Choix des signes pour la formalité de M. Kontsevich

D. Arnal *, D. Manchon **et M. Masmoudi ***

Résumé : L'expression explicite de la formalité de M. Kontsevich sur $\mathbb{R}^d$ est la base de la preuve du théorème de formalité pour une variété quelconque [K1 § 7], qui implique à son tour l'existence d'étoile-produits sur une variété de Poisson quelconque. Nous proposons ici un choix cohérent d'orientations et de signes qui permet de reprendre la démonstration du théorème pour $\mathbb{R}^d$ en tenant compte des signes qui apparaissent devant les différents termes de l'équation de formalité.

Introduction

La conjecture de formalité a été introduite par M. Kontsevich [K2] : elle affirme l'existence d'un L_∞-quasi-isomorphisme de $\mathfrak{g}_1$ vers $\mathfrak{g}_2$, où $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_2$ sont les deux algèbres de Lie différentielles graduées naturellement associées à une variété M : précisément $\mathfrak{g}_1$ est l'algèbre de Lie différentielle graduée des multi-champs de vecteurs munie de la différentielle nulle et du crochet de Schouten, et $\mathfrak{g}_2$ est l'algèbre de Lie différentielle graduée des opérateurs polydifférentiels munie de la différentielle de Hochschild et du crochet de Gerstenhaber.

Les éléments de degré n dans $\mathfrak{g}_1$ sont les $(n+1)$-champs de vecteurs, et les éléments de degré n dans $\mathfrak{g}_2$ sont les opérateurs $(n+1)$-différentiels. Dans les espaces gradués décalés $\mathfrak{g}_1[1]$ et $\mathfrak{g}_2[1]$ ce sont les $(n+2)$-champs de vecteurs (resp. les opérateurs $(n+2)$-différentiels) qui sont de degré n.

Toute algèbre de Lie différentielle graduée est une L_∞-algèbre. Cela signifie en particulier que les structures d'algèbres de Lie différentielles graduées sur $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_2$ induisent des codérivations Q et Q' de degré 1 sur des cogèbres $\mathcal{C}(\mathfrak{g}_1) = S^+(\mathfrak{g}_1[1])$ et $\mathcal{C}(\mathfrak{g}_2) = S^+(\mathfrak{g}_2[1])$ respectivement (cf. § II.3 et II.4), vérifiant toutes deux l'équation maîtresse :

$$[Q, Q] = 0, \qquad [Q', Q'] = 0.$$

Un L_∞-quasi-isomorphisme de $\mathfrak{g}_1$ vers $\mathfrak{g}_2$ est par définition un morphisme de cogèbres :

$$\mathcal{U} : \mathcal{C}(\mathfrak{g}_1) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathfrak{g}_2)$$

de degré zéro et commutant aux codérivations, c'est-à-dire vérifiant l'équation :

$$\mathcal{U} \circ Q = Q' \circ \mathcal{U},$$

et dont la restriction à $\mathfrak{g}_1$ est un quasi-isomorphisme de complexes de $\mathfrak{g}_1$ dans $\mathfrak{g}_2$. M. Kontsevich démontre dans [K1] la conjecture de formalité, c'est-à-dire l'existence d'un L_∞-quasi-isomorphisme de $\mathfrak{g}_1$ vers $\mathfrak{g}_2$, pour

* Université de Metz, Département de Mathématiques, île du Saulcy, 57045 Metz CEDEX 01. arnal@poncelet.univ-metz.fr

** Institut Elie Cartan, CNRS, BP 239, 54506 Vandœuvre CEDEX. manchon@iecn.u-nancy.fr

*** Université de Metz, Département de Mathématiques, île du Saulcy, 57045 Metz CEDEX 01. masmoudi@poncelet.univ-metz.fr

toute variété M de classe C^∞. La première étape de la preuve (et même l'essentiel du travail) consiste en la construction explicite du L_∞-quasi-isomorphisme $\mathcal{U}$ pour $M = \mathbb{R}^d$. Le L_∞-quasi-isomorphisme $\mathcal{U}$ est uniquement déterminé par ses coefficients de Taylor :

$$\mathcal{U}_n : S^n(\mathfrak{g}_1[1]) \longrightarrow \mathfrak{g}_2[1].$$

(cf. § III.2). Si les α_k sont des s_k-champs de vecteurs, ils sont de degré $s_k - 2$ dans l'espace décalé $\mathfrak{g}_1[1]$, et donc $\mathcal{U}_n(\alpha_1 \cdots \alpha_n)$ est d'ordre $s_1 + \cdots + s_n - 2n$ dans $\mathfrak{g}_2[1]$. C'est donc un opérateur m-différentiel, avec :

$$\sum_{k=1}^{n} s_k = 2n + m - 2. \tag{$*$}$$

Les coefficients de Taylor sont construits à l'aide de poids et de graphes : on désigne par $G_{n,m}$ l'ensemble des graphes étiquetés et orientés ayant n sommets du premier type (sommets aériens) et m sommets du deuxième type (sommets terrestres) tels que :

1). Les arêtes partent toutes des sommets aériens.

2). Le but d'une arête est différent de sa source (il n'y a pas de boucles).

3). Il n'y a pas d'arêtes multiples.

A tout graphe $\Gamma \in G_{n,m}$ muni d'un ordre sur l'ensemble de ses arêtes, et à tout n-uple de multi-champs de vecteurs $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ on peut associer de manière naturelle un opérateur m-différentiel $B_\Gamma(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n)$ lorsque pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, α_j est un s_j-champ de vecteurs, où s_j désigne le nombre d'arêtes qui partent du sommet aérien numéro j [K1 § 6.3].

Le coefficient de Taylor $\mathcal{U}_n$ est alors donné par la formule :

$$\mathcal{U}_n(\alpha_1 \cdots \alpha_n) = \sum_{\Gamma \in G_{n,m}} W_\Gamma B_\Gamma(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n),$$

où l'entier m est relié à n et aux α_j par la formule (*) ci-dessus.

Le poids W_Γ est nul sauf si le nombre d'arêtes $|E_\Gamma|$ du graphe Γ est précisément égal à $2n + m - 2$. Il s'obtient en intégrant une forme fermée ω_Γ de degré $|E_\Gamma|$ sur une composante connexe de la compactification de Fulton-McPherson d'un espace de configuration $C^+_{A,B}$, qui est précisément de dimension $2n + m - 2$ [FM], [K1 § 5]. Il dépend lui aussi d'un ordre sur l'ensemble des arêtes, mais le produit $W_\Gamma.B_\Gamma$ n'en dépend plus.

Pour prouver le théorème de formalité M. Kontsevich montre que le morphisme de cogèbres $\mathcal{U}$ dont les coefficients de Taylor sont les $\mathcal{U}_n$ définis ci-dessus est un L_∞-quasi-isomorphisme. La méthode consiste à ramener l'équation de formalité $\mathcal{U} \circ Q = Q' \circ \mathcal{U}$, qui se développe à l'aide des coefficients de Taylor de $\mathcal{U}$, Q et Q' :

$$\begin{aligned} Q'_1\mathcal{U}_n\left(\alpha_1 \ldots . \alpha_n\right) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{I \sqcup J = \{1, \ldots, n\} \\ I, J \neq \emptyset}} \pm Q'_2\left(\mathcal{U}_{|I|}\left(\alpha_I\right) . \mathcal{U}_{|J|}\left(\alpha_J\right)\right) = \\ = \sum_{k=1}^{n} \pm \mathcal{U}_n\left(Q_1(\alpha_k) . \alpha_1 \ldots . \widehat{\alpha_k} \ldots . \alpha_n\right) + \\ \frac{1}{2} \sum_{k \neq l} \pm \mathcal{U}_{n-1}\left(Q_2(\alpha_k . \alpha_l) . \alpha_1 \ldots . \widehat{\alpha_k} \ldots . \widehat{\alpha_l} \ldots . \alpha_n\right) \end{aligned}$$

à l'application de la formule de Stokes pour les formes ω_Γ sur l'ensemble des faces de codimension 1 du bord des espaces de configuration.

Nous proposons dans la première partie de ce travail un choix d'orientation des espaces de configuration (ou plus exactement d'une composante connexe de ceux-ci) $C^+_{A,B}$, et un choix cohérent d'orientation pour chacune des faces de codimension 1 du bord de la compactification.

Au chapitre II nous explicitons l'isomorphisme $\Phi : S^n(\mathfrak{g}[1]) \xrightarrow{\sim} \Lambda^n(\mathfrak{g})[n]$ mentionné dans [K1 § 4.2] pour tout espace vectoriel gradué $\mathfrak{g}$, afin de préciser le passage du langage des algèbres de Lie différentielles graduées et des L_∞-algèbres au langage des Q-variétés formelles graduées pointées ([AKSZ], [K1 § 4.1]).

Nous donnons au chapitre III une formule explicite pour un champ de vecteurs sur une variété formelle graduée pointée ou un morphisme de variétés formelles graduées pointées en fonction de leurs coefficients de Taylor respectifs. La démonstration est de nature combinatoire et se fait en explicitant la restriction à la puissance symétrique n-ième par récurrence sur n.

Dans le chapitre IV nous exprimons les deux algèbres de Lie différentielles graduées qui nous intéressent comme Q-variétés formelles graduées pointées. L'isomorphisme d'espaces gradués Φ explicité au chapitre II est ici essentiel. Pour la suite nous sommes amenés à modifier l'algèbre de Lie différentielle graduée des multi-champs de vecteurs : nous utilisons un crochet de Lie gradué $[\ ,\ ]'$ lié au crochet de Schouten par la formule :

$$[x,y]' = -[y,x]_{Schouten}.$$

Les deux crochets coïncident modulo un changement de signe en présence de deux éléments impairs. Nous précisons au paragraphe IV.4 les signes (du type Quillen) qui apparaissent dans l'équation de formalité.

Enfin nous montrons au chapitre VI que modulo tous les choix effectués précédemment $\mathcal{U}$ est bien un L_∞-morphisme.

Le chapitre V est assez largement indépendant du reste de l'article bien que directement relié à [K1] : nous y donnons une démonstration détaillée du théorème de quasi-inversion des quasi-isomorphismes donné dans [K1 § 4.4-4.5]. Enfin nous rappelons en appendice le lien entre formalité et quantification par déformation.

Nous remercions André Roux, Siddhartha Sahi et Thomas Wegner pour d'utiles discussions et corrections.

I. Orientation des espaces de configuration

I.1. Trois choix de paramétrage

Définition (Espaces de configuration).
Soit $\mathcal{H}$ le demi-plan de Poincaré ($\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C},\ \mathfrak{Im} z > 0\}$). Appelons $Conf^+(\{z_1,...,z_n\};\{t_1,...,t_m\})$ l'ensemble des nuages de points :

$$\{(z_1,...,z_n;t_1,..,t_m),\ t.\ q.\ z_i \in \mathcal{H},\ t_j \in \mathbb{R},\ z_i \neq z_{i'} \text{ si } i \neq i',\ t_1 < ... < t_m\}$$

et $C^+_{\{p_1,...,p_n\};\{q_1,...,q_m\}}$ le quotient de cette variété sous l'action du groupe G de toutes les transformations de la forme :

$$z_i \mapsto az_i + b,\ t_j \mapsto at_j + b \qquad (a > 0,\ b \in \mathbb{R}).$$

La variété $C^+_{\{p_1,...,p_n\};\{q_1,...,q_m\}}$ est donc de dimension $2n + m - 2$. Cette variété est par convention orientée par le passage au quotient de la forme :

$$\Omega_{\{z_1,...,z_n\};\{t_1,...,t_m\}} = dx_1 \wedge dy_1 \wedge ... \wedge dx_n \wedge dy_n \wedge dt_1 \wedge ... \wedge dt_m$$

où $z_j = x_j + iy_j$. Le groupe des transformations considérées préserve l'orientation. On en déduit une orientation des espaces $C^+_{\{p_1,...,p_n\};\{q_1,...,q_m\}}$. Plus précisément, si $2n+m > 0$, on peut choisir des représentants pour paramétrer notre espace. Nous considérons trois méthodes :

Choix 1 :
On choisit l'un des z_i (disons $z_{j_0} = x_{j_0} + iy_{j_0}$) et on le place au point i par une transformation de G. Les autres points sont alors fixés :

$$p_{j_0} = i, \quad p_j = \frac{z_j - x_{j_0}}{y_{j_0}}, \quad q_l = \frac{t_l - x_{j_0}}{y_{j_0}}.$$

Dans ce cas, on paramètre $C^+_{\{p_1,\dots,p_n\};\{q_1,\dots,q_m\}}$ par les coordonnées des $p_j = a_j + ib_j$ $(j \neq j_0)$ et les q_l, l'orientation, dans ces coordonnées de $C^+_{\{p_1,\dots,p_n\};\{q_1,\dots,q_m\}}$ est celle donnée par la forme :

$$\Omega = \bigwedge_{j \neq j_0} (da_j \wedge db_j) \wedge dq_1 \wedge \dots \wedge dq_m.$$

(L'ordre sur les indices j n'importe pas car les 2-formes $da_j \wedge db_j$ commutent entre elles).

Choix 2 :
On choisit l'un des t_l (disons t_{l_0}) et on le place en 0 par une translation, puis on fait une dilatation pour forcer le module de l'un des z_j (disons z_{j_0}) à valoir 1 :

$$p_{j_0} = \frac{z_{j_0} - t_{l_0}}{|z_{j_0} - t_{j_0}|} = e^{i\theta_{j_0}}, \quad p_j = \frac{z_j - t_{l_0}}{|z_{j_0} - t_{j_0}|}, \quad q_{l_0} = 0, \quad q_l = \frac{t_l - t_{l_0}}{|z_{j_0} - t_{j_0}|}.$$

On paramètre alors $C^+_{\{p_1,\dots,p_n\};\{q_1,\dots,q_m\}}$ par l'argument θ_{j_0} de p_{j_0} (compris entre 0 et π) et par les coordonnées des p_j $(j \neq j_0)$ et les q_l $(l \neq l_0)$. L'orientation, dans ces coordonnées de $C^+_{\{p_1,\dots,p_n\};\{q_1,\dots,q_m\}}$ est celle donnée par la forme :

$$\Omega = (-1)^{l_0-1} d\theta_{j_0} \wedge \bigwedge_{j \neq j_0} (da_j \wedge db_j) \wedge dq_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dq_{l_0}} \wedge \dots \wedge dq_m.$$

En effet, on part de la forme Ω du cas 1, avec $j_0 = 1$, puisque l'ordre des p n'intervient pas, on place q_{l_0} "en tête" :

$$\Omega = (-1)^{l_0-1} dq_{l_0} \wedge da_2 \wedge db_2 \wedge \dots \wedge da_n \wedge db_n \wedge dq_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dq_{l_0}} \wedge \dots \wedge dq_{l_1} \wedge \dots \wedge dq_n,$$

puis on effectue le changement de variables :

$$p'_1 = \frac{i - q_{l_0}}{|i - q_{l_0}|} = e^{i\theta_1}, \quad p'_j = \frac{p_j - q_{l_0}}{|i - q_{l_0}|} = a'_j + ib'_j \quad (2 \leq j \leq n), \quad q'_k = \frac{q_k - q_{l_0}}{|i - q_{l_0}|} \quad (k \neq l_0).$$

Dont le jacobien $\frac{1}{(1+q_{l_0}^2)^{\frac{m+n}{2}}}$ est strictement positif, pour obtenir la forme annoncée.

Choix 3 :
On choisit deux points $t_{l_0} < t_{l_1}$, on amène par une translation le premier en 0 et le second en 1 par une dilatation.

$$p_j = \frac{z_j - t_{l_0}}{t_{l_1} - t_{l_0}}, \quad q_{l_0} = 0, \quad q_{l_1} = 1, \quad q_l = \frac{t_l - t_{l_0}}{t_{l_1} - t_{l_0}}.$$

On paramètre $C^+_{\{p_1,\dots,p_n\};\{q_1,\dots,q_m\}}$ par les coordonnées des $p_j = a_j + ib_j$ et par les q_l $(l \neq l_0$ et $l \neq l_1)$. l'orientation est donnée par la forme :

$$\Omega = (-1)^{l_0+l_1+1} \bigwedge_{j=1}^{n} (da_j \wedge db_j) \wedge dq_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dq_{l_0}} \wedge \dots \wedge \widehat{dq_{l_1}} \wedge \dots \wedge dq_m.$$

En effet, on part de la forme Ω du cas 1, on place q_{l_0} et q_{l_1} "en tête" :

$$\Omega = (-1)^{l_0-1+l_1-2} dq_{l_0} \wedge dq_{l_1} \wedge da_2 \wedge db_2 \wedge \dots \wedge da_n \wedge db_n \wedge dq_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dq_{l_0}} \wedge \dots \wedge dq_n,$$

puis on effectue le changement de variables :

$$p'_1 = \frac{i - q_{l_0}}{q_{l_1} - q_{l_0}} = a_1 + ib_1, \quad p'_j = \frac{p_j - q_{l_0}}{q_{l_1} - q_{l_0}} = a'_j + ib'_j \quad (2 \leq j \leq n), \quad q'k = \frac{q_k - q_{l_0}}{q_{l_1} - q_{l_0}} \quad (k \neq l_0,\ k \neq l_1).$$

Dont le jacobien $\frac{q_{l_1} - q_{l_0}}{(q_{l_1} - q_{l_0})^{1+n+m}}$ est strictement positif, pour obtenir la forme annoncée.

I.2. Compactification des espaces de configuration

On plonge l'espace de configuration $C^+_{\{p_1,\dots,p_n\};\{q_1,\dots,q_m\}}$ dans une variété compacte de la façon suivante. Chaque fois que l'on prend deux points A et B du nuage de points $(z_j, \overline{z_j}; t_l)$, on leur associe l'angle $Arg(B - A)$, à chaque triplet de points (A, B, C) du nuage, on associe l'élément $[A - B, B - C, C - A]$ de l'espace projectif $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ qu'ils définissent. On a ainsi une application :

$$\tilde{\Phi} : Conf^+(z_j, t_l) \longrightarrow \mathbb{T}^{(2n+m)(2n+m-1)} \times \left(\mathbb{P}^2(\mathbb{R})\right)^{(2n+m)(2n+m-1)(2n+m-2)}.$$

Cette application passe au quotient et il n'est pas difficile de montrer que l'on obtient ainsi un plongement

$$\Phi : C^+_{\{p_1,\dots,p_n\};\{q_1,\dots,q_m\}} \longrightarrow \mathbb{T}^{(2n+m)(2n+m-1)} \times \left(\mathbb{P}^2(\mathbb{R})\right)^{(2n+m)(2n+m-1)(2n+m-2)}.$$

On définit la compactification $\overline{C^+_{\{p_1,\dots,p_n\};\{q_1,\dots,q_m\}}}$ de $C^+_{\{p_1,\dots,p_n\};\{q_1,\dots,q_m\}}$ comme étant la fermeture dans $\mathbb{T}^{(2n+m)(2n+m-1)} \times \left(\mathbb{P}^2(\mathbb{R})\right)^{(2n+m)(2n+m-1)(2n+m-2)}$ de $\Phi\left(C^+_{\{p_1,\dots,p_n\};\{q_1,\dots,q_m\}}\right)$. On obtient ainsi une variété à coins et on cherche son bord $\partial C^+_{\{p_1,\dots,p_n\};\{q_1,\dots,q_m\}}$.

Les points du bord s'obtiennent par une succession de collapses de points du nuage. On retrouve la description de M. Kontsevich à deux détails près : lorsque des points aériens (c'est à dire un ou des p_j) se rapprochent de $\mathbb{R}$, il faut distinguer entre quels q_l ils arrivent, il y a trop de faces du bord, puisque les faces correspondant au rapprochement de points terrestres (des q_l) non contigus est impossible sans que tous les points qui les séparent se rapprochent aussi. En codimension 1, on obtient deux types de faces :

I.2.1. Faces de type 1

Parmi les points aériens, n_1 points se rapprochent en un point p qui reste aérien. Une telle face existe si $n \geq n_1 \geq 2$. A la limite, on obtient une variété produit :

$$F = \partial_{\{p_{i_1},\dots,p_{i_{n_1}}\}} C^+_{\{p_1,\dots,p_n\};\{q_1,\dots,q_m\}} = C_{\{p_{i_1},\dots,i_{n_1}\}} \times C_{\{p,p_1,\dots,\widehat{p_{i_1}},\dots,\widehat{p_{i_{n_1}}},\dots,p_n\};\{q_1,\dots,q_m\}} \qquad (*)$$

où l'espace $C_{\{p_1,\dots,p_{n_1}\}}$ est le quotient de l'espace $Conf(z_1, \dots, z_{n_1})$ par l'action du groupe G' des transformations $z_j \mapsto az_j + b$ ($a > 0$ et $b \in \mathbb{C}$). c'est une varíté de dimension $2n_1 - 3$ ($n_1 \geq 2$). On la plonge dans un produit de tores et d'espaces projectifs comme pour $C^+_{\{p_1,\dots,p_n\};\{q_1,\dots,q_m\}}$. Enfin on l'oriente de la façon suivante; z_1 est placé en 0 par une translation complexe puis $|z_2|$ est normalisé à 1 par une dilatation,

$$p_1 = 0, \quad p_2 = \frac{z_2 - z_1}{|z_2 - z_1|} = e^{i\theta_2}, \quad p_j = \frac{z_j - z_1}{|z_2 - z_1|} = a_j + ib_j$$

et on prend l'orientation définie par la forme :

$$\Omega_1 = d\theta_2 \wedge \bigwedge_{j \geq 3} (da_j \wedge db_j).$$

Orientons maintenant la face F. On choisit la forme volume $\Omega_1 \wedge \Omega_2$ sur le produit $(*)$ où Ω_2 est l'une des formes définies ci-dessus pour orienter $C^+_{\{p_j\};\{q_l\}}$. L'orientation de la face à partir de celle de Ω est $\pm\Omega_1 \wedge \Omega_2$.

Lemme I.2.1.
La face F est orientée par $\Omega_F = -\Omega_1 \wedge \Omega_2$.

Démonstration. On a vu que l'on pouvait changer l'ordre des points p_j de $C^+_{\{p_j\};\{q_l\}}$ sans changer l'orientation. On renumérote les points p_{i_1},..., $p_{i_{n_1}}$ en p_1, p_2,..., p_{n_1}, puis on fixe $p_1 = i$:

$$\Omega = \bigwedge_{j=2}^{n_1} (da_j \wedge db_j) \wedge \Omega_2,$$

ensuite on change de variables dans le premier facteur en posant :

$$p'_2 = e^{i\theta_2}, \quad p'_j = \frac{p_j}{|p_2 - i|} = a'_j + ib'_j \qquad (j = 3, ..., n_1).$$

Lorsque les n_1 premiers points collapsent, on agrandit le petit nuage qu'ils forment en normalisant la distance qui sépare les 2 premiers à 1. Posons $\rho_2 = |p_2 - i|$. le changement de variable donne pour Ω la forme :

$$\Omega' = d\rho_2 \wedge d\theta_2 \wedge \bigwedge_{j\geq 3} (da'_j \wedge db'_j) \wedge \Omega_2.$$

La face est obtenue lorsque $\rho_2 \to 0$. Or $\rho_2 > 0$, on doit donc l'orienter avec

$$\Omega_F = -d\theta_2 \wedge \bigwedge_{j\geq 3} (da'_j \wedge db'_j) \wedge \Omega_2 = -\Omega_1 \wedge \Omega_2.$$

•

I.2.2. Face de type 2

Parmi les points du nuage, n_1 points aériens et m_1 points terrestres se rapprochent en un point q terrestre. Une telle face existe si $n + m > n_1 + m_1$ et $2n_1 + m_1 \geq 2$. A la limite, on obtient une variété produit :

$$\begin{aligned} F &= \partial_{\{p_{i_1},\dots,p_{i_{n_1}}\};\{q_{l+1},\dots,q_{l+m_1}\}} C^+_{\{p_1,\dots,p_n\};\{q_1,\dots,q_m\}} \\ &= C_{\{p_{i_1},\dots,p_{i_{n_1}}\};\{q_{l+1},\dots,q_{l+m_1}\}} \times C_{\{p_1,\dots,\widehat{p_{i_1}},\dots,\widehat{p_{i_{n_1}}},\dots,p_n\};\{q_1,\dots,q_l,q,q_{l+m_1+1},\dots,q_m\}}. \end{aligned} \qquad (*)$$

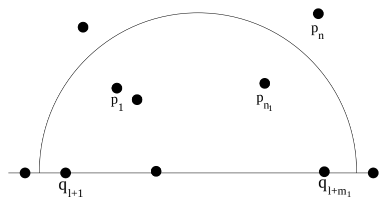
On appelle Ω_1 et Ω_2 l'une des formes volumes de chacun des facteurs de ce produit. La forme $\Omega_1 \wedge \Omega_2$ est une forme volume sur F. On donne l'orientation de F à partir de celle de l'espace de configuration de départ en terme de cette forme.

Lemme I.2.2.
Avec nos notations, la face F est orientée par :

$$\Omega_F = (-1)^{lm_1+l+m_1} \Omega_1 \wedge \Omega_2.$$

Démonstration. Il faut considérer six types de nuages différents :

Sous-cas 1 : $n > n_1 > 0$



On suppose que p_1,..., p_{n_1} et q_{l+1}, ..., q_{l+m_1} collapsent. On paramètre l'espace $C^+_{\{p_1,\dots,p_n\};\{q_1,\dots,q_m\}}$ par $p_{n_1+1} = i$. La forme d'orientation est :

$$\begin{aligned}\Omega =&(-1)^{lm_1} da_1 \wedge db_1 \wedge \dots \wedge da_{n_1} \wedge db_{n_1} \wedge dq_{l+1} \wedge \dots \wedge dq_{l+m_1} \bigwedge \\ &\qquad \bigwedge da_{n_1+2} \wedge db_{n_1+2} \wedge \dots \wedge da_n \wedge db_n \wedge dq_1 \wedge \dots \wedge dq_l \wedge dq_{l+m_1+1} \wedge \dots \wedge dq_m. \\ =&(-1)^{lm_1+l+m_1+1} db_1 \wedge \dots \wedge da_{n_1} \wedge db_{n_1} \wedge dq_{l+1} \wedge \dots \wedge dq_{l+m_1} \bigwedge \\ &\qquad \bigwedge da_{n_1+2} \wedge db_{n_1+2} \wedge \dots \wedge da_n \wedge db_n \wedge dq_1 \wedge \dots \wedge dq_l \wedge da_1 \wedge dq_{l+m_1+1} \wedge \dots \wedge dq_m.\end{aligned}$$

(Certains termes peuvent ne pas apparaître, par exemple si $n = n_1 + 1$ ou $m = m_1$). On change de variables en posant :

$$a_1 = q, \quad p'_j = \frac{p_j - a_1}{b_1} \quad (2 \leq j \leq n_1), \qquad q'_k = \frac{q_k - a_1}{b_1} \quad (l+1 \leq k \leq l+m_1).$$

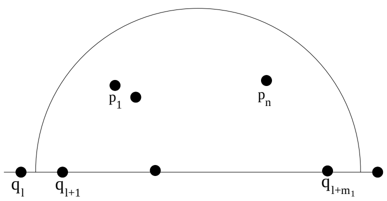
Alors on peut écrire de façon un peu abusive :

$$\Omega = (-1)^{lm_1+l+m_1+1} db_1 \bigwedge \Omega_1 \wedge \Omega_2$$

et puisque $b_1 > 0$ et la face F est obtenue pour $b_1 = 0$, son orientation est donnée par :

$$\Omega_F = (-1)^{lm_1+l+m_1} \Omega_1 \wedge \Omega_2.$$

Sous-cas 2 : $n = n_1 > 0$ (et donc $m \geq m_1 + 1$) et $l > 0$



On suppose que p_1,..., p_n et q_{l+1}, ..., q_{l+m_1} collapsent. On paramètre l'espace $C^+_{\{p_1,\dots,p_n\};\{q_1,\dots,q_m\}}$ par $q_l = 0$, $q_{l+1} = 1$. La forme d'orientation est :

$$\begin{aligned}\Omega &= (-1)^{2l+2} da_1 \wedge db_1 \wedge \dots \wedge da_n \wedge db_n \wedge dq_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dq_l} \wedge \widehat{dq_{l+1}} \wedge \dots \wedge dq_m \\ &= (-1)^{(l-1)(m_1-1)} da_1 \wedge db_1 \wedge \dots \wedge da_n \wedge db_n \wedge dq_{l+2} \wedge \dots \wedge dq_{l+m_1} \bigwedge \\ &\qquad \bigwedge dq_1 \wedge \dots \wedge dq_{l-1} \wedge dq_{l+m_1+1} \wedge \dots \wedge dq_m\end{aligned}.$$

On change de variables en posant :

$$a_1 + ib_1 - 1 = \rho_1 e^{i\theta_1} \quad p'_j = \frac{p_j - 1}{\rho_1} \quad (2 \leq j \leq n), \qquad q'_k = \frac{q_k - 1}{\rho_1} \quad (l+2 \leq k \leq l+m_1).$$

Alors

$$\begin{aligned}\Omega = (-1)^{lm_1+l+m_1+1} \rho_1^{-(n+m_1-5)} d\rho_1 \wedge d\theta_1 \wedge da_2 \wedge db_2 \wedge \dots \wedge da_n \wedge db_n \wedge dq_{l+2} \wedge \dots \wedge dq_{l+m_1} \bigwedge \\ \bigwedge dq_1 \wedge \dots \wedge dq_{l-1} \wedge dq_{l+m_1+1} \wedge \dots \wedge dq_m\end{aligned}.$$

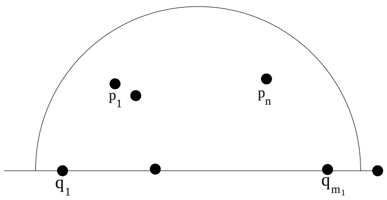
On peut donc écrire de façon un peu abusive :

$$\Omega \simeq (-1)^{lm_1+l+m_1+1} d\rho_1 \bigwedge \Omega_1 \wedge (-1)^{l-1+l+1-2}\Omega_2$$

et puisque $\rho_1 > 0$ et la face F est obtenue pour $\rho_1 = 0$, son orientation est donnée par :

$$\Omega_F = (-1)^{lm_1+l+m_1}\Omega_1 \wedge \Omega_2.$$

Sous-cas 3 : $n = n_1 > 0$ (et donc $m \geq m_1 + 1$) et $l = 0$



C'est le même calcul que ci-dessus, on pose $q_{m_1} = 0$, $q_{m_1+1} = 1$, on obtient :

$$\Omega = (-1)^{2m_1+2} da_1 \wedge db_1 \wedge ... \wedge da_n \wedge db_n \wedge dq_1 \wedge ... \wedge \widehat{dq_{m_1}} \wedge \widehat{dq_{m_1+1}} \wedge ... \wedge dq_m.$$

On change de variables en posant :

$$a_1 + ib_1 = \rho_1 e^{i\theta_1} \quad p'_j = \frac{p_j}{\rho_1} \quad (2 \leq j \leq n), \qquad q'_k = \frac{q_k}{\rho_1} \quad (1 \leq k \leq m_1 - 1).$$

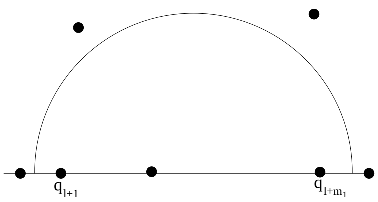
Alors

$$\begin{aligned}\Omega &= \rho_1 d\rho_1 \wedge d\theta_1 \wedge da_2 \wedge db_2 \wedge ... \wedge da_n \wedge db_n \wedge dq_1 \wedge ... \wedge dq_{m_1-1} \bigwedge dq_{m_1+2} \wedge ... \wedge dq_m \\ &\simeq d\rho_1 \bigwedge (-1)^{m_1-1}\Omega_1 \wedge (-1)^{1-1+2-2}\Omega_2\end{aligned}$$

et puisque $\rho_1 > 0$ et la face F est obtenue pour $\rho_1 = 0$, son orientation est donnée par :

$$\Omega_F = (-1)^{lm_1+l+m_1}\Omega_1 \wedge \Omega_2.$$

Sous-cas 4 : $n \geq n_1 = 0$ (et donc $m_1 > 1$) et $l > 0$



On suppose que q_{l+1}, ..., q_{l+m_1} collapsent. On paramètre l'espace $C^+_{\{p_1,\dots,p_n\};\{q_1,\dots,q_m\}}$ par $q_l = 0$, $q_{l+1} = 1$. La forme d'orientation est :

$$\begin{aligned}\Omega &= (-1)^{2l+2} da_1 \wedge db_1 \wedge \dots \wedge da_n \wedge db_n \wedge dq_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dq_l} \wedge \widehat{dq_{l+1}} \wedge \dots \wedge dq_m \\ &= (-1)^{(l-1)(m_1-1)} dq_{l+2} \wedge \dots \wedge dq_{l+m_1} \bigwedge \\ &\qquad \bigwedge da_1 \wedge db_1 \wedge \dots \wedge da_n \wedge db_n \wedge dq_1 \wedge \dots \wedge dq_{l-1} \wedge dq_{l+m_1+1} \wedge \dots \wedge dq_m\end{aligned}.$$

On change de variables en posant :

$$q'_k = \frac{q_k - q_{l+2}}{q_{l+2} - 1} \quad (l+3 \le k \le l+m_1).$$

Alors :

$$\begin{aligned}\Omega &\simeq (-1)^{lm_1+l+m_1+1} dq_{l+2} \wedge dq'_{l+3} \wedge \dots \wedge dq'_{l+m_1} \bigwedge \\ &\qquad \bigwedge da_1 \wedge db_1 \wedge \dots \wedge da_n \wedge db_n \wedge dq_1 \wedge \dots \wedge dq_{l-1} \wedge dq_{l+m_1+1} \wedge \dots \wedge dq_m\end{aligned}.$$

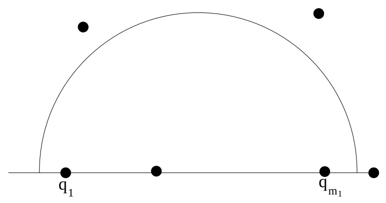
On peut donc écrire de façon un peu abusive :

$$\Omega = (-1)^{lm_1+l+m_1+1} dq_{l+2} \bigwedge \Omega_1 \wedge (-1)^{l-1+l+1-2} \Omega_2$$

et puisque $q_{l+2} - 1 > 0$ et la face F est obtenue pour $q_{l+2} - 1 = 0$, son orientation est donnée par :

$$\Omega_F = (-1)^{lm_1+l+m_1} \Omega_1 \wedge \Omega_2.$$

Sous-cas 5 : $n \ge n_1 = 0$ (et donc $m_1 > 1$), $l = 0$ et $m_1 < m$



On pose $q_{m_1} = 0$, $q_{m_1+1} = 1$, on obtient :

$$\Omega = (-1)^{2m_1+2} da_1 \wedge db_1 \wedge \dots \wedge da_n \wedge db_n \wedge dq_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dq_{m_1}} \wedge \widehat{dq_{m_1+1}} \wedge \dots \wedge dq_m.$$

On change de variables en posant :

$$q'_k = \frac{q_k - q_{m_1-1}}{-q_{m_1-1}} \quad (1 \le k \le m_1 - 2)$$

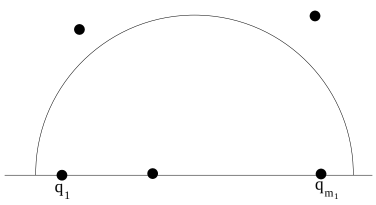
Alors :

$$\begin{aligned}\Omega &\simeq dq'_1 \wedge \dots \wedge dq'_{m_1-2} \bigwedge dq_{m_1-1} \bigwedge da_1 \wedge db_1 \wedge \dots \wedge da_n \wedge db_n \wedge dq_{m_1+2} \wedge \dots \wedge dq_m \\ &= (-1)^{m_1} dq_{m_1-1} \wedge \Omega_1 \wedge (-1)^{1+2-1} \Omega_2.\end{aligned}$$

Maintenant $q_{m_1-1} < 0$ et l'orientation de la face est encore :

$$\Omega_F = (-1)^{lm_1+m_1+l}\Omega_1 \wedge \Omega_2.$$

Sous-cas 6 : $n \geq n_1 = 0$ (et donc $m_1 > 1$), $l = 0$ et $m_1 = m$ et donc $n > 0$



On pose $q_1 = 0$ et $p_1 = e^{i\theta_1}$. La forme Ω est

$$\begin{aligned}\Omega &= d\theta_1 \wedge da_2 \wedge db_2 \wedge ... \wedge da_n \wedge db_n \wedge dq_2 \wedge ... \wedge dq_m \\ &= (-1)^{m-1} dq_2 \wedge ... \wedge dq_m \bigwedge d\theta_1 \wedge da_2 \wedge db_2 \wedge ... \wedge da_n \wedge db_n.\end{aligned}$$

On change de variables en posant :

$$q'_k = \frac{q_k - q_2}{q_2} \quad (3 \leq k \leq m)$$

Alors :

$$\Omega \simeq (-1)^{m-1} dq_2 \wedge (-1)^{1-1+2-2}\Omega_1 \wedge \Omega_2.$$

Puisque $q_2 > 0$ et F apparaît pour $q_2 = 0$, l'orientation de la face est encore :

$$\Omega_F = (-1)^{lm_1+l+m_1}\Omega_1 \wedge \Omega_2.$$

Tout nuage de point correspondant à une face de type 2 relève d'un de ces six sous-cas. Ceci termine la démonstration du lemme I.2.2.

•

II. Algèbres symétriques et extérieures sur les espaces gradués

II.1. La catégorie des espaces gradués

Un espace vectoriel sur un corps k est *gradué* s'il est muni d'une $\mathbb{Z}-$graduation :

$$V = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_n$$

Le degré d'un élément homogène x sera noté $|x|$. Un espace gradué sera toujours considéré comme un super-espace vectoriel, la $\mathbb{Z}_2-$graduation étant déduite de la $\mathbb{Z}-$graduation :

$$V_+ = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_{2n} \qquad V_- = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_{2n+1}$$

Si V et W sont des espaces gradués, il existe une graduation naturelle sur $V \oplus W$, $V \otimes W$, $\mathrm{Hom}_k(V, W)$. Un *morphisme d'espaces gradués* entre V et W est par définition un élément de *degré zéro* dans $\mathrm{Hom}_k(V, W)$.

Une *algèbre graduée* est un espace gradué B muni d'une structure d'algèbre telle que la multiplication $m : B \otimes B \to B$ est un morphisme d'espaces gradués, c'est-à-dire :

$$B_i B_j \subset B_{i+j}$$

On définit de la même manière les notions de $B-$ modules gradués à gauche ou à droite. Si A et B sont deux algèbres graduées, le produit :

$$\begin{aligned} m_{A\otimes B} : A \otimes B \otimes A \otimes B &\longrightarrow A \otimes B \\ a \otimes b \otimes a' \otimes b' &\longmapsto (-1)^{|b||a'|} aa' \otimes bb' \end{aligned}$$

est associatif et munit $A \otimes B$ d'une structure d'algèbre graduée. Si M (resp. N) est un A-module (resp. un B-module) gradué à gauche, la même règle des signes (la *règle de Koszul*) permet de définir une structure de $A \otimes B-$module gradué à gauche sur $M \otimes N$.

Si A, A', B, B' sont des espaces gradués, l'identification de $\mathrm{Hom}_k(A \otimes B, A' \otimes B')$ avec $\mathrm{Hom}_k(A, A') \otimes \mathrm{Hom}_k(B, B')$ se fait avec la même règle des signes :

$$(f \otimes g)(a \otimes b) = (-1)^{|g||a|} f(a) \otimes g(b)$$

Une algèbre graduée est dite *commutative* si on a :

$$xy - (-1)^{|x||y|} yx = 0$$

Une cogèbre graduée C se définit de manière similaire : la comutiplication doit vérifier :

$$\Delta C_j \subset \sum_{k+l=j} C_k \otimes C_l$$

On définit une structure de cogèbre graduée sur le produit tensoriel de deux cogèbres graduées en appliquant la même règle sur les signes que dans le cas des algèbres.

Une *dérivation de degré* i dans une algèbre graduée B est un morphisme linéaire $d : B \to B$ de degré i tel que :

$$d(xy) = dx.y + (-1)^{i|x|} x.dy$$

ce qui s'écrit encore :

$$dm = m(d \otimes I + I \otimes d)$$

où m désigne la multiplication de l'algèbre (attention à la règle des signes). Une *codérivation de degré* i dans une cogèbre graduée C est un morphisme linéaire $d : C \to C$ de degré i tel que si $\Delta X = \sum_{(x)} x' \otimes x''$ on a :

$$\Delta dx = \sum_{(x)} dx' \otimes x'' + (-1)^{i|x'|} x' \otimes dx''$$

ou encore :

$$\Delta d = (d \otimes I + I \otimes d)\Delta$$

Enfin une *algèbre de Lie graduée* est un espace vectoriel gradué $\mathfrak{g}$ muni d'un crochet $[.,.]$ tel que :

1) $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j}$
2) $[x, y] = -(-1)^{|x||y|}[y, x]$
3) $(-1)^{|x||z|}[[x, y], z] + (-1)^{|y||x|}[[y, z], x] + (-1)^{|z||y|}[[z, x], y] = 0$
(identité de Jacobi graduée).

L'identité de Jacobi graduée s'exprime aussi en disant que $\mathrm{ad}\, x = [x, .]$ est une dérivation (de degré $|x|$).

Une algèbre de lie graduée est *différentielle* si elle est munie d'une différentielle d de degré 1 ($d : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}[1]$), telle que :

$$d^2 = 0, \quad d([x,y]) = [dx,y] + (-1)^{1.|x|}[x,dy].$$

II.2 La règle de Koszul

La raison profonde qui fait que “la règle des signes marche” est la suivante : la catégorie des espaces vectoriels $\mathbb{Z}_2-$gradués munie du produit tensoriel $\otimes$ usuel et des applications :

$$\begin{aligned} \tau_{A,B} : A \otimes B &\longrightarrow B \otimes A \\ a \otimes b &\longmapsto (-1)^{|a||b|} b \otimes a \end{aligned}$$

est une *catégorie tensorielle tressée*, c'est à dire que les *tressages* $\tau_{A,B}$ sont fonctoriels :

$$\begin{array}{ccc} A \otimes B & \xrightarrow[\tau_{A,B}]{} & B \otimes A \\ {\scriptstyle f\otimes g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g\otimes f} \\ A' \otimes B' & \xrightarrow[\tau_{A',B'}]{} & B' \otimes A' \end{array}$$

et vérifient :

$$\tau_{A\otimes B,C} = (\tau_{A,C} \otimes I_B)(I_A \otimes \tau_{B,C})$$

De ces deux propriétés on déduit facilement l'équation de l'hexagone, c'est-à-dire la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} & & A \otimes B \otimes C & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ A \otimes C \otimes B & & & & B \otimes A \otimes C \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ C \otimes A \otimes B & & & & B \otimes C \otimes A \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & & C \otimes B \otimes A & & \end{array}$$

La catégorie tensorielle tressée des espaces $\mathbb{Z}_2-$gradués peut aussi se voir comme la catégorie des modules sur l'algèbre de Hopf quasi-triangulaire (H_2, R) où H_2 est l'algèbre du groupe $\mathbb{Z}_2$ munie de la multiplication et de la comultiplication usuelle, mais où la $R-$matrice est non triviale.

Dans cette catégorie le carré des tressages est toujours l'identité (c'est une catégorie tensorielle stricte). On peut faire de même avec des espaces $\mathbb{Z}_k-$gradués en remplaçant -1 par $e^{\frac{2i\pi}{k}}$. On obtient ainsi la catégorie des *espaces vectoriels anyoniques*, qui est tressée de manière effective pour $k \geq 3$ [M].

II.3. Décalages

Soit V un espace gradué. On pose :

$$V[1] = V \otimes k[1]$$

où $k[1]$ est l'espace gradué tel que $k_n = \{0\}$ pour $n \neq -1$ et $k_{-1} = k$. Autrement dit $V[1]$ et V ont même espace vectoriel sous-jacent, mais le degré d'un élément est baissé d'une unité dans $V[1]$. On posera en outre :

$$[n] = [1]^n$$

pour tout entier n.

II.4. Algèbres symétriques et extérieures

L'algèbre symétrique $S(V)$ (resp. l'algèbre extérieure $\Lambda(V)$) est définie par :

$$S(V) = T(V)/ < x \otimes y - (-1)^{|x||y|} y \otimes x > \qquad \text{resp.}\Lambda(V) = T(V)/ < x \otimes y + (-1)^{|x||y|} y \otimes x >$$

Ce sont des espaces gradués de manière naturelle. La proposition suivante est implicite dans [K1] :

Proposition II.4.1 (symétrisation).
Pour tout espace vectoriel gradué V et pour tout $n > 0$ on a un isomorphisme naturel :

$$\Phi_n : S^n(V[1]) \xrightarrow{\sim} \Lambda^n(V)[n]$$

donné par :

$$\Phi_n(x_1.\dots.x_n) = \alpha(x_1,\dots,x_n)x_1 \wedge \dots \wedge x_n$$

où, pour des x_i homogènes, $\alpha(x_1,\dots,x_n)$ désigne la signature de la permutation "unshuffle" qui range les x_i pairs dans V à gauche sans les permuter, et les x_i impairs dans V à droite sans les permuter.

Démonstration. Soit I (resp. J) l'ensemble des i tels que x_i soit de degré pair (resp. impair), et $\alpha(I,J) = \alpha(x_1,\dots,x_n)$ la signature de la permutation-rangement associée. L'isomorphisme Φ_n est donné par la restriction à $S^n(V[1])$ de la composition des trois flèches du diagramme ci-dessous (la flèche supérieure est un isomorphisme d'algèbres) :

$$\begin{array}{ccc}
S(V[1]) & \xrightarrow{\sim} & S(V[1]_+) \otimes S(V[1]_-) \\
x_1 \dots x_n & \longmapsto & x_I \otimes x_J \\
 & & \downarrow \\
\Lambda(V) & \xleftarrow{\sim} & \Lambda(V_-) \otimes \Lambda(V_+) \\
\alpha(I,J)x_1 \wedge \dots \wedge x_n & \longleftarrow\!\shortmid & x_{\wedge I} \otimes x_{\wedge J}
\end{array}$$

Enfin si les x_j sont de degré d_j dans $V[1]$, $x_1 \dots x_n$ est de degré $d_1 + \dots + d_n$ dans $S^n(V[1])$, donc de degré $d_1 + \dots + d_n + n$ dans $S^n(V)$. $\Phi_n(x_1 \dots x_n)$ est donc de degré $d_1 + \dots + d_n + n$ dans $\Lambda^n(V)$, donc de degré $d_1 + \dots + d_n$ dans $\Lambda^n(V)[n]$.

•

Remarque : L'application $\Phi = \oplus \Phi_n$ est un morphisme d'espace vectoriel gradué mais pas d'algèbre. Il est d'ailleurs vain de vouloir chercher un isomorphisme d'algèbres entre $S(V[1])$ et $\bigoplus \Lambda^n(V)[n]$, car deux éléments de parité opposée commutent dans le premier cas, et anticommutent dans le second cas.

II.5. Un exemple : $Tens(\mathbb{R}^d)$

L'algèbre des tenseurs contravariants totalement antisymétriques est une algèbre naturellement graduée par l'ordre des tenseurs. On aimerait la voir comme l'espace sous-jacent à une algèbre symétrique. Notons donc V l'espace vectoriel $\mathcal{X}\left(\mathbb{R}^d\right)$ des champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^d$, gradué par $V = V_0$. On identifie $Tens_n\left(\mathbb{R}^d\right) = \wedge^n V$ à $S^n\left(V[1]\right)[-n]$ par Φ_n.
Dans la suite, on posera

$$T_{poly}\left(\mathbb{R}^d\right) = Tens\left(\mathbb{R}^d\right)[1].$$

III. Variétés formelles graduées

III.1. Variétés formelles

On se place sur le corps des réels ou des complexes. On se donne un voisinage ouvert U de 0 dans $\mathbb{R}^d$. Une fonction analytique φ sur U à valeurs dans $\mathbb{C}$ est déterminée par son développement de Taylor en 0 :

$$\varphi(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} \frac{x^\alpha}{\alpha!}(\partial^\alpha \varphi)(0)$$

On établit ainsi une dualité non dégénérée entre les fonctions analytiques sur U et les distributions de support $\{0\}$. Plus abstraitement on peut remplacer les fonctions analytiques par les jets d'ordre infini au point 0.

On appelle *variété formelle*, ou voisinage formel de 0, l'espace $\overline{\mathcal{C}}$ des distributions de support $\{0\}$. La structure d'algèbre commutative sur l'espace des fonctions analytiques sur U détermine une structure de cogèbre cocommutative sur son dual restreint, qui est exactement $\overline{\mathcal{C}}$. La comultiplication est donnée par :

$$< \Delta v, \varphi \otimes \psi >=< v, \varphi\psi > .$$

Considérant l'espace tangent V à la variété U en 0, on a en fait un isomorphisme de cogèbres entre $\overline{\mathcal{C}}$ et $S(V)$, où la comultiplication Δ de $S(V)$ est le morphisme d'algèbres tel que $\Delta(v) = v \otimes 1 + 1 \otimes v$ pour $v \in V$.

On considèrera la version pointée :

$$\mathcal{C} = S^+(V) = \bigoplus_{n \geq 1} S^n(V)$$

C'est la cogèbre colibre cocommutative sans co-unité construite sur V. C'est aussi le dual restreint de l'algèbre des jets d'ordre infini qui s'annulent en 0. On remarque que $\Delta v = 0$ si et seulement si v appartient à V.

Un *champ de vecteurs* sur la variété formelle pointée est donné par une codérivation $Q : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ (c'est donc un champ de vecteurs qui s'annule en 0). Un morphisme de variétés formelles pointées est donné par un morphisme de cogèbres. Tout morphisme f de variétés pointées induit un morphisme de variétés formelles par transport des distributions de support $\{0\}$:

$$< f_* T, \varphi >=< T, \varphi \circ f >$$

Or, par propriété universelle des cogèbres cocommutatives colibres, une codérivation $Q : S^+(V) \to S^+(V)$ (resp. un morphisme de cogèbres $\mathcal{F} : S^+(V_1) \to S^+(V_2)$) est entièrement déterminé(e) par sa composition avec la projection sur V (resp. V_2), c'est à dire par une suite d'applications :

$$Q_n : S^n V \longrightarrow V \qquad (\text{resp. } \mathcal{F}_n : S^n V_1 \longrightarrow V_2)$$

qui sont par définition les *coefficients de Taylor* du champ de vecteurs Q ou du morphisme $\mathcal{F}$.

III.2. Variétés formelles graduées pointées

On fait la même construction algébrique dans la catégorie des espaces vectoriels gradués : une *variété formelle graduée pointée* est une cogèbre $\mathcal{C}$ isomorphe à $S^+(V)$ où V est cette fois-ci un espace gradué. Toutes les notions du § III.1 s'appliquent, à ceci près que l'on peut considérer des champs de vecteurs de différents degrés. Nous allons donner une formule explicite pour un champ de vecteurs ou un morphisme en fonction de ses coefficients de Taylor :

Théorème III.2.1.
Soit i un entier, soient V, V_1, V_2 des espaces gradués, et deux suites d'applications linéaires $Q_n : S^n V \to V$ de degré i, $\mathcal{F}_n : S^n V_1 \to V_2$ de degré zéro. Alors il existe une unique codérivation Q de degré i de $S^+(V)$ et un unique morphisme $\mathcal{F} : S^+(V_1) \to S^+(V_2)$ dont les Q_n et les $\mathcal{F}_n$ sont les coefficients de Taylor respectifs. Q et $\mathcal{F}$ sont donnés par les formules explicites :

$$Q(x_1 \dots x_n) = \sum_{\substack{I \amalg J = \{1, \dots, n\} \\ I, J \neq \emptyset}} \varepsilon_x(I, J)\big(Q_{|I|}(x_I)\big).x_J$$

$$\mathcal{F}(x_1 \dots x_n) = \sum_{j \geq 1} \frac{1}{j!} \sum_{\substack{I_1 \amalg \cdots \amalg I_j = \{1, \dots, n\} \\ I_1, \dots, I_j \neq \emptyset}} \varepsilon_x(I_1, \dots, I_j) \mathcal{F}_{|I_1|}(x_{I_1}) \cdots \mathcal{F}_{|I_j|}(x_{I_j})$$

où $\varepsilon_x(I_1, \dots, I_j)$ désigne la signature de l'effet sur les x_i impairs de la permutation-battement associée à la partition $(I_1, \dots, I_j)$ de $\{1, \dots, n\}$.

Démonstration. Supposons que tous les coefficients de Taylor de la codérivation Q sont nuls. En particulier $Q(x) = 0$ pour tout $x \in V$. Supposons que $Q(x_1 \ldots x_k) = 0$ pour tout $k \leq n$ Alors :

$$\Delta Q(x_1 \ldots x_{n+1}) = (Q \otimes I + I \otimes Q)\Delta(x_1 \ldots x_{n+1}) = 0,$$

compte tenu de l'hypothèse de récurrence et de l'expression explicite de $\Delta(x_1 \ldots x_{n+1})$:

$$\Delta(x_1 \ldots x_{n+1}) = \sum_{I \amalg J = \{1,\ldots,n+1\},\ I,J \neq \emptyset} \varepsilon_x(I,J) x_I \otimes x_J$$

Donc $Q(x_1 \ldots x_{n+1}) \in V$, donc est nul puisque le $n+1$-ème coefficient de Taylor est nul. Le raisonnement est analogue dans le cas d'un morphisme, et montre qu'une codérivation ou un morphisme est entièrement déterminé(e) par ses coefficients de Taylor.

Nous vérifions directement les formules (les vérifications à l'ordre 2 ou 3 sont laissées au lecteur à titre d'exercice).

1. *Cas d'une codérivation* : On écrit la formule explicite pour $\Delta(x_1 \ldots x_n)$ en utilisant la cocommutativité graduée, ce qui permet de ne retenir que la moitié des partitions :

$$\Delta(x_1 \ldots x_n) = (1+\tau) \sum_{K \amalg L = \{1,\ldots,n\},\ 1 \in K,\ L \neq \emptyset} \varepsilon_x(K,L) x_K \otimes x_L$$

On a donc, en prenant pour Q l'expression explicite du théorème :

$$\begin{aligned}
\Delta Q(x_1 \ldots x_n) &= \sum_{I \amalg J = \{1,\ldots,n\}, I,J \neq \emptyset} \varepsilon_x(I,J) \Delta(Q_{|I|} x_I . x_J) \\
&= (1+\tau) \sum_{I \amalg J = \{1,\ldots,n\}, I,J \neq \emptyset} \ \sum_{K \amalg L = J,\ L \neq \emptyset} \varepsilon_x(I,J) \varepsilon_{x_J}(K,L) Q_{|I|}(x_I).x_K \otimes x_L \\
&= (1+\tau) \sum_{I \amalg J \amalg K = \{1,\ldots,n\},\ I,K \neq \emptyset} \varepsilon_x(I,J,K) Q_{|I|}(x_I).x_J \otimes x_K
\end{aligned}$$

Par ailleurs on a :

$$\begin{aligned}
(Q \otimes I + I \otimes Q)\Delta(x_1 \ldots x_n) &= (1+\tau) \sum_{L \amalg K = \{1,\ldots,n\},\ L,K \neq \emptyset} \varepsilon_x(L,K) Q(x_L) \otimes x_K \\
&= (1+\tau) \sum_{L \amalg K = \{1,\ldots,n\},\ L,K \neq \emptyset} \varepsilon_x(L,K) \sum_{I \amalg J = L,\ I,J \neq \emptyset} \varepsilon_{x_L}(I,J) Q_{|I|}(x_I).x_J \otimes x_K \\
&= (1+\tau) \sum_{I \amalg J \amalg K = \{1,\ldots,n\},\ ,I,J,K \neq \emptyset} \varepsilon_x(I,J,K) Q_{|I|}(x_I).x_J \otimes x_K
\end{aligned}$$

d'où le fait que Q est bien une codérivation.

2. *Cas d'un morphisme* : le calcul est un peu plus compliqué : on commence par écrire Δ et $\mathcal{F}$ de manière redondante, en employant des permutations qui ne sont pas forcément des battements :

$$\begin{aligned}
\Delta(x_1 \ldots x_n) &= \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{r=1}^{n} \frac{\varepsilon_x(\sigma)}{r!(n-r)!} x_{\sigma_1} \ldots x_{\sigma_r} \otimes x_{\sigma_{r+1}} \ldots x_{\sigma_n} \\
\mathcal{F}(x_1 \ldots x_n) &= \sum_{j \geq 1} \frac{1}{j!} \sum_{k_1 + \cdots + k_j = n} \frac{1}{k_1! \ldots k_j!} \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon_x(\sigma) \mathcal{F}_{k_1}(x_{\sigma_1} \ldots x_{\sigma_{k_1}}) \ldots \mathcal{F}_{k_j}(x_{\ldots} \ldots x_{\sigma_n})
\end{aligned}$$

On vérifie directement l'égalité :

$$\Delta \mathcal{F}(x_1 \ldots x_n) = (\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}) \Delta(x_1 \ldots x_n)$$

L'écriture par blocs : $x_1 \dots x_n = (x_1 \dots x_{k_1}) \dots (x_{k_1+\cdots+k_{j-1}+1} \dots x_n)$ induit par permutation des blocs un plongement du groupe de permutations S_j dans S_n. On calcule :

$$\begin{aligned}
\Delta\mathcal{F}(x_1 \dots x_n) &= \sum_{j\geq 2} \frac{1}{j!} \sum_{k_1+\cdots+k_j=n} \frac{1}{k_1! \dots k_j!} \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon_x(\sigma)\Delta\big(\mathcal{F}_{k_1}(x_{\sigma_1} \dots x_{\sigma_{k_1}}) \dots \mathcal{F}_{k_j}(x_{\dots} \dots x_{\sigma_n})\big) \\
&= \sum_{j\geq 2} \frac{1}{j!} \sum_{k_1+\cdots+k_j=n} \frac{1}{k_1! \dots k_j!} \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon_x(\sigma) \sum_{\tau\in S_j\subset S_n} \\
&\qquad \sum_{r=1}^{j-1} \frac{\varepsilon_{\sigma x}(\tau)}{r!(j-r)!} \mathcal{F}_{k_{\tau_1}}(\dots) \dots \mathcal{F}_{k_{\tau_r}}(\dots) \otimes \mathcal{F}_{k_{\tau_{r+1}}}(\dots) \dots \mathcal{F}_{k_{\tau_j}}(\dots)
\end{aligned}$$

Dans le dernier membre de l'égalité ci-dessus, chaque terme se trouve répété autant de fois qu'il y a d'éléments dans S_j. On a donc :

$$\begin{aligned}
\Delta\mathcal{F}(x_1 \dots x_n) = &\sum_{j\geq 2} \sum_{k_1+\cdots+k_j=n} \frac{1}{k_1! \dots k_j!} \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon_x(\sigma) \\
&\sum_{r=1}^{j-1} \frac{1}{r!(j-r)!} \mathcal{F}_{k_1}(\dots) \dots \mathcal{F}_{k_r}(\dots) \otimes \mathcal{F}_{k_{r+1}}(\dots) \dots \mathcal{F}_{k_j}(\dots)
\end{aligned}$$

Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}\otimes\mathcal{F})\Delta(x_1 \dots x_n) &= \sum_{\sigma\in S_n} \sum_{r=1}^{n-1} \frac{\varepsilon_x(\sigma)}{r!(n-r)!} \mathcal{F}(x_{\sigma_1} \dots x_{\sigma_r}) \otimes \mathcal{F}(x_{\sigma_{r+1}} \dots x_{\sigma_n}) \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{\alpha\in S_r\times S_{n-r}\subset S_n} \frac{\varepsilon_x(\sigma)\varepsilon_{\sigma x}(\alpha)}{r!(n-r)!} \\
&\qquad \sum_{j,k\geq 1} \frac{1}{j!k!} \sum_{\substack{r_1+\cdots+r_j=r \\ s_1+\cdots+s_k=n-r}} \frac{1}{r_1! \dots r_j! s_1! \dots s_k!} \\
&\qquad \mathcal{F}_{r_1}(x_{\alpha_{\sigma_1}} \dots x_{\alpha_{\sigma_{r1}}}) \dots \mathcal{F}_{r_j}(\dots) \otimes \mathcal{F}_{s_1}(\dots) \dots \mathcal{F}_{s_k}(\dots x_{\alpha_{\sigma_n}})
\end{aligned}$$

Dans le dernier membre de l'égalité ci-dessus, chaque terme se trouve répété autant de fois qu'il y a d'éléments dans $S_r \times S_{n-r}$. Donc :

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}\otimes\mathcal{F})\Delta(x_1 \dots x_n) = &\sum_{\sigma\in S_n} \sum_{r=1}^{n-1} \varepsilon_x(\sigma) \frac{1}{j!k!} \sum_{\substack{r_1+\cdots+r_j=r \\ s_1+\cdots+s_k=n-r}} \frac{1}{r_1! \dots r_j! s_1! \dots s_k!} \\
&\mathcal{F}_{r_1}(x_{\sigma_1} \dots x_{\sigma_{r_1}}) \dots \mathcal{F}_{r_j}(\dots) \otimes \mathcal{F}_{s_1}(\dots) \dots \mathcal{F}_{s_k}(\dots x_{\sigma_n})
\end{aligned}$$

Posant $l = j + k$ et procédant à la renumérotation $(s_1, \dots s_k) = (r_{j+1}, \dots r_l)$ on obtient :

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}\otimes\mathcal{F})\Delta(x_1 \dots x_n) &= \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon_x(\sigma) \sum_{l\geq 2} \sum_{r_1+\cdots+r_l=n} \sum_{k=1}^{l-1} \frac{1}{k!(l-k)!} \frac{1}{r_1! \dots r_l!} \\
&\qquad \mathcal{F}_{r_1}(x_{\sigma_1} \dots x_{\sigma_{r1}}) \dots \mathcal{F}_{r_k}(\dots) \otimes \mathcal{F}_{r_{k+1}}(\dots) \dots \mathcal{F}_{r_l}(\dots x_{\sigma_n}) \\
&= \Delta\mathcal{F}(x_1 \dots x_n)
\end{aligned}$$

compte tenu du calcul précédent, ce qui démontre le théorème.

•

IV. L_∞-algèbres et L_∞-morphismes

A tout espace vectoriel gradué V on associe (attention au décalage!) la variété formelle $(V[1],0)$ pointée, c'est à dire la cogèbre colibre sans co-unité :

$$\mathcal{C}(V)=S^+(V[1]) \xrightarrow[\Phi]{\sim} \sum_{k\geq 1}(\Lambda^k V)[k]$$

où Φ est l'isomorphisme décrit au § II.4.

Un *pré-L_∞-morphisme* entre deux espaces gradués V_1 et V_2 est par définition un morphisme de variétés formelles, c'est-à-dire un morphisme de cogèbres :

$$\mathcal{F}:\mathcal{C}(V_1)\longrightarrow \mathcal{C}(V_2)$$

qui est donc déterminé par ses coefficients de Taylor $\mathcal{F}_j$. Posant $\overline{\mathcal{F}}_j=\mathcal{F}_j\circ\Phi^{-1}$ on a :

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{F}}_1 &: V_1 \longrightarrow V_2\\ \overline{\mathcal{F}}_2 &: \Lambda^2 V_1 \longrightarrow V_2[-1]\\ \overline{\mathcal{F}}_3 &: \Lambda^3 V_1 \longrightarrow V_2[-2]\\ &\vdots\end{aligned}$$

IV.1. Algèbres de Lie homotopiques

Par définition une *L_∞-algèbre*, ou *algèbre de Lie homotopique* est une variété formelle graduée pointée du type $(\mathfrak{g}[1],0)$, où $\mathfrak{g}$ est un espace vectoriel gradué, munie d'un champ de vecteurs Q de degré 1 vérifiant l'*équation maîtresse* :

$$[Q,Q]=2Q^2=0$$

C'est-à-dire que Q est une codérivation de carré nul de la cogèbre $\mathcal{C}(\mathfrak{g})$. Les coefficients de Taylor $Q_k:S^k(\mathfrak{g}[1])\to\mathfrak{g}[2]$ donnent naissance aux coefficients $\overline{Q}_k=Q_k\circ\Phi^{-1}$:

$$\begin{aligned}\overline{Q}_1 &: \mathfrak{g}\longrightarrow \mathfrak{g}[1]\\ \overline{Q}_2 &: \Lambda^2\mathfrak{g}\longrightarrow \mathfrak{g}\\ \overline{Q}_3 &: \Lambda^3\mathfrak{g}\longrightarrow \mathfrak{g}[-1]\\ &\vdots\end{aligned}$$

L'équation maîtresse se traduit par une infinité de relations quadratiques entre les $\overline{Q}_k$, qui s'obtiennent en écrivant explicitement pour tout k l'équation :

$$\pi Q^2(x_1\ldots x_k)=0$$

où $\pi:\mathcal{C}(\mathfrak{g})\to\mathfrak{g}[1]$ est la projection canonique. On écrit explicitement les trois premières :

Première équation : $Q_1^2(x)=0$ pour tout x dans $\mathfrak{g}$. Donc $(\mathfrak{g},Q_1)$ est un *complexe de cochaînes*.

Deuxième équation : $\pi Q^2(x.y)=0$, soit :

$$Q_2(Q_1x.y+(-1)^{|x|-1}x.Q_1y)+Q_1Q_2(x.y)=0.$$

(*Remarque* : $|x|-1$ est bien le degré de x dans la cogèbre $\mathcal{C}(\mathfrak{g})$, à cause du décalage). Traduisant cette égalité en termes de $\overline{Q}_1$ et $\overline{Q}_2$ on obtient (cf § II.4) :

$$\alpha(\overline{Q}_1x,y)\overline{Q}_2(\overline{Q}_1x\wedge y)+(-1)^{|x|-1}\alpha(x,\overline{Q}_1y)\overline{Q}_2(x\wedge\overline{Q}_1y)+\alpha(x,y)\overline{Q}_1\overline{Q}_2(x\wedge y)=0$$

Compte tenu de l'égalité :

$$\alpha(x,y) = (-1)^{|x|(|y|-1)}$$

on obtient :

$$(-1)^{|y|-1}\overline{Q}_2(\overline{Q}_1 x \wedge y) - \overline{Q}_2(x \wedge \overline{Q}_1 y) + \overline{Q}_1\overline{Q}_2(x \wedge y) = 0.$$

Posant $dx = (-1)^{|x|}\overline{Q}_1 x$ et $[x,y] = \overline{Q}_2(x \wedge y)$ on obtient finalement :

$$d[x,y] = [dx,y] + (-1)^{|x|}[x,dy]$$

donc $\overline{Q}_2$ est un crochet antisymétrique pour lequel d est une dérivation.
Remarque : On peut garder $\overline{Q}_1$ comme dérivation sans le modifier, à condition d'inverser le sens du crochet, c'est-à-dire de poser :

$$[x,y] = \overline{Q}_2(y \wedge x).$$

Nous choisirons la première solution.
Troisième équation : $\pi Q_3(x.y.z) = 0$ soit :

$$\begin{aligned} &Q_3\big(Q_1 x.y.z + (-1)^{|x|-1}x.Q_1 y.z + (-1)^{|x|+|y|-2}x.y.Q_1 z\big) + Q_1 Q_3(x.y.z) \\ &\qquad + Q_2\big(Q_2(x.y).z + (-1)^{(|y|-1)(|z|-1)}Q_2(x.z).y + (-1)^{(|x|-1)(|y|+|z|-2)}Q_2(y.z).x\big) = 0 \end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned} &Q_2\big(Q_2(x.y).z + (-1)^{(|y|-1)(|z|-1)+(|x|-1)(|z|-1)}Q_2(z.x).y \\ &\qquad + (-1)^{(|x|-1)(|y|+|z|)}Q_2(y.z).x\big) + \text{ termes en } Q_3 = 0 \end{aligned}$$

Or on a :

$$\begin{aligned} Q_2\big(Q_2(x.y).z\big) &= \alpha(Q_2(x.y),z)\alpha(x,y)\overline{Q}_2\big(\overline{Q}_2(x \wedge y) \wedge z\big) \\ &= (-1)^{(|x|+|y|)|z|}(-1)^{(|x|-1)|y|}\overline{Q}_2\big(\overline{Q}_2(x \wedge y) \wedge z\big) \end{aligned}$$

En reportant ceci dans l'équation précédente et en simplifiant par $(-1)^{|x||y|+|x||z|+|y||z|}$ on obtient finalement :

$$(-1)^{|x||z|}[[x,y],z] + (-1)^{|y||x|}[[y,z],x] + (-1)^{|z||y|}[[z,x],y] + \text{ termes en } Q_3 = 0$$

Autrement dit le crochet fourni par $\overline{Q}_2$ vérifie l'identité de Jacobi graduée "à homotopie gouvernée par $\overline{Q}_3$ près". En corollaire :

Théorème IV.1.1.
Une algèbre de Lie différentielle graduée est la même chose qu'une L_∞-algèbre pour laquelle tous les coefficients de Taylor sont nuls sauf les deux premiers.

IV.2. L'algèbre de Lie différentielle graduée des mutichamps de vecteurs

Sur $V = T_{poly}\left(\mathbb{R}^d\right)$, on dispose du crochet de Schouten défini par :

$$[\xi_1 \wedge ... \wedge \xi_k, \eta_1 \wedge ... \wedge \eta_\ell]_S = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\ell}(-1)^{i+j}[\xi_i,\eta_j] \wedge \xi_1 \wedge ... \wedge \widehat{\xi_i} \wedge ... \wedge \xi_k \wedge \eta_1 \wedge ... \wedge \widehat{\eta_j} \wedge ... \wedge \eta_\ell.$$

La symétrisation de $Tens\left(\mathbb{R}^d\right)$ nous permet de définir une opération $\bullet$.
Si α_1 est un k_1-tenseur antisymétrique :

$$\alpha_1 = \alpha_1^{i_1 \dots i_{k_1}}\partial_{i_1} \wedge \partial_{i_2} \wedge ... \wedge \partial_{i_{k_1}} \in Tens^{k_1}\left(\mathbb{R}^d\right),$$

alors :

$$\Phi_{k_1}^{-1}(\alpha_1) = \alpha_1^{i_1...i_{k_1}} \psi_{i_1}...\psi_{i_{k_1}} \in S\big(\mathcal{X}\left(\mathbb{R}^d\right)[1]\big)[-k_1]$$

où chaque $\psi_i = \Phi_1^{-1}(\partial_i)$ est une variable de degré 1.
Si maintenant α_2 est un k_2 tenseur antisymétrique, on posera :

$$\alpha_1 \bullet \alpha_2 = \Phi_{k_1+k_2-1}\left(\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \Phi_{k_1}^{-1}(\alpha_1)}{\partial \psi_i} . \frac{\partial \Phi_{k_2}^{-1}(\alpha_2)}{\partial x_i}\right)$$

en tenant compte du fait que $\frac{\partial}{\partial \psi_i}$ est un opérateur de dérivation impair.

Lemme IV.2.1 (Calcul de $\alpha_1 \bullet \alpha_2$).
On a :

$$\alpha_1 \bullet \alpha_2 = \sum_{l=1}^{k_1} (-1)^{l-1} \alpha_1^{i_1....i_{k_1}} \partial_l \alpha_2^{j_1...j_{k_2}} \partial_{i_1} \wedge ... \wedge \widehat{\partial_{i_l}} \wedge ... \wedge \partial_{i_{k_1}} \wedge \partial_{j_1} \wedge ... \wedge \partial_{j_{k_2}}$$

et

$$[\alpha_1, \alpha_2]_S = (-1)^{k_1-1} \alpha_1 \bullet \alpha_2 - (-1)^{k_1(k_2-1)} \alpha_2 \bullet \alpha_1.$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \psi_i}\left(\alpha_1^{i_1...i_{k_1}} \psi_{i_1}....\psi_{i_{k_1}}\right) &= \sum_{l=1}^{k_1} (-1)^{l-1} \alpha_1^{i_1...i_{k_1}} \psi_{i_1}.... \frac{\partial \psi_{i_l}}{\partial \psi_i} ....\psi_{i_{k_1}} \\
&= \sum_{l=1}^{k_1} (-1)^{l-1} \delta_{i_l}^{i} \alpha_1^{i_1...i_{k_1}} \psi_{i_1}....\widehat{\psi_{i_l}}....\psi_{i_{k_1}}.
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \Phi_{k_1}^{-1}(\alpha_1)}{\partial \psi_i} . \frac{\partial \Phi_{k_2}^{-1}(\alpha_2)}{\partial x_i} &= \sum_{l=1}^{k_1} (-1)^{l-1} \alpha_1^{i_1...i_{k_1}} \psi_{i_1}....\widehat{\psi_{i_l}}....\psi_{i_{k_1}} . \partial_{i_l} \alpha_2^{j_1...j_{k_2}} \psi_{j_1}....\psi_{j_{k_2}} \\
&= \sum_{l=1}^{k_1} (-1)^{l-1} \alpha_1^{i_1...i_{k_1}} \partial_{i_l} \alpha_2^{j_1...j_{k_2}} \psi_{i_1}....\widehat{\psi_{i_l}}....\psi_{i_{k_1}} . \psi_{j_1}....\psi_{j_{k_2}}.
\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
[\alpha_1, \alpha_2]_S &= \left[\alpha_1^{i_1...i_{k_1}} \partial_{i_1} \wedge ... \wedge \partial_{i_{k_1}}, \alpha_2^{j_1...j_{k_2}} \partial_{j_1} \wedge ... \wedge \partial_{j_{k_2}}\right] \\
&= \left[\alpha_1^{i_1...i_{k_1}} \partial_{i_1}, \alpha_2^{j_1...j_{k_2}} \partial_{j_1}\right] \wedge \partial_{i_2} \wedge ... \wedge \partial_{i_{k_1}} \wedge \partial_{j_1} \wedge ... \wedge \partial_{j_{k_2}} + \\
&\qquad + \sum_{l=2}^{k_2} (-1)^{1+l} \left[\alpha_1^{i_1...i_{k_1}} \partial_{i_1}, \partial_{j_l}\right] \wedge \partial_{i_2} \wedge ... \wedge \partial_{i_{k_1}} \wedge \alpha_2^{j_1...j_{k_2}} \partial_{j_1} \wedge ... \wedge \widehat{\partial_{j_l}} \wedge ... \wedge \partial_{j_{k_2}} + \\
&\qquad + \sum_{l=2}^{k_1} \left[\partial_{i_l}, \alpha_2^{j_1...j_{k_2}} \partial_{j_1}\right] \wedge \alpha_1^{i_1...i_{k_1}} \partial_{i_1} \wedge ... \wedge \widehat{\partial_{i_l}} \wedge ... \wedge \partial_{i_{k_1}} \wedge \partial_{j_2} \wedge ... \wedge \partial_{j_{k_2}} \\
&= -\sum_{l=1}^{k_2} (-1)^{l+1} \alpha_2^{j_1...j_{k_2}} \partial_{j_l} \alpha_1^{i_1...i_{k_1}} \partial_{i_1} \wedge ... \wedge \partial_{i_{k_1}} \wedge \partial_{j_1} \wedge ... \wedge \widehat{\partial_{j_l}} \wedge ... \wedge \partial_{j_{k_2}} + \\
&\qquad + \sum_{l=1}^{k_1} (-1)^{l+1} \alpha_1^{i_1...i_{k_1}} \partial_{i_l} \alpha_2^{j_1...j_{k_2}} \partial_{j_1} \wedge \partial_{i_1} \wedge ... \wedge \widehat{\partial_{i_l}} \wedge ... \partial_{i_{k_1}} \wedge \partial_{j_2} \wedge ... \wedge ... \wedge \partial_{j_{k_2}} \\
&= (-1)^{k_1-1} \alpha_1 \bullet \alpha_2 - (-1)^{(k_2-1)k_1} \alpha_2 \bullet \alpha_1.
\end{aligned}$$

Corollaire IV.2.2.
L'espace gradué $T_{poly}\left(\mathbb{R}^d\right)$, muni du crochet :

$$[\alpha_1, \alpha_2]'_S = -[\alpha_2, \alpha_1]_S$$

est aussi une algèbre de Lie graduée et :

$$[\alpha_1, \alpha_2]'_S = (-1)^{(k_1-1)k_2}\alpha_1 \bullet \alpha_2 + (-1)^{k_2}\alpha_2 \bullet \alpha_1.$$

Comme $[\ ,\ ]'_S$ définit sur $T_{poly}\left(\mathbb{R}^d\right)$ une structure d'algèbre de Lie graduée, on aura, en prenant $d = 0$, une structure de L_∞ algèbre sur $\mathcal{C}\left(T_{poly}\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$. Le champ de vecteurs Q est caractérisé par :

$$\begin{aligned} Q_1 = 0, \quad Q_2(\alpha_1 . \alpha_2) &= (-1)^{(k_1-1)k_2}[\alpha_1, \alpha_2]'_S \\ &= \alpha_1 \bullet \alpha_2 + (-1)^{k_1 k_2}\alpha_2 \bullet \alpha_1. \end{aligned}$$

IV.3. L'algèbre de Lie différentielle graduée des opérateurs polydifférentiels

On considère l'espace vectoriel $V' = D_{poly}\left(\mathbb{R}^d\right)$ des (combinaisons linéaires d') opérateurs multidifférentiels gradué par $|A| = m - 1$ si A est m-différentiel.
Sur $D_{poly}\left(\mathbb{R}^d\right)$, l'opérateur de composition naturel $\circ$ s'écrit :

$$\begin{aligned} &(A_1 \circ A_2)(f_1, ..., f_{m_1+m_2-1}) = \\ &\quad = \sum_{j=1}^{m_1}(-1)^{(m_2-1)(j-1)}A_1\left(f_1, ..., f_{j-1}, A_2\left(f_j, ..., f_{j+m_2-1}\right), f_{j+m_2}, ..., f_{m1+m_2-1}\right). \end{aligned}$$

On associe à cette composition d'une part le crochet de Gerstenhaber :

$$[A_1, A_2]_G = A_1 \circ A_2 - (-1)^{|A_1||A_2|}A_2 \circ A_1,$$

d'autre part l'opérateur de cobord :

$$dA = -[\mu, A]$$

où μ est la multiplication des fonctions : $\mu(f_1, f_2) = f_1 f_2$.
Remarque : Avec ce choix de d, $\left(D_{poly}\left(\mathbb{R}^d\right), [\ ,\ ]_G, d\right)$ est une algèbre de Lie graduée différentielle, on vérifie en effet que $d \circ d = 0$ et

$$d([A_1, A_2]) = [dA_1, A_2] + (-1)^{|A_1|}[A_1, dA_2].$$

L'opérateur de cobord de Hochschild usuel d_H donné par :

$$\begin{aligned} (d_H A)(f_1, ..., f_m) &= f_1 A(f_2, ..., f_m) - A(f_1 f_2, f_3, ..., f_m) + ... + (-1)^m A(f_1, ..., f_{m-1})f_m \\ &= (-1)^{|A|+1}dA(f_1, ..., f_m) \end{aligned}$$

n'est pas une dérivation de l'algèbre de Lie graduée $\left(D_{poly}\left(\mathbb{R}^d\right), [\ ,\ ]_G\right)$.
Le champ de vecteurs Q' sur la variété formelle $\mathcal{C}(V')$ sera donc défini par :

$$Q'_1(A) = (-1)^{|A|}dA = (-1)^{|A|+1}[\mu, A] = [A, \mu] = -d_H A$$

et

$$\begin{aligned} Q'_2(A_1 . A_2) &= (-1)^{|A_1|(|A_2|-1)}[A_1, A_2]_G \\ &= (-1)^{|A_1|(|A_2|-1)}A_1 \circ A_2 - (-1)^{|A_1|}A_2 \circ A_1. \end{aligned}$$

IV.4. $\mathbf{L}_\infty$-morphismes

Par définition un L_∞-morphisme entre deux L_∞-algèbres $(\mathfrak{g}_1, Q)$ et $(\mathfrak{g}_2, Q')$ est un morphisme de variétés formelles pointées :

$$\mathcal{F} : \mathcal{C}(\mathfrak{g}_1) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathfrak{g}_2)$$

vérifiant :

$$\mathcal{F}Q = Q'\mathcal{F}$$

Cette équation induit une infinité de relations entre les coefficients de Taylor de Q, Q' et $\mathcal{F}$, dont nous allons examiner les deux premières :
Première équation : $Q_1'\mathcal{F}_1(x) = \mathcal{F}_1 Q_1(x)$, c'est-à-dire que $\mathcal{F}_1$ est un *morphisme de complexes*.
Deuxième équation : $\pi Q'\mathcal{F}(x.y) = \pi \mathcal{F}Q(x.y)$ soit :

$$\pi Q'\big(\mathcal{F}_1 x.\mathcal{F}_1 y + \mathcal{F}_2(x.y)\big) = \pi\mathcal{F}\big(Q_1 x.y + (-1)^{(|x|-1)}x.Q_1 y + Q_2(x.y)\big)$$

soit encore :

$$Q_2'(\mathcal{F}_1 x.\mathcal{F}_1 y) + Q_1'\mathcal{F}_2(x.y) = \mathcal{F}_2\big(Q_1 x.y + (-1)^{|x|-1}x.Q_1 y\big) + \mathcal{F}_1 Q_2(x.y).$$

On traduit cette dernière égalité en termes de $\overline{Q}_1$, $\overline{Q}_2$, $\overline{\mathcal{F}}_1$, etc. :

$$\begin{aligned}(-1)^{|x|(|y|-1)}[\overline{\mathcal{F}}_1 x, \overline{\mathcal{F}}_1 y] &+ (-1)^{|x|+|y|-1+|x|(|y|-1)} d\overline{\mathcal{F}}_2(x\wedge y)\\ &= (-1)^{(|x|-1)(|y|-1)+|x|}\overline{\mathcal{F}}_2(dx\wedge y) + (-1)^{|x||y|+|x|-1+|y|}\overline{\mathcal{F}}_2(x\wedge dy) + (-1)^{|x|(|y|-1)}\overline{\mathcal{F}}_1([x,y])\end{aligned}$$

soit, en multipliant par $(-1)^{|x|(|y|-1)}$:

$$\overline{\mathcal{F}}_1([x,y]) - [\overline{\mathcal{F}}_1 x, \overline{\mathcal{F}}_1 y] = (-1)^{|x|+|y|-1}\big(d\overline{\mathcal{F}}_2(x\wedge y) - \overline{\mathcal{F}}_2(dx\wedge y) - (-1)^{|x|}\overline{\mathcal{F}}_2(x\wedge dy)\big).$$

Dans le cas où $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_2$ sont des algèbres de Lie différentielles graduées, $\mathcal{F}_1$ n'est donc pas forcément un morphisme d'algèbres de lie différentielles graduées, mais le défaut est gouverné par le coefficient suivant, c'est-à-dire $\mathcal{F}_2$.

Proposition IV.4.1 (Equation de L_∞-morphisme dans le cas des algèbres de Lie différentielles graduées). *Supposons que $(V, [\ ,\ ], d)$ et $(V', [\ ,\ ]', d')$ soient deux algèbres de Lie graduées. Notons $(\mathcal{C}(V), Q)$ et $(\mathcal{C}(V'), Q')$ les L_∞ algèbres correspondantes respectives. Soit $\mathcal{F} : \mathcal{C}(V) \longrightarrow \mathcal{C}(V')$ un morphisme de cogèbre. Alors $\mathcal{F}$ est un L_∞ morphisme si et seulement si :*

$$\begin{aligned}Q_1'\mathcal{F}_n(\alpha_1\bullet\ldots\bullet\alpha_n) &+ \frac{1}{2}\sum_{\substack{I\sqcup J=\{1,\ldots,n\}\\ I,J\neq\emptyset}} \varepsilon_\alpha(I,J)Q_2'\left(\mathcal{F}_{|I|}(\alpha_I)\bullet\mathcal{F}_{|J|}(\alpha_J)\right) =\\ &= \sum_{k=1}^n \varepsilon_\alpha(k,1,\ldots\hat{k},\ldots,n)\mathcal{F}_n\left(Q_1(\alpha_k)\bullet\alpha_1\bullet\ldots\bullet\widehat{\alpha_k}\bullet\ldots\bullet\alpha_n\right) +\\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{k\neq l}\varepsilon_\alpha(k,l,1,\ldots,\widehat{k,l},\ldots,n)\mathcal{F}_{n-1}\left(Q_2(\alpha_k\bullet\alpha_l)\bullet\alpha_1\bullet\ldots\bullet\widehat{\alpha_k}\bullet\ldots\bullet\widehat{\alpha_l}\bullet\ldots\bullet\alpha_n\right)\end{aligned}$$

où $|I|$ et $\varepsilon_\alpha(I,J)$ ont la même signification que dans le théorème III.2.1, et où $\varepsilon_\alpha(\ldots)$ désigne le signe de Quillen de la permutation indiquée entre parenthèses, c'est-à-dire la signature de la trace sur les α_j impairs de cette permutation.

Comme pour les codérivations Q et les morphismes de cogèbres $\mathcal{F}$, il est facile de voir que les applications $Q'\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}Q$ sont uniquement déterminées par leur composition avec la projection sur $V'[1]$. On déduit alors l'équation de L_∞-morphisme sous la forme $(Q'\mathcal{F})_n = (\mathcal{F}Q)_n$ pour tout n. Puisqu'on est parti de deux algèbres de Lie différentielles graduées, tous les Q_p et Q_p' sont nuls pour $p \geq 3$.

V. Quasi-isomorphismes

Par définition un *quasi-isomorphisme* entre deux L_∞-algèbres $(\mathfrak{g}_1, Q_1)$ et $(\mathfrak{g}_2, Q_2)$ est un L_∞-morphisme $\mathcal{F}$ dont le premier coefficient de Taylor $\mathcal{F}_1 : \mathfrak{g}_1[1] \to \mathfrak{g}_2[1]$ est un morphisme de complexes qui induit un isomorphisme en cohomologie (quasi-isomorphisme de complexes). Nous allons exposer la démonstration du théorème suivant ([K1] theorem 4.4) :

Théorème V.1.
Pour tout quasi-isomorphisme $\mathcal{F}$ d'une L_∞-algèbre $(\mathfrak{g}_1, Q_1)$ vers une L_∞-algèbre $(\mathfrak{g}_2, Q_2)$ il existe un L_∞-morphisme $\mathcal{G}$ de $(\mathfrak{g}_2, Q_2)$ vers $(\mathfrak{g}_1, Q_1)$ dont le premier coefficient de Taylor $\mathcal{G}_1 : \mathfrak{g}_2[1] \to \mathfrak{g}_1[1]$ soit un quasi-inverse pour $\mathcal{F}_1$.

V.1. Décomposition des L_∞-algèbres

Une L_∞-algèbre $(\mathfrak{g}, Q)$ est *minimale* si $Q_1 = 0$. Une L_∞-algèbre est *linéaire contractile* si $Q_j = 0$ pour $j \geq 2$ et si la cohomologie du complexe donné par Q_1 est triviale. On remarque que la première notion est invariante par L_∞-isomorphismes, contrairement à la seconde notion.

Proposition V.2.
Toute L_∞-algèbre $(\mathfrak{g}, Q)$ est L_∞-isomorphe à la somme directe d'une L_∞-algèbre minimale et d'une L_∞-algèbre linéaire contractile.

Démonstration. On décompose le complexe $(\mathfrak{g}, Q_1)$ en somme directe $(\mathfrak{g}', M_1) \oplus (\mathfrak{g}'', L_1)$ où M_1 est une différentielle nulle et où $(\mathfrak{g}'', L_1)$ est un complexe à cohomologie triviale (on néglige le décalage qui n'est pas essentiel ici). Pour ce faire on note comme d'habitude Z_k et B_k le noyau et l'image de la différentielle en degré k, on choisit un supplémentaire $\mathfrak{g}'_k$ de B_k dans Z_k, et un supplémentaire W_k de Z_k dans $\mathfrak{g}_k$. Posant alors $\mathfrak{g}''_k = B_k \oplus W_k$ on a la décomposition cherchée.

Cette décomposition du complexe est le point de départ de la décomposition de la l_∞-algèbre $(\mathfrak{g}, Q)$. La cogèbre associée à $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{g}''$ s'écrit :

$$\mathcal{C}(\mathfrak{g}) = \mathcal{C}(\mathfrak{g}') \oplus \mathcal{C}(\mathfrak{g}'') \oplus \mathcal{C}(\mathfrak{g}') \otimes \mathcal{C}(\mathfrak{g}'').$$

Il s'agit de construire un isomorphisme de cogèbres :

$$\mathcal{F} : \mathcal{C}(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(\mathfrak{g})$$

tel que $\mathcal{F} \circ Q = \overline{Q} \circ \mathcal{F}$, avec :

$$\begin{aligned} \overline{Q}_{|_{\mathcal{C}(\mathfrak{g}')}} &= M \\ \overline{Q}_{|_{\mathcal{C}(\mathfrak{g}'')}} &= L \\ \overline{Q}_{|_{\mathcal{C}(\mathfrak{g}') \otimes \mathcal{C}(\mathfrak{g}'')}} &= M \otimes I + I \otimes L \end{aligned}$$

où $M_1 = 0$, $L_j = 0$ pour $j \geq 2$ et L_1 à cohomologie triviale. On pose donc pour commencer $\mathcal{F}_1 = Id : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, d'où forcément $\overline{Q}_1 = Q_1 = L_1$ au vu de la décomposition du complexe rappelée ci-dessus. Il est très facile de voir qu'un L_∞-morphisme $\mathcal{F}$ vérifiant $\mathcal{F}_1 = \mathrm{Id}$ s'écrit comme un produit infini :

$$\mathcal{F} = \cdots \mathcal{F}^k \mathcal{F}^{k-1} \cdots \mathcal{F}^2$$

où $\mathcal{F}^k$ est le L_∞-morphisme ayant l'identité comme premier coefficient de Taylor, $\mathcal{F}_k$ comme $k^{\text{ième}}$ coefficient de Taylor, tous les autres coefficients étant nuls.

Chercher le coefficient $\mathcal{F}_k$ en supposant que les $\mathcal{F}_j$ sont connus pour $j < k$, c'est donc chercher un L_∞-isomorphisme $\mathcal{F}$ "lacunaire" comme le $\mathcal{F}^k$ ci-dessus, entre $(\mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{g}'', Q)$ et $(\mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{g}'', \overline{Q})$, où le champ de vecteurs impair Q vérifie :

$$\begin{aligned}
&Q_1|_{\mathcal{C}(\mathfrak{g}')} = 0\\
&Q_j\big(\mathcal{C}(\mathfrak{g}')\big) \subset \mathfrak{g}' \text{ pour } j \leq k-1\\
&Q_j\big(\mathcal{C}(\mathfrak{g}'')\big) = 0 \text{ pour } 2 \leq j \leq k-1\\
&Q_j\big(\mathcal{C}(\mathfrak{g}') \otimes \mathcal{C}(\mathfrak{g}'')\big) = 0 \text{ pour } j \leq k-1
\end{aligned}$$

et où le champ de vecteurs $\overline{Q}$ vérifie les mêmes conditions avec k à la place de $k-1$. On supposera également que les coefficients de Taylor de Q et $\overline{Q}$ sont les mêmes jusqu'à l'ordre $k-1$ et sont nuls à partir de l'ordre $k+1$. Il s'agit donc simplement de trouver $\mathcal{F}_k$ et $\overline{Q}_k$.

La condition $\mathcal{F} \circ Q = \overline{Q} \circ \mathcal{F}$ s'écrit, en négligeant les signes provenant de la supersymétrie :

$$(*) \qquad \mathcal{F}_k(Q_1(x_1 \cdots x_k)) + Q_k(x_1 \cdots x_k) = Q_1 \mathcal{F}_k(x_1 \cdots x_k) + \overline{Q}_k(x_1 \cdots x_k)$$

où l'on a désigné par la même lettre Q_1 la dérivation de l'algèbre $S(\mathfrak{g}[1])$ valant Q_1 sur $\mathfrak{g}[1]$.

1). Si tous les $x_j, j = 1 \cdots k$ sont dans le noyau Z de Q_1, l'équation $(*)$ se réduit à :

$$(*)_1 \qquad Q_k(x_1 \cdots x_k) = Q_1 \mathcal{F}_k(x_1 \cdots x_k) + \overline{Q}_k(x_1 \cdots x_k).$$

On choisit donc $\overline{Q}_k(x_1 \cdots x_k)$ comme étant la projection de $Q_k(x_1 \cdots x_k)$ sur le supplémentaire $\mathfrak{g}'$ de B dans Z. Ceci permet de définir $\mathcal{F}_k(x_1 \cdots x_k)$ à un élément z de Z près.

De plus si $x_1 = Q_1 y_1 \in B$, l'équation maîtresse $[Q, Q] = 0$ s'écrit (toujours en négligeant les problèmes de signes) :

$$Q_k(Q_1 y_1.x_2 \cdots x_k) + \text{ termes intermédiaires } + Q_1 Q_k(y_1.x_2 \cdots x_k) = 0.$$

Les termes intermédiaires sont une somme de termes du type :

$$Q_j(\cdots Q_l(\cdots) \cdots), j, l < k.$$

L'élément $Q_1 y_1$ se trouve dans une parenthèse intérieure ou dans la parenthèse extérieure. Dans les deux cas l'hypothèse de départ sur Q entraîne l'annulation de ce terme. On a donc :

$$Q_k(Q_1 y_1.x_2 \cdots x_k) = -Q_1 Q_k(y_1.x_2 \cdots x_k),$$

ce qui montre que $\overline{Q}_k(Q_1 y_1.x_2 \cdots x_k) = 0$.

2). Soit $x \in S^k(\mathfrak{g}[1])$, avec $k \geq 2$. On dit que x est de type $j, 0 \leq j \leq k$, si x s'écrit $x_1 \cdots x_k$ avec $x_1, \ldots, x_j \in W$ et $x_{j+1}, \ldots, x_k \in Z$. Nous allons déterminer $\mathcal{F}_k(x)$ par récurrence (finie) sur le type de x, le type 0 ayant été traité au 1). On remarque que $\overline{Q}_k(x) = 0$ si le type de x est non nul.

L'équation $[Q, Q] = 0$ s'écrit :

$$Q_k(Q_1(x_1 \cdots x_k)) + Q_1 Q_k(x_1 \cdots x_k) = 0,$$

les termes intermédiaires s'annulant pour la même raison que dans le 1). On a donc :

$$(M) \qquad Q_1 Q_k(x) + Q_k Q_1(x) = 0$$

pour tout $x \in S^k(\mathfrak{g}[1])$.

Soit $r \geq 1$. Supposons que $\mathcal{F}_k(x)$ soit déterminé pour tout x de type $j \leq r-2$, et déterminé à un $z \in Z$ près pour tout x de type $r-1$. Soit alors x de type r. On veut déterminer $\mathcal{F}_k(x)$ à un élément $z' \in Z$ près et préciser $\mathcal{F}_k(y)$ pour tous les y de type $r-1$.

L'équation $(*)$ appliquée à $Q_1(x)$ s'écrit :

$$\mathcal{F}_k Q_1^2(x) + Q_k Q_1(x) = Q_1 \mathcal{F}_k Q_1(x)$$

le terme $\overline{Q}_k Q_1(x)$ étant nul. En reportant (M) dans cette équation on a donc :

$$Q_1 \mathcal{F}_k Q_1(x) + Q_1 Q_k(x) = 0,$$

d'où :

$$\mathcal{F}_k Q_1(x) + Q_k(x) \in Z.$$

Comme $\mathcal{F}_k Q_1(x)$ est déterminé à un élément arbitraire de Z près, on peut s'arranger pour que :

$$\mathcal{F}_k Q_1(x) + Q_k(x) = b(x)$$

où $b(x)$ appartient à B. L'équation $(*)$ appliquée à x s'écrivant :

$$\mathcal{F}_k Q_1(x) + Q_k(x) = Q_1 \mathcal{F}_k(x)$$

le choix d'un $b(x)$ nous permet de choisir $\mathcal{F}_k(x)$ à un élément $z' \in Z$ près. Le $b(x)$ doit obéir à la contrainte suivante : si $Q_1(x) = 0$, alors $b(x) = Q_k(x)$. Supposons que $x = Q_1 y$ où y est de type $r+1$. Alors, compte tenu de (M) la contrainte sur b s'écrit :

$$b(x) = -Q_1 Q_k(y).$$

Ayant choisi un $b(x)$ pour tout x de type r satisfaisant à la contrainte ci-dessus, on peut alors choisir $\mathcal{F}_k(x)$ à un élément $z' \in Z$ près. Il reste donc simplement à démontrer le lemme ci-dessous :

Lemme V.3.
Soit x de type $r \geq 1$. Alors si $Q_1 x = 0$ il existe un y de type $r+1$ tel que $x = Q_1 y$.

Démonstration. On considère l'application $\delta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ de degré -1 définie par $\delta(x) = 0$ pour $x \in \mathfrak{g}' \oplus W$, et $\delta(Q_1 x) = x$ pour tout x dans $\mathfrak{g}$. On a alors :

$$Q_1 \delta + \delta Q_1 = \mathrm{Id} - p,$$

où p est la projection sur $\mathfrak{g}'$ parallèlement à $\mathfrak{g}''$ (autrement dit δ est une homotopie entre les deux endomorphismes de complexes Id et p).

Le lemme V.3 est un corollaire du résultat suivant, dû à Quillen [Q appendix B] :

Proposition V.4.
1). La dérivation Q_1 de l'algèbre symétrique $S(\mathfrak{g})$ vérifie :

$$Q_1^2 = 0.$$

2). La cohomologie du complexe $(S(\mathfrak{g}), Q_1)$ est isomorphe à $S(\mathfrak{g}')$, et un supplémentaire de l'image de Q_1 dans le noyau de Q_1 est donné par $S(\mathfrak{g}') \otimes 1$ moyennant l'identification : $S(\mathfrak{g}) = S(\mathfrak{g}') \otimes S(\mathfrak{g}'')$.

Démonstration.
1). Comme Q_1 est impaire, $Q_1^2 = \frac{1}{2}[Q_1, Q_1]$ est encore une dérivation de $S(\mathfrak{g})$. Comme $Q_1^2\big|_{\mathfrak{g}} = 0$ cette dérivation est nulle.
2). On a : $Q_1(v'v'') = v' Q_1(v'')$ pour $v' \in S(\mathfrak{g}')$ et $v'' \in S(\mathfrak{g}'')$. On est ramené au cas où la cohomologie de $\mathfrak{g}$ est triviale. On prolonge alors l'homotopie δ ci-dessus en une dérivation de $S(\mathfrak{g})$. On pose alors :

$$E = [Q_1, \delta] = Q_1 \delta + \delta Q_1.$$

E est une dérivation telle que $E\big|_{\mathfrak{g}} = \mathrm{Id}$. On en déduit :

$$E(x) = kx$$

pour tout $x \in S^k(\mathfrak{g})$. Si maintenant x appartient à $S^k(\mathfrak{g})$ et $Q_1 x = 0$, alors $Ex = Q_1 \delta x = kx$. Si $k \geq 1$ on a donc :

$$x = Q_1(\tfrac{1}{k} \delta x).$$

La cohomologie de $S(\mathfrak{g})$ est donc réduite au corps de base, qui est $S(\{0\})$.

•

Fin de la démonstration du lemme V.3 : le complexe $V = S(\mathfrak{g})$ admet à son tour une décomposition :

$$V = V' \oplus V''$$

avec $V' = S(\mathfrak{g}') \otimes 1$. L'image de Q_1 dans $S(\mathfrak{g})$ est l'idéal engendré par $B = Q_1(\mathfrak{g})$. On peut donc choisir pour V'' l'idéal engendré par $\mathfrak{g}''$. Le lemme provient alors du fait que tout élément de type $r \geq 1$ appartient à cet idéal, sur lequel la cohomologie est triviale.

•

V.2. Démonstration du théorème V.1

On se donne deux L_∞-algèbres $(\mathfrak{g}_1, Q_1)$ et $(\mathfrak{g}_2, Q_2)$ et un quasi-isomorphisme $\mathcal{F}$ de $(\mathfrak{g}_1, Q_1)$ vers $(\mathfrak{g}_2, Q_2)$. Appliquant la proposition V.2 à ces deux L_∞-algèbres on a le diagramme suivant, dans lequel toutes les flèches sont des quasi-isomorphismes :

$$\mathcal{C}(\mathfrak{g}'_1) \underset{i}{\hookrightarrow} \mathcal{C}(\mathfrak{g}'_1 \oplus \mathfrak{g}''_1) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(\mathfrak{g}_1) \underset{\mathcal{F}}{\longrightarrow} \mathcal{C}(\mathfrak{g}_2) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(\mathfrak{g}'_2 \oplus \mathfrak{g}''_2) \underset{p}{\twoheadrightarrow} \mathcal{C}(\mathfrak{g}'_2).$$

On a ainsi construit un quasi-isomorphisme $\mathcal{F}'$ entre deux L_∞-algèbres minimales. Son premier coefficient $\mathcal{F}'_1 : \mathfrak{g}'_1 \to \mathfrak{g}'_2$ étant inversible, $\mathcal{F}'$ lui-même est inversible. L'ajout du quasi-isomorphisme ${\mathcal{F}'}^{-1}$ dans le diagramme ci-dessus permet alors la construction d'un quasi-isomorphisme :

$$\mathcal{G} : \mathcal{C}(\mathfrak{g}_2) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathfrak{g}_1)$$

qui est un quasi-inverse pour $\mathcal{F}$.

•

VI. La formalité de Kontsevich

Un L_∞ morphisme entre $T_{poly}\left(\mathbb{R}^d\right)$ et $D_{poly}\left(\mathbb{R}^d\right)$ qui soit aussi un quasi-isomorphisme c'est à dire un isomorphisme en cohomologie est une *formalité*.
M. Kontsevich a proposé dans [K1] une formalité $\mathcal{U}$ explicite. Précisément, les applications $\mathcal{U}_n$ sont donnés par :

$$\mathcal{U}_n = \sum_{m\geq 0} \sum_{\vec{\Gamma}\in G_{n,m}} w_{\vec{\Gamma}} \mathcal{B}_{\vec{\Gamma}}$$

où $G_{n,m}$ est l'ensemble des graphes orientés admissibles à n sommets aériens p_1,...,p_n et m sommets terrestres q_1,...,q_m : de chaque sommet aérien est issu k_1,..., k_n flèches aboutissant soit à un autre sommet aérien soit à un sommet terrestre. On ordonne les sommets aériens et terrestres du graphe et on oriente le graphe en ordonnant les flèches de façon compatible avec cet ordre, les flèches issues du sommet p_j ont les numéros $k_1 + ... + k_{j-1} + 1$,..., $k_1 + ... + k_j$. On les note :

$$Star(p_j) = \{\overrightarrow{p_j a_1}, ..., \overrightarrow{p_j a_{k_j}}\} \qquad \vec{v}_{k_1+\ldots+k_{j-1}+i} = \overrightarrow{p_j a_i}.$$

Si $\vec{\Gamma}$ est un graphe orienté, son *poids* $w_{\vec{\Gamma}}$ est par définition l'intégrale sur l'espace de configuration $C^+_{\{p_1,\ldots,p_n\},\{q_1,\ldots,q_m\}}$ de la forme :

$$\omega_{\vec{\Gamma}} = \frac{1}{(2\pi)^{\sum k_i} k_1!...k_n!} d\Phi_{\vec{v}_1} \wedge ... \wedge d\Phi_{\vec{v}_{k_1+\cdots+k_n}} \quad \text{où} \quad \Phi_{\overrightarrow{p_j a}} = Arg\left(\frac{a-p_j}{a-\overline{p_j}}\right).$$

Enfin $\mathcal{B}_{\vec{\Gamma}}$ est un opérateur m-différentiel, nul sur $\alpha_1\bullet\ldots\bullet\alpha_n$ sauf si α_1 est un k_1-tenseur, α_2 un k_2-tenseur,..., α_n un k_n-tenseur, auquel cas, on a :

$$\mathcal{B}_{\vec{\Gamma}}(\alpha_1\bullet\ldots\bullet\alpha_n)(f_1, f_2, ..., f_m) = \sum D_{p_1}\alpha_1^{i_1 i_2\ldots i_{k_1}} ... D_{p_n}\alpha_n^{i_{k_1+\ldots k_{n-1}+1}\ldots i_{k_1+\ldots+k_n}} D_{q_1} f_1 ... D_{q_m} f_m$$

si D_a est l'opérateur :

$$D_a = \prod_{l, \overrightarrow{v_l} = \overrightarrow{.a}} \partial_{i_l}$$

et si la somme est étendue à tous les indices i_j répétés. On notera aussi

$$\mathcal{U}_n = \sum \mathcal{U}_{(k_1,k_2,\dots,k_n)} = \sum \mathcal{U}_{k_{\{1,\dots,n\}}}.$$

Maintenant, si on change l'ordre des flèches issues d'un sommet p_j, le produit $w_{\vec{\Gamma}}\mathcal{B}_{\vec{\Gamma}}$ ne change pas. On prend la convention suivante : si $\vec{\Gamma}$ est un graphe orienté de façon non compatible, on pose :

$$B_{\vec{\Gamma}} = \varepsilon(\sigma)B_{\vec{\Gamma}^\sigma}$$

où σ est n'importe quelle permutation des flèches de $\vec{\Gamma}$ qui le transforme en un graphe $\vec{\Gamma}^\sigma$ orienté de façon compatible. Avec cette convention, on aura :

$$\mathcal{U}_n = \sum_{m\geq 0} \sum_{\vec{\Gamma}\in {G'}_{n,m}} w'_{\vec{\Gamma}}\mathcal{B}_{\vec{\Gamma}'}$$

où ${G'}_{n,m}$ est l'ensemble de tous les graphes orientés de façon compatible ou non et $w'_{\vec{\Gamma}}$ est l'intégrale de la forme :

$$\omega'_{\vec{\Gamma}} = \frac{1}{(2\pi)^{\sum k_i}(\sum k_i)!} d\Phi_{\overrightarrow{v}_1} \wedge \dots \wedge d\Phi_{\overrightarrow{v}_{k_1+\dots+k_n}} \quad \text{où} \quad \Phi_{\overrightarrow{p_j a}} = Arg\left(\frac{a-p_j}{a-\overline{p_j}}\right).$$

Nous allons vérifier dans la suite que nos choix de signes sont cohérents.

Théorème VI.1 (M.Kontsevich).
L'application formelle $\mathcal{U}$ est une formalité. En particulier c'est un L_∞-morphisme.

Démonstration. Puisque $Q_1 = 0$, l'équation de formalité s'écrit :

$$\begin{aligned} 0 =& Q'_1\left(\mathcal{U}_{k_{\{1,\dots,n\}}}(\alpha_1 \bullet \dots \bullet \alpha_n)\right) + \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{\substack{I\sqcup J=\{1,\dots,n\}\\ I,J\neq\emptyset}} \varepsilon_\alpha(I,J)Q'_2\left(\mathcal{U}_{k_I}(\alpha_I)\circ\mathcal{U}_{k_J}(\alpha_J)\right) - \\ &- \frac{1}{2}\sum_{i\neq j} \varepsilon_\alpha(i,j,1,\dots,\widehat{i,j},\dots,n)\mathcal{U}_{((k_i+k_j-1),k_1,\dots,\widehat{k_i},\dots,\widehat{k_j},\dots,k_n)}\left(Q_2(\alpha_i\bullet\alpha_j)\bullet\alpha_1\bullet\dots\bullet\widehat{\alpha_i}\bullet\dots\bullet\widehat{\alpha_j}\bullet\dots\bullet\alpha_n\right). \end{aligned}$$

Remarquons maintenant que pour que $w_{\vec{\Gamma}}$ ne soit pas nul, il faut que le degré de la forme $\omega_{\vec{\Gamma}}$ soit égal à la dimension de l'espace de configuration $C^+_{\{p_1,\dots,p_n\};\{q_1,\dots,q_m\}}$ sur lequel on intègre, c'est à dire :

$$\sum k_i = 2n + m - 2.$$

Dans ce cas,

$$(-1)^m = (-1)^{\left|\mathcal{U}_{k_{\{1,\dots,n\}}}(\dots)\right|+1} = (-1)^{\sum k_i} = (-1)^{|k_{\{\}1,\dots n}|}.$$

Donc notre équation devient :

$$
\begin{aligned}
&(1) 0=\mathcal{U}_{k_{\{1,\ldots,n\}}}(\alpha_{\{1,\ldots,n\}}) \circ \mu-(-1)^{\sum k_i-1} \mu \circ \mathcal{U}_{k_{\{1,\ldots,n\}}}(\alpha_{\{1,\ldots,n\}})+\\
&(2)+\frac{1}{2} \sum_{\substack{I \sqcup J=\{1,\ldots,n\} \\ I, J \neq \emptyset}} \varepsilon_\alpha(I, J)(-1)^{(|k_I|-1)|k_J|} \mathcal{U}_{k_I}(\alpha_I) \circ \mathcal{U}_{k_J}(\alpha_J)+\\
&(3)+\frac{1}{2} \sum_{\substack{I \sqcup J=\{1,\ldots,n\} \\ I, J \neq \emptyset}} \varepsilon_\alpha(I, J)(-1)^{|k_I|} \mathcal{U}_{k_J}(\alpha_J) \circ \mathcal{U}_{k_I}(\alpha_I)-\\
&(4)-\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \varepsilon_\alpha(i, j, 1, \ldots, \widehat{i, j}, \ldots, n) \mathcal{U}_{((k_i+k_j-1), k_1, \ldots, \widehat{k_i}, \ldots, \widehat{k_j}, \ldots, k_n)}\left((\alpha_i \bullet \alpha_j) . \alpha_1 \ldots . \widehat{\alpha_i} \ldots . \widehat{\alpha_j} \ldots . \alpha_n\right)-\\
&(5)-\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \varepsilon_\alpha(i, j, 1, \ldots, \widehat{i, j}, \ldots, n) \mathcal{U}_{((k_i+k_j-1), \ldots, \widehat{k_i}, \ldots, \widehat{k_j}, \ldots, k_n)}\left((-1)^{k_i k_j}(\alpha_j \bullet \alpha_i) . \ldots . \widehat{\alpha_i} \ldots . \widehat{\alpha_j} \ldots . \alpha_n\right) .
\end{aligned}
$$

Montrons que $(2)=(3)$. En fait :

$$
\varepsilon_\alpha(I, J)=\varepsilon_\alpha(J, I)(-1)^{|k_I||k_J|}
$$

car le nombre de i de I tel que k_i-2 soit impair est congru modulo à 2 à $|k_I|=\sum k_i$. Donc :

$$
(3)=\frac{1}{2} \sum_{\substack{I \sqcup J=\{1,\ldots,n\} \\ I, J \neq \emptyset}} \varepsilon_\alpha(J, I)(-1)^{|k_I||k_J|+|k_I|} \mathcal{U}_{k_J}(\alpha_J) \circ \mathcal{U}_{k_I}(\alpha_I)
$$

en changeant les rôles de I et J :

$$
(3)=\frac{1}{2} \sum_{\substack{I \sqcup J=\{1,\ldots,n\} \\ I, J \neq \emptyset}} \varepsilon_\alpha(I, J)(-1)^{|k_J|(|k_I|-1)} \mathcal{U}_{k_I}(\alpha_I) \circ \mathcal{U}_{k_J}(\alpha_J)=(2) .
$$

De même $(5)=(4)$:

$$
\begin{aligned}
(4) & =-\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \varepsilon_\alpha(i, j, 1, \ldots, \widehat{i, j}, \ldots, n) \mathcal{U}_{((k_i+k_j-1), k_1, \ldots, \widehat{k_i}, \ldots, \widehat{k_j}, \ldots, k_n)}\left((\alpha_i \bullet \alpha_j) . \alpha_1 \ldots . \widehat{\alpha_i} \ldots . \widehat{\alpha_j} \ldots . \alpha_n\right) \\
& =-\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \varepsilon_\alpha(j, i, 1, \ldots, \widehat{i, j}, \ldots, n)(-1)^{k_i k_j} \mathcal{U}_{((k_i+k_j-1), k_1, \ldots, \widehat{k_i}, \ldots, \widehat{k_j}, \ldots, k_n)}\left((\alpha_i \bullet \alpha_j) . \alpha_1 \ldots . \widehat{\alpha_i} \ldots . \widehat{\alpha_j} \ldots . \alpha_n\right) \\
& =-\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \varepsilon_\alpha(i, j, 1, \ldots, \widehat{i, j}, \ldots, n) \mathcal{U}_{((k_i+k_j-1), k_1, \ldots, \widehat{k_j}, \ldots, \widehat{k_i}, \ldots, k_n)}\left((-1)^{k_i k_j}(\alpha_j \bullet \alpha_i) . \alpha_1 \ldots . \widehat{\alpha_j} \ldots . \widehat{\alpha_i} \ldots . \alpha_n\right) \\
& =(5) .
\end{aligned}
$$

Posons enfin $\mu=\mathcal{U}_\emptyset$. Alors (1) s'écrit :

$$
(1)=(-1)^{(|k_{\{1,\ldots,n\}}|-1).0}\, \mathcal{U}_{k_{\{1,\ldots,n\}}}\left(\alpha_{\{1,\ldots,n\}}\right) \circ \mathcal{U}_\emptyset+(-1)^{(0-1)|k_{\{1,\ldots,n\}}|} \mathcal{U}_\emptyset \circ \mathcal{U}_{k_{\{1,\ldots,n\}}}\left(\alpha_{k_{\{1,\ldots,n\}}}\right) .
$$

Comme $\varepsilon_\alpha(\{1,\ldots,n\}, \emptyset)=\varepsilon_\alpha(\emptyset,\{1,\ldots,n\})=1$, l'équation de formalité devient :

$$
\begin{aligned}
\sum_{I \sqcup J=\{1,\ldots,n\}} \varepsilon_\alpha(I, J)(-1)^{(|k_I|-1)|k_J|} \mathcal{U}_{k_I}(\alpha_I) \circ \mathcal{U}_{k_J}(\alpha_J)-\sum_{i \neq j} \varepsilon_\alpha(i, j, 1, \ldots, \widehat{i, j}, \ldots, n) \\
\mathcal{U}_{((k_i+k_j-1), k_1, \ldots, \widehat{k_i}, \ldots, \widehat{k_j}, \ldots, k_n)}\left((\alpha_i \bullet \alpha_j) . \alpha_1 \ldots . \widehat{\alpha_i} \ldots . \widehat{\alpha_j} \ldots . \alpha_n\right)=0 .
\end{aligned}
$$

Si on remplace les $\mathcal{U}_I(\alpha_I)$ par les $\sum_{\vec{\Gamma}} w'_{\vec{\Gamma}} \mathcal{B}'_{\vec{\Gamma}}(\alpha_I)$ et qu'on développe tout, on obtient une somme d'opérateurs multi-différentiels de la forme :

$$
\sum_{\vec{\Gamma}'} c_{\vec{\Gamma}'} \mathcal{B}'_{\vec{\Gamma}'}(\alpha_1 \ldots . \alpha_n)
$$

où $\vec{\Gamma}'$ est un graphe à n sommets aériens, m sommets terrestres ayant $2n+m-3$ flèches. Si on se donne $\vec{\Gamma}'$ orienté et une face F de codimension 1 de $\partial C^+_{\{p_1,\dots,p_n\};\{q_1,\dots,q_m\}}$, on associe à ce couple (Γ', F) au plus un terme de l'équation de formalité. Plus précisément :

Cas 1 : si

$$\begin{aligned} F &= \partial_{\{p_{i_1},\dots,p_{i_{n_1}}\};\{q_{l+1},\dots,q_{l+m_1}\}} C^+_{\{p_1,\dots,p_n\};\{q_1,\dots,q_m\}} \\ &= C^+_{\{p_{i_1},\dots,p_{i_{n_1}}\};\{q_{l+1},\dots,q_{l+m_1}\}} \times C^+_{\{p_1,\dots,p_n\}\setminus\{p_{i_1},\dots,p_{i_{n_1}}\};\{q_1,\dots,q_l,q,q_{l+m_1+1},\dots,q_m\}}, \end{aligned}$$

que l'on notera :

$$\partial_{S,S'} C^+_{A,B} = C^+_{S,S'} \times C^+_{A\setminus S,\ B\setminus S'\sqcup\{q\}},$$

on associe au couple $(\vec{\Gamma}', F)$ l'unique terme :

$$\mathcal{B}'_{\vec{\Gamma}',F}(\alpha_1,..,\alpha_n)(f_1,\dots,f_m) = \mathcal{B}'_{\vec{\Gamma}_2}\left(\alpha_{j_1}.\dots.\alpha_{j_{n_2}}\right)\Big(f_1,\dots,f_l,\mathcal{B}'_{\vec{\Gamma}_1}\left(\alpha_{i_1}.\dots.\alpha_{i_{n_1}}\right)\left(f_{l+1},\dots,f_{l+m_1}\right),f_{l+m_1+1},\dots f_m\Big)$$

où $\vec{\Gamma}_1$ est la restriction à $\{p_{i_1},\dots,p_{i_{n_1}}\}\cup\{q_{l+1},\dots,q_{l+m_1}\}$ (avec son ordre), $\vec{\Gamma}_2$ est le graphe obtenu en collapsant les points p_{i_1},..., $p_{i_{n_1}}$ et q_{l+1},..., q_{l+m_1} en q, on a posé $\{1,\dots,n\}\setminus\{i_1,\dots,i_{n_1}\} = \{j_1 < j_2 < \dots < j_{n_2}\}$. On note $c_{\vec{\Gamma}',F}$ le coefficient de cet opérateur.

Remarquons que l'application $(\vec{\Gamma}', F) \mapsto (\vec{\Gamma}_1, \vec{\Gamma}_2)$ est dans ce cas surjective mais pas injective. Si on se donne le couple $(\vec{\Gamma}_1, \vec{\Gamma}_2)$, la face F est bien déterminée mais $\vec{\Gamma}'$ n'est pas unique : il y a d'abord la répartition des flèches allant d'un sommet de $\vec{\Gamma}_2$ vers un sommet de $\vec{\Gamma}_1$ (application de la règle de Leibniz) chaque répartition correspond à un graphe Γ_2 différent. Si cette répartition est donnée, il faut encore fixer l'ordre des flèches de Γ'. Le nombre de choix est bien sûr le quotient du nombre d'orientations possibles pour Γ' par celui des orientations possibles de Γ_1 et Γ_2 :

$$\text{Nombre d'orientations de } \Gamma' = \frac{\left(k_{i_1}+\dots+k_{i_{n_1}}\right)!\left(k_{j_1}+\dots+k_{j_{n_2}}\right)!}{(\sum k_i)!} = \frac{|k_I|!|k_J|!}{\left|k_{\{1,\dots,n\}}\right|!}.$$

Cas 2 : si

$$F = \partial_{\{p_i,p_j\}} C^+_{\{p_1,\dots,p_n\};\{q_1,\dots,q_m\}} = C_{\{p_i,p_j\}} \times C^+_{\{p,p_1,\dots,\widehat{p_i},\dots,\widehat{p_j},\dots,p_n\};\{q_1,\dots,q_m\}},$$

que l'on notera :

$$\partial_S C^+_{A,B} = C_S \times C^+_{A\setminus S\sqcup\{p\},\ B},$$

A $(\vec{\Gamma}', F)$, si la flèche $\overrightarrow{p_ip_j}$ est une des flèches de Γ', on associe l'unique terme :

$$\mathcal{B}'_{\vec{\Gamma}',F}(\alpha_1,..,\alpha_n)(f_1,\dots,f_m) = \mathcal{B}_{\vec{\Gamma}_2}\left((\alpha_i \bullet \alpha_j).\alpha_1.\dots.\widehat{\alpha_i}.\dots.\widehat{\alpha_j}.\dots.\alpha_n\right)$$

où $\vec{\Gamma}_2$ est le graphe obtenu en collapsant les sommets p_i et p_j du graphe Γ' sur le point p et en éliminant la flèche $\overrightarrow{p_ip_j}$. Si cette flèche n'existe pas dans Γ', on associe l'opérateur nul à $(\vec{\Gamma}', F)$. On note $c_{\vec{\Gamma}',F}$ le coefficient de cet opérateur.

Dans ce cas, on considérera l'application $(\vec{\Gamma}', F) \mapsto (\vec{\Gamma}_1, \vec{\Gamma}_2)$ oú $\vec{\Gamma}_1$ est le graphe tracé dans $C_{\{p_i,p_j\}}$ à une seule flèche : la flèche $\overrightarrow{p_ip_j}$. A part le cas 0, l'image réciproque d'un couple $(\vec{\Gamma}_1, \vec{\Gamma}_2)$ contient exactement :

$$\text{Nombre d'orientations de } \Gamma' = \frac{\Big((k_i+k_j-1)+k_1+\dots+\widehat{k_i}+\dots+\widehat{k_j}+\dots+k_n\Big)!}{(\sum k_i)!} = \frac{\left(\left|k_{\{1,\dots,n\}}\right|-1\right)!}{\left|k_{\{1,\dots,n\}}\right|!}.$$

Cas 3 : si

$$F = \partial_S C^+_{A,B} = C_S \times C^+_{A\setminus S\sqcup\{p\},\ B}$$

avec $|S| \geq 3$, dans ce cas aucun terme de l'équation de formalité n'est associé à $(\vec{\Gamma}', F)$. On pose donc $c_{\vec{\Gamma}',F} = 0$.
Pour chaque $\vec{\Gamma}'$, on définit sur $C^+_{\{p_1,\dots,p_n\};\{q_1,\dots,q_m\}}$ la forme :

$$\omega'_{\vec{\Gamma}'} = \frac{1}{(2\pi)^{|k_{\{1,\dots,n\}}|}\,|k_{\{1,\dots,n\}}|!} d\Phi_{\overrightarrow{v}_1} \wedge \dots \wedge d\Phi_{\overrightarrow{v}_{k_1+\dots+k_n}}.$$

Montrons qu'avec toutes ces notations, l'équation de formalité s'écrit :

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\vec{\Gamma}'\in G'_{n,m}} \left[\sum_{F\in\partial C^+_{A,B}} \int_{\vec{F}} \omega'_{\vec{\Gamma}'} \right] \mathcal{B}'_{\vec{\Gamma}'}(\alpha_1\bullet\dots\bullet\alpha_n) \\ &= \sum_{\vec{\Gamma}'\in G'_{n,m}} \left[\int_{C^+_{A,B}} d\omega'_{\vec{\Gamma}} \right] \mathcal{B}'_{\vec{\Gamma}'}(\alpha_1\bullet\dots\bullet\alpha_n). \end{aligned}$$

Le résultat est donc une simple conséquence du théorème de Stokes sur la variété à coins $C^+_{A,B}$ et pour les formes fermées $\omega'_{\vec{\Gamma}'}$.
Comparons donc terme par terme chaque coefficient $c_{\vec{\Gamma}',F}$ et l'intégrale sur la face orientée $\vec{F}$ de la forme $\omega'_{\vec{\Gamma}'}$.

Cas 1 : Avec nos notations, le coefficient $c_{\vec{\Gamma}',F}$ est :

$$c_{\vec{\Gamma}',F} = \varepsilon_\alpha(J,I)(-1)^{(|k_J|-1)|k_I|} \frac{|k_I|!|k_J|!}{|k_{\{1,\dots,n\}}|!}(-1)^{l(m_1-1)} \int_{C^+_{S,S'}} \omega'_{\vec{\Gamma}_1} \int_{C^+_{A\setminus S,\ B\setminus S'\sqcup\{q\}}} \omega'_{\vec{\Gamma}_2}.$$

(Le signe $(-1)^{l(m_1-1)}$ provient du développement de l'opération $\circ$). On rappelle que S' est le segment $q_{l+1},\dots,q_{l+m_1}$ et que q remplace S' dans $B\setminus S'\sqcup\{q\}$. D'autre part, on a pour la forme

$$\omega'_{\vec{\Gamma}'} = \varepsilon_\alpha(I,J)\frac{|k_I|!|k_J|!}{|k_{\{1,\dots,n\}}|!}\omega'_{\vec{\Gamma}_1} \wedge \omega'_{\vec{\Gamma}_2}$$

et la face $\vec{F}$ (en tenant compte de son orientation) :

$$\int_{\vec{F}} \omega'_{\vec{\Gamma}'} = \varepsilon_\alpha(I,J)(-1)^{lm_1+l+m_1} \frac{|k_I|!|k_J|!}{|k_{\{1,\dots,n\}}|!} \int_{C^+_{\{p_{i_1},\dots,p_{i_{n_1}}\};\{q_{l+1},\dots,q_{l+m_1}\}}} \omega'_{\vec{\Gamma}_1} \int_{C^+_{A\setminus S,\ B\setminus S'\sqcup\{q\}}} \omega'_{\vec{\Gamma}_2}.$$

Rappelons que $|k_I| = 2n_1+m_1-2$, $|k_J| = 2(n-n_1)+(m-m_1+1)-2$, le signe devant l'intégrale est donc :

$$\begin{aligned} \varepsilon_\alpha(I,J)(-1)^{lm_1+l+m_1} &= \varepsilon_\alpha(J,I)(-1)^{|k_I||k_J|}(-1)^{lm_1+m_1+l} \\ &= \varepsilon_\alpha(J,I)(-1)^{|k_I||k_J|}(-1)^{lm_1+l}(-1)^{|k_I|}. \end{aligned}$$

Donc :

$$c_{\vec{\Gamma}',F} = \int_{\vec{F}} \omega'_{\vec{\Gamma}'}.$$

Cas 2 : Avec nos notations, le coefficient $c_{\vec{\Gamma}',F}$ est nul si $\vec{\Gamma}'$ ne contient pas la flèche $\overrightarrow{p_ip_j}$ et sinon :

$$c_{\vec{\Gamma}',F} = -\varepsilon_\alpha(i,j,1,...,\widehat{i,j},...,n)\frac{(|k_{\{1,...,n\}}|-1)!}{|k_{\{1,...,n\}}|!}$$
$$\int_{C_S}\omega'_{\vec{\Gamma}_1}\int_{C^+A\setminus S\sqcup\{p\},\ B}\omega'_{\vec{\Gamma}_2}.$$

D'autre part, on a pour la forme

$$\omega'_{\vec{\Gamma}'} = \varepsilon_\alpha(i,j,1,...,\widehat{i,j},...,n)\frac{(|k_{\{1,...,n\}}|-1)!}{|k_{\{1,...,n\}}|!}\omega'_{\vec{\Gamma}_1}\wedge\omega'_{\vec{\Gamma}_2}$$

et la face $\vec{F}$ (en tenant compte de son orientation) :

$$\int_{\vec{F}}\omega'_{\vec{\Gamma}'} = -\varepsilon_\alpha(i,j,1,...,\widehat{i,j},...,n)\frac{(|k_{\{1,...,n\}}|-1)!}{|k_{\{1,...,n\}}|!}\int_{C_S}\omega'_{\vec{\Gamma}_1}\int_{C^+_{A\setminus S\sqcup\{p\},\ B}}\omega'_{\vec{\Gamma}_2},$$

avec $S=\{p_i,p_j\}$. On a donc pour tout $\vec{\Gamma}'$ et F :

$$c_{\vec{\Gamma}',F} = \int_{\vec{F}}\omega'_{\vec{\Gamma}'}.$$

Cas 3 : Il n'y a pas de termes dans notre équation de formalité dans ce cas, ou $c_{\vec{\Gamma}',F}=0$. Mais dans ce cas, on a le lemme suivant de Kontsevich [K1 § 6.6.1], [Kh] :

$$\int_{C_S}\omega'_{\vec{\Gamma}_1} = 0$$

si $|S|\geq 3$. On a donc de nouveau :

$$c_{\vec{\Gamma}',F} = \int_{\vec{F}}\omega'_{\vec{\Gamma}'}.$$

Et ceci finit la preuve de la validité de l'équation de formalité.

•

*　　*

*

Appendice. Formalité et quantification par déformation

Nous expliquons dans ce paragraphe pourquoi la formalité de Kontsevich permet d'obtenir un étoile-produit à partir d'un 2-tenseur de Poisson. On considère une (limite projective d') algèbre(s) nilpotente(s) de dimension finie $\mathfrak{m}$. Par exemple :

$$\mathfrak{m} = \hbar\mathbb{R}[[\hbar]] = \lim_{\leftarrow}\hbar\mathbb{R}[[\hbar]]/\hbar^k\mathbb{R}[[\hbar]].$$

A.1.1 Construction d'étoile-produits

On se donne une L_∞-algèbre $(\mathfrak{g},Q)$ sur un corps k de caractéristique zéro, que l'on voit comme une Q-variété formelle graduée pointée. Un $\mathfrak{m}$-*point* de la variété formelle $\mathfrak{g}$ est par définition un morphisme de cogèbres :

$$p:\mathfrak{m}^*\longrightarrow\mathcal{C}(\mathfrak{g}).$$

Le produit tensoriel (complété dans le cas d'une limite projective) $\mathcal{C}(\mathfrak{g})\widehat{\otimes}\mathfrak{m}$, muni de la comultiplication de $\mathcal{C}(\mathfrak{g})$ étendue par $\mathfrak{m}$-linéarité, admet une structure de cogèbre (sans co-unité) sur $\mathfrak{m}$. On peut alors voir un $\mathfrak{m}$-point comme un élément non nul de type groupe de cette cogèbre, c'est-à-dire un élément $p \in \mathcal{C}(\mathfrak{g})\widehat{\otimes}\mathfrak{m}$ vérifiant : $\Delta p = p \otimes p$.

Proposition A.1.
Les $\mathfrak{m}$-points de la variété formelle $\mathfrak{g}$ sont donnés par :

$$p_v = e^v - 1 = v + \frac{v^2}{2} + \cdots$$

où v est un élément pair de $\mathfrak{g}[1]\widehat{\otimes}\mathfrak{m}$

Démonstration. La série a bien un sens dans $\mathcal{C}(\mathfrak{g})\widehat{\otimes}\mathfrak{m}$. Si p est un $\mathfrak{m}$-point, p est forcément pair, et on voit que la série :

$$v = \mathrm{Log}(1+p) = p - \frac{p^2}{2} + \cdots$$

a un sens dans $\mathcal{C}(\mathfrak{g})\widehat{\otimes}\mathfrak{m}$ et définit un élément primitif (et pair), c'est-à-dire que l'on a : $\Delta v = 0$. Pour démontrer ce point on rajoute formellement la co-unité en considérant la cogèbre :

$$\overline{\mathcal{C}}_{\mathfrak{m}} = (k.1 \oplus \mathfrak{m}) \oplus \mathcal{C}(\mathfrak{g})\widehat{\otimes}\mathfrak{m}.$$

Un élément de type groupe de cette cogèbre s'écrit toujours :

$$g = 1 + p$$

où p est de type groupe dans la cogèbre sans co-unité $\mathcal{C}(\mathfrak{g})\widehat{\otimes}\mathfrak{m}$. Il s'agit alors de montrer que le logarithme v d'un tel élément est primitif, c'est-à-dire que l'on a dans $\overline{\mathcal{C}}_{\mathfrak{m}}$:

$$\Delta v = v \otimes 1 + 1 \otimes v$$

Pour cela on remarque que la cogèbre $\overline{\mathcal{C}}_{\mathfrak{m}}$ est en fait une bigèbre. Le calcul formel suivant a alors un sens :

$$\begin{aligned}
\Delta \,\mathrm{Log}\, g &= \mathrm{Log}(\Delta g) \\
&= \mathrm{Log}(g \otimes g) \\
&= \mathrm{Log}\big((g \otimes 1)(1 \otimes g)\big) \\
&= \mathrm{Log}(g \otimes 1) + \mathrm{Log}(1 \otimes g) \\
&= \mathrm{Log}\, g \otimes 1 + 1 \otimes \mathrm{Log}\, g
\end{aligned}$$

Donc, forcément v appartient à $\mathfrak{g}\widehat{\otimes}\mathfrak{m}$, et il est clair que $p = p_v$.

•

Le champ de vecteurs Q s'étend de manière naturelle à $\mathcal{C}(\mathfrak{g})\widehat{\otimes}\mathfrak{m}$. Supposons que Q s'annule au point p_v :

$$Q(e^v - 1) = 0$$

On traduit ceci par le fait que v vérifie l'*équation de Maurer-Cartan généralisée* :

$$\text{(MCG)} \qquad Q_1(v) + \frac{1}{2}Q_2(v.v) + \cdots = 0.$$

Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie différentielle graduée, ça se réduit à l'équation de Maurer-Cartan :

$$dv - \frac{1}{2}[v,v] = 0.$$

(En effet v est pair dans $\mathfrak{g}[1] \otimes \mathfrak{m}$, donc impair dans $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{m}$). Si maintenant $\mathcal{F}$ est un L_∞-morphisme entre $(\mathfrak{g}_1, Q)$ et $(\mathfrak{g}_2, Q')$, et si $v \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{m}$ est tel que $Q(p_v) = 0$, il est clair que :

$$Q'\big(\mathcal{F}(p_v)\big) = \mathcal{F}\big(Q(p_v)\big) = 0.$$

Or $\mathcal{F}(p_v) = e^w - 1$ avec $w \in \mathfrak{g}_2 \widehat{\otimes} \mathfrak{m}$ d'après la proposition A.1, puisque $\mathcal{F}(p_v)$ est de type groupe. Il est clair que w est la projection canonique de $\mathcal{F}(p_v)$ sur $\mathfrak{g}_2 \widehat{\otimes} m$, soit :

$$w = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \mathcal{F}_n(v^n).$$

En résumé, si $v \in \mathfrak{g}_1 \widehat{\otimes} \mathfrak{m}$ vérifie (MCG), alors l'élément $w \in \mathfrak{g}_2 \widehat{\otimes} \mathfrak{m}$ donné par l'égalité ci-dessus vérifie (MCG). Dans le cas où les deux L_∞-algèbres sont les algèbres de Lie différentielles graduées des multichamps de vecteurs et des opérateurs polydifférentiels, tout 2-tenseur de Poisson formel :

$$v = \hbar \gamma_1 + \hbar^2 \gamma_2 + \cdots$$

donne naissance grâce à ce processus à un opérateur bidifférentiel formel w tel que $\mu + w$ soit un étoile-produit, μ désignant la multiplication usuelle de deux fonctions.

A.2. Equivalence des foncteurs de déformation

On suppose toujours le corps de base k de caractéristique zéro. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie différentielle graduée. Rappelons [K1 § 3.2] que le foncteur de déformation $\mathrm{Def}_\mathfrak{g}$ associe à toute algèbre commutative nilpotente de dimension finie $\mathfrak{m}$ l'ensemble des classes de solutions de degré 1 de l'équation de Maurer-Cartan dans $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{m}$ modulo l'action du groupe de jauge, c'est-à-dire le groupe nilpotent $G_\mathfrak{m} = \exp(\mathfrak{g}^0 \otimes \mathfrak{m})$, dont l'action (par des transformations affines de l'espace $\mathfrak{g}^1 \otimes \mathfrak{m}$) est donnée infinitésimalement par :

$$\alpha . \gamma = d\alpha + [\alpha, \gamma]$$

pour tout $\alpha \in \mathfrak{g}^0 \otimes \mathfrak{m}$ et pour tout $\gamma \in \mathfrak{g}^1 \otimes \mathfrak{m}$. Ce foncteur s'étend naturellement aux limites projectives d'algèbres commutatives nilpotentes de dimension finie : $\mathrm{Def}_\mathfrak{g}(\mathfrak{m})$ est dans ce cas défini comme l'ensemble des classes de solutions de degré 1 de l'équation de Maurer-Cartan dans le produit tensoriel complété $\mathfrak{g} \widehat{\otimes} \mathfrak{m}$ modulo l'action du groupe pro-nilpotent $G_\mathfrak{m} = \exp(\mathfrak{g}^0 \widehat{\otimes} \mathfrak{m})$.

L'équivalence de jauge peut aussi se définir pour une L_∞-algèbre quelconque $(\mathfrak{g}, Q)$: deux solutions de l'équation de Maurer-Cartan généralisée γ_0 et γ_1 dans $\mathfrak{g}^1 \otimes \mathfrak{m}$ sont équivalentes s'il existe une famille polynomiale $\xi(t)_{t \in k}$ de champs de vecteurs de degré -1 et une famille polynomiale $\gamma(t)_{t \in k}$ de solutions de l'équation de Maurer-Cartan généralisée dans $\mathfrak{g}^1 \otimes \mathfrak{m}$ telles que :

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma(t)}{dt} &= [Q, \xi(t)]\big(\gamma(t)\big) \\ \gamma(0) = \gamma_0, & \qquad \gamma(1) = \gamma_1. \end{aligned} \tag{**}$$

On vérifie facilement que cette relation est une relation d'équivalence, ce qui permet de définir le foncteur de déformation $\mathrm{Def}_\mathfrak{g}$ comme la correspondance qui à toute algèbre commutative nilpotente de dimension finie $\mathfrak{m}$ associe l'ensmble $\mathrm{Def}_\mathfrak{g}(\mathfrak{m})$ des classes de solutions de degré 1 de l'équation de Maurer-Cartan généralisée dans $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{m}$ modulo l'équivalence de jauge.

Proposition A.2.1 (cf. [K1 § 4.5.2]).
1). Dans le cas d'une algèbre de Lie différentielle graduée les deux notions d'équivalence de jauge (et donc de foncteur de déformation) coïncident.

2). Soient $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_2$ deux algèbres de Lie différentielles graduées. Alors le foncteur $\mathrm{Def}_{\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2}$ est naturellement équivalent au produit des foncteurs $\mathrm{Def}_{\mathfrak{g}_1} \times \mathrm{Def}_{\mathfrak{g}_2}$.

3). Le foncteur de déformation est trivial pour une L_∞-algèbre linéaire contractile.

Démonstration. Les points 2) et 3) sont faciles à établir. Pour établir le premier point précisons d'abord la notion de champ de vecteurs : un champ de vecteurs sur une variété formelle graduée pointée $\mathfrak{g}[1] \otimes \mathfrak{m}$ est donné par une codérivation A de la cogèbre $\mathcal{C}(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{m}$. Sa valeur en un point γ de la variété formelle est donnée par la projection sur $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{m}$ de $A(e^\gamma - 1)$, que l'on notera $A(\gamma)$. Cette notation, bien que cohérente du point de vue géométrique, est un peu ambigüe, car $A(\gamma)$ ne coïncide en général pas avec la valeur de la codérivation A prise en γ vu comme un élément de la cogèbre $\mathcal{C}(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{m}$.

Revenons aux notations du début du § A.2. On remarque que l'action de $\alpha \in \mathfrak{g}^0 \otimes \mathfrak{m}$ sur $\mathfrak{g}^1 \otimes \mathfrak{m}$ est donnée par le champ de vecteurs :

$$D_\alpha = [Q, R_\alpha],$$

où R_α est le champ de vecteurs constant égal à α. Ce champ de vecteurs est bien de degré -1. L'équivalence de jauge au sens des algèbres de Lie différentielles graduées $\gamma_1 = (\exp \alpha).\gamma_0$ entraîne donc l'équivalence de jauge au sens des L_∞-algèbres, avec $\xi(t) = R_\alpha$ pour tout t et $\gamma(t) = (\exp t\alpha).\gamma_0$.

Supposons maintenant que γ_0 et γ_1 sont équivalents au sens des L_∞-algèbres. Soient $\xi(t)$ et $\gamma(t)$ les familles polynomiales de champs de vecteurs de degré -1 et de solutions de l'équation de Maurer-Cartan généralisée respectivement, telles que l'équation (**) soit vérifiée. Le champ de vecteurs de degré zéro $[Q, \xi(t)]$ s'écrit explicitement en tout $\mathfrak{m}$-point $\gamma \in \mathfrak{g}^1 \otimes \mathfrak{m}$:

$$[Q, \xi(t)](\gamma) = d\xi(t)(\gamma) + [\xi(t)(\gamma), \gamma].$$

On effectue ce calcul en appliquant la codérivation $[Q, \xi(t)]$ à l'élément de type groupe $e^\gamma - 1$. Compte tenu de l'équation (**) on voit que le vecteur tangent $\frac{d\gamma(t)}{dt}$ au point $\gamma(t)$ est donné par un champ de vecteurs provenant de l'action d'un élément de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}^0 \otimes \mathfrak{m}$.

Montrons par récurrence sur le degré d de γ_t (en tant que polynôme) qu'il existe un entier r (dépendant de d) tel que pour tout $t \in k$ il existe $g_t = \exp(tD_1 + \cdots + t^r D_r) \in G_\mathfrak{m}$ tel que $\gamma_t = g_t.\gamma_0$: si $d = 0$ on a $\gamma_t = \gamma_0$ et la constante $g_t = \mathrm{Id}$ convient. Supposons donc que la propriété soit vraie au rang $d-1$. Supposons que γ_t soit un polynôme de degré d, que l'on peut écrire :

$$\gamma_t = \tilde{\gamma}_t + t^d \gamma_d.$$

Grâce à l'hypothèse de récurrence on peut écrire :

$$\begin{aligned} \gamma_t &= e^{t^d \gamma_d} \tilde{\gamma}_t \\ &= e^{t^d \gamma_d} e^{tD_1 + \cdots + t^r D_r} \gamma_0. \end{aligned}$$

Le terme γ_d appartient à l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}^0 \otimes \mathfrak{m}$. La série de Campbell-Hausdorff ne comprend qu'un nombre fini de termes dans le cas d'un groupe nilpotent, ce qui permet de conclure. Le passage aux limites projectives d'algèbres commutatives nilpotentes de dimension finie se fait sans difficulté.

•

Compte tenu de la proposition $V.2$, la proposition A.2.1 entraîne le résultat suivant :

Théorème A.2.2.
Soient $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_2$ deux L_∞-algèbres quasi-isomorphes. Alors les foncteurs de déformation de $\mathfrak{g}_1$ et de $\mathfrak{g}_2$ sont isomorphes.

En particulier les classes d'équivalence de jauge de 2-tenseurs de Poisson formels sur une variété sont en bijection avec les classes d'équivalence de jauge d'étoile-produits.

Références :

[AKSZ] M. Alexandrov, M. Kontsevich, A. Schwarz, O. Zaboronsky, *The geometry of the Master equation and topological quantum field theory*, Int. J. Mod. Phys. et hep-th 9502010.

[BFFLS] F. Bayen, M. Flato, C. Frønsdal, A. Lichnerowicz, D. Sternheimer, *Deformation theory and quantization I. Deformations of symplectic structures*, Ann. Phys. 111 No1, 61-110 (1978).

[FM] W. Fulton, R. MacPherson, *Compactification of configuration spaces*, Ann. Math. 139, 183-225 (1994).

[H-S] V. Hinich, V. Schechtman, *Homotopy Lie algebras*, I.M. Gelfand Seminar, Adv. Sov. math. 16 (2), 1993.

[Kh] A.G. Khovanskiĭ, *On a lemma of Kontsevich.* Funct. Anal. Appl. 31, no. 4, 296–298 (1998)

[K1] M. Kontsevich, *Deformation quantization of Poisson manifolds*, q-alg. 9709040.

[K2] M. Kontsevich, *Formality conjecture*, D. Sternheimer et al. (eds.), Deformation theory and symplectic geometry, Kluwer, 139-156 (1997).

[M] S. Majid, *Algebras and Hopf algebras in braided categories*, q-alg. 9509023.

[Q] D. Quillen, Rational homotopy theory, Ann. Math. 90 (1969), 205-295.