Front d'onde et propagation des singularités pour un vecteur-distribution

Dominique MANCHON
Institut Elie Cartan, Université Henri Poincaré - CNRS - INRIA
BP 239, 54506 Vandœuvre les Nancy Cedex
manchon@iecn.u-nancy.fr

Table des matières

Résumé : Nous définissons le front d'onde d'un vecteur-distribution pour une représentation unitaire d'un groupe de Lie réel G à l'aide du calcul pseudo-différentiel mis au point dans un travail antérieur [M2]. Cette notion précise celle de front d'onde d'une représentation introduite par R. Howe [Hw]. En application nous donnons une condition suffisante pour qu'un vecteur-distribution reste un vecteur-distribution pour la restriction de la représentation à un sous-groupe fermé H, et nous donnons un théorème de propagation des singularités pour les vecteurs-distribution.

Abstract : We define the wave front set of a distribution vector of a unitary representation in terms of pseudo-differential-like operators [M2]for any real Lie group G. This refines the notion of wave front set of a representation introduced by R. Howe [Hw]. We give as an application a necessary condition so that a distribution vector remains a distribution vector for the restriction of the representation to a closed subgroup H, and we give a propagation of singularities theorem for distribution vectors.

Mathematics Subject Classification : 22E30, 38S05, 58G15

Introduction

Cet article est la suite d'un travail récent [M4] dans lequel était développée la notion de front d'onde d'une représentation unitaire [Hw]. Nous étendons ici la notion de front d'onde aux vecteurs-distribution.

La définition du front d'onde d'une distribution sur une variété M est due à L. Hörmander, qui en donne également une caractérisation à l'aide des opérateurs pseudo-différentiels [Hr2 th. 18.1.27] : le front d'onde est une partie conique fermée du fibré cotangent privé de la section nulle $T^*M - \{0\}$, donnée par :

$$(*) \qquad WF(u) = \bigcap \operatorname{char} P,$$

où P parcourt l'ensemble des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre zéro tels que $Pu \in C^\infty(M)$, et $\operatorname{char} P$ désigne l'ensemble des $(x, \xi) \in T^*M - \{0\}$ tels que le symbole p de P vérifie : $\liminf p(x, t\xi) = 0$ lorsque $t \to +\infty$ (voir aussi [T § VI.1]). Pour un réel s quelconque le front d'onde d'ordre s de la distribution u est défini de la même manière, l'intersection s'étendant à tous les o.p.d. P d'ordre zéro tels que Pu appartienne à l'espace de Sobolev $H_s^{\mathrm{loc}}(M)$ [D-H § 6.1].

Or nous avons défini ([M2], cf. § II.2) pour toute représentation unitaire π d'un groupe de Lie réel G des opérateurs pseudo-différentiels sur l'espace $\mathcal{H}_\pi$ de la représentation, dont le symbole est une fonction C^∞ sur la variété de Poisson linéaire $\mathfrak{g}^*$ (ces opérateurs sont l'image par π d'opérateurs pseudo-différentiels invariants sur le groupe, cf. [Me1], [Stk]) : pour tout $p \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ tel que sa transformée de Fourier soit une distribution à support compact contenu dans un voisinage exponentiel de 0 dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ on définit l'opérateur $p^{W,\pi}$ de domaine H_π^∞ par :

$$< p^{W,\pi} u,\, v > = < \varphi, C_{u,v} >$$

pour tout $u \in \mathcal{H}_\pi^\infty$ et $v \in \mathcal{H}_\pi$. Ici $C_{u,v}$ désigne le coefficient $< \pi(.)u,\, v >$ et φ est donnée par :

$$j_G . \exp^* \varphi = \mathcal{F}^{-1} p,$$

où j_G désigne le jacobien de l'exponentielle. Il est donc naturel de définir (§ II.3) le front d'onde d'un vecteur-distribution par une formule analogue à (*) :

$$(**) \qquad WF(u) = \bigcap \operatorname{char} p,$$

où p parcourt l'ensemble des symboles d'ordre zéro tels que $p^{W,\pi} u$ soit un vecteur C^∞, et où $\operatorname{char} p$ désigne l'ensemble des directions dans $\mathfrak{g}^*$ où p s'annule à l'infini. Nous définissons également le front d'onde d'ordre s à l'aide des espaces de Sobolev-Goodman $\mathcal{H}_\pi^s$ [Go] dont nous rappelons la définition au § II.1.

Le front d'onde d'un vecteur-distribution est un cône fermé $\operatorname{Ad}^* G$-covariant de $\mathfrak{g}^* - \{0\}$. Ceci raffine la notion de front d'onde d'une représentation unitaire introduite par R. Howe [Hw], en ce sens que l'on a l'inclusion :

$$WF(u) \subset -WF_\pi^e.$$

Nous donnons également au § II.4 une caractérisation du front d'onde de R. Howe en termes d'opérateurs pseudo-différentiels :

$$WF_\pi^e = -\bigcap \text{char p},$$

où p parcourt l'ensemble des symboles d'ordre zéro tels que $p^{W,\pi}$ soit un opérateur régularisant. Le signe moins est un simple artifice de convention.

En application nous donnons au § II.5 une condition suffisante pour qu'un vecteur-distribution soit encore un vecteur-distribution pour la restriction de π à un sous-groupe fermé H :

Theorème II.5.2.
1). Soit $u \in \mathcal{H}^\infty_{\pi_{|_H}}$. Considérant alors u comme un vecteur-distribution de π on a l'inclusion :

$$WF(u) \subset \mathfrak{h}^\perp.$$

2). Soit $v \in \mathcal{H}_\pi^{-\infty}$. Alors si $WF(v) \cap \mathfrak{h}^\perp = \emptyset$ le vecteur-distribution v est un vecteur-distribution pour la restriction $\pi\big|_H$.

Nous donnons également une condition suffisante sur une distribution φ à support compact sur G pour que $\pi(\varphi)u$ soit un vecteur C^∞ : définissant $\mathcal{WF}(u)$ comme la partie conique de $T^*G - \{0\}$ formée par les translatés (à gauche ou à droite) de $WF(u)$ on a le résultat suivant :

Proposition II.4.4.
Supposons que $\mathcal{H}_\pi$ soit un espace de Hilbert séparable. Soit $u \in \mathcal{H}_\pi^{-\infty}$. Alors pour toute distribution $\varphi \in \mathcal{E}'(G)$ telle que :

$$WF(\varphi) \cap \mathcal{WF}(u) = \emptyset,$$

on a :

$$\pi(\varphi)u \in \mathcal{H}_\pi^\infty.$$

Le résultat central de cet article est le théorème de propagation des singularités III.3.1, qui entraîne (corollaire III.3.5) que pour un symbole à valeurs réelles p la différence des deux fronts d'onde :

$$WF(u) \backslash WF(p^{W,\pi}u)$$

est invariante par le flot du champ hamiltonien défini par le symbole principal p_m. La démonstration est parallèle à celle donnée dans [T§ VI.1] pour les distributions, et repose sur une forme faible de l'inégalité de Gårding précisée (Théorème III.2.1).

La première partie est consacrée au calcul fonctionnel holomorphe pour des symboles elliptiques. Nous avons repris la construction de M.A. Shubin [Shu] en suivant la suggestion de R. Strichartz [St] de considérer des fonctions holomorphes dans un secteur du plan complexe plus générales que $t \mapsto t^z$. Le défaut de cette approche est de limiter le calcul fonctionnel holomorphe à des symboles polynomiaux (ou, si l'on veut, aux opérateurs différentiels). La méthode de R. Seeley [S] s'applique à tout o.p.d. elliptique, mais nous n'avons pas su adapter sa méthode à notre cadre. La difficulté provient de la nécessité de se limiter à des symboles dont la transformée de Fourier inverse est à support compact, ce qui oblige à couper les hautes fréquences à chaque étape de la construction de la résolvante approchée. Cette restriction n'ayant pas lieu d'être dans le cas nilpotent simplement connexe [M3] on peut donc définir dans ce cas précis un calcul fonctionnel holomorphe pour tout symbole elliptique, polynomial ou non.

Ce calcul fonctionnel est nécessaire pour montrer la continuité Sobolev de $\mathcal{H}_\pi^s$ dans $\mathcal{H}_\pi^{s-m}$ des opérateurs $p^{W,\pi}$ où p est un symbole d'ordre m (proposition II.2.1), contrairement au cas des distributions sur une variété, où ce résultat se montre directement [T. th. II.6.5]. Il repose quant à lui sur une variante à paramètre du calcul symbolique (Théorème I.2.4) sur $\mathfrak{g}^*$, que nous développons en appendice. Nous reprenons [M1 th. 4.2] en incluant le paramètre et en apportant quelques simplifications et corrections (voir la remarque suivant le théorème I.1.2).

Remerciements : Je remercie vivement Michel Duflo pour d'utiles précisions.

Notations :

(0.1). On désignera par G un groupe de Lie réel connexe de dimension n, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et de dual $\mathfrak{g}^*$. On désigne par dx une mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{g}$, et par dg une mesure de Haar à gauche sur G normalisée de telle façon que le jacobien j_G de l'exponentielle s'écrive :

$$j_G(x) = \left|\det\left(\frac{1 - e^{-\operatorname{ad} x}}{\operatorname{ad} x}\right)\right|$$

On désigne par $\Delta_G = \det \operatorname{Ad} g$ la fonction module. Par le choix de la mesure de Haar dg nous identifierons l'espace $C^\infty(G)$ et l'espace des densités C^∞ sur G. Par dualité l'espace des distributions sur G s'identifie à l'espace des fonctions généralisées sur G.

(0.2). On désignera par $T^*G\backslash\{0\}$ le fibré cotangent de G privé de la section nulle. Une partie C de $T^*G\backslash\{0\}$ est *conique* si pour tout $(g,\xi) \in C$, $(g, t\xi) \in C$ pour tout réel $t > 0$. On notera alors $-C$ l'ensemble des $\{(g, -\xi),\, (g,\xi) \in C\}$.

(0.3). On désignera par π une représentation unitaire fortement continue du groupe de Lie G dans un espace de Hilbert séparable qui sera noté $\mathcal{H}_\pi$. On désignera alors par $\mathcal{H}_\pi^\infty$ l'espace des vecteurs indéfiniment différentiables de la représentation. L'espace $\mathcal{H}_\pi^\infty$ est constitué des vecteurs u tels que pour tout $v \in \mathcal{H}_\pi$ le coefficient :

$$C_{u,v} : g \longmapsto < \pi(g)u,\, v >$$

soit C^∞ sur G. Son dual est l'espace $\mathcal{H}_\pi^{-\infty}$ des vecteurs-distribution.

(0.4). On définit pour tout $\varphi \in \mathcal{E}'(G)$ l'opérateur (en général non borné) $\pi(\varphi)$ de domaine $\mathcal{H}_\pi^\infty$ par la formule :

$$< \pi(\varphi)u,\, v > = < \varphi,\, C_{u,v} >$$

(Voir [Jø] pour une définition dans le cadre général des représentations dans un espace de Banach).

(0.5). Pour toute distribution $\varphi \in \mathcal{E}'(G)$ on pose :

$$\varphi^* = \Delta_G.\overline{i^*\varphi}$$

où Δ_G désigne la fonction module et i le difféomorphisme $g \mapsto g^{-1}$. On a pour tout couple (u, v) dans $\mathcal{H}_\pi^\infty$:

$$< \pi(\varphi)u,\, v > = < u, \pi(\varphi^*)v > .$$

I. Calcul fonctionnel holomorphe pour des symboles elliptiques

I.1. Rappels sur le calcul symbolique

Soit G un groupe de Lie réel connexe, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie et $\mathfrak{g}^*$ son dual, que nous verrons comme une variété de Poisson linéaire munie du crochet de Poisson :

$$\{f, g\}(\xi) = < \xi,\, [Df(\xi), Dg(\xi)] > .$$

Soit Q un voisinage compact de 0 dans $\mathfrak{g}$. On désigne par $S_\rho^m(\mathfrak{g}^*)$, $m \in \mathbb{R}$, $\rho \in]0, 1]$, la classe de symboles constituée par les fonctions $p \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ vérifiant les estimations :

$$|D^\alpha p(\xi)| \leq C_\alpha.(1 + \|\xi\|^2)^{\frac{1}{2}(m-\rho|\alpha|)}.$$

Cet espace, muni des semi-normes N_α définies comme étant les meilleures constantes C_α possibles, est un espace de Fréchet. On désignera par $AS_\rho^{m,Q}(\mathfrak{g}^*)$ le sous-espace fermé de $S_\rho^m(\mathfrak{g}^*)$ des symboles p tels que supp $\mathcal{F}^{-1}p \subset Q$, et par $AS_\rho^m(\mathfrak{g}^*)$ la réunion des $AS_\rho^{m,Q}(\mathfrak{g}^*)$, Q parcourant l'ensemble des voisinages compacts de 0 dans $\mathfrak{g}$. On rappelle deux résultats de [M1] (Theorem 2.1 et Theorem 4.2) :

Proposition I.1.1 (Théorème d'approximation).
Soit Q un voisinage compact de 0 dans $\mathfrak{g}$, et soit $\chi \in C^\infty(\mathfrak{g})$ à support dans Q telle que $\chi = 1$ au voisinage de 0. Alors l'opérateur T^Q sur $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ défini par :

$$T^Q = \mathcal{F} \circ \chi \circ \mathcal{F}^{-1}$$

est continu de $S_\rho^m(\mathfrak{g}^*)$ dans $AS_\rho^{m,Q}(\mathfrak{g}^*)$, et $I - T^Q$ est continu de $S_\rho^m(\mathfrak{g}^*)$ dans l'espace de Schwartz $S(\mathfrak{g}^*)$.

Proposition I.1.2 (Calcul symbolique).
Soit K un voisinage compact exponentiel de 0 dans $\mathfrak{g}$, assez petit pour que $(\exp K)^2$ soit l'image difféomorphe d'un voisinage K^2 de 0 dans $\mathfrak{g}$. Alors si $\rho > \frac{1}{2}$ il existe un voisinage compact Q de 0 dans $\mathfrak{g}$ tel que la loi $\#$ définie à partir de la convolution $*$ sur le groupe par :

$$\exp_*(j_G^{-1}\mathcal{F}^{-1}p) \circ \exp_*(j_G^{-1}\mathcal{F}^{-1}q) = \exp_*(j_G^{-1}\mathcal{F}^{-1}(p\#q))$$

s'étend en une correspondance bilinéaire continue :

$$AS_\rho^{m_1,Q}(\mathfrak{g}^*) \times AS_\rho^{m_2,Q}(\mathfrak{g}^*) \longrightarrow AS_\rho^{m_1+m_2,Q^2}(\mathfrak{g}^*).$$

De plus on a le développement asymptotique :

$$p\#q = \sum_0^N C_k(p,q) + R_N(p,q)$$

où les C_k sont des opérateurs bi-différentiels avec :

$$C_0(p,q) = pq, \qquad C_1(p,q) = \frac{i}{2}\{p,q\},$$

les C_k (resp. R_N) étant par ailleurs continus de $AS_\rho^{m_1,Q}(\mathfrak{g}^*) \times AS_\rho^{m_2,Q}(\mathfrak{g}^*)$ dans la classe $AS_\rho^{m_1+m_2-k(2\rho-1),Q+Q}(\mathfrak{g}^*)$ (resp. $AS_\rho^{m_1+m_2-(N+1)(2\rho-1),(Q+Q)\cup Q^2}(\mathfrak{g}^*)$).

Remarque : le théorème n'est pas vrai a priori pour le voisinage compact K lui-même, contrairement à ce qui est dit par erreur dans l'énoncé du théorème 4.2 de [M1]. La démonstration du lemme III.8 de [M1] nécessite en effet un voisinage compact Q plus petit (voir le lemme A.6 pour la variante avec paramètre), ce qui n'est nullement restrictif dans les applications.

On a également une variante à paramètre du théorème d'approximation, tirée de [M2] (Théorème I.2.2) :

Proposition I.1.3 (Théorème d'approximation à paramètre).
Soit $(p_\lambda)_{\lambda\in\mathcal{P}}$ une famille de symboles, où l'ensemble de paramètres $\mathcal{P}$ est cône dans un espace vectoriel normé (typiquement, $\mathcal{P} = \mathbb{R}^+$ ou un secteur de $\mathbb{C}$). On suppose que p_λ appartient à $S_\rho^m(\mathfrak{g}^*)$ pour tout λ, et qu'on a en plus les estimations :

$$|D^\alpha p_\lambda(\xi)| \le C_\alpha(1+\|\xi\|^2)^{\frac{1}{2}(m-\rho|\alpha|)}(1+\|\lambda\|^2)^{\frac{1}{2}(m'-\rho'|\alpha|)}$$

avec $m' \in \mathbb{R}$ et $\rho' > 0$. Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout multi-indice α il existe C_N, α telle que :

$$|D^\alpha\big((I-T^Q)p_\lambda\big)(\xi) \le C_{N,\alpha}(1+\|\xi\|^2)^{-N}(1+\|\lambda\|^2)^{-N}.$$

Le passage du cas $\mathcal{P} = \mathbb{R}^+$ traité dans [M2] au cas général ci-dessus est immédiat.

I.2. Une résolvante approchée

Soit $p \in AS_\rho^{m,Q}(\mathfrak{g}^*)$ avec $m > 0$, $\rho > \frac{1}{2}$ et Q voisinage compact de 0 dans $\mathfrak{g}$ satisfaisant les hypothèses de la proposition I.1.2. On suppose que p est elliptique, c'est-à-dire qu'il existe $R > 0$ tel que pour $\|\xi\| > R$ on a :

$$C_1(1 + \|\xi\|^2)^{\frac{m}{2}} \leq |p(\xi)| \leq C_2(1 + \|\xi\|^2)^{\frac{m}{2}}.$$

Soit $\mathcal{P}$ un secteur angulaire de $\mathbb{C}$ tel que pour $\|\xi\|$ assez grand $p(\xi)$ ne prenne pas ses valeurs dans un voisinage conique de $\mathcal{P}$. Nous allons construire une paramétrixe pour le symbole à paramètre :

$$p_\lambda = p - \lambda, \qquad \lambda \in \mathcal{P}.$$

On posera :

$$\Lambda(\xi) = (1 + \|\xi\|^2)^{\frac{1}{2}}, \qquad \Lambda_d(\xi, \lambda) = (1 + \|\xi\|^2 + |\lambda|^{\frac{2}{d}})^{\frac{1}{2}}.$$

Lemme I.2.1.
On a l'estimation pour $|\xi|$ assez grand :

$$C_1\Lambda_m(\xi, \lambda)^m \leq |p_\lambda(\xi)| \leq C_2\Lambda_m(\xi, \lambda)^m.$$

Démonstration. On a l'encadrement :

$$C_1\Lambda_m(\xi, \lambda)^m \leq \Lambda(\xi)^m + |\lambda| \leq C_2\Lambda_m(\xi, \lambda)^m.$$

La majoration vient alors de l'inégalité :

$$|p_\lambda(\xi)| \leq C.(\Lambda(\xi)^m + |\lambda|).$$

Pour la minoration, on remarque que les hypothèses sur $\mathcal{P}$ entraînent l'existence d'un $\varepsilon > 0$ tel que $|p(\xi) - \lambda| \geq \varepsilon|p(\xi)|$ et $|p(\xi) - \lambda| \geq \varepsilon|\lambda|$. Il existe donc C' telle que :

$$|p_\lambda(\xi)| \geq C'(\Lambda(\xi)^m + |\lambda|).$$

•

Lemme I.2.2.
Lorsque p est de plus un symbole polynomial, la famille (p_λ) vérifie les estimations :

$$|D^\alpha p_\lambda(\xi)| \leq C_\alpha\Lambda_m(\xi, \lambda)^{m-|\alpha|}.$$

Ce lemme, à démonstration immédiate, est faux si p n'est pas un polynôme : il est en effet crucial que les dérivées s'annulent à partir d'un certain rang. On résume les deux lemmes précédents en disant que la famille $(p_\lambda)_{\lambda\in\mathcal{P}}$ appartient à la classe de symboles à paramètres :

$$S^m_{1,m}(\mathfrak{g}^*,\mathcal{P})$$

dont la définition procède directement des estimations du lemme 2, et est elliptique en tant que famille à un paramètre de symboles. En utilisant l'ellipticité de p_λ et l'expression explicite des dérivées successives de p_λ^{-1} on obtient classiquement le lemme suivant :

Lemme I.2.3.
Pour tout $\lambda \in \mathcal{P}$ tel que $|\lambda| > R$ on a les estimations :

$$|D^\alpha \frac{1}{p_\lambda}(\xi)| \leq C_\alpha.\Lambda_m(\xi,\lambda)^{-m-|\alpha|}$$

On se donne plus généralement un réel $d > 0$, on pose :

$$\Lambda_d(\xi,\lambda) = (1 + \|\xi\|^2 + |\lambda|^{\frac{2}{d}})^{\frac{1}{2}}$$

pour $\xi \in \mathfrak{g}^*$ et $\lambda \in \mathcal{P}$, et on définit la classe de symboles à paramètre $S^m_{\rho,d}(\mathfrak{g}^*,\mathcal{P})$ comme l'espace des p_λ vérifiant les estimations :

$$|D^\alpha p_\lambda(\xi)| \leq C_\alpha \Lambda_d(\xi,\lambda)^{m-\rho|\alpha|}$$

Les semi-normes définies par les meilleures constantes C_α possibles munissent cet espace d'une structure de Fréchet. On construit aussi les variantes analytiques $AS^{m,Q}_{\rho,d}$ et $AS^m_{\rho,d}$ de manière évidente. Nous aurons besoin d'un calcul symbolique à paramètre, c'est-à-dire d'une version à paramètre du théorème I.1.2. La démonstration, strictement parallèle à celle du théorème 4.2 de [M1], est donnée en appendice.

Theorème I.2.4 (calcul symbolique à paramètre).
Soit K un voisinage compact exponentiel de 0 dans $\mathfrak{g}$, assez petit pour que $(\exp K)^2$ soit l'image difféomorphe d'un voisinage K^2 de 0 dans $\mathfrak{g}$. Alors si $\rho > \frac{1}{2}$ il existe un voisinage compact Q de 0 contenu dans K tel que la loi $\#$ s'étend en une correspondance bilinéaire continue :

$$AS^{m_1,Q}_{\rho,d}(\mathfrak{g}^*,\mathcal{P}) \times AS^{m_2,Q}_{\rho,d}(\mathfrak{g}^*,\mathcal{P}) \longrightarrow AS^{m_1+m_2,Q^2}_{\rho,d}(\mathfrak{g}^*,\mathcal{P}).$$

De plus dans le développement asymptotique :

$$p\#q = \sum_0^N C_k(p,q) + R_N(p,q)$$

les C_k (resp. R_N) sont par ailleurs continus de $AS^{m_1,Q}_{\rho,d}(\mathfrak{g}^*,\mathcal{P}) \times AS^{m_2,Q}_{\rho,d}(\mathfrak{g}^*,\mathcal{P})$ dans la classe $AS^{m_1+m_2-k(2\rho-1),Q+Q}_{\rho,d}(\mathfrak{g}^*,\mathcal{P})$ (resp. $AS^{m_1+m_2-(N+1)(2\rho-1),(Q+Q)\cup Q^2}_{\rho,d}(\mathfrak{g}^*,\mathcal{P})$).

Soit Q un voisinage compact de 0 dans $\mathfrak{g}$ assez petit (voir § I.1), soit $\chi \in C^\infty(\mathfrak{g})$ telle que $\chi = 1$ au voisinage de 0 et soit, pour $\lambda \in \mathcal{P}$ et $|\lambda| > R$, le symbole $q^1_\lambda \in AS_1^{m,Q}(\lambda)$ défini par :

$$q^1_\lambda = T^Q(\frac{1}{p_\lambda}).$$

Lemme I.2.5.
Pour tout $N \in \mathbb{N}$ et pour tout multi-indice α on a les estimations :

$$|D^\alpha(q^1_\lambda - \frac{1}{p_\lambda})| \leq C_{\alpha,N}\Lambda_m(\xi,\lambda)^{-N}.$$

Démonstration. Du lemme I.2.3 on tire immédiatement les estimations :

$$|D^\alpha \frac{1}{p_\lambda}(\xi)| \leq C.\Lambda(\xi)^{-\frac{m}{2}-\frac{|\alpha|}{2}}\Lambda(\lambda^{\frac{1}{m}})^{-\frac{m}{2}-\frac{|\alpha|}{2}}.$$

D'après le théorème d'approximation à paramètre (proposition I.1.3) on a donc les estimations :

$$\begin{aligned}|D^\alpha \frac{1}{p_\lambda}(\xi)| &\leq C_{N,\alpha}\Lambda(\xi)^{-N}\Lambda(\lambda^{\frac{1}{m}})^{-N}\\ &\leq C_{N,\alpha}\Lambda_m(\xi,\lambda)^{-N}.\end{aligned}$$

•

On déduit des lemmes I.2.3 et I.2.5 que le symbole à paramètre q^1_λ vérifie comme p_λ^{-1} les estimations du lemme I.2.3. On supposera, quitte à rajouter une constante, que $p_\lambda \neq 0$ pour tout $\lambda \in \mathcal{P}$ et pour tout λ de module $\geq r$, ce qui permet de construire la résolvante sur le secteur $\mathcal{P}$ en entier ainsi que sur le disque de rayon r.

Proposition I.2.6.
La famille de symboles :

$$r^1_\lambda = p_\lambda \# q^1_\lambda - 1$$

appartient à la classe de symboles à paramètre $AS^{-1,Q}_{1,m}(\mathfrak{g}^*, \mathcal{P})$

Démonstration. On écrit :

$$r^1_\lambda = (p_\lambda \# q^1_\lambda - p_\lambda q^1_\lambda) + (p_\lambda q^1_\lambda - 1),$$

puis on applique le théorème I.2.4 et le lemme I.2.5.

•

Quitte à restreidre suffisamment le compact Q on peut construire une paramétrixe d'ordre N pour p_λ, en posant :

$$q_\lambda^N = q_\lambda^1 \# \sum_{p=0}^{N-1} (-1)^p (r_\lambda)^{\#p}, \qquad\qquad r_\lambda^N = (r_\lambda^1)^{\#N}.$$

Il est clair que l'on a :

$$p_\lambda \# q_\lambda^N = 1 + r_\lambda^N$$

avec $r_\lambda^N \in AS_{1,m}^{-N,Q}$. Un raisonnement standard et un contrôle soigneux des supports des transformées de Fourier inverses ([M2] théorème I.3.6) permet de construire une paramétrixe $q_\lambda \in AS_{1,m}^{-m,Q}$ d'ordre infini, c'est-à-dire telle que :

$$r_\lambda = p_\lambda \# q_\lambda - 1 \in \bigcap_N AS_{1,m}^{-N,Q}(\mathfrak{g}^*, \mathcal{P}).$$

Un petit calcul classique (voir par exemple [He]) montre que la paramétrixe est bilatère, c'est-à-dire que l'on a également :

$$r'_\lambda = q_\lambda \# p_\lambda - 1 \in \bigcap_N AS_{1,m}^{-N,Q}(\mathfrak{g}^*, \mathcal{P}).$$

Le calcul symbolique, l'approximation analytique T^Q et la construction de la paramétrixe préservent l'holomorphie par rapport au paramètre λ. La résolvante q_λ est donc holomorphe en λ.

I.3. Calcul fonctionnel holomorphe

Soit p un symbole polynomial elliptique de degré m sur $\mathfrak{g}^*$, et soit $\mathcal{P}$ un secteur angulaire de $\mathbb{C}$ tel qu'il existe $R > 0$ tel que $p(\xi) \notin \mathcal{P}$ pour $\|\xi\| > R$. Soit φ une fonction holomorphe sur un voisinage conique ouvert $\mathcal{V}$ du complémentaire de $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{C} - \{0\}$ et vérifiant :

$$|\varphi(z)| \leq C.(1 + |z|^2)^{\frac{s}{2}}$$

avec $s < 0$. Si $a \notin \mathcal{P}$ et $a > r > 0$, et si $s < 0$ la formule de Cauchy nous permet d'écrire pour tout $a \in \mathbb{C} - \mathcal{P}$:

$$\varphi(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{\varphi(\lambda)}{\lambda - a}\, d\lambda,$$

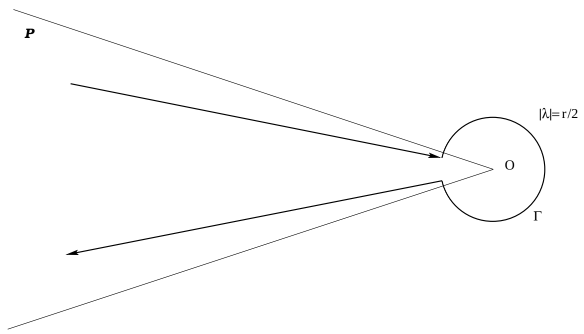

Figure 1

où $\Gamma \subset \mathcal{V}$ est le contour ci-dessus, défini de la manière suivante : quitte à faire une rotation on suppose que le secteur $\mathcal{P}$ contient la demi-droite des réels négatifs. On se donne deux réels $-\pi < a < b < \pi$ tels que les deux rayons d'argument a et b soient inclus à la fois dans $\mathcal{V}$ et dans l'intérieur de $\mathcal{P}$, et on parcourt Γ en parcourant d'abord le rayon d'argument b jusqu'au cercle de rayon $\frac{r}{2}$ (avec $r < R$), puis le cercle de rayon $\frac{r}{2}$ dans le sens négatif, puis le rayon d'argument a en s'éloignant de l'origine. Compte tenu de la résolvante approchée construite en I.2 on est donc amené à poser :

$$\varphi \overset{\#}{\circ} p(\xi) = -\frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \varphi(\lambda) q_\lambda(\xi)\, d\lambda.$$

Cette formule a un sens, la résolvante q_λ construite au § I.2 étant définie pour tout $\lambda \in \mathcal{P} \cup B(0, R)$, donc pour tout $\lambda \in \Gamma$.

Proposition I.3.1.
$\varphi \overset{\#}{\circ} p$ appartient à la classe de symboles :

$$AS_1^{ms,Q}(\mathfrak{g}^*).$$

Démonstration. dans la formule :

$$D^\alpha \varphi \overset{\#}{\circ} p(t\xi) = -\frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \varphi(\lambda) D^\alpha q_\lambda(t\xi)\, d\lambda$$

on suppose $t \geq 1$ et on effectue le changement de variables $\lambda \mapsto t^{-m}\lambda$. Le contour Γ est changé en $\Gamma_t = t^{-m}\Gamma$ et il est clair que pour toute fonction holomorphe sur $\mathcal{V}$ son intégrale sur Γ_t est indépendante de t. On a donc :

$$D^\alpha \varphi \overset{\#}{\circ} p(t\xi) = -\frac{1}{2i\pi} t^m \int_\Gamma \varphi(t^m\lambda) D^\alpha q_{t^m\lambda}(t\xi)\, d\lambda.$$

On a donc les estimations :

$$\begin{aligned} |D^\alpha \varphi \overset{\#}{\circ} p(t\xi)| &\leq C.t^m \int_\Gamma |t^m\lambda|^s (\|t\xi\|^2 + |t^m\lambda|^{\frac{2}{m}})^{-\frac{1}{2}(m+|\alpha|)}\, d\lambda \\ &\leq C'.t^{ms-|\alpha|} \int_\Gamma |\lambda|^s (\|\xi\|^2 + |\lambda|^{\frac{2}{m}})^{-\frac{1}{2}(m+|\alpha|)}\, d\lambda \end{aligned}$$

d'où le résultat.

•

Remarque : il est a priori surprenant que ce résultat ne fasse pas intervenir les dérivées successives de la fonction holomorphe φ. Mais les estimations :

$$|\varphi^{(k)}(z)| \leq C_k.(1+|z|^2)^{\frac{1}{2}(s-k)}$$

que l'on aurait envie d'imposer sont en fait automatiquement vérifiées pour $\xi \in \mathcal{V}$. Pour le voir on part de la formule :

$$\varphi^{(k)}(tz) = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{\varphi(\xi)}{(\xi - tz)^{k+1}}\,d\xi$$

et on fait le même changement de variable que dans la démonstration de la proposition I.3.1. On obtient donc :

$$\begin{aligned}|\varphi^{(k)}(tz)| &= \frac{t}{2\pi}\left|\int_\Gamma \frac{\varphi(t\xi)}{(t\xi - tz)^{k+1}}\,d\xi\right| \\ &\leq C.t\int_\Gamma \frac{|t\xi|^s}{|t\xi - tz|^{k+1}}\,d\xi \\ &\leq C.t^{s-k}\int_\Gamma \frac{|\xi|^s}{|\xi - z|^{k+1}}\,d\xi.\end{aligned}$$

Proposition I.3.2.
Soient deux fonctions φ et ψ holomorphes sur $\mathcal{P}$ et vérifiant :

$$|\varphi(z)| \leq C_\alpha(1+|z|^2)^{\frac{m}{2}}, \qquad |\psi(z)| \leq C'_\alpha(1+|z|^2)^{\frac{m'}{2}}.$$

avec $m, m' < 0$. Alors la différence :

$$(\varphi \overset{\#}{\circ} p)\#(\psi \overset{\#}{\circ} p) - (\varphi\psi) \overset{\#}{\circ} p$$

appartient à l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathfrak{g}^*)$.

Démonstration. On considère un contour Γ' très proche de Γ, mais situé tout entier du côté opposé à $\mathcal{P}$ par rapport à Γ, défini en parcourant d'abord le rayon d'argument $b-\varepsilon$ jusqu'au cercle de rayon r, puis le cercle de rayon r dans le sens négatif, puis le rayon d'argument $a+\varepsilon$ en s'éloignant de l'origine. On choisit ε assez petit pour que les deux branches de Γ' soient incluses dans $\mathcal{P}$:

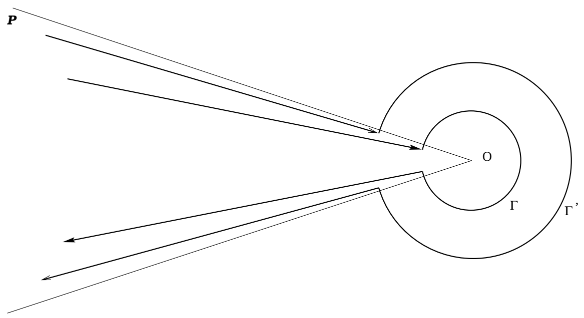

Figure 2

L'intégrale définissant $\varphi \overset{\#}{\circ} p$ ou $\psi \overset{\#}{\circ} p$ est la même en remplaçant Γ par Γ'.

Lemme I.3.3.
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ avec $\lambda \neq \mu$ et tels que p ne prenne pas ses valeurs en μ et en λ. Alors le symbole :

$$r_{\lambda,\mu} = q_\lambda \# q_\mu - \frac{1}{\lambda - \mu}(q_\lambda - q_\mu)$$

appartient à $\mathcal{S}(\mathfrak{g}^*)$, et on a les estimations :

$$|D^\alpha r_{\lambda,\mu}(\xi)| \leq \frac{1}{|\lambda - \mu|} C_{N,\alpha} \Lambda(\xi)^{-N},$$

les constantes $C_{N,\alpha}$ étant indépendantes de λ et μ.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la formule :

$$q_\lambda \# q_\mu = \frac{1}{\lambda - \mu} q_\lambda \# \big((p-\mu) - (p-\lambda)\big) \# q_\mu.$$

•

On a donc grâce au lemme I.3.3 :

$$\begin{aligned} \varphi \overset{\#}{\circ} p \# \psi \overset{\#}{\circ} p &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_\Gamma \int_{\Gamma'} \varphi(\lambda)\psi(\mu) q_\lambda \# q_\mu \, d\mu \, d\lambda \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_\Gamma \int_{\Gamma'} \frac{\varphi(\lambda)\psi(\mu)}{\lambda - \mu}(q_\lambda - q_\mu) \, d\mu \, d\lambda + \theta, \end{aligned}$$

où θ appartient à l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathfrak{g}^*)$. En utilisant la formule de Cauchy pour $\psi(\lambda)$ on obtient donc :

$$\varphi \overset{\#}{\circ} p \# \psi \overset{\#}{\circ} p - \theta = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma'} \varphi(\lambda)\psi(\lambda) q_\lambda \, d\lambda + \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma'} \int_\Gamma \frac{\varphi(\lambda)\psi(\mu)}{\lambda - \mu} q_\mu d\lambda \, d\mu.$$

La première intégrale est égale à $(\varphi\psi) \overset{\#}{\circ} p$ et la deuxième est nulle. la proposition I.3.2 est donc démontrée.

•

Lemme I.3.4.
si $\varphi(z) = z^{-N}, N \in \mathbb{N} - \{0\}$, le symbole $\varphi \overset{\#}{\circ} p - (q_0)^{\# N}$ appartient à $\mathcal{S}(\mathfrak{g}^*)$.

Démonstration. Compte tenu le la proposition I.3.2 il suffit de démontrer le lemme pour $N = 1$. On a pour $\varphi(z) = z^{-1}$:

$$\varphi \overset{\#}{\circ} p = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma''} \lambda^{-1} q_\lambda \, d\lambda$$

où Γ'' est un cercle centré à l'origine, de rayon petit, et parcouru dans le sens négatif. On a donc $\varphi \overset{\#}{\circ} p = q_0$.

•

Lorsque l'ordre de croissance s est positif on posera donc :

$$\varphi \overset{\#}{\circ} p = p^{\#k} \# \big((z^{-k}\varphi) \overset{\#}{\circ} p \big).$$

où k est le plus petit entier $\geq -s$. Compte tenu du lemme I.3.4 les propositions I.3.2 et I.3.3 sont encore vraies dans ce cadre. En particulier si on considère la famille de fonctions $(\varphi_a)_{a\in\mathbb{C}}$ définie par :

$$\varphi_a(z) = z^a$$

on a la propriété de groupe approchée :

$$\varphi_{a+b} \overset{\#}{\circ} p - (\varphi_a \overset{\#}{\circ} p) \# (\varphi_b \overset{\#}{\circ} p) \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}^*).$$

Remarque : Nous n'avons pas pu définir $\varphi \overset{\#}{\circ} p$ pour un symbole elliptique non polynomial dans $AS_1^{m,Q}$. En effet l'adaptation de la méthode de Seeley [S] n'est pas possible à cause de la nécessité de couper les hautes fréquences de la paramétrixe q_λ^1 d'ordre 1, ce qui annule le gain en décroissance par rapport au paramètre que l'on aurait pu obtenir si on avait pu prendre $q_\lambda^1 = (p-\lambda)^{-1}$ et non une approximation analytique. Or cette opération est inutile dans le cas d'une algèbre de Lie nilpotente (on dispose d'un calcul symbolique avec les classes de symboles "ordinaires" $S_\rho^m(\mathfrak{g}^*), \rho > \frac{1}{2}$ [M3]). On peut donc dans ce cas suivre [S] et définir $\varphi \overset{\#}{\circ} p$ pour un symbole elliptique $p \in S_\rho^m(\mathfrak{g}^*)$ quelconque.

II. Front d'onde d'un vecteur-distribution

Nous mettons en évidence à l'aide du calcul holomorphe de la première partie la régularité des opérateurs pseudo-différentiels $p^{W,\pi}$ par rapport aux espaces de Sobolev $\mathcal{H}_\pi^s$, dont la définition est rappelée en II.1. Nous définissons alors le front d'onde d'un vecteur-distribution, et nous dressons une liste de propriétés tout-à-fait analogues à celles du front d'onde d'une distribution. Les techniques employées sont standard ([D-H] § 6.1, [T] § VI.1).

Nous établissons ensuite le lien avec le front d'onde de la représentation, et enfin nous appliquons cette construction à l'étude des vecteurs C^∞ et des vecteurs-distribution de la restriction de la représentation unitaire à un sous-groupe fermé.

II.1. Espaces de Sobolev-Goodman

Soit G un groupe de Lie réel connexe, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie et $\mathfrak{g}^*$ son dual. Soit π une représentation unitaire de G dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}_\pi$. Soit $\mathcal{H}_\pi^\infty$ l'espace des vecteurs C^∞ de la représentation, dont le dual $\mathcal{H}_\pi^{-\infty}$ constitue l'espace des vecteurs-distribution.

On se donne une base $(X_i)_{i=1,\ldots,n}$ de $\mathfrak{g}$, et on considère le laplacien positif :

$$\Delta = -\sum_1^n X_i^2$$

dans l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. L'opérateur non borné $\pi(1+\Delta)$ est positif et essentiellement auto-adjoint [Ne], ce qui permet de définir ses puissances fractionnaires grâce au théorème spectral.

On définit alors l'*espace de Sobolev-Goodman* $\mathcal{H}_\pi^s$ comme le domaine de l'opérateur $\pi(1+\Delta)^{\frac{s}{2}}$ [Go]. L'espace $\mathcal{H}_\pi^s$, indépendant du choix de la base, est un espace de Hilbert, le produit scalaire étant donné par :

$$< u,\, v >_s = < \pi(1+\Delta)^{\frac{s}{2}} u,\, \pi(1+\Delta)^{\frac{s}{2}} v >_{\mathcal{H}_\pi} .$$

Dans le cas où $G=\mathbb{R}^n$ et où π est sa représentation régulière, ces espaces coïncident avec les espaces de Sobolev usuels $\mathcal{H}_s(\mathbb{R}^n)$. Les $\mathcal{H}_\pi^s$ vérifient les propriétés suivantes :

1. Si $s \geq t$ alors $\mathcal{H}_\pi^s \subset \mathcal{H}_\pi^t$ et l'inclusion est continue.
2. Le produit scalaire de $\mathcal{H}_\pi$ s'étend en une forme sesquilinéaire continue : $\mathcal{H}_\pi^{-s} \times \mathcal{H}_\pi^s \longrightarrow \mathbb{C}$, et de ce fait $\mathcal{H}_\pi^{-s}$ s'identifie au dual de $\mathcal{H}_\pi^s$.
3. L'espace des vecteurs-distribution $\mathcal{H}_\pi^{-\infty}$ est la limite inductive des $\mathcal{H}_\pi^s$ lorsque $s \to -\infty$, et $\mathcal{H}_\pi^\infty$ est la limite projective des $\mathcal{H}_\pi^s$ lorsque $s \to +\infty$.

II.2. Opérateurs pseudo-différentiels sur les espaces de représentations

On reprend les notations du § I. On associe [M2] à tout symbole $p \in AS_\rho^m(\mathfrak{g}^*)$ l'opérateur de symbole de Weyl p dans l'espace de la représentation π, défini sur $\mathcal{H}_\pi^\infty$ par :

$$p^{W,\pi} u = \int_{\mathfrak{g}} \mathcal{F}^{-1} p(x) \pi(\exp x)\, dx.$$

Cet opérateur est en général non borné lorsque $m>0$, mais régularisant (c'est-à-dire qu'il transforme tout vecteur en vecteur C^∞) lorsque p appartient à l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathfrak{g}^*)$. On rappelle [M2] que lorsque $p \in AS_\rho^{m_1,Q}$ et $q \in AS_\rho^{m_2,Q}$ avec $\rho > \frac{1}{2}$ et Q assez petit, le produit $p\#q$ est bien défini et on a :

$$p^{W,\pi} \circ q^{W,\pi} = (p\#q)^{W,\pi}.$$

Proposition II.2.1.
Soit $p \in AS_\rho^{m,Q}(\mathfrak{g}^*)$ avec $\rho > \frac{1}{2}$ et Q assez petit. Alors $p^{W,\pi}$ s'étend en un opérateur continu de $\mathcal{H}_\pi^s$ dans $\mathcal{H}_\pi^{s-m}$.

Démonstration. Soit $L(\xi) = 1 + \sum_1^n < \xi,\, X_j >^2$. C'est un symbole polynomial elliptique d'ordre 2, et l'opérateur $L^{W,\pi}$ est égal à $\pi(1+\Delta)$. Soit q_λ une résolvante approchée de L. On applique le calcul fonctionnel du § I.3 à L, de sorte que si l'on pose :

$$p_s = \varphi \overset{\#}{\circ} p \text{ avec } \varphi(z) = z^{\frac{s}{2}}$$

l'opérateur $L_s^{W,\pi} - (L^{W,\pi})^{\frac{s}{2}}$ est régularisant. On voit ceci en comparant les deux expressions :

$$L_s^{W,\pi} = -\frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \lambda^{\frac{s}{2}} q_\lambda^{W,\pi}\, d\lambda$$

et

$$(L^{W,\pi})^{\frac{s}{2}} = -\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \lambda^{\frac{s}{2}}(L^{W,\pi}-\lambda I)^{-1}\,d\lambda,$$

la deuxième expression ayant un sens si le rayon r choisi pour la construction du contour Γ est assez petit. En particulier $L_s^{W,\pi}$ est continu de $\mathcal{H}_\pi^t$ dans $\mathcal{H}_\pi^{t-s}$ pour tout t.

Lemme II.2.2.
Pour tout symbole p d'ordre 0 et pour tout réel s l'opérateur $p^{W,\pi}$ est continu de $\mathcal{H}_\pi^s$ dans $\mathcal{H}_\pi^s$.

Démonstration. On commence par montrer le lemme pour $0 \le s \le 1$. Soit $u \in \mathcal{H}_\pi^\infty$. Les opérateurs $p^{W,\pi}$ et $(L_s\#p - p\#L_s)^{W,\pi}$ étant continus de $\mathcal{H}_\pi^0$ dans $\mathcal{H}_\pi^0$ on a les estimations suivantes :

$$\begin{aligned}\|p^{W,\pi}u\|_s &\le C.\|L_s^{W,\pi}p^{W,\pi}u\|_0\\ &\le C'.\big(\|p^{W,\pi}L_s^{W,\pi}u\|_0 + \|(L_s\#p - p\#L_s)^{W,\pi}u\|_0\big)\\ &\le C''\|L_s^{W,\pi}u\|_0 + C'''\|u\|_0\\ &\le C''''\|u\|_s.\end{aligned}$$

Réitérant l'argument précédent en remplaçant $\mathcal{H}_\pi^0$ par $\mathcal{H}_\pi^1$ on démontre le lemme pour $1 \le s \le 2$, puis de proche en proche pour tout $s \ge 0$. Un simple argument de dualité permet alors d'étendre le résultat pour $s \le 0$.

•

On finit la démonstration de la proposition en remarquant que si p est d'ordre m le symbole $L_{-m}\#p$ est d'ordre 0, ce qui implique [M2 corollaire I.4.2] que $L_{-m}^{W,\pi} \circ p^{W,\pi}$ est borné de $\mathcal{H}_\pi$ dans $\mathcal{H}_\pi$. D'après le lemme II.2.2 cet opérateur $L_{-m}^{W,\pi} \circ p^{W,\pi}$ est borné de $\mathcal{H}_\pi^s$ dans $\mathcal{H}_\pi^s$ pour tout s, donc $L_m^{W,\pi}L_{-m}^{W,\pi}p^{W,\pi}$ est continu de $\mathcal{H}_\pi^s$ dans $\mathcal{H}_\pi^{s-m}$. Comme l'opérateur $L_m^{W,\pi}L_{-m}^{W,\pi}$ est égal à l'identité modulo un opérateur régularisant, ceci termine la démonstration de la proposition II.2.1.

•

Remarque : Nous avons exprimé les puissances fractionnaires de $L^{W,\pi}$ à l'aide d'une intégrale sur le contour Γ, ce qui est possible parce que $L^{W,\pi}$ est auto-adjoint et $L^{W,\pi} - I$ est positif. Il est possible de faire de même en remplaçant L par n'importe quel symbole p elliptique vérifiant les conditions du § I.3, à condition que la résolvante soit compacte (ce qui est le cas si la représentation est fortement traçable, voir par exemple [Hw], [M4]). En effet dans ce cas le spectre de $p^{W,\pi}$ est discret, son intersection avec $\mathcal{P}$ est bornée donc finie, il est donc possible de choisir un contour Γ qui évite le spectre (voir [Shu § 9]). On définit ainsi $\varphi(p^{W,\pi})$ pour toute fonction φ holomorphe dans le secteur $\mathcal{P}$, et en refaisant le calcul de la proposition I.3.2 on montre que pour deux fonctions holomorphes φ et ψ dans $\mathcal{P}$ on a :

$$\varphi(p^{W,\pi}) \circ \psi(p^{W,\pi}) = (\varphi\psi)(p^{W,\pi}).$$

II.3. Définition et premières propriétés du front d'onde

Soit $p \in AS_\rho^0(\mathfrak{g}^*)$ un symbole d'ordre zéro. On appelle *ensemble caractéristique* de p le cône défini par :

$$\operatorname{char} p = \{\xi \in \mathfrak{g}^* / \liminf_{t \to +\infty} p(t\xi) = 0\}.$$

On montre facilement que si $\rho = 1$ ce cône est fermé. On appelle *front d'onde* d'un vecteur-distribution u le cône fermé de $\mathfrak{g}^*$ défini par :

$$WF(u) = \bigcap_{\substack{p \in AS_1^0(\mathfrak{g}^*) \\ p^{W,\pi} u \in \mathcal{H}_\pi^\infty}} \operatorname{char} p.$$

Le *front d'onde d'ordre* s du vecteur-distribution u est quant à lui défini pour tout réel s par :

$$WF_s(u) = \bigcap_{\substack{p \in AS_1^0(\mathfrak{g}^*) \\ p^{W,\pi} u \in \mathcal{H}_\pi^s}} \operatorname{char} p.$$

Les $WF_s(u)$ forment une famille croissante de cônes fermés dont la réunion est le front d'onde $WF(u)$. Par ailleurs pour tout $g \in G$ on a la relation de covariance :

$$\pi(g) \circ p^{W,\pi} \circ \pi(g)^{-1} = (\mathrm{Ad}^*\, g.p)^{W,\pi},$$

qui implique que $WF(u)$ et $WF_s(u)$ sont covariants sous l'action coadjointe de G dans $\mathfrak{g}^*$: pour tout $g \in G$ on a :

$$WF(\pi(g)u) = \mathrm{Ad}^*\, g.WF(u)$$

et de même pour le front d'onde d'ordre s.

Le front d'onde défini ci-dessus vérifie quelques propriétés tout à fait similaires à celles vérifiées par le front d'onde d'une distribution. Rappelons [T § VI.1] qu'un symbole $p \in S_1^m(\mathfrak{g}^*)$ est *d'ordre* $-\infty$ sur un cône ouvert U si pour tout cône fermé K contenu dans U, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et pour tout multi-indice α il existe une constante $C_{N,\alpha,K}$ telle que pour tout $\xi \in K$:

$$|D_p^\alpha(\xi)| \leq C_{N,\alpha,K} \Lambda(\xi)^{-N}.$$

Le *support essentiel* $ES(p)$ d'un symbole $p \in S_1^m(\mathfrak{g}^*)$ est le plus petit cône fermé de $\mathfrak{g}^* - \{0\}$ tel que p soit d'ordre $-\infty$ sur son complémentaire. Le développement asymptotique du produit # en opérateurs bi-différentiels entraîne l'inclusion :

$$ES(p\#q) \subset ES(p) \cap ES(q).$$

Les deux propositions suivantes résument les propriétés essentielles du front d'onde. La démonstration, laissée au lecteur, est strictement parallèle à celle donnée dans [T § VI.1] dans le cas du front d'onde d'une distribution. L'ingrédient essentiel est l'existence d'une paramétrixe pour les symboles elliptiques.

Proposition II.3.1.
Pour tout cône fermé $\mathcal{C}$ tel que $WF(u) \cap \mathcal{C} = \emptyset$ il existe un symbole $q = 1 + a$ avec $ES(a) \cap \mathcal{C} = \emptyset$, tel que :

$$q^{W,\pi} u \in \mathcal{H}_\pi^\infty.$$

Proposition II.3.2.
Soit $u \in \mathcal{H}_\pi^{-\infty}$ et soit p un symbole dans $AS_1^{m,Q}(\mathfrak{g}^*)$, avec Q assez petit. Alors :
1) Si $ES(p) \cap WF(u) = \emptyset$ alors $p^{W,\pi} u \in \mathcal{H}_\pi^\infty$.
2) $WF(p^{W,\pi} u) \subset WF(u) \cap ES(p)$.
3) $WF(u) \subset WF(p^{W,\pi} u) \cup \operatorname{char} p$.
4) Si p est elliptique, $WF(p^{W,\pi} u) = WF(u)$.

Le front d'onde d'ordre s admet également la caractérisation suivante :

Proposition II.3.3.
Soit $\xi \in \mathfrak{g}^* - \{0\}$. Alors $\xi \notin WF_s(u)$ si et seulement si on peut écrire $u = u_1 + u_2$ avec $u_1 \in \mathcal{H}_\pi^s$ et $\xi \notin WF(u_2)$.

Démonstration. Si u admet la décomposition ci-dessus il est clair que $\xi \notin WF_s(u)$. Réciproquement si $\xi \notin WF_s(u)$ il existe un symbole p d'ordre zéro tel que $p^{W,\pi} u \in \mathcal{H}_\pi^s$ et $\xi \notin \operatorname{char} p$. Il existe donc un voisinage conique fermé $\mathcal{C}$ de ξ tel que p soit $\mathcal{C}$-elliptique d'ordre zéro, c'est-à-dire vérifiant :

$$C_1 \leq |p(\eta)| \leq C_2$$

pour $\eta \in \mathcal{C}$ et $\|\eta\|$ assez grand. La construction de la paramétrixe (voir [He], [Hr1], [M2 prop. I.3.6] et aussi la démonstration de la proposition I.2.6) se restreint sans difficulté au cône $\mathcal{C}$: on part d'un symbole q_1 d'ordre zéro coïncidant avec $1/p$ sur $\mathcal{C} \cap \{\|\eta\| \geq R\}$, convenablement amputé de ses hautes fréquences. La construction de [M2 prop. I.3.6] (que nous reprenons dans la démonstration de la proposition I.2.6 dans le cas d'un symbole avec paramètre) aboutit à l'existence d'un symbole q d'ordre zéro tel que :

$$q \# p = 1 + r$$

avec $ES(r) \cap \mathcal{C}' = \emptyset$ pour tout cône ouvert $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$. On pose alors :

$$u_1 = q^{W,\pi} p^{W,\pi} u \text{ et } u_2 = r^{W,\pi} u.$$

D'après la proposition II.2.1 u_1 appartient à $\mathcal{H}_\pi^s$, et d'après la proposition II.3.2 ξ n'appartient pas à $WF(u_2)$.

•

II.4. Une autre caractérisation du front d'onde

Proposition II.4.1.
Soit $u \in \mathcal{H}_\pi^\infty$, et soit T_u la distribution sur G à valeurs dans $\mathcal{H}_\pi$ définie par :

$$T_u = \pi(.)u.$$

Alors le front d'onde de u est égal à l'opposé du front d'onde en l'élément neutre de la distribution T_u.

Démonstration. Les vecteurs C^∞ sont caractérisés de la façon suivante :

Lemme II.4.2.
Pour tout $p \in AS^Q(\mathfrak{g}^*)$, pour tout $u \in \mathcal{H}_\pi^\infty$ et pour tout $N \in \mathbb{N}$ on a :

$$\|p_\eta^{W,\pi} u\| \leq C_N \|\eta\|^{-N},$$

avec $p_\eta = p(\eta + .)$.

Démonstration. Si u appartient à $\mathcal{H}_\pi^\infty$ la fonction $\psi : x \mapsto \mathcal{F}^{-1}p(x)\pi(\exp x)u$ est C^∞ à support compact, donc sa transformée de Fourier $\widehat{\psi}$ est à décroissance rapide sur $\mathfrak{g}^*$. Or un petit calcul facile donne :

$$\widehat{\psi}(\xi) = p_\xi^{W,\pi} u.$$

•

Fin de la démonstration de la proposition II.4.1 : D'après la proposition II.3.1 un $\xi \in \mathfrak{g}^* - \{0\}$ est hors de $WF(u)$ si et seulement s'il existe un voisinage conique V_ξ de ξ et un symbole $q = 1 + a$ avec $ES(a) \cap V_\xi = \emptyset$, tels que :

$$q^{W,\pi} u \in \mathcal{H}_\pi^\infty.$$

On peut supposer que V_ξ est convexe. Soit maintenant $\mathcal{P}$ un cône fermé contenu dans V_ξ. Pour tout $\eta \in \mathcal{P}$ le symbole $q_\eta = 1 + a_\eta$ vérifie $q_\eta^{W,\pi} u \in \mathcal{H}_\pi^\infty$, et le support essentiel du symbole à paramètre a_η ne rencontre pas V_ξ. Le support essentiel de $r_{-\eta}$ est quant à lui contenu dans V_ξ. Les supports des transformées de Fourier inverses de $r_{-\eta}$ et a_η sont indépendants de η. Supposant ces supports assez petits on peut considérer le produit $r_{-\eta} \# a_\eta$. Considérant le développement du produit $\#$ en opérateurs bi-différentiels ainsi que l'expression explicite du reste donnée en appendice on montre :

$$r_{-\eta} \# a_\eta \in AS^{-\infty}(\mathfrak{g}^*, \mathcal{P}).$$

On en déduit que $r_{-\eta}^{W,\pi} a_\eta^{W,\pi} u$ est à décroissance rapide en η, et donc finalement que $r_{-\eta}^{W,\pi} u$ est aussi à décroissance rapide en $\eta \in \mathcal{P}$, et ce pour tout $r \in AS(\mathfrak{g}^*)$, ce qui veut dire que ξ n'appartient pas à $-WF(T_u)$. L'inclusion réciproque, laissée au lecteur, se démontre en remontant le raisonnement.

•

Il nous reste à comparer le front d'onde d'un vecteur-distribution avec le front d'onde d'une représentation tel qu'il a été défini par R. Howe [Hw]. Le front d'onde WF_π de la représentation π est une partie conique fermée de $T^*G - \{0\}$ invariante par translation à gauche et à droite. Il est donc entièrement déterminé par son intersection WF_π^e avec l'espace cotangent en l'élément neutre, qui est un cône fermé $\mathrm{Ad}^* G$-invariant de $\mathfrak{g}^*$. Le critère *vii*) du théorème 1.4 de [Hw] montre que WF_π^e est le front d'onde en e de la distribution $\pi(.)$ à valeurs opérateurs. L'analogue de la proposition II.4.1, dont la démonstration est identique, nous donne une définition alternative pour le front d'onde d'une représentation unitaire :

Proposition II.4.3.

$$WF_\pi^e = - \bigcap_{\substack{p \in AS_1^0(\mathfrak{g}^*) \\ p^{W,\pi} \text{ régularisant}}} \operatorname{char} p.$$

En corollaire immédiat nous avons l'inclusion :

$$WF(u) \subset -WF_\pi^e$$

pour tout vecteur-distribution u, et plus précisément :

$$WF_\pi^e = - \bigcup_{u \in \mathcal{H}_\pi^{-\infty}} WF(u).$$

Soit maintenant $u \in \mathcal{H}_\pi^{-\infty}$, soit φ une distribution à support compact sur G, et soit $\pi(\varphi)$ l'opérateur (non borné) qu'elle définit sur l'espace $\mathcal{H}_\pi$. Le domaine de $\pi(\varphi)$ contient $\mathcal{H}_\pi^\infty$. A quelle condition le vecteur $\pi(\varphi)u$ est-il un vecteur C^∞?

La réponse à cette question est un analogue du théorème III.7 de [M4] pour un vecteur-distribution : désignons par $\mathcal{WF}(u)$ la plus petite partie conique fermée de $T^*G - \{0\}$ invariante par translation à gauche et à droite contenant $WF(u)$.

Proposition II.4.4.
Supposons que $\mathcal{H}_\pi$ soit un espace de Hilbert séparable. Soit $u \in \mathcal{H}_\pi^{-\infty}$. Alors pour toute distribution $\varphi \in \mathcal{E}'(G)$ telle que :

$$WF(\varphi) \cap \mathcal{WF}(u) = \emptyset,$$

on a :

$$\pi(\varphi)u \in \mathcal{H}_\pi^\infty.$$

Démonstration. comme la convolution par un élément de l'algèbre enveloppante respecte le front d'onde, il suffit de montrer que $\pi(\varphi)u$ appartient à $\mathcal{H}_\pi$ pour toute distribution $\varphi \in \mathcal{E}'(G)$ vérifiant les conditions du théorème. On procède alors comme pour le théorème III.4 de [M4]. On remarque d'abord (cf [M4], prop. III.2 et corollaire III.3) que le front d'onde de la convolée $\varphi^* * \varphi$ ne rencontre pas $\mathcal{WF}(u)$. Pour tout $v \in \mathcal{H}_\pi^{-\infty}$ le front d'onde du coefficient-distribution :

$$C_{u,v} =< \pi(.)u,\, v >$$

est contenu dans $-\mathcal{WF}(u)$. C'est en particulier vrai pour le coefficient-distribution diagonal $C_{u,u}$.

Désignons par p_t le noyau de la chaleur sur le groupe G. Lorsque t tend vers 0 la quantité $\|\pi(p_t)\pi(\varphi)u\|_2^2$ converge en croissant vers $\ell =< (\varphi^* * \varphi).C_{u,u},\, 1 >$, la condition sur les fronts d'onde rendant licite le produit des deux distributions. Par ailleurs si (e_i) désigne une base orthonormée de $\mathcal{H}_\pi$ formée de vecteurs C^∞, on a :

$$\|\pi(p_t)\pi(\varphi)u\|_2^2 = \sum_i |< u, \pi(p_t)\pi(\varphi^*)e_i >|^2.$$

Il résulte du théorème de convergence monotone que la somme :

$$\sum_i |< u, \pi(\varphi^*)e_i >|^2 = \sum_i |< \pi(\varphi)u,\, ei >|^2$$

converge vers la limite finie ℓ ci-dessus, ce qui veut dire que u appartient à $\mathcal{H}_\pi$.

•

II.5. Restrictions

Soit G un groupe de Lie connexe, π une représentation unitaire de G et H un sous-groupe fermé de G. On note comme précédemment $\mathcal{H}_\pi^\infty$, $\mathcal{H}_\pi^{-\infty}$ et $\mathcal{H}_\pi^s$ l'espace des vecteurs C^∞, des vecteurs-distribution et de Sobolev-Goodman respectivement, pour la représentation π. On note $\mathcal{H}_{\pi_{|H}}^\infty$, $\mathcal{H}_{\pi_{|H}}^{-\infty}$ et $\mathcal{H}_{\pi_{|H}}^s$ les espaces analogues relativement à la restriction de π au sous-groupe H.

Soit $(X_1, \ldots, X_m)$ une base de l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ du sous-groupe H, que l'on complète en une base $X_1, \ldots, X_n$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G. Considérant les laplaciens respectifs $\Delta_G = -(X_1^2 + \cdots + X_n^2)$ et $\Delta_H = -(X_1^2 + \cdots + X_m^2)$ du groupe G et du sous-groupe H, l'espace $\mathcal{H}_\pi^s$ (resp. $\mathcal{H}_{\pi_{|H}}^s$) est le domaine de l'opérateur $\pi(1+\Delta_G)^s$ (resp. $\pi(1+\Delta_H)^s$). On a donc les inclusions suivantes :

Proposition II.5.1.

$$\mathcal{H}_\pi^\infty \subset \mathcal{H}_{\pi_{|H}}^\infty \qquad\qquad \mathcal{H}_{\pi_{|H}}^{-\infty} \subset \mathcal{H}_\pi^{-\infty}$$

$$\mathcal{H}_\pi^s \subset \mathcal{H}_{\pi_{|H}}^s \text{ si } s \geq 0 \qquad\qquad \mathcal{H}_{\pi_{|H}}^s \subset \mathcal{H}_\pi^s \text{ si } s \leq 0$$

On peut se demander inversement à quelle condition un vecteur C^∞ pour $\pi\big|_H$ est un vecteur C^∞ pour π, et à quelle condition un vecteur-distribution pour π est un vecteur-distribution pour la restriction $\pi\big|_H$:

Theorème II.5.2.
1). Soit $u \in \mathcal{H}^\infty_{\pi_{|H}}$. Considérant alors u comme un vecteur-distribution de π on a l'inclusion :

$$WF(u) \subset \mathfrak{h}^\perp.$$

2). Soit $v \in \mathcal{H}^{-\infty}_\pi$. Alors si $WF(v) \cap \mathfrak{h}^\perp = \emptyset$ le vecteur-distribution v est un vecteur-distribution pour la restriction $\pi\big|_H$.

Démonstration. Soit $\xi \notin \mathfrak{h}^\perp$. Alors il existe un voisinage conique $\mathcal{V}$ de ξ tel que le symbole polynomial $q(\xi) = 1 + \xi_1^2 + \cdots + \xi_m^2$ soit $\mathcal{V}$-elliptique d'ordre 2, c'est-à-dire qu'il vérifie :

$$C_1\Lambda(\xi)^2 \le q(\xi) \le C_2\Lambda(\xi)^2$$

pour tout $\xi \in \mathcal{V}$. Pour tout entier positif k le symbole $q^{\#k}$ est alors $\mathcal{V}$-elliptique d'ordre $2k$. Il existe donc un symbole s_k tel que $ES(s_k) \cap \mathcal{V} = \emptyset$ et tel que :

$$q^{\#k} = r_k + s_k$$

où r_k est elliptique d'ordre $2k$. Soit r_{-k} une paramétrixe pour r_k. Soit $u \in \mathcal{H}^\infty_{\pi_{|H}}$. On a alors :

$$r_{-k}^{W,\pi}(q^{\#k})^{W,\pi}u = (r_{-k}\#r_k)^{W,\pi}u + (r_{-k}\#s_k)^{W,\pi}u,$$

soit encore :

$$u = -(r_{-k}\#s_k)^{W,\pi}u + r_{-k}^{W,\pi}(q^{\#k})^{W,\pi}u + (1 - r_{-k}\#r_k)^{W,\pi}u.$$

ξ n'appartient pas au front d'onde du premier terme grâce au 2) de la proposition II.3.1, le deuxième terme appartient à $\mathcal{H}^{2k}_\pi$ grâce à la proposition II.2.1 et grâce au fait que $(q^{\#k})^{W,\pi}u$ appartient à $\mathcal{H}_\pi$ pour tout k, et enfin le troisième terme appartient à $\mathcal{H}^\infty_\pi$ par définition d'une paramétrixe. On a donc :

$$u = u_1 + u_2$$

où $\xi \notin WF(u_1)$ et $u_2 \in \mathcal{H}_{2k}$, ce qui équivaut au fait (cf prop. II.3.3) que ξ n'appartient pas à $WF_{2k}(u)$. Ceci étant vrai pour tout k on en déduit le 1) du théorème.

Pour démontrer le 2) on considère un $v \in \mathcal{H}^{-\infty}_\pi$ tel que $WF(v) \cap \mathfrak{h}^\perp = \emptyset$. D'après la proposition II.3.1 il existe alors un symbole $p = 1 + r$ avec $p^{W,\pi}v \in \mathcal{H}^\infty_\pi$ et $ES(r) \cap \mathfrak{h}^\perp = \emptyset$. Pour tout entier $k \ge 0$ on considère alors une paramétrixe δ_k pour le symbole $(1 + \xi_1^2 + \cdots + \xi_m^2)^{\#k}$ vu comme elliptique sur $\mathfrak{h}^*$, et on en fait un symbole sur $\mathfrak{g}^*$ en posant :

$$\varepsilon_k(\xi) = \delta_k(\xi + \mathfrak{h}^\perp)$$

moyennant l'identification de $\mathfrak{h}^*$ avec $\mathfrak{g}^*/\mathfrak{h}^\perp$. On voit alors que $\varepsilon_k\#r$ est un symbole d'ordre $-2k$ sur $\mathfrak{g}^*$, et donc d'après la proposition II.2.1 $(1-\Delta_H)^{-k}r^{W,\pi}$ envoie $\mathcal{H}_\pi^s$ dans $\mathcal{H}_\pi^{s+2k}$. On écrit alors :

$$\varepsilon_k^{W,\pi}v = \varepsilon_k^{W,\pi}p^{W,\pi}v - (\delta_k\#r)^{W,\pi}v$$

d'où finalement, si v appartient à $\mathcal{H}_\pi^s$ on a :

$$(1-\Delta_H)^{-k}v \in \mathcal{H}_\pi^{s+2k}.$$

d'où $(1-\Delta_H)^{-k}v \in \mathcal{H}_\pi$ pour k assez grand, ce qui veut dire que v est un vecteur-distribution pour la restriction $\pi_{|_H}$.

III. Propagation des singularités

III.1. Symboles classiques

On désigne par $\mathrm{Cl}^m(\mathfrak{g}^*)$ la classe des symboles classiques d'ordre m, c'est-à-dire qui admettent un développement asymptotique :

$$p \simeq p_m + p_{m-1} + \cdots$$

où p_{m-j} est positivement homogène de degré $m-j$. On note $A\,\mathrm{Cl}^{m,Q}$ et $A\,\mathrm{Cl}^m$ les intersections $\mathrm{Cl}^m \cap AS_1^{m,Q}$ et $\mathrm{Cl}^m \cap AS_1^m$ respectivement. D'après le théorème d'approximation il existe pour tout $p \in \mathrm{Cl}^m$ un symbole $\widetilde{p}$ dans $A\,\mathrm{Cl}^{m,Q}$ ayant le même développement asymptotique que p. On appelle symbole principal le terme positivement homogène de plus haut degré.

III.2. Une forme faible de l'inégalité de Gårding précisée

On peut établir une inégalité de Gårding qui s'énonce ainsi : lorsque p est un symbole hypoelliptique positif il existe une constante C telle que $p^{W,\pi}+CI$ soit un opérateur positif [M2 prop. I.4.1]. Lorsque p est seulement supposé positif sans hypothèse d'hypoellipticité un substitut possible est une forme faible de l'*inégalité de Gårding précisée* :

Theorème III.2.1.
Soit $p \in AS_\rho^{m,Q}(\mathfrak{g}^*)$ avec $\rho > \frac{1}{2}$ et Q assez petit. On suppose $p(\xi) \geq 0$ pour tout $\xi \in \mathfrak{g}^*$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une constante C_ε telle que pour tout $u \in \mathcal{H}_\pi^\infty$:

$$< p^{W,\pi}u, u > \geq -C_\varepsilon \|u\|^2_{\frac{m-(\rho-1/2-\varepsilon)}{2}}.$$

Démonstration. On se ramène à l'inégalité de Gårding simple de la façon suivante : soit $m_0 = m - (\rho - \frac{1}{2} - \varepsilon)$. On suppose $\varepsilon \leq \rho - \frac{1}{2}$, de sorte que $m_0 \leq m$. On pose :

$$\widetilde{p}_{m_0}(\xi) = p(\xi) + \Lambda(\xi)^{m_0}$$

et pose $p_{m_0} = T^Q(\widetilde{p}_{m_0})$ (cf § I.1). On a l'encadrement :

$$C_1\Lambda(\xi)^{m_0} \leq p_{m_0}(\xi) \leq C_2\Lambda(\xi)^m,$$

et les estimations :

$$|D^\alpha p_{m_0}(\xi)| \leq C'_\alpha \Lambda(\xi)^{(\rho - m + m_0)|\alpha|}$$

ce qui veut dire que p_{m_0} est un symbole hypoelliptique appartenant à la classe :

$$AHS_\delta^{m,m_0,Q}(\mathfrak{g}^*)$$

avec $\delta = \rho - m + m_0 = \frac{1}{2} + \varepsilon$. Il existe donc [M2 prop. I.3.7] une racine carrée approchée $q_{m_0} \in AHS_\delta^{m/2,m_0/2,Q}$ telle que :

$$q_{m_0} \# q_{m_0} = p_{m_0} + r_{m_0}$$

avec $r_{m_0} \in S(\mathfrak{g}^*)$. On en déduit :

$$< p_{m_0}^{W,\pi} u,\, u > \geq < r_{m_0}^{W,\pi} u,\, u >,$$

d'où finalement :

$$\begin{aligned} < p^{W,\pi} u, u > &= < p_{m_0}^{W,\pi} u,\, u > + < (\Lambda^{m_0})^{W,\pi} u,\, u > \\ &\geq C_{m_0} \|u\|^2_{m_0/2} + C'_{m_0,s}\|u\|^2_s \end{aligned}$$

d'après la proposition II.2.1. Posant $s = m_0/2$ on a donc le résultat.

•

III.3. Théorème de propagation des singularités

On rappelle qu'une *bicaractéristique* d'une fonction $a \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ est une courbe intégrale du champ hamiltonien H_a. Comme on a :

$$H_a.a = \{a, a\} = 0,$$

la fonction a est constante le long de ses bicaractéristiques. Une *bicaractéristique nulle* est une bicaractéristique sur laquelle la fonction a s'annule.

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal, dont la démonstration occupera le reste du paragraphe :

Theorème III.3.1 (Propagation des singularités).
Soit $p \in A\,\mathrm{Cl}^m(\mathfrak{g}^*)$, *soit* a *la partie réelle du symbole principal* p_m *de* p. *On se donne un segment* $\gamma : [t_0, t_1] \to \mathfrak{g}^* - \{0\}$ *de bicaractéristique nulle pour* a, *et on suppose que la partie imaginaire de* p_m *est positive sur un voisinage de* γ.

Soit u *un vecteur-distribution tel que* $WF_s(p^{W,\pi}u) \cap \gamma = \emptyset$. *Alors pour tout* $\delta \in]0, 1/2[$, *si* $\gamma(t_1) \notin WF_{s+m-\delta}(u)$ *on a :* $WF_{s+m-\delta}(u) \cap \gamma = \emptyset$.

Démonstration. Nous suivons de près la démonstration de M.E. Taylor [T. § VI.2] pour une distribution sur une variété. La seule différence notable est la nécessité de se limiter à $\delta < 1/2$ dans notre contexte, alors que l'on peut prendre $\delta = 1$ dans le cas d'une distribution. Cette restriction est déjà présente dans la forme faible de l'inégalité de Gårding précisée (Théorème II.4.1), et provient en définitive de la restriction "$\rho > 1/2$" dans le calcul symbolique.

On peut se ramener au cas où $m = \delta$: pour ce faire on multiplie $p^{W,\pi}$ à gauche par un opérateurs $e^{W,\pi}$ où e est réel elliptique d'ordre $\delta - m$. Le symbole principal de $e\#p$ est $e_{\delta-m}p_m$, sa partie réelle est ae_m, et il est facile de voir que les bicaractéristiques de a et de ap_m sont les mêmes.

On suppose donc p d'ordre δ. Par ailleurs si le théorème est démontré pour une valeur particulière de s on l'obtient pour les autres valeurs en appliquant à u un opérateur $q^{W,\pi}$ avec q elliptique d'ordre bien choisi. Dans la démonstration on peut donc supposer que s est tel que $u \in \mathcal{H}_\pi^{s-\delta/2}$.

Soit donc $\gamma : [t_0, t_1] \to \mathfrak{g}^* - \{0\}$ un segment de bicaractéristique nulle pour $a = \mathcal{R}e\, p_\delta$, soit $\mathcal{C}$ un voisinage conique de γ, et soit $\mathcal{M}$ une partie bornée de $AS_1^s(\mathfrak{g}^*)$ constituée de symboles de $AS_1^{s-\delta}(\mathfrak{g}^*)$ à valeurs réelles, d'ordre $s - \delta$, et dont le support essentiel est contenu dans $\mathcal{C}$. On considère la décomposition :

$$p = a + ib$$

avec $b \geq 0$ sur $\mathcal{C}$.

Lemme III.3.2.
Il existe deux constantes C_1 *et* C_2 *telles que pour tout* $c \in \mathcal{M}$ *on a l'encadrement :*

$$\frac{1}{2} < \{a, c^2\}^{W,\pi}u,\, u > -C_1\|c^{W,\pi}u\|^2 \leq \mathcal{I}m < c^{W,\pi}p^{W,\pi}u,\, c^{W,\pi}u > +C_2 \leq C_2 + \\ + \frac{1}{2}(\|c^{W,\pi}u\|^2 + \|c^{W,\pi}p^{W,\pi}u\|^2).$$

Démonstration. La seconde inégalité est immédiate. Pour la première on écrit :

$$\begin{aligned}\mathcal{I}m < c^{W,\pi}p^{W,\pi}u,\, c^{W,\pi}u > &= \mathcal{R}e < b^{W,\pi}c^{W,\pi}u,\, c^{W,\pi}u > \\ &+ \mathcal{R}e < [c^{W,\pi}, b^{W,\pi}]u,\, c^{W,\pi}u > \\ &+ \mathcal{I}m < [c^{W,\pi}, a^{W,\pi}]u,\, c^{W,\pi}u >,\end{aligned}$$

et on minore successivement les trois termes du membre de droite. Comme $b \geq 0$ sur $\mathcal{C}$, l'application de l'inégalité de Gårding précisée (théorème II.4.1) avec $\varepsilon = 1/2 - \delta$ donne pour le premier terme :

$$< b^{W,\pi}c^{W,\pi}u,\, c^{W,\pi}u >\geq -C.\|c^{W,\pi}u\|^2$$

où la constante C ne dépend pas de $c \in \mathcal{M}$. Pour la minoration du deuxième terme on écrit :

$$< [c^{W,\pi}, b^{W\pi}]u,\, c^{W,\pi}u >=< c^{W,\pi}[c^{W,\pi}, b^{W\pi}]u,\, u > .$$

Le symbole principal de l'opérateur $c^{W,\pi}[c^{W,\pi}, b^{W\pi}]$ est $ic\{c, b\}$ qui est purement imaginaire et d'ordre $2s-\delta-1$. Compte tenu des propriétés du calcul symbolique le symbole principal de la partie réelle est donc d'ordre $2s - \delta - 2$. L'opérateur $c^{W,\pi}[c^{W,\pi}, b^{W\pi}]$ envoie donc continûment $\mathcal{H}_\pi^{s-\delta/2}$ dans $\mathcal{H}^{-s+2+\delta/2}$, et d'après les hypothèses sur $\mathcal{M}$ on a les estimations :

$$\|c^{W,\pi}[c^{W,\pi}, b^{W\pi}]u\|_{-s+2-\frac{3\delta}{2}} \leq C\|u\|_{s-\frac{\delta}{2}}$$

où C la constante C est indépendante de $c \in \mathcal{M}$. Comme $\delta < 1/2$ on a a fortiori :

$$\|c^{W,\pi}[c^{W,\pi}, b^{W\pi}]u\|_{-s+\frac{\delta}{2}} \leq C\|u\|_{s-\frac{\delta}{2}}.$$

On en déduit donc une minoration pour le deuxième terme :

$$\mathcal{R}e < [c^{W,\pi}, b^{W,\pi}]u,\, c^{W,\pi}u >\geq -C''$$

où C'' est indépendante de $c \in \mathcal{M}$. Enfin pour le troisième terme on remarque que le symbole principal de l'opérateur $c^{W,\pi}[c^{W,\pi}, a^{W\pi}]$ est $ic\{c, a\} = \frac{i}{2}\{c^2, a\}$ qui est d'ordre $2s - \delta - 1$, et que l'opérateur $c^{W,\pi}[c^{W,\pi}, a^{W\pi}] - ic\{c, a\}^{W,\pi}$ est d'ordre $2s - \delta - 2$. Par un raisonnement analogue on obtient la minoration :

$$\mathcal{I}m < [c^{W,\pi}, a^{W,\pi}]u,\, c^{W,\pi}u >\geq \frac{1}{2} < \{a, c^2\}^{W,\pi}u,\, u > -C'''$$

où la constante C''' est indépendante de $c \in \mathcal{M}$. Réunissant les trois minorations on en déduit le lemme.

•

Lemme III.3.3.
Soit $e = \{a, c^2\} - (2C_1 + 1)c^2$ *où* C_1 *est la constante donnée par le lemme III.2.2. Alors il existe une constante* C_3 *indépendante de* $c \in \mathcal{M}$ *telle que :*

$$\mathcal{R}e < e^{W,\pi}u,\ u > \leq C_3.$$

Démonstration. Cela découle facilement du fait que l'ensemble $\{c^{W,\pi}p^{W,\pi}u,\ c \in \mathcal{M}\}$ est borné dans $\mathcal{H}_\pi^0$.

•

Nous allons maintenant construire une famille $\mathcal{M}$ particulière vérifiant les propriétés demandées. Nous aurons pour cela besoin du lemme suivant :

Lemme III.3.4.
Supposons que le champ hamiltonien H_a *soit non radial en* $\gamma(t_0)$. *Soit* $\mathcal{U}$ *un voisinage conique de* $\gamma(t_1)$. *Alors il existe trois symboles* c, a_0, a_1 *tels que :*

1) c *est positivement homogène de degré* s, *a son support dans* $\mathcal{C}$, *et* $c(\xi) \leq 0$ *pour tout* $\xi \in \mathfrak{g}^* - \{0\}$.

2) $\{a, c\} \geq 0$ *sur* $\mathcal{C}\backslash\mathcal{U}$ *et* $\{a, c\} > 0$ *sur* $\gamma\backslash\mathcal{U}$.

3) $a_0 \in S_1^0(\mathfrak{g}^*)$ *et* $\{a, a_0\} = 1$ *sur un voisinage de* γ.

4) $a_1 \in S_1^1(\mathfrak{g}^*)$ *et* $\{a, a_1\}$ *ne s'annule pas sur* γ.

Démonstration. Remarquons tour d'abord que si le hamiltonien H_a est radial en $\gamma(t_0)$, alors par homogénéité de H_a la bicaractéristique passant par $\gamma(t_0)$ est elle aussi radiale. Comme les fronts d'onde sont par définition coniques le théorème III.3.1 est trivial dans ce cas-là.

Supposons donc le champ hamiltonien H_a non radial en $\gamma(t_0)$. Il existe alors une hypersurface conique $\Omega \subset \mathfrak{g}^* - \{0\}$ passant par $\gamma(t_0)$ et transverse à à H_a dans un voisinage conique de $\gamma(t_0)$. Soit $g \in C^\infty(\mathfrak{g}^* - \{0\})$, positive, positivement homogène de degré s, et telle que $g\big(\gamma(t_0)\big) > 0$. On résout alors l'équation de transport :

$$\begin{aligned} &H_a.c = g \\ &c_{\big|_\Omega} = 0. \end{aligned}$$

ce qui nous donne un symbole c positivement homogène de degré s et tel que $\{a, c\} > 0$ sur γ. Quitte à le tronquer on obtient facilement un symbole c vérifiant les conditions 1 et 2 du lemme. La construction de a_0 et a_1 se fait de manière analogue.

•

Fin de la démonstration du théorème : on définit la famille $\mathcal{M}$ par :

$$\mathcal{M} = \{T^Q c_{\lambda,\varepsilon},\ 0 < \varepsilon \leq 1\}$$

où λ est un réel à fixer ultérieurement et T^Q est l'opérateur de régularisation du § I.1. Le symbole $c_{\lambda,\varepsilon}$ est quant à lui défini par :

$$c_{\lambda,\varepsilon}(\xi) = c(\xi)e^{\lambda a_0(\xi)}\big(1+\varepsilon^2 a_1^2(\xi)\big)^{-\frac{1}{2}}.$$

On pose également :

$$\begin{aligned} e_{\lambda,\varepsilon} &= \{a, c_{\lambda,\varepsilon}^2\} - (2C_1-1)c_{\lambda,\varepsilon}^2 \\ &= \big(\{a, c^2\} + (2\lambda - 2C_1 - 1)c^2\big)e^{2\lambda a_0}(1+\varepsilon^2 a_1^2)^{-1}. \end{aligned}$$

Fixons $\lambda \geq \frac{1}{2}(2C_1+1)$. Le symbole $\big(\{a,c^2\}+(\lambda-2C_1-1)c^2\big)e^{\lambda a_0}$ est d'ordre $2s$, positif sur $\mathcal{C}\backslash\mathcal{U}$ et strictement positif sur $\gamma\backslash U$. Il existe donc q et r symboles positivement homogènes d'ordre s positifs sur $\mathcal{C}$ avec $\operatorname{supp} q \subset U$ et $r > 0$ sur $\mathcal{C}$ tels que :

$$r^2 \leq \big(\{a, c^2\} + (\lambda - 2C_1 - 1)c^2\big)e^{\lambda a_0} + q^2,$$

ce qui s'écrit encore :

$$q_\varepsilon^2 + e_{\lambda,\varepsilon} - r_\varepsilon^2 \geq 0,$$

avec $r_\varepsilon = r(1+\varepsilon a_1^2)^{-1/2}$ et $q_\varepsilon = q(1+\varepsilon a_1^2)^{-1/2}$.

L'inégalité de Gårding précisée (Théorème II.4.1) s'applique au $T^Q(q_\varepsilon^2 + e_{\lambda,\varepsilon} - r_\varepsilon^2)$ qui est positif à un élément de $\mathcal{S}(\mathfrak{g}^*)$ près. On a donc :

$$< \widetilde{r_\varepsilon^2}^{W,\pi} u,\, u > \leq < \widetilde{e}_{\lambda,\varepsilon}^{W,\pi} u,\, u > + < \widetilde{q_\varepsilon^2}^{W,\pi} u,\, u > + C_4,$$

(le tilde sur un symbole signifie qu'on lui applique l'opérateur de régularisation T^Q) d'où on tire facilement :

$$\begin{aligned} \|\widetilde{r}_\varepsilon u\|_0^2 &\leq < \widetilde{e}_{\lambda,\varepsilon}^{W,\pi} u\, u > + \|\widetilde{q}_\varepsilon^{\,W,\pi}\|_0^2 + C_4 \\ &\leq C_5. \end{aligned}$$

Les constantes C_4 et C_5 sont indépendantes de ε. En faisant tendre ε vers zéro on a donc :

$$\|\widetilde{r}^{W,\pi} u\|_0^2 \leq C_5$$

avec un symbole $\widetilde{r}$ qui est $\mathcal{C}$-elliptique, c'est-à-dire qui vérifie :

$$C'\Lambda(\xi)^s \leq \widetilde{r}(\xi) \leq C''\Lambda(\xi)^s$$

pour $\|\xi\|$ assez grand. Il existe donc (cf. la démonstration de la proposition II.3.2) un symbole a d'ordre $-s$ tel que :

$$a \# \widetilde{r} = 1 + b$$

avec $ES(b) \cap \mathcal{C} = \emptyset$. On a donc la décomposition :

$$u = a^{W,\pi} r^{W,\pi} u - b^{W,\pi} u$$

avec $a^{W,\pi} r^{W,\pi} u \in \mathcal{H}_\pi^s$ et $\gamma \cap WF(b^{W,\pi}u) = \emptyset$. D'après la proposition II.3.2 ceci implique que $WF_s(u)$ ne rencontre pas γ.

•

Si le symbole principal p_m est réel on peut inverser la direction du temps. Au vu de l'égalité :

$$WF(u)\backslash WF(p^{W,\pi}u)=\bigcup_{t}\bigcap_{s\geq t}WF_{s+m-\delta}(u)\backslash WF_s(p^{W,\pi}u)$$

on a :

Corollaire III.3.5.
Soit $p\in A\,\mathrm{Cl}^m(\mathfrak{g}^*)$ dont la partie principale p_m est réelle. Alors pour tout vecteur-distribution u, pour tout réel s et pour tout $\delta\in]0,1/2[$, l'ensemble :

$$WF_{s+m-\delta}(u)\backslash WF_s(p^{W,\pi}u)$$

est invariant par le flot du champ hamiltonien H_{p_m}, de même que l'ensemble :

$$WF(u)\backslash WF(p^{W,\pi}u).$$

Appendice : calcul symbolique à paramètre

Nous démontrons ici le théorème I.2.4 en adaptant la démonstration du théorème 4.2 de [M1]. Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie et $\mathcal{P}$ un cône fermé dans un espace vectoriel normé quelconque (typiquement, un secteur du plan complexe comme au § I.2). La structure de Fréchet de l'espace $S^m_{\rho,d}(V,\mathcal{P})$ est donnée par les semi-normes :

$$N^{m,\alpha}_{\rho,d}(p_\lambda)=\sup_{\xi}\Lambda_d(\xi,\lambda)^{-m+\rho|\alpha|}|D^\alpha p_\lambda(\xi)|.$$

On considérera également la famille de semi-normes indexée par $\mathbb{N}$:

$$P^{m,k}_{\rho,d}(p_\lambda)=\sup_{|\alpha|\leq k}N^{m,\alpha}_{\rho,d}(p_\lambda).$$

Pour tout voisinage compact Q de 0 dans V le sous-espace $AS^{m,Q}_{\rho,d}(V,\mathcal{P})$ de $S^m_{\rho,d}(V,\mathcal{P})$ est fermé. On désigne par $AS^{-\infty,Q}(V,\mathcal{P})$ l'intersection lorsque m parcourt $\mathbb{R}$ des $AS^{m,Q}_{\rho,d}(V,\mathcal{P})$. C'est l'ensemble des p_λ tels que $\mathcal{F}^{-1}p$ a son support inclus dans Q, qui appartiennent à $S(V)$ pour tout λ et tels que les semi-normes :

$$\sup_{\xi}\Lambda(\xi)^m|D^\alpha p_\lambda(\xi)|$$

soient à décroissance rapide en $\lambda\in\mathcal{P}$. Dans la suite on prendra $V=\mathfrak{g}^*$ ou $V=\mathfrak{g}^*\times\mathfrak{g}^*$.

Lemme A.1 (cf. [M1 prop. 2.5]).
Soit Q un voisinage compact de 0 dans V, et soit ψ une fonction analytique sur V^* dont la série entière à l'origine converge sur Q. Alors l'opérateur $\psi(D)=\mathcal{F}\circ\psi\circ\mathcal{F}^{-1}$ envoie continûment $AS^{m,Q}_{\rho,d}(V,\mathcal{P})$ dans $AS^{m,Q}_{\rho,d}(V,\mathcal{P})$.

Soit maintenant W un voisinage étoilé de 0 dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ tel que $(\exp W)^2$ soit l'image difféomorphe par l'exponentielle d'un voisinage W^2 de 0. Pour tout $t \in [0,1]$ et pour tout x, y dans W on pose :

$$\begin{aligned} x \underset{t}{.} y &= t^{-1} \operatorname{Log}(\exp tx. \exp ty) \\ &= x + y + \frac{t}{2}[x,y] + \frac{t^2}{12}\big([x,[x,y]] + [y,[y,x]]\big) + \cdots \end{aligned}$$

En appliquant la formule de Taylor en $t = 1$ à :

$$p_\lambda \underset{t}{\#} q_\lambda(\xi) = \iint_{\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}} \mathcal{F}^{-1}p_\lambda(x)\mathcal{F}^{-1}q_\lambda(y) e^{-i<x \underset{t}{.} y, \xi>}\, dx\, dy$$

on obtient le développement asymptotique en opérateurs bidifférentiels donné dans l'énoncé du théorème, avec :

$$C_k(p_\lambda, q_\lambda)(\xi) = \frac{1}{k!} \iint_{\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}} \mathcal{F}^{-1}p_\lambda(x)\mathcal{F}^{-1}q_\lambda(y) \frac{d^k}{dt^k}\Big|_{t=0} e^{-i<x \underset{t}{.} y, \xi>}\, dx\, dy,$$

et

$$R_N(p_\lambda, q_\lambda)(\xi) = \frac{1}{N!}\int_0^1 (1-t)^N \iint_{\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}} \mathcal{F}^{-1}p_\lambda(x)\mathcal{F}^{-1}q_\lambda(y) \frac{d^k}{dt^k} e^{-i<x \underset{t}{.} y, \xi>}\, dx\, dy\, dt.$$

On rappelle le résultat suivant :

Lemme A.2 ([M1 lemma 4.3]).
Pour tout $k \geq 0$ on a :

$$\frac{d^k}{dt^k} e^{-i<x \underset{t}{.} y, \xi>} = \psi_k(x,y,\xi,t) e^{-i<x \underset{t}{.} y, \xi>}$$

où ψ_k est une fonction analytique polynomiale en ξ, dont la série entière à l'origine converge pour tout $t \in [0,1]$ et $x, y \in W$. On a plus précisément :

$$\psi(x,y,\xi,t) = \sum_{r=1}^{k} \psi_k^r(x,y,\xi,t)$$

où ψ_k^r est polynomiale homogène de degré r en ξ. De plus le développement en série entière par rapport à t s'écrit :

$$\psi_k^r(x,y,\xi,t) = \sum_{s \geq k+r} \psi_k^{r,s}(x,y,\xi) t^{s-k-r},$$

où $\psi_k^{r,s}$ est polynomiale en les variables x, y, ξ, de valuation $\geq r$ par rapport à x, de valuation s par rapport à (x,y), de valuation $\geq r$ par rapport à chacune des variables x et y, et homogène de degré r par rapport à ξ.

Le lemme A.2 entraîne immédiatement que les C_k sont des opérateurs bi-différentiels à coefficients polynomiaux qui réalisent pour tout voisinage compact Q de 0 dans W une correspondance bilinéaire continue :

$$AS^{m_1,Q}_{\rho,d}(\mathfrak{g}^*,\mathcal{P}) \times AS^{m_2,Q}_{\rho,d}(\mathfrak{g}^*,\mathcal{P}) \longrightarrow AS^{m_1+m_2-(2\rho-1)k,Q+Q}_{\rho,d}(\mathfrak{g}^*,\mathcal{P}).$$

La difficulté réside donc dans l'estimation du reste R_N. On considère [Me2] pour tout $t \in [0,1]$ l'application :

$$\begin{aligned} S_t : W \times W &\longrightarrow \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \\ (x,y) &\longrightarrow \frac{1}{2}(x - y + x \underset{t}{\cdot} y,\ y - x + x \underset{t}{\cdot} y). \end{aligned}$$

Il existe un voisinage ouvert $\Omega \subset W$ tel que pour tout $t \in [0,1]$ cette application S_t soit un difféomorphisme sur son image. On notera K_t le jacobien de S_t.

Soit Q un voisinage compact de 0 dans $\mathfrak{g}$ contenu dans Ω. On considère l'opérateur $\mathcal{B}_t$ défini sur $AS^{-\infty,Q\times Q}(\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*,\mathcal{P})$ par :

$$\mathcal{B}_t p_\lambda(\xi,\eta) = \iint_{\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}} \mathcal{F}^{-1}(p_\lambda)(x,y) e^{-i<S_t(x,y),\,(\xi,\eta)>}\, dx\, dy,$$

de sorte que l'on a :

$$p_\lambda \underset{t}{\#} q_\lambda(\xi) = \mathcal{B}_t(p_\lambda \otimes q_\lambda)(\xi,\xi).$$

Le reste R_N s'écrit donc, grâce au lemme A.2 :

$$\begin{aligned} R_N(p_\lambda,q_\lambda)(\xi) &= \frac{1}{N!}\int_0^1 (1-t)^N \iint_{\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}} \mathcal{F}^{-1}(p_\lambda \otimes q_\lambda)(x,y)\psi_{N+1}(x,y,\xi,t) e^{-i<S_t(x,y),\,(\xi,\xi)>} dxdy\, dt \\ &= \frac{1}{N!}\int_0^1 (1-t)^N \big(\mathcal{B}_t \circ \widetilde{\psi}_{N+1}(D_1,D_2,\xi_1,\xi_2,t)\big)(p_\lambda \otimes q_\lambda)(\xi,\xi), \end{aligned}$$

où $\widetilde{\psi}_{N+1}(D_1,D_2,\xi,\eta,t)$ est l'opérateur pseudo-différentiel (au sens classique) sur $\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$ de symbole à gauche :

$$\widetilde{\psi}_{N+1}(x,y,\xi,\eta,t) = \psi_{N+1}(x,y,\frac{\xi+\eta}{2},t).$$

Lemme A.3 (cf. [M1 prop. 3.6]).
Pour tout $p_\lambda \in AS^{-\infty,Q\times Q}(\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*,\mathcal{P})$ on a les estimations :

$$P^{0,0}_{\rho,d}(\mathcal{B}_t p_\lambda) \leq C.P^{-2n-1,0}_{\rho,d}(p_\lambda).$$

Démonstration. On a la suite d'inégalités :

$$\begin{aligned}
|\mathcal{B}_t p_\lambda(\xi)| &\leq \int_Q |\mathcal{F}^{-1} p_\lambda(x)|\, dx \\
&\leq \operatorname{Vol} Q. \sup_x |\mathcal{F}^{-1} p_\lambda(x)| \\
&\leq \operatorname{Vol} Q. \int_{\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*} |p_\lambda(\zeta)|\, d\zeta \\
&\leq \operatorname{Vol} Q. \sup_\eta \Lambda_d(\eta, \lambda)^{2n+1} |p_\lambda(\eta)| \int_{\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*} \Lambda_d(\zeta, \lambda)^{-2n-1}\, d\zeta,
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

•

A partir de la définition de l'opérateur $\mathcal{B}_t$ il est facile d'obtenir les deux lemmes suivants :

Lemme A.4 [M1 lemma 3.7].
Pour tout multi-indice α et pour tout $t \in [0,1]$ on a l'égalité suivante entre opérateurs sur $AS^{-\infty, Q\times Q}(\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*, \mathcal{P})$:

$$D^\alpha \circ \mathcal{B}_t = \mathcal{B}_t \circ S_t(D)^\alpha$$

Lemme A.5.
Soit $\xi_k, k = 1, \ldots, 2n$ une coordonnée sur $\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$. Alors :

$$\mathcal{B}_t \circ \xi_k = \Big(\sum_{i=1}^{2n} R_{ki,t}(D)\xi_i\Big) \circ \mathcal{B}_t,$$

où $R_{ki,t}(x)$ désigne le coefficient (k,i) de la matrice jacobienne de S_t en x.

A partir de l'écriture :

$$\mathcal{B}_t p_\lambda(\xi, \eta) = \iint_{\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}} \mathcal{F}^{-1}(p_\lambda) \circ S_t^{-1}(x,y) e^{-i<(x,y),\,(\xi,\eta)>} K_t(x,y)^{-1}\, dx\, dy$$

obtenue à partir de la définition en effectuant le changement de variable $x' = S_t(x)$ on obtient également :

Lemme A.6 [M1 lemma 3.8].
Soit $\xi_k, k = 1, \ldots, 2n$ une coordonnée sur $\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$. Alors :

$$\xi_k \circ \mathcal{B}_t = \mathcal{B}_t \circ \Big(\sum_{i=1}^{2n} (P_{ki,t} \circ S_t)(D)\xi_i + \big(\frac{D_k K_t^{-1}}{K_t^{-1}} \circ S_t\big)(D)\Big),$$

où $P_{ki,t}(x)$ désigne le coefficient (k,i) de la matrice jacobienne de S_t^{-1} en x.

En combinant les lemmes A.4 et A.6 avec le lemme A.1 on arrive à permuter l'opérateur $\mathcal{B}_t$ avec n'importe quel opérateur différentiel à coefficients polynomiaux :

Lemme A.7 [M1 prop. 3.9].
Soit P un polynôme à $4n$ variables, et soit $P(\xi, D)$ un opérateur différentiel à coefficients polynomiaux sur $\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$ qui admet P comme symbole pour un certain choix d'ordre des variables $(\xi_1, \ldots, \xi_{2n}, D_1, \ldots, D_{2n})$. Alors si P est de degré j par rapport aux variables ξ et de valuation v par rapport aux variables D, pour tout $t \in [0,1]$ on a :

$$P(\xi, D) \circ \mathcal{B}_t = \mathcal{B}_t \circ P_t$$

où P_t est un opérateur (en général non-différentiel) qui envoie continûment $AS_\rho^{m,Q\times Q}(\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*, \mathcal{P})$ dans $AS_\rho^{m+j-\rho v,Q\times Q}(\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*, \mathcal{P})$.

A partir des lemmes A.3, A.5 et A.7 on obtient les estimations fondamentales pour l'opérateur $\mathcal{B}_t$:

Lemme A.8.
Pour tout entier positif k et pour tout réel m il existe un entier $M(k)$ et une constante C tels que pour tout $t \in [0,1]$ et $p \in AS_d^Q(\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*)$ on a :

$$P_{\rho,d}^{m,k}(\mathcal{B}_t p_\lambda) \leq C.P_{\rho,d}^{m,M(k)}(p_\lambda).$$

Démonstration. On suppose d'abord que $m \leq 0$. On considère pour tout multi-indice α le plus petit entier pair μ_α plus grand que $-m + \rho|\alpha|$. En appliquant le lemme A.6 aux opérateurs :

$$\Lambda_d(\xi)^{\mu_\alpha} D^\alpha, \qquad |\alpha| \leq k$$

on obtient les estimations :

$$P_{\rho,d}^{m,k}(\mathcal{B}_t p_\lambda) \leq C.P_{\rho,d}^{m-2n-3,M(k)}(p_\lambda).$$

Si $m > 0$ on applique ceci à $p'_\lambda(\xi) = \Lambda_d(\xi,\lambda)^{-\mu} p_\lambda(\xi)$ où μ est le plus petit entier pair plus grand que m, et on applique le lemme A.5. On obtient donc les estimations suivantes pour tout réel m :

$$P_{\rho,d}^{m,k}(\mathcal{B}_t p_\lambda) \leq C.P_{\rho,d}^{m-2n-5,M(k)}(p_\lambda).$$

Enfin la formule de Taylor à l'ordre N appliquée à $t \to \mathcal{B}_t p_\lambda(\xi)$ permet de développer $\mathcal{B}_t$ en une somme d'opérateurs différentiels plus un reste, ce qui permet pour N assez grand de se débarrasser du décalage en $2n + 5$.

•

Proposition A.9.
$\mathcal{B}_t$ se prolonge en un opérateur continu de $AS_{\rho,d}^{m,Q\times Q}(\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*, \mathcal{P})$ dans $AS_{\rho,d}^{m,Q\times Q}(\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*, \mathcal{P})$.

Démonstration. Si $AS^{-\infty,Q\times Q}(\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*, \mathcal{P})$ était dense dans $AS^{m,Q\times Q}_{\rho,d}(\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*, \mathcal{P})$ on pourrait conclure immédiatement, mais ce n'est pas le cas. On introduit la *topologie de Hörmander* [Hr1 § 3], définie de la façon suivante : une suite $p_{n,\lambda}$ converge vers p_λ au sens de Hörmander si elle converge vers p_λ au sens C^∞ (sans supposer d'uniformité par rapport au paramètre λ) en restant bornée dans $AS^{m,Q\times Q}_{\rho,d}(\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*, \mathcal{P})$. On montre facilement que $\mathcal{B}_t$ est continu aussi pour cette topologie, et que $AS^{-\infty,Q\times Q}(\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*, \mathcal{P})$ est dense dans $AS^{m,Q\times Q}_{\rho,d}(\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*, \mathcal{P})$ en ce sens, ce qui permet de conclure.

•

Le lemme ci-dessous est une conséquence du lemme 1, et le suivant découle essentiellement de la règle de Leibniz :

Lemme A.10.
L'opérateur pseudo-différentiel $\widetilde{\psi}_{N+1}(D_1, D_2, \xi, \eta, t)$ envoie continûment $AS^{m,Q\times Q}_{\rho,d}(\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*, \mathcal{P})$ dans $AS^{m-(N+1)(2\rho-1),Q\times Q}_{\rho,d}(\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*, \mathcal{P})$.

Lemme A.11 [M1 prop. 2.10].
La restriction à la diagonale est continue :

$$AS^{m,Q\times Q}_{\rho,d}(\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*, \mathcal{P}) \longrightarrow AS^{m,Q}_{\rho,d}(\mathfrak{g}^*, \mathcal{P}).$$

Fin de la démonstration du théorème I.2.4 : Si $(p_\lambda, q_\lambda) \mapsto p_\lambda \otimes q_\lambda$ réalisait une correspondance bilinéaire continue :

$$AS^{m_1,Q}_{\rho,d}(\mathfrak{g}^*, \mathcal{P}) \times AS^{m_2,Q}_{\rho,d}(\mathfrak{g}^*, \mathcal{P}) \longrightarrow AS^{m_1+m_2,Q\times Q}_{\rho,d}(\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*, \mathcal{P})$$

le théorème I.2.4 serait démontré. L'assertion est malheureusement fausse, mais on a facilement les estimations suivantes pour p_λ, q_λ dans $AS^{-\infty,Q}(\mathfrak{g}^*, \mathcal{P})$:

$$P^{m_1+m_2,k}_{\rho,d}(p_\lambda \otimes q_\lambda) \leq P^{m_1-\rho k,k}_{\rho,d}(p_\lambda).P^{m_2-\rho k,k}_{\rho,d}(q_\lambda).$$

En écrivant le développement asymptotique de R_N en opérateurs bidifférentiels :

$$R_N = \sum_{l=N+1}^{N'} C_l + R_{N'}$$

pour N' assez grand (dépendant de k) et en appliquant la proposition A.9, le lemme A.10 et le lemme A.11, on voit qu'il existe un entier $M(k)$ tel que :

$$P^{m_1+m_2,k}_{\rho,d}\big(R_N(p_\lambda, q_\lambda)\big) \leq C.P^{m_1,M(k)}_{\rho,d}(p_\lambda).P^{m_2,M(k)}_{\rho,d}(q_\lambda).$$

Un argument de densité analogue à celui de la démonstration de la proposition A.9 permet alors de conclure.

•

Références

[Dui] J.J. Duistermaat, *Fourier integral operators*, Courant Institute, 1973 (Rééd. Progress in Math. 130, Birkhäuser 1995).

[D-H] J.J. Duistermaat, L. Hörmander, *Fourier integral operators II*, Acta Math. 128 (1972), 183-269.

[Go] R. Goodman, *Elliptic and subelliptic estimates for operators in an enveloping algebra*, Duke Math. J. 47, No 4 (1980), 819-833.

[He] B. Helffer, *Théorie spectrale pour des opérateurs globalement elliptiques*, Astérisque, Soc. Math. France 1984.

[Hr1] L. Hörmander, *The Weyl calculus of pseudodifferential operators,* Comm. Pure Appl. Math. 32 (1979), 359-443.

[Hr2] L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators III*, Springer 1985.

[Hw] R. Howe, *Wave front sets of representations of Lie groups*, in *Automorphic forms, representation theory and Arithmetic*, Tata Inst. fund. res. st. math. 10, Bombay 1981.

[Jø] P.E.T. Jørgensen, *Distribution representations of Lie groups*, J. Math. Anal. Appl. 65 (1978), 1-19.

[M1] D. Manchon, *Weyl symbolic calculus on any Lie group*, Acta Appl. Math. 30 (1993), 159-186.

[M2] D. Manchon, *opérateurs pseudodifférentiels et représentations unitaires des groupes de Lie*, Bull. Soc. Math. France 123 (1995), 117-138.

[M3] D. Manchon, *Formule de Weyl pour les groupes de Lie nilpotents*, J. f.d. Reine u. Angew. Math. 418 (1991), 77-129

[M4] D. Manchon, *Distributions à support compact et représentations unitaires*, prépubl. math. RT/9809005, à paraître au J. Lie Theory.

[Me1] A. Melin, *A remark on invariant pseudo-differential operators*, Math. Scand. 30 (1972), 290-296.

[Me2] A. Melin, *Parametrix constructions for right invariant differential operators on nilpotent groups*, Ann. Glob. Anal. Geom. 1, N.1 (1983), 79-130.

[Ne] E. Nelson, *Analytic vectors*, Ann. Math. 70 No 3 (1959), 572-615.

[S] R.T. Seeley, *Complex powers of an elliptic operator*, in *Singular integrals*, proc. symp. pure math. 10 (1967), 288-307.

[Shu] M.A. Shubin, *Pseudodifferential operators and spectral theory*, Springer 1987.

[St] R.S. Strichartz, *A functional calculus for elliptic pseudo-differential operators*, Amer. J. Math. 94 (1972), 711-722.

[Stk] H. Stetkær, *Invariant pseudo-differential operators*, Math. Scand. 28 (1971), 105-123.

[T] M.E. Taylor, *Pseudodifferential operators*, Princeton 1981.