour les courbes paramétrées par longueur d'arc ; preuves complètes et rigoureuses à partir des travaux de Karl Weierstrass et Hermann Minkowski vers 1895.

L'inégalité isopérimétrique dans la mythologie. . .

> *Elle achète ensuite autant de terrain qu'en peut couvrir la peau d'un bœuf [. . .] ; elle fait couper cette peau en bandes très étroites, et embrasse ainsi une plus grande étendue de terrain qu'elle n'avait paru en demander.*
>
> — *Justin, Livre XVIII, à propos de la fondation de Carthage par Didon*

. . . et dans la vie réelle

Figure – Village en Namibie (crédits : Y.-A. Bertrand)

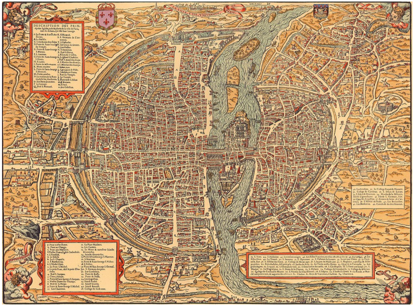


Figure – Plan de Paris, Belleforest, 1575

Sommaire

Le problème des trois gares

Problème

On souhaite relier trois gares par des voies de chemin de fer (rectilignes). Comment doit-on s'y prendre pour utiliser le moins de rails possible ?

Le problème des trois gares

Problème

On souhaite relier trois gares par des voies de chemin de fer (rectilignes). Comment doit-on s'y prendre pour utiliser le moins de rails possible ?

- On peut créer des gares ;

Le problème des trois gares

Problème

On souhaite relier trois gares par des voies de chemin de fer (rectilignes). Comment doit-on s'y prendre pour utiliser le moins de rails possible ?

- On peut créer des gares ;
- En créer deux ou plus est inutile ;

Le problème des trois gares

Problème

On souhaite relier trois gares par des voies de chemin de fer (rectilignes). Comment doit-on s'y prendre pour utiliser le moins de rails possible ?

- On peut créer des gares ;
- En créer deux ou plus est inutile ;
- Toute gare créée doit être reliée aux trois villes (sinon on peut s'en passer).

Reformulation mathématique

Reformulation mathématique

En termes mathématiques, on cherche un point P du plan (s'il existe...) tel que la somme des distances $PA + PB + PC$ à couvrir pour relier P à A, B et C est **minimale**.

Pour simplifier, on pose

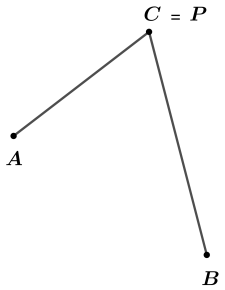
$$d(P) = PA + PB + PC.$$

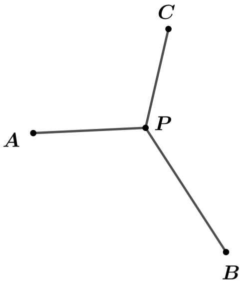
Reformulation mathématique

En termes mathématiques, on cherche un point P du plan (s'il existe...) tel que la somme des distances $PA + PB + PC$ à couvrir pour relier P à A, B et C est **minimale**.

Pour simplifier, on pose

$$d(P) = PA + PB + PC.$$



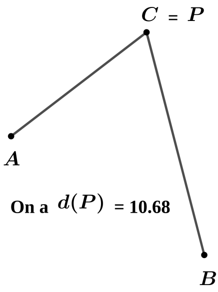


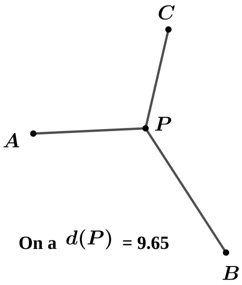
Reformulation mathématique

En termes mathématiques, on cherche un point P du plan (s'il existe...) tel que la somme des distances $PA + PB + PC$ à couvrir pour relier P à A, B et C est **minimale**.

Pour simplifier, on pose

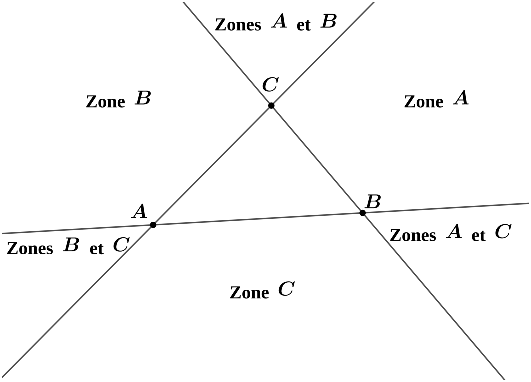
$$d(P) = PA + PB + PC.$$





Zones

On appelle « Zone A » le demi-plan formé par la droite (BC) ne contenant pas A. Et ainsi de suite.



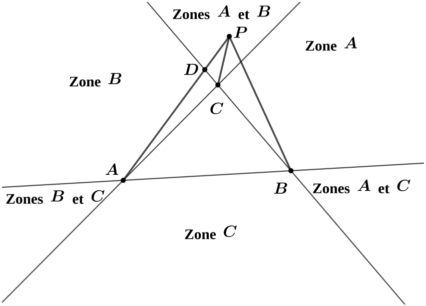
Il y a trois zones « franches » et trois zones « mixtes ».

Zone mixte

Si P est en zone mixte, disons dans les zones de A et B, alors on a $d(C) \leq d(P)$.

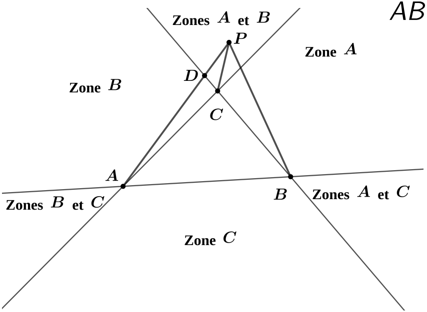
Zone mixte

Si P est en zone mixte, disons dans les zones de A et B, alors on a $d(C) \leq d(P)$.



Zone mixte

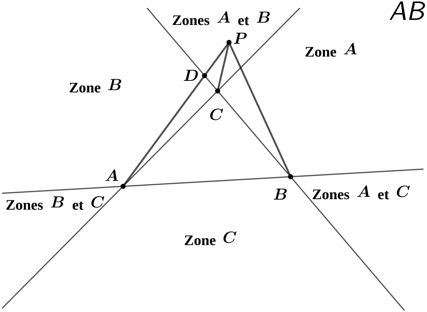
Si P est en zone mixte, disons dans les zones de A et B, alors on a $d(C) \leq d(P)$.



$$
\begin{aligned}
AB + BP + PA &\geq AB + BD + DA \\
&= AB + BC + CD + DA \\
&\geq AB + BC + CA
\end{aligned}
$$

Zone mixte

Si P est en zone mixte, disons dans les zones de A et B, alors on a $d(C) \leq d(P)$.

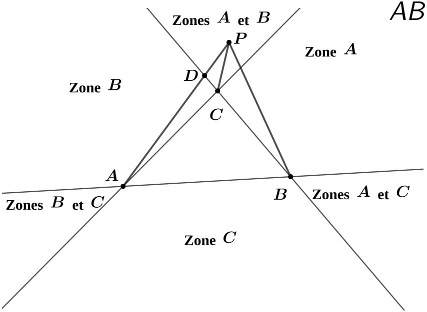


$$\begin{aligned} AB + BP + PA &\geq AB + BD + DA \\ &= AB + BC + CD + DA \\ &\geq AB + BC + CA \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } d(P) \geq PB + PA \geq CB + CA = d(C).$$

Zone mixte

Si P est en zone mixte, disons dans les zones de A et B, alors on a $d(C) \leq d(P)$.



$$\begin{aligned} AB + BP + PA &\geq AB + BD + DA \\ &= AB + BC + CD + DA \\ &\geq AB + BC + CA \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } d(P) \geq PB + PA \geq CB + CA = d(C).$$

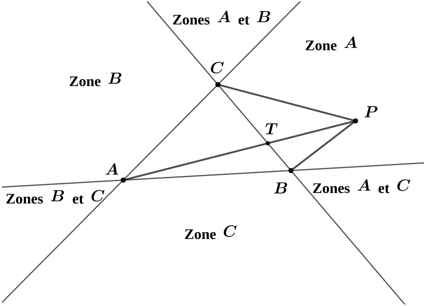
■

Zone franche

Si P est en zone franche, disons dans la zone de A, alors le point T d'intersection entre $[BC]$ et $[AP]$ vérifie $d(T) \leq d(P)$.

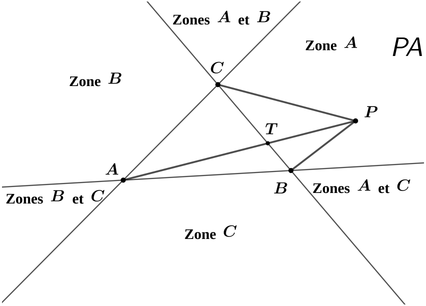
Zone franche

Si P est en zone franche, disons dans la zone de A, alors le point T d'intersection entre $[BC]$ et $[AP]$ vérifie $d(T) \leq d(P)$.



Zone franche

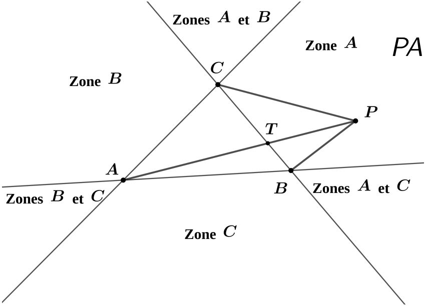
Si P est en zone franche, disons dans la zone de A, alors le point T d'intersection entre $[BC]$ et $[AP]$ vérifie $d(T) \leq d(P)$.



$$\begin{aligned} PA + PB + PC &= PT + TA + PB + PC \\ &\geq PT + TA + BC \\ &= PT + TA + TB + TC \\ &\geq TA + TB + TC \end{aligned}$$

Zone franche

Si P est en zone franche, disons dans la zone de A, alors le point T d'intersection entre $[BC]$ et $[AP]$ vérifie $d(T) \leq d(P)$.

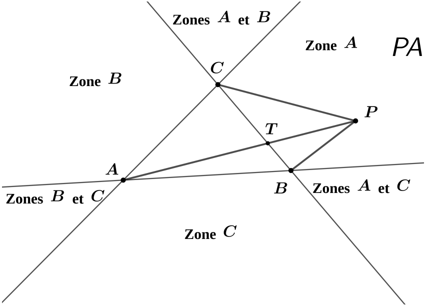


$$\begin{aligned} PA + PB + PC &= PT + TA + PB + PC \\ &\geq PT + TA + BC \\ &= PT + TA + TB + TC \\ &\geq TA + TB + TC \end{aligned}$$

Ainsi, on a $d(P) \geq d(T)$.

Zone franche

Si P est en zone franche, disons dans la zone de A, alors le point T d'intersection entre $[BC]$ et $[AP]$ vérifie $d(T) \leq d(P)$.



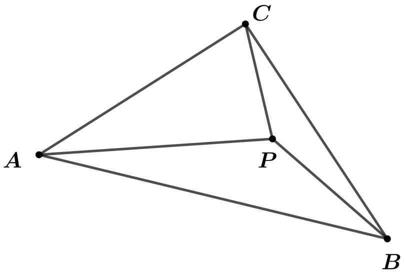
$$\begin{aligned} PA + PB + PC &= PT + TA + PB + PC \\ &\geq PT + TA + BC \\ &= PT + TA + TB + TC \\ &\geq TA + TB + TC \end{aligned}$$

Ainsi, on a $d(P) \geq d(T)$. ∎

Conclusion partielle

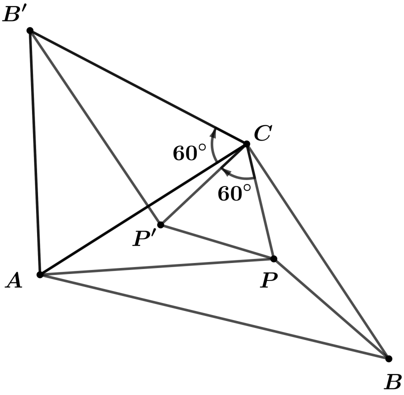
S'il existe un point P tel que $d(P)$ est minimale, alors ce point est situé à **l'intérieur** du triangle ABC (ou sur le triangle lui-même).

Investigations



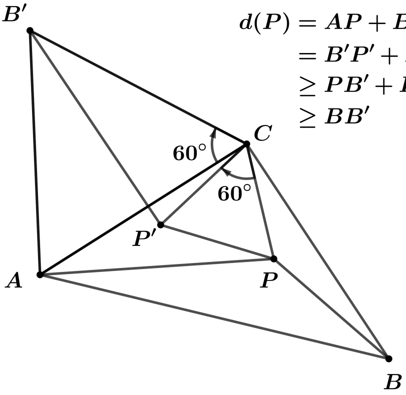
Investigations

Les triangles ACP et $B'CP'$ sont semblables.



Investigations

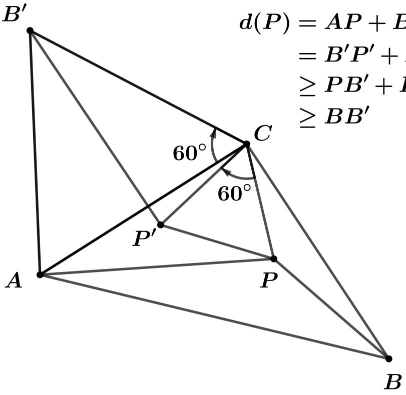
Les triangles ACP et $B'CP'$ sont semblables.



$$\begin{aligned} d(P) &= AP + BP + CP \\ &= B'P' + P'P + PB \\ &\geq PB' + PB \\ &\geq BB' \end{aligned}$$

Investigations

Les triangles ACP et $B'CP'$ sont semblables.

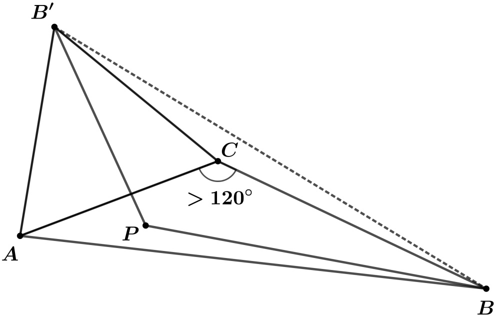


$$\begin{aligned} d(P) &= AP + BP + CP \\ &= B'P' + P'P + PB \\ &\geq PB' + PB \\ &\geq BB' \end{aligned}$$

De plus, on a $d(P) = BB'$ si et seulement si $P' \in [B'P]$ et $P \in [BP']$.

Le cas dégénéré

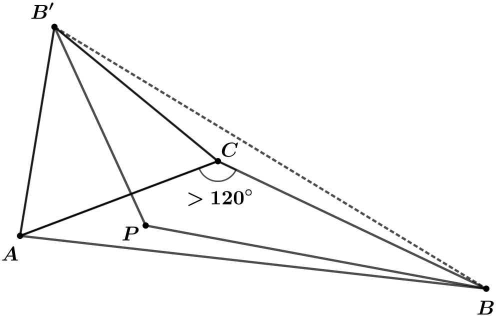
On suppose l'angle $\widehat{ACB} > 120°$.



Le cas dégénéré

On suppose l'angle $\widehat{ACB} > 120°$. Pour tout P intérieur au triangle ABC, on a

$$d(P) \geq PB + PB'.$$

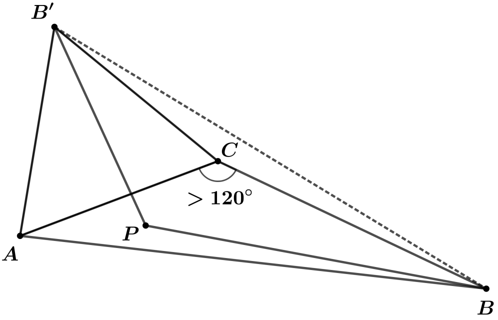


Le cas dégénéré

On suppose l'angle $\widehat{ACB} > 120°$. Pour tout P intérieur au triangle ABC, on a

$$d(P) \geq PB + PB'.$$

Le segment $[BB']$ est à l'extérieur du triangle ABC.

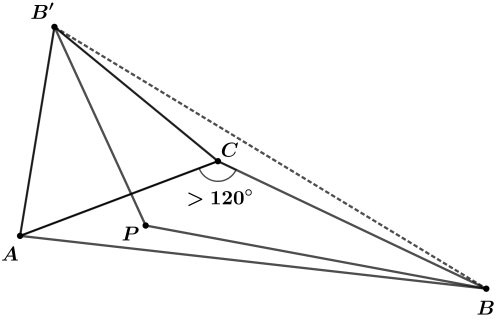


Le cas dégénéré

On suppose l'angle $\widehat{ACB} > 120°$. Pour tout P intérieur au triangle ABC, on a

$$d(P) \geq PB + PB'.$$

Le segment $[BB']$ est à l'extérieur du triangle ABC. Ainsi C est intérieur au triangle $BB'P$.

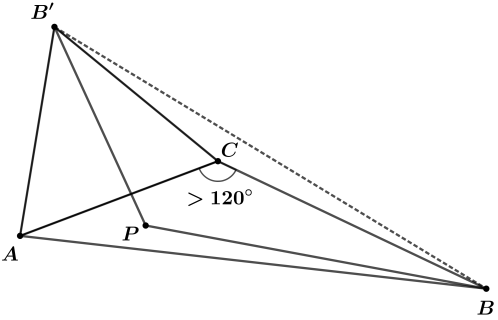


Le cas dégénéré

On suppose l'angle $\widehat{ACB} > 120°$. Pour tout P intérieur au triangle ABC, on a

$$d(P) \geq PB + PB'.$$

Le segment $[BB']$ est à l'extérieur du triangle ABC. Ainsi C est intérieur au triangle $BB'P$. On en déduit que l'on a $d(P) \geq d(C)$.



Le cas non dégénéré

On suppose tous les angles du triangle ABC de mesure $\leq 120^\circ$. Pour tout P intérieur au triangle ABC, on a

$$d(P) \geq BB'$$

avec égalité si et seulement si $P' \in [B'P]$ et $P \in [BP']$.

Le cas non dégénéré

On suppose tous les angles du triangle ABC de mesure $\leq 120^\circ$. Pour tout P intérieur au triangle ABC, on a

$$d(P) \geq BB'$$

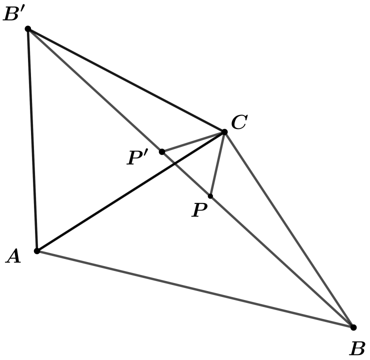
avec égalité si et seulement si $P' \in [B'P]$ et $P \in [BP']$. Or un tel point P existe : c'est le point P de la droite (BB') tel que $\widehat{CPB'} = 60^\circ$.

Le cas non dégénéré

On suppose tous les angles du triangle ABC de mesure $\leq 120°$. Pour tout P intérieur au triangle ABC, on a

$$d(P) \geq BB'$$

avec égalité si et seulement si $P' \in [B'P]$ et $P \in [BP']$. Or un tel point P existe : c'est le point P de la droite (BB') tel que $\widehat{CPB'} = 60°$.

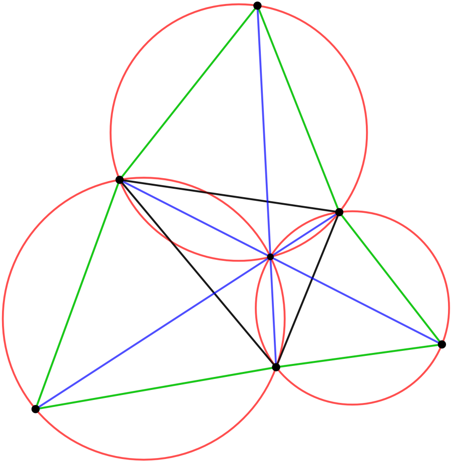


Le point de Fermat

Le point que l'on a construit s'appelle le point de Fermat. Il y a de nombreuses façons de le caractériser !

Le point de Fermat

Le point que l'on a construit s'appelle le point de Fermat. Il y a de nombreuses façons de le caractériser !



Et la SNCF dans tout ça ?

Où se situe le point de Fermat entre Paris, Hendaye et Monaco ?

Et la SNCF dans tout ça ?

Où se situe le point de Fermat entre Paris, Hendaye et Monaco ?

Et la SNCF dans tout ça ?

Où se situe le point de Fermat entre Paris, Hendaye et Monaco ?

Suffisant pour convaincre la SNCF de construire un TGV jusqu'à Clermont ?

Sommaire

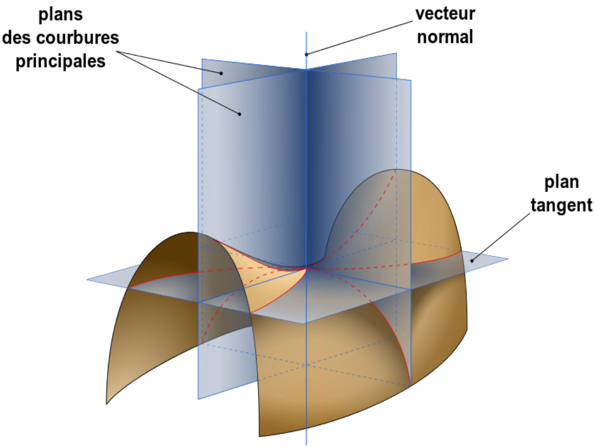
Quelle propriété ont les films de savon ?

Quelle propriété ont les films de savon ?

En tout point, ils ont la forme d'une **selle de cheval**.

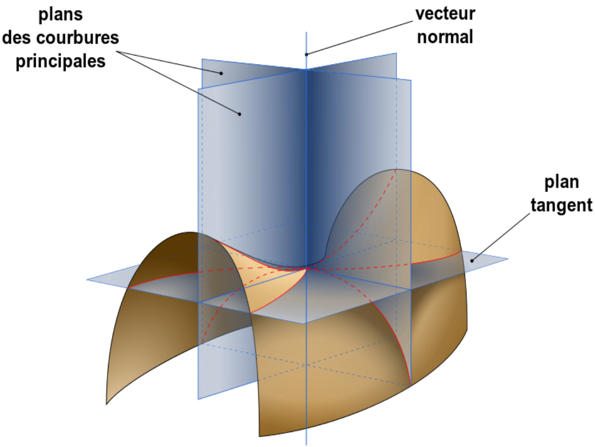
Quelle propriété ont les films de savon ?

En tout point, ils ont la forme d'une **selle de cheval**. On dit qu'ils sont de courbure moyenne nulle.



Quelle propriété ont les films de savon ?

En tout point, ils ont la forme d'une **selle de cheval**. On dit qu'ils sont de courbure moyenne nulle.



Surfaces minimales

- Une surface qui est de courbure moyenne nulle en tout point est appelée **surface minimale**.

Surfaces minimales

- Une surface qui est de courbure moyenne nulle en tout point est appelée **surface minimale**.
- Les surfaces minimales sont définies par des **équations aux dérivées partielles** découvertes par Leonhard Euler et Joseph-Louis Lagrange.

La conjecture de Lagrange

- Lagrange **conjecture** que pour n'importe quelle courbe fermée de l'espace, il existe une surface minimale qui s'appuie sur cette courbe.

La conjecture de Lagrange

- Lagrange **conjecture** que pour n'importe quelle courbe fermée de l'espace, il existe une surface minimale qui s'appuie sur cette courbe.
- Joseph Plateau propose une solution **expérimentale** à la conjecture de Lagrange par les **films de savon**.

La conjecture de Lagrange

- Lagrange **conjecture** que pour n'importe quelle courbe fermée de l'espace, il existe une surface minimale qui s'appuie sur cette courbe.
- Joseph Plateau propose une solution **expérimentale** à la conjecture de Lagrange par les **films de savon**.
- La conjecture de Lagrange est **démontrée mathématiquement** en 1928 par René Garnier, puis redémontrée de nombreuses fois par d'autres méthodes.

Le problème de Plateau

Que se passe-t-il si on remplace le bord par un polyèdre ?

Le problème de Plateau

Que se passe-t-il si on remplace le bord par un polyèdre ?

Conditions de Plateau (observations)

1. On obtient des **portions de surfaces lisses** et **deux types de singularités**.

Le problème de Plateau

Que se passe-t-il si on remplace le bord par un polyèdre ?

Conditions de Plateau (observations)

1. On obtient des **portions de surfaces lisses** et **deux types de singularités**.
2. Sur chaque portion, la **courbure moyenne est constante**.

Le problème de Plateau

Que se passe-t-il si on remplace le bord par un polyèdre ?

Conditions de Plateau (observations)

1. On obtient des **portions de surfaces lisses** et **deux types de singularités**.
2. Sur chaque portion, la **courbure moyenne est constante**.
3. Si **trois portions** se rencontrent le long d'une **arête**, alors l'angle formé par deux de ces portions vaut $120°$.

Le problème de Plateau

Que se passe-t-il si on remplace le bord par un polyèdre ?

Conditions de Plateau (observations)

1. On obtient des **portions de surfaces lisses** et **deux types de singularités**.
2. Sur chaque portion, la **courbure moyenne est constante**.
3. Si **trois portions** se rencontrent le long d'une **arête**, alors l'angle formé par deux de ces portions vaut 120°.
4. En un **point** où **quatre arêtes** (et donc six portions) se rencontrent, les angles entre ces arêtes valent $\arccos(-1/3) \approx 109,47^\circ$.

Le problème de Plateau

Que se passe-t-il si on remplace le bord par un polyèdre ?

Conditions de Plateau (observations)

1. On obtient des **portions de surfaces lisses** et **deux types de singularités**.
2. Sur chaque portion, la **courbure moyenne est constante**.
3. Si **trois portions** se rencontrent le long d'une **arête**, alors l'angle formé par deux de ces portions vaut 120°.
4. En un **point** où **quatre arêtes** (et donc six portions) se rencontrent, les angles entre ces arêtes valent $\arccos(-1/3) \approx 109,47^\circ$.

Le problème de Plateau

Que se passe-t-il si on remplace le bord par un polyèdre ?

Conditions de Plateau (observations)

1. On obtient des **portions de surfaces lisses** et **deux types de singularités**.
2. Sur chaque portion, la **courbure moyenne est constante**.
3. Si **trois portions** se rencontrent le long d'une **arête**, alors l'angle formé par deux de ces portions vaut 120°.
4. En un **point** où **quatre arêtes** (et donc six portions) se rencontrent, les angles entre ces arêtes valent $\arccos(-1/3) \approx 109,47^\circ$.

La démonstration de la validité de ces observations a été obtenue par Jean E. Taylor en 1976. Son article n'est compréhensible que par les spécialistes du domaine !