Curriculum Vitæ

Arnaud Diego MÜNCH

1 février 2017

Contents

1 Civilité

Nom	Arnaud Diego Münch
Date de naissance	4 août 1974 à La Flêche (72 - Sarthe)
Nationalité	Française
Situation familiale	2 enfants nés en 2014 et 2015
Position actuelle	Professeur des universités
Laboratoire	Laboratoire de Mathématiques de Clermont-Ferrand
Adresse	UMR CNRS 6620 - UFR de Sciences et Techniques Université Blaise Pascal Campus des Cézeaux - Aubière- 63177
E-mail	arnaud.munch@math.univ-bpclermont.fr
Page web	http://math.univ-bpclermont.fr/ munch/
Téléphone / Fax	+ 33 473 407 076/ +33 473 407 064

2 Etudes - Parcours Universitaire

2.1 Diplôme

- 2008: Habilitation à diriger des recherches soutenue en octobre 2008.
- 1999-2002: Thèse en Mathématiques Appliquées (ONERA/ Paris VI - Financement BDI-DGA-CNRS) soutenue en septembre 2002.
- 1997-1998: DEA Analyse Numérique / Mécanique (Université de Rennes I). Stage à l'IRISA (INRIA-Rennes) sous la direction de Bernard Philippe.
- 1996-1997: DEA d'Analyse Mathématique (Université de Tours). Stage au laboratoire de mathématique de Tours sous la direction de Guy Barles.

2.2 Parcours Universitaire

- 2009-: Professeur des universités à l'université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand.
- 2004-2009: Maître de conférence à l'université de Franche-Comté, Besançon.
- 2003-2004: Post-doctorat à Madrid (Université Autonôme) dans le département de Mathématiques avec Enrique Zuazua.
- 2002-2003: Post-doctorat à l'Inria-Rocquencourt (projet Macs: Modélisation, Analyse et Contrôle pour le Calcul des Structures avec Dominique Chapelle.
- 1998-1999: Service Militaire en tant que scientifique du contingent à l'*"Institut Supérieur des Matériaux et Mécaniques Avancés"* du Mans (http://www.ismans.fr/).

2.3 Thèse - Habilitation à diriger des recherches

(i) **Thèse de Doctorat** en Mécanique Théorique soutenue le 18 septembre 2002 à l'université Paris VI ;
Titre : *Modélisation théorique et numérique de la propagation de front de fissure dans les coques minces elastiques* -
Jury : Y. Ousset (Directeur), F. Krasucki (Directrice), J-B. Leblond (Président), J-J. Marigo (Rapporteur), F. Lebon (Rapporteur), P. Destuynder (Examinateur), J-L. Chaboche (Examinateur).

(ii) **Habilitation à diriger des recherches** en Mathématiques Appliquées soutenue le 30 octobre 2008 à l'université de Besançon ;
Titre : *Analyse numérique de quelques problèmes de contrôle et d'optimisation de forme pour des systèmes dynamiques* -
Jury : G. Allaire (Rapporteur), P. Destuynder (Rapporteur), E. Zuazua (Rapporteur), J-P. Raymond (Président), P.Hild (Examinateur), J. Rappaz (Examinateur), D. Chapelle (Examinateur), A. Henrot (Examinateur), E. Fernàndez-Cara (Examinateur).

2.4 Eléments de carrière

- Prix du meilleur poster à l'ICM (Madrid 2006).
- Titulaire de la PEDR 2006-2010.
- Délégation CNRS de six mois en 2007.
- Titulaire de la PES 2013-2017.

3 Animation et activité de recherche

3.1 Domaines de recherche

- Problème mathématique en mécanique du solide - Analyse Numérique - Calcul Scientifique.
- Elasticité non linéaire - Mécanique de la rupture - Calcul des variations.
- Théorie du contrôle et de l'optimisation - Stabilisation de systèmes hyperboliques.
- Optimisation de forme et relaxation par mesure de Young - Théorie spectrale des coques.
- Contrôle, problème inverse et approximation pour les EDP paraboliques et hyperboliques.

3.2 Organisation de journées et conférences scientifiques

- 22-24 juin 2006 Organisation d'un colloque à Besançon "Inequality and contact problem in Mechanics" (avec M. Bostan et P. Hild).
- 26-27 septembre 2007 Organisation d'un colloque "Inverse Problem and Control" (avec C. Dupaix et F. Ammar-Khodja)- financé par le conseil régional de Franche-Comté.
- 19 juin 2008: Organisation d'une journée numérique au laboratoire à Besançon avec Mihai Bostan (4 exposés d'une heure).
- 31 octobre 2008: Organisation d'une journée d'analyse numérique au laboratoire à Besançon dans le cadre de la soutenance de mon HDR (6 exposés de 50 minutes de G. Allaire, E. Fernàndez-Cara, J-P. Raymond, J. Rappaz, A. Henrot et D. Chapelle).

- AVRIL 2010: Membre du comité d'organisation du congrès PICOF'10 (Problème inverse, Contrôle et Optimisation de forme) qui a eu lieu à Cartagène en Espagne - 140 participants.
- JUIN 2011: Co-organisateur avec Olivier Bodart d'un colloque sur la thématique "Contrôle, Problèmes inverses et Applications" à Clermont-Ferrand - 12 conférenciers - 30 participants.
- MAI 2012: Organisateur et coordinateur principal du 41ème congrès d'analyse numérique français (CANUM 12)(Super-Besse - Puy-de-Dôme) - 213 participants.
- SEPTEMBRE 2014: Co-organisateur avec Nicolae Cîndea d'un colloque, deuxième édition, sur la thématique "Contrôle, Problèmes et Applications" à Clermont-Ferrand - 15 conférenciers - 40 participants.
- MAI 2016: Co-organisateur avec Nicolae Cîndea du mini-symposium Aspects numériques de la contrôlabilité des EDP et problèmes inverses au CANUM2016, Obernai.
- 2017: Co-organisateur avec Nicolae Cîndea d'un colloque, troisième édition, sur la thématique "Contrôle, Problèmes et Applications" à Clermont-Ferrand - 15 conférenciers - 40 participants.

3.3 Responsabilité scientifique

- 2004-2007 Responsable du séminaire de l'équipe d'analyse numérique du laboratoire de Besançon.
- 2006-2009: Membre élu du conseil scientifique du laboratoire de Besançon et de la CSE 25-26.
- FEVRIER 2009: Membre du comité scientifique du congrès "Control and Inverse problems in PDE: Theoretical and Numerical Aspects" (CIRM).
- JANVIER 2012-: Membre élu du conseil du laboratoire de mathématiques de l'université Blaise Pascal (Clermont-Ferrand).
- JANVIER 2012-DÉCEMBRE 2015: Responsable scientifique de la bibliothèque du laboratoire de mathématiques.
- MARS 2016-: Responsable de l'équipe Equations aux Dérivées Partielles et Analyse Numérique du laboratoire de Clermont-Ferrand, composée de 6PU, 9MCF et 1 CR CNRS.
- JUIN 2016-: Correspondant local de la SMAI (société de mathématiques appliquées et industrielles).
- SEPTEMBRE 2014-: Responsable du master mathématique spécialité recherche de l'université Blaise Pascal. Entre 12 et 20 étudiants par année (Master 1 et Master 2).

3.4 Participation à des groupes de recherche

- 2005-2008 Membre de l'ANR "Jeunes chercheurs" ANR-05-JC-0182-0, intitulée *"Variational inequality in solids mechanics: analysis and simulations"* avec M. Bostan (Besançon), P. Hild (Besançon, Coordinateur) et Y. Renard (INSA-Lyon).
- 2005- Membre extérieur du groupe OMEVA (Optimisation et MÉthode VAriationnelle) coordonné par le Prof. Pablo Pedregal, commun aux universités de Castilla-La-Mancha (Ciudad Real) et de Murcia (Cartagène)- (http://matematicas.uclm.es/omeva/).
- 2007-2010 Membre de l'ANR "Jeunes chercheurs" ANR-07-JC-0139-01, intitulé *"Control, Inverse Problem and Numerics: Application to biology"* avec C. Dupaix, F. Ammar-Khodja (Besançon) et A. Benabdallah, F. Boyer, F. Hubert, J. Le Rousseau (Coordinateur) (LATP, Marseille).

- 2010: Membre et responsable local du GDRE Conedp.
- 2008-2009: Financement par le conseil régional d'un projet de deux ans sur le contrôle des cellules cancéreuses (en collaboration avec F. Ammar-Khodja et les équipes de Nancy, Metz et Mulhouse). Montant du financement : 10Keuros.
- 2008-2011 Membre d'un projet espagnol (08720/PI/08- Fundacion Seneca - Gobernio Regional de Murcia). Les deux autres membres sont F. Periago et A. Murillo (Cartagena). Le projet porte sur le contrôle d' EDP posées sur des domaines non-cylindriques. Financement: 27Keuros.
- 2012-2013: Membre du projet Franco-Roumain PHC Brancusi 2012 intitulé "Méthodes variationnelles pour des problèmes de contrôle optimales et applications aux équations de Navier-Stokes [2 membres français, 2 membres roumains]. Projet co-porté par Cornel Murea (Mulhouse) et Daniel Tiba (Bucarest).
- 2011-2014: Membre du groupe d'investigation "Análisis y Control de Edps con Origen en Física y Otras Ciencias" coordonné par E. Fernàndez-Cara à Séville - MTM2010-15592 [11 membres français, espagnols et mexicain].
- 2013-2014: Membre du projet Franco-Roumain PHC Brancusi 2013 intitulé "Méthodes numériques pour l'approximation des contrôles des équations aux dérivées partielles et applications [2 membres français, 2 membres roumains]. Projet co-porté par Nicolae Cîndea (Clermont-Ferrand) et Ionel Rowenta (Craiova).
- 2014-2016: Membre du groupe d'investigation "Análisis y Control de Edps con Origen en Física y Otras Ciencias" coordonné par Enrique Fernàndez-Cara à Séville - MTM2013-41286-P [3 membres français, 4 espagnols et 1 mexicain].

3.5 Encadrement - Jury

3.5.1 Thèse

T1. Co-encadrement avec Farid Ammar-Khodja de la thèse de **Karine Mauffrey** soutenue en octobre 2012 à Besançon et intitulée :

Contrôlabilité de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles.

T2. Encadrement à Clermont de octobre à décembre 2014 de **Diego Araujo de Souza** dans le cadre de sa thèse dite européenne soutenue en avril 2015 à Seville (directeur principal: E. Fernandez-Cara) et intitulée :

Contrôle et approximations de quelques systèmes issus de la mécanique des fluides.

T3. Depuis octobre 2015, co-encadrement avec Fréderic Bernardin (CEREMA, Clermont-Ferrand) et Jean-Michel Piau (IFFSTAR, Nantes)) de la thèse de **Grégoire Rivière** intitulée:

Chaussées à température de surface positive - Dimensionnement d'une source de chaleur par contrôle optimal.

Il s'agit d'analyser d'un point de vue théorique et numérique des problèmes de contrôles optimaux pour des systèmes paraboliques non linéaires avec des contraintes sur les contrôles et sur les états.

T4. Co-encadrement avec Nicolae Cîndea à Clermont de mi-janvier à mi-avril 2017 de **Francisco Javier Marin Marin** dans le cadre de sa thèse dite européenne préparée actuellement à l'université de Cartagène et intitulée :

Analyse de sensibilité et contrôle de quelques systèmes de poutres non linéaires.

3.5.2 Stage de Master

- Avril-Juin 2000 Stage de M2 de Laurent Dromer (Paris 6) à ONERA-Chatillon (co-encadrement avec Yves Ousset).
- Avril-Juin 2001: Stage de M2 de David Foricher (X-ENSTA) à ONERA-Chatillon (co-encadrement avec Yves Ousset).
- Février-Juin 2006: Stage de M2 de Guillaume Jouvet (Besançon).
- Février-Juin 2007: Stage de M2 de Jean-Christophe Kolb (Besançon).
- Avril-Septembre 2008: Stage de M2 de Karine Mauffrey (Besançon) (co-encadrement avec F. Ammar-Khodja).
- Septembre 2008-: Co-Encadrement avec F. Ammar-Khodja de la thèse de troisième cycle de K. Mauffrey (Bourse de Région) sur la contrôlabilité exacte et approchée de quelques modèles non-linéaires de réaction-diffusion avec application à la biologie.
- Février-Mai 2011-: TER de Y. Isman et A. Amareh intitulé "Inégalité d'Ingham et Applications" (Clermont-Ferrand).
- Février-Juin 2014-: Stage de M2 de Y. Isman intitulé "Formulations mixtes et applications à la contrôlabilité" (Clermont-Ferrand).
- Février-Juin 2015-: Stage de M2 de Webhe Esly intitulé "Méthodes moindres-carrées et applications à la contrôlabilité de l'équation de Navier-Stokes" (Clermont-Ferrand).
- Février-Mai 2016-: TER de Saad Abouelfateh intitulé "Stabilisation indirecte de l'équation des poutres" (Clermont-Ferrand).
- Février-Mai 2017-: TER de Victor Allegre intitulé "Résolution numérique de valeurs propres" (Clermont-Ferrand).

3.5.3 Participation à des jurys

- 10 Octobre 2009-: Examinateur de la thèse de Jean-Baptiste Duval (Amiens) (Directeur: Mark Asch).
- Octobre 2010-: Examinateur et président du jury de l'HDR de Belkacem Said-Houari (Chambéry).
- 19 Octobre 2012-: Rapporteur de l'HDR de Stéphane Mottelet (Compiegne).
- 26 novembre 2015-: Examinateur de la thèse de Michel Duprez (Besançon) (Directeurs: Farid Ammar-Khodja et Franz Chouly) .
- 15 juin 2016- Rapporteur de la thèse de Pierre Jounieaux (Paris 6) (Directeurs: Yannick Privat et Emmanuel Trélat).

3.5.4 Participation à des comités

- Février 2014- Membre du comité du meilleur article scientifique publié dans la revue S$\vec{e}$MA en 2013.
- Février 2012- Membre du comité du meilleur article scientifique publié dans la revue S$\vec{e}$MA en 2011.
- Mai 2010- Membre du comité de sélection du poste PR-0631525R-154 (Clermont-Ferrand).
- Mai 2011- Membre du comité de sélection du poste MCF-0631525R-304 (Clermont-Ferrand).
- Mai 2011- Membre du comité de sélection du poste MCF-0690192J-62 (INSA-Lyon).

3.5.5 Jury de Baccalauréat

- Juin 2008- Président d'un jury de baccalauréat au lycée Victor Hugo de Besançon.
- Juin 2013- Président d'un jury de baccalauréat au lycée Jeanne d'Arc de Clermont-Ferrand.

3.6 Publications

3.6.1 Publications internationales à comité de lecture

A1. *Numerical simulation of delamination growth in curved interfaces* avec Y.Ousset, Comp. Meth. Appl. Mech. and Engnrg, **191**(19-20), 2073-2095 (2002).

A2. *Numerical simulation of debonding of adhesively bonded joints* with F. Krasucki and Y. Ousset, Int. J. of Solids and Structures, **39/26**, 6355-6383 (2002).

A3. *Mathematical analysis of nonlinear joints models* avec F. Krasuki et Y. Ousset, Math. Models Meth. Appl. Sci., **14**(4), 535-556 (2004).

A4. *Asymptotic consideration shedding light on the incompressible shell models* avec D. Chapelle (INRIA) et C. Mardaré (Paris VI), J. of. Elasticity, **76(3)**, 199-246 (2004).

A5. *A uniformly controllable and implicit scheme for the 1-D wave equation*, Esaim: Mathematical Modeling and Numerical Analysis, **39(2)**, 377-418 (2005).

A6. *Optimal design of the damping set for the stabilization of the wave equation*, avec P. Pedregal et F. Periago. Journal of Differential Equations, **231(1)**, 330-353 (2006).

A7. *Uniform stabilization of a viscous numerical approximation scheme for a locally damped wave equation* avec A.F. Pazoto (Rio de Janeiro), Esaim: Control, Optimization and Caculus of Variation, **13(2)**, 265-293 (2007)

A8. *A spatio-temporal design problem for a damped wave equation*, avec F. Maestre (Ciudad Real) et P. Pedregal, SIAM Journal of Applied Mathematics, **68(1)**, 109-132 (2007).

A9. *Optimal design of the support of the control for the 2-D wave equation : numerical investigations*, Int. J. Numerical Analysis and Modeling, **5(2)**, 331-351 (2008).

A10. *Boundary controllability of a semi-discrete wave equation on the unit square with mixed finite elements*, avec C. Castro (Madrid) et S. Micu (Craiova, Romania). IMA J. Numerical Analysis, **28(1)**, 186-214 (2008).

A11. *Optimal design under the one-dimensional wave equation*, avec F. Maestre (Univ. Ciudad Real) et P. Pedregal (Univ. Ciudad Real). Interface and Free Boundaries Journal **10(1)**, 87-117, (2008).

A12. *Relaxation of an optimal design problem for the Heat equation*, avec P. Pedregal et F. Periago. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. **89(3)** 225-247 (2008).

A13. *Boundary stabilization on a nonlinear arch : Theoretical vs. Numerical Analysis.* with A.F. Pazoto. Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series B, **10(1)**, 197-219 (2008).

A14. *On the active control of crack growth in elastic media*, with P. Hild (Besancon) and Y. Ousset. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. **198**, 407-419 (2008).

A15. *Optimal internal stabilization of a damped wave equation by a topological approach.* Int. J. Applied Mathematics and Computer Science, **19(1)**, 15-37 (2009).

A16. *Optimal location of the support of the control for the 1-D wave equation : numerical investigations*, Computational Optimization and Applications, **42**, 443-470 (2009).

A17. *Controllability of a piezoelectric body. Theory and numerical simulation*, with B. Miara (ESIEE, Marne-La-Vallée). Applied Mathematics and Optimization, **59(3)**, 383-412 (2009).

A18. *An optimal design problem for the stabilization of the linear system of elasticity*, avec P. Pedregal (Univ. Ciudad Real) et F. Periago (Univ. Cartagena). Arch. Rat. Mech. Anal. **193(1)** 171-193 (2009).

A19. *An implicit scheme uniformly controllable for the 2-D wave equation on the unit square*, avec M. Asch (Université d'Amiens). Journal Optimization Theory and Application. **143(3)** 417-438 (2009).

A20. *Relaxation of an optimal design problem in fracture mechanic*, avec P. Pedregal. Esaim:COCV. **16(3)** 719-749 (2010)

A21. *Exact controllability of a string submitted to a boundary unilateral obstacle*, avec F. Ammar-Khodja et S. Micu. Annales de l'Institut Henri Poincaré, Série C. **27(4)** 1097-1019 (2010)

A22. *Null boundary controllability of a circular elastic arch.* IMA Journal of Mathematical Control and Information. **27(2)** 119-144 (2010)

A23. *Numerical approximation of null controls for the heat equation : ill-posedness and remedies*, avec E. Zuazua. Inverse Problems. **26(8)** (2010)

A24. *Long time behavior of a two-phase optimal design for the heat equation*, avec G. Allaire et F. Periago. SIAM Control and Optimization, **48(8)**, 5333-5356 (2010)

A25. *Optimal distribution of the internal null control for the 1D heat equation*, avec F. Periago. J. Differential Equations, **250**, 95-111 (2011)

A26. *Exact controllability of a system of mixed order with essential spectrum*, avec F. Ammar-Khodja et K. Mauffrey. SIAM Control and Optimization, **49**, 1857-1879 (2011)

A27. *Numerical null controllability of semi-linear 1D heat equations : fixed point, least squares and Newton methods*, avec E. Fernández-Cara. Mathematical Control and Related Fields (AIMS), **3(2)**, 217-247 (2012)

A28. *Strong convergent approximations of null controls for the heat equation*, avec E. Fernández-Cara. SeMA Journal, **61(1)**, 49-78 (2013)

A29. *A variational approach to approximate controls for system with essential spectrum: application to the membranal arch.* Evolution Equations and Control Theory (AIMS), **2(1)**, 119-151 (2013)

A30. *Numerical controllability of the wave equation through primal methods and Carleman estimates*, avec E. Fernández-Cara et N. Cîndea. ESAIM:COCV, **19(4)**, 1076-1108 (2013)

A31. *Numerical approximation of bang-bang controls for the heat equation: an optimal design approach*, avec F. Periago. Systems and Control letters, **62**, 643-655 (2013)

A32. *Numerical null controllability of the 1D heat equation: Duality and Carleman weights*, avec E. Fernández-Cara. J. Optimization, Theory and Applications, **163(01)**, 253-285 (2014).

A33. *Numerical null controllability of the heat equation through a least squares and variational approach*, avec P. Pedregal. European Journal of Applied Mathematics, **25(03)**, 277-306 (2014).

A34. *Controllability of the linear 1D-wave equation with inner moving forces*, avec C. Castro et N. Cîndea. SIAM Control and Optimization, **52(06)**, 4027-4056, (2014).

A35. *A least-squares formulation for the approximation of controls for the Stokes system.* Mathematics of Control, Signals, and Systems, **27**, 49-75 (2015).

A36. *A mixed formulation for the direct approximation of the control of minimal L^2-norm for linear type wave equations*, avec N. Cîndea. Calcolo, **52(03)**, 25-288, (2015).

A37. *Inverse problem for linear hyperbolic equations using mixed formulations*, avec N. Cîndea. Inverse Problems, **31(07)**, (2015).

A38. *A mixed formulation for the direct approximation of the control of minimal L^2-weighted norm for the linear heat equation*, avec Diego Araujo de Souza. Advances in Computational Mathematics, **42(01)**, 85-125, (2016).

A39. *Robust optimal Robin boundary control for the transient heat equation with random input data*, avec J. Martinez-Frutos, M. Kessler et F. Periago. International Journal for Numerical Methods in Engineering. **108**, 116-135 (2016).

A40. *Simultaneous reconstruction of the solution and the source of hyperbolic equations from boundary measurements: a robust numerical approach*, avec N. Cindea. Inverse Problems, **32(11)**, (2016).

A41. *On the numerical controllability of the two-dimensional heat, Stokes and Navier-Stokes equations*, avec E. Fernandez-Cara et Diego Araujo de Souza. Journal of Scientific Computing, **70(2)**, 819-859 (2017).

A42. *Best decay rate, observability and open-loop admissibility costs: discussions and numerical study*, avec Kais Ammari. Journal of Dynamics and Differential equations. (DOI 10.1007/s10884-015-9496-0).

A43. *Inverse problems for linear parabolic equations using mixed formulations - Part 1 : Theoretical analysis*, avec Diego Araujo de Souza. A paraitre dans Journal of Inverse and Ill posed problems.

3.6.2 Publications nationales à comité de lecture

B1. *Energy release rate for a thin curvilinear beam* avec Y. Ousset (Paris), C.R.Acad.Sci. Paris, t.**328**, Série IIb, 471-476 (2000).

B2. *Asymptotic analysis of a bonded joint in nonlinear elasticity* avec F. Krasucki (Montpellier) et Y. Ousset, C.R.Acad.Sci. Paris, **329**, Série IIb, p.429-434 (2001).

B3. *Family of implicit and controllable schemes for the 1-D wave equation*, C.R.Acad.Sci. Paris Série I **339**, 733-738 (2004).

B4. *Un problème d'optimisation de forme pour la contrôlabilité exacte de l'équation des ondes 2D*. C.R.Acad.Sci. Paris Série I **343(3)**, 213-218 (2006).

B5. *A variational approach to a shape design problem for the wave equation*, avec P. Pedregal (Ciudad Real) et F. Periago (Cartagena). C.R.Acad.Sci. Paris Série I **343(5)**, 371-376 (2006).

B6. *On the exact controllability of mixed order system with essential spectrum*, avec F.Ammar-Khodja (Besancon) et G. Geymonat (Montpellier). C.R. Acad. Sci., Série Mathématique. **346(11-12)**, 629-634 (2008).

B7. *On the control of crack growth in elastic media*, avec P. Hild (Besancon) and Y. Ousset. C. R. Acad. Sci. Série Mécanique, **336(5)**, 422-427 (2008).

B8. *Numerical null controllability of a semi-linear 1D heat equation via a least squares reformulation*, avec E. Fernández-Cara. C.R. Acad. Sci. Paris, Série. I, **349**, 867-871 (2011).

B9. *A least-squares formulation for the approximation of null controls for the Stokes system*, avec P. Pedregal. C.R. Acad. Sci. Paris, Série I, **351**, 545-550 (2013).

3.6.3 Publications en tant qu'éditeur

C1. Co-éditeur avec Laurent Chupin d'un volume au ESAIM:Procs concernant le CANUM2012. Vol 41, 131 pages, 2013.

Revue	Co-auteur(s)	Année
CMAME [A1]	Y. Ousset	2002
Int. J. Solids. Structures [A2]	F. Krasucki, Y. Ousset	2002
M3AS [A3]	F. Krasucki, Y. Ousset	2004
J. Elasticity [A4]	D. Chapelle, C. Mardare	2004
ESAIM:M2AN [A5]	-	2005
J. Differential Eq. [A6]	P. Pedregal, F. Periago	2006
ESAIM:COCV [A7]	A.-F. Pazoto	2007
SIAP [A8]	F. Maestre, P. Pedregal	2007
Int. J. Numer. Anal. Model. [A9]	-	2008
IMA Numer. Analysis [A10]	C. Castro, S. Micu	2008
Interface and Free Boundaries [A11]	F. Maestre, P. Pedregal	2008
JMPA [A12]	P. Pedregal, F. Periago	2008
Disc. continuous Dyn. Sys. [A13]	A.-F. Pazoto	2008
CMAME [A14]	P. Hild, Y. Ousset	2008
Int. J. Appl. Math and Computer Sci. [A15]	-	2009
Comput. Opt. and Appl. [A16]	-	2009
Applied maths and optimization [A17]	B. Miara	2009
ARMA [A18]	P. Pedregal, F. Periago	2009
Journal of optimization, theory and applications [A19]	M. Asch	2009
ESAIM: COCV [A20]	P. Pedregal	2010
Annales IHP (c) [A21]	F. Ammar-Khodja, S. Micu	2010
IMA Control [A22]	-	2010
Inverse Problem [A23]	E. Zuazua	2010
SIAM control and optimization [A24]	G. Allaire, F. Periago	2010
Journal of differential equations [A25]	F. Periago	2011
SIAM control and optimization [A26]	F. Ammar-Khodja, K. Mauffrey	2011
Mathematical control and related fields [A27]	E. Fernández-Cara	2012
S$\vec{e}$MA journal [A28]	E. Fernandez-Cara	2013
Evol. Eq. Control Theory [A29]	-	2013
ESAIM: COCV [A30]	E. Fernández-Cara, N. Cîndea	2013
System and control letters [A31]	F. Periago	2013
SIAM control and optimization [A34]	C. Castro, N. Cîndea	2014
Journal of optimization, theory and applications [A32]	E. Fernández-Cara	2014
European journal of applied mathematics [A33]	P. Pedregal	2014
Mathematics of controls, signals and systems [A35]	-	2015
Calcolo [A36]	N. Cîndea	2015
Advances in computational mathematics [A38]	D. Souza	2016
Journal of dynamics and differential equations [A39]	K. Ammari	2016
International journal for numerical methods in engineering [A40]	J. Martinez, F. Périago, M. Kessler	2016
Inverse Problem [A37,A41]	N. Cîndea	2015, 2016
Journal of ill-posed and inverse problem [A42]	D. Souza	2016
Journal of scientific computing [A43]	E. Fernández-Cara, D. Souza	2016

Table 1: Activité de publication

3.6.4 Activités éditoriales

- Reviewer pour AMS et Referee pour Esaim: COCV, Journal of Optimization, Theory and Applications, Journal de Mathématiques Pure et Appliquée, Portugliae Mathematicae, Numerisch Mathematics, IMA J. Applied Mathematics, SIAM control and optimization, Structural Optimization, etc.
- Editeur de 2012 à 2016 dans la revue S$\vec{e}$MA de la société de mathématiques appliquées espagnole éditées par Springer.
- Editeur depuis 2012 des Annales mathématiques Blaise Pascal éditées par le laboratoire de mathématiques de l'université Blaise Pascal.

3.7 Conférences

3.7.1 Séminaires en france et à l'étranger

- 5 mai 2009 Université d'Amiens - 24 avril 2009 BCAM, Bilbao - 14 avril 2009 Université de Strasbourg - 10 avril 2009 Université de Limoges -17 mars 2009 Université de Séville - 3 mars 2009 MIP, Toulouse 3 - 24 février 2009 Institut Elie Cartan, Nancy I - 19 février 2009 CIRM- Luminy - 18 décembre 2008 Université de Tours - 10 décembre 2008 EPFL- Lausanne - 5 juin 2008 Université d'Avignon - 7 mai 2008 Université de Rome I - 23 janvier 2008 Université de Castilla-La-Mancha - 20 décembre 2007 ENSTA Paris - 5 décembre 2007 Université de Castilla-La-Mancha (Espagne) - 30 octobre 2007 Université de Cartagena (Spain) - 2 octobre 2007 Aix-Marseille I, LATP - 27 septembre 2007 Université de Besançon - 3 mai 2007 UFRJ- Rio de Janeiro (Brazil) - 26 avril 2007 IMPA- Rio de Janeiro - 24 avril 2007 LNCC - Petropolis (Brésil) - 11 juin 2006 Université d'Aix-Marseille I - 8 février 2006 ENS Cachan (Bruz) - 3 février 2006 Ciudad Real - 31 janvier 2006 Université de Picardie (Amiens) - 20 décemvre 2005 Ecole Polytechnique (Palaiseau) - 31 août 2005 Benasque (Espagne) - 31 mai 2005 Université d'Aix-Marseille I (LATP) - 5 Mai 2005 Université de Carthagena (Espagne) - 2 mars 2005 Insa Toulouse - 1 mars 2005 Université de Toulouse - 8 octobre 2004 Université de Besançon - 10 avril 2003 Université de Besançon - 28 juin 2001 Université de Paris VI - 25 Mai 2000 Université de Paris VI.

3.7.2 Participation à des conférences sur invitation

(i) Numerical conjectures for controls problems for PDEs. **Workshop on PDEs, Control and numerics, Sevilla**, 23-25 janvier 2017 (LIEN)

(ii) Inverse problems for linear PDEs via variational formulations: Robust numerical approximations. Mini-Workshop **Variational methods in optimal control for PDEs, Oberwolfach**, 8-14 Janvier 2017 (LIEN) .

(iii) Inverse problems for linear PDEs via variational formulations: Robust numerical approximations. **JERAA PDEs days, Clermont-Ferrand**, Novembre 2015 LIEN.

(iv) Inverse problems for linear PDEs via variational formulations: Robust numerical approximations. Workshop **Control of PDE's and applications, CIRM, Luminy**, Novembre 2015.

(v) Inverse problems for linear hyperbolic equations via mixed formulation. **9th Workshop on control of distributed parameter systems, Pekin, Chine**, 29 juin-3 juillet 2015.

(vi) About Least-squares type approach to address direct and controllability problems for PDEs. **Evolution Equations: Long time behavior and control, Chambery**, 15-18 juin 2015.

(vii) Inverse problems and mixed formulations, Workshop on Control of PDEs, Besancon, Mars 2015

(viii) Mixed formulations for the direct approximation of L2-weighted null controls for the linear heat equation. **PICOF 2014, Hammamet, Tunisie**, Mai 2014.

(ix) Approximation of controls by primal methods. **8th CDPS, Craiova, Roumanie**, Juillet 2013.

(x) Remarks about the numerical approximation of controls for a semi-linear heat equations. **Workshop on PDEs, Rio de Janeiro**, Août 2012.

(xi) On the numerical computation of controls for the 1d heat equation, **Workshop on control, Seville**, Septembre 2011.

(xii) Controllability of a string submitted to unilateral constraint. **Trimester control, IHP**, novembre 2010.

(xiii) Sur l'approximation numérique de contrôles aux trajectoires pour l'équation de la chaleur 1D. **JERAA PDEs days, Clermont-Ferrand**, Novembre 2009 LIEN.

(xiv) Long time behavior of a two phase optimal design for the heat equation, **Workshop on homogenization, Seville**, Septembre 2009.

(xv) Optimal design of the support of the control for the wave equation, **Workshop on PDEs, Rio de Janeiro**, Août 2007.

4 Activité d'enseignements

4.1 Activités à Besançon de 2004 à 2009

A mon arrivée à Besançon en septembre 2004, j'ai assuré chaque année les cours de Mathématique à l' ISIFC (Institut supérieur des ingénieurs de Franche-Comté), école d'ingénieur rattachée à l'université et qui forme des ingénieurs bio-médicaux. Les cours, TD et TP portent sur l'algèbre linéaire, le calcul différentiel et intégral, les séries et transformées de Fourier, la transformée de Laplace, la méthode des différences finies, la résolution numérique d'équations différentielles ordinaires. En 2007-2008, j'ai obtenu une délégation du CNRS de 6 mois. Les quatres derniers services étaient décomposés de la façon suivante :

- Période 2008-2009: **201.5 heures equivalent TD**: 35.5 TD + 4.5TP Analyse Appliquée (L2) - 20CM+40TD Discretisation des EDP (L3) - 6h CM controle en M2 recherche - 24CM + 48 TD de mathématique génerale à l'ISIFC (1ere année de l'école - Niveau L3 premier semestre)

- Période 2007-2008: **95 heures equivalent TD**: 39 TD Analyse Appliquée (L2) - 16h CM contrôle en M2 recherche - 16CM + 8 TD d'analyse numerique à l'ISIFC (1ere année de l'école - Niveau L3 second semestre)

- Période 2006-2007: **216.5 heures equivalent TD**: 26.5TD analyse Starter SVT - 12CM+22TD+21TP en M1 Master Pro sur le contrôle des systèmes dynamique avec application à la finance - 16h CM contrôle en M2 recherche - 48CM+32TD+12TP de mathématique génerale à l'ISIFC (1ere année de l'école - Niveau L3 premier et second semestre)

- Période 2005-2006: **203 heures équivalent TD**: 47TD d'algèbre numérique en L2 - 20 TD d'encadrement de deux projets de L3) 48CM+32TD+48TP de mathématique générale à l'ISIFC (1ere année de l'école - Niveau L3 premier et second semestre)

Les enseignements niveau Master ont été les suivants :

- Février-Mai 2007- Master 1 Pro (Statistique-Probabilité) : *"Introduction au contrôle optimal et application à la finance"* - 12 étudiants - 48 h.
- Février-Avril 2007 ET 2008-: Master 2 Recherche : *"Contrôlabilité exacte et optimisation de forme pour des systèmes dynamique hyperbolique"* - 3 étudiants - 16h.
- Décembre 2008-: Master 2 Recherche : *"Introduction à la théorie du contrôle pour l'équation des ondes"* - 5 étudiants - 6h.

4.2 Activités à Clermont-Ferrand depuis 2009

Mise à part la première année à Clermont-Ferrand, j'effectue principalement mon service aux étudiants de mathématiques à partir de la licence troisième année. J'ai été pendant trois ans le responsable et coordinateur de l'UE "Méthodes Numériques" et de l'UE "Espace Vectoriel Normé" de la L3 (CM-TD-TP). Une année sur deux, à tour de rôle avec certains membres de l'équipe EDPAN, j'enseigne dans la master recherche deuxième année.

A l'hiver 2016, j'ai assuré un cours d'introduction à la théorie du contrôle de 15h dans le cadre de l'école doctorale des sciences fondamentales de l'université Blaise Pascal. 11 doctorants (5 en mathématique, 3 en physique, 2 en informatiques et 1 en chimie) l'ont suivi.

Je suis responsable du master mathématique spécialité recherche depuis septembre 2014. Les cinq derniers services se sont décomposés de la façon suivante :

- Période 2016-2017 (181 h)
  - TD Mathématiques générales L1 - 30h.
  - CM Méthodes numériques pour la physique - 25h - L3 Physique.
  - Master Mathématique Recherche 1 : Analyse fonctionnelle - 16hCM+ 24hTD).
  - Master Mathématique Recherche 1: EDPs d'évolutions - Théorie et approximation - 17h CM + 20h TD + 10h TP.

- Période 2015-2016 (168 h)
  - TD Mathématiques générales L1 - 30h.
  - CM Méthodes numériques pour la physique - 25h - L3 Physique.
  - Master Mathématique Recherche 1 : Analyse fonctionnelle - 16hCM+ 24hTD).
  - Master Mathématique Recherche 1: Introduction aux EDPs - 10h TP.
  - CM Ecole doctorale des sciences fondamentales: Introduction à la théorie du contrôle (20h) [11 étudiants].

- Période 2014-2015 (174 h)
  - TD Mathématiques générales L1 - 30h
  - CM et TD: Equations Différentielles - Ecole de Chimie 2ieme année - 20h+20h
  - CM Méthodes numériques pour la physique - 25h - L3 Physique
  - CM Master Mathématique Recherche 1 : Analyse fonctionnelle - 16hCM+ 24hTD).

- Période 2013-2014 (192.5 h)
  - CM de Topologie et Mesure - Licence 3 - 10h
  - CM d'Espaces Métrique - Licence 3 - 20 h
  - CM et TD de Méthodes Numériques - Licence 3- 20h + 32 h
  - CM Master Recherche 2 : Introduction à la contrôlabilité des EDP - 17h - 3 étudiants
  - CM Master Recherche 1 : Introduction au EDP et EDP d'évolution - 40h.

- Période 2012-2013 (202.33 h)
  - CM de Topologie et Mesure - Licence 3 - 10h
  - CM et TD d'Espaces Métrique - Licence 3 - 20 h + 45 h
  - CM et TD de Méthodes Numériques - 20h + 32 h
  - CM Master Recherche 1 : Introduction au EDP et EDP d'evolution - 40h.

4.2.1 Mini-cours

J'ai assuré un mini-cours (partie 1)(partie 2)(partie 3) de 6 heures dans le cadre de l'école Workshop CIMPA intitulée "Workshop on control, inverse problems and stabilization of infinite dimensional system" qui a lieu a Marrakech du 12 au 16 décembre 2016. Le cours était intitulé *"Résolution numérique de problèmes de contrôlabilité et de problèmes inverses pour des équations d'évolutions"*.

5 Résumé des travaux de recherche

5.1 Synthèse courte de la carrière dans le contexte de la recherche

J'ai publié 43 articles (7 sans co-auteur, 36 avec 23 co-auteurs) dans des revues à comités de lecture plus 9 notes aux comptes rendus de l'académie des sciences. Mes 23 co-auteurs viennent de France, d'Espagne, du Brésil, de Roumanie, d'Italie et de Tunisie. J'ai été invité dans 53 séminaires en France, Espagne, US, Allemagne, Italie, Brésil, Suisse et dans 27 congrès scientifiques internationaux.

Après un DEA d'analyse mathématique (en 1996 à Tours), un DEA d'analyse numérique (en 1997 à Rennes) et une année à l'institut de mécanique des matériaux (en 1998 au Mans en tant que scientifique du contingent), j'ai effectué une thèse de troisième cycle de 1999 à 2002 (à ONERA Chatillon et au laboratoire de modélisation mécanique de Paris 6). Cette thèse, soutenue le 19/09/2002 et financée par une bourse BDI-CNRS-DGA, a été effectuée sous la direction de Françoise Krasucki (Paris 6) et de Yves Ousset (ONERA). Relevant de la mécanique théorique des solides, elle a eu pour thème la modélisation de la propagation des fissures dans les coques composites stratifiées ([A1,B1]) puis la modélisation et l'analyse de joints collés non linéaires ([A2,A3,B2]).

J'ai ensuite effectué en 2003 un séjour post-doctoral à l'INRIA Rocquencourt (Projet MACS avec Dominique Chapelle). Dans le cadre d'une collaboration contractuelle avec la société Michelin, nous avons étudié le comportement de coques multi-couches quasi-incompressibles. Cela a donné lieu à [A4] en collaboration avec Christinel Mardaré (Paris 6): nous montrons que pour le modèle de coque mince élastique usuel, les passages à la limite de l'épaisseur vers zéro et celui du coefficient de Poisson vers 1/2 ne commutent pas.

À partir d'un second séjour post-doctoral effectué en 2004 à Madrid avec Enrique Zuazua dans le cadre du Réseau Européen "TMR Smart System" apparaît la thématique de la contrôlabilité des EDPs. Ce séjour a porté sur l'étude de schémas numériques préservant uniformément des propriétés de contrôlabilité. Je mentionne notamment un travail avec Ademir Fernando Pazoto (Rio de Janeiro) sur l'approximation numérique uniforme d'une équation des ondes amorties [A7]. Je mentionne également [A10] avec Sorin Micu (Craiova) et Carlos Castro (Madrid), proposant un schéma semi-discret uniformément contrôlable pour l'équation des ondes 2D.

En septembre 2004, à l'issue de ce séjour à Madrid, j'ai été recruté comme maître de conférence (section 26) à l'université de Franche-Comté (Besançon) et intégré son équipe d'analyse numérique. J'ai alors continué à travailler sur ces questions numériques comme dans [A5] proposant un schéma discret espace-temps pour l'équation des ondes 1D. J'ai aussi travaillé sur des questions plus théoriques avec Farid Ammar-Khodja de contrôlabilité d'EDPs: je mentionne la contrôlabilité d'un modèle non linéaire de poutre soumise à un obstacle unilatéral de type Signorini à l'une de ses extrémités [A21]. Cette collaboration a notamment permis le co-encadrement de la thèse de Karine Mauffrey sur la contrôlabilité de systèmes hyperboliques présentant un spectre essentiel [A26] puis la contrôlabilité de systèmes paraboliques à coefficients non constants.

En mai 2005, suite à une invitation, j'ai démarré une collaboration avec Pablo Pedregal et son groupe de Ciudal Real en espagne ainsi qu'avec Francisco Périago de Cartagène. Nos travaux ont addressé des problèmes d'optimisation de forme pour des systèmes dynamiques:

l'approche est variationnelle et fait usage des mesures de Young pour déterminer explicitement des formulations relaxées bien posées [A6,A8,A11,A12,A18]. Enfin, dans le cadre de l'ANR INEQVAR (INEquations VARiationnelles en mécaniques coordonnée par P. Hild), j'ai travaillé avec Patrick Hild et Yves Ousset sur le contrôle de la propagation des fissures [A14,B7].

En septembre 2009, j'ai été recruté comme Professeur (section 26) au laboratoire de Mathématiques de l'université Blaise Pascal de Clermont-Ferrand. J'ai intégré l'équipe d'équations aux dérivées partielles et analyse numérique (EDPAN). J'ai travaillé avec Nicolae Cîndea (recruté au laboratoire en septembre 2011) sur les questions de contrôlabilité mentionnées plus haut [A30,A34,A36] ainsi que sur quelques problèmes inverses [A37,A41] menant à cinq publications en autant d'année. J'ai travaillé également à partir de 2009 avec l'équipe de Enrique Fernandez-Cara de Séville [A27],[A28],[A32] et celle de Kais Ammari de l'université de Monastir [A39]. A cette occasion, j'ai encadré pendant trois mois Diego Araujo de Souza (Séville) dans le cadre de sa thèse européenne menant à [A38] puis dans une collaboration ultérieure à [A42]. Depuis octobre 2016, je co-encadre avec Frédéric Bernardin (Cerema, Clermont-Ferrand) et Jean-Michel Piau (Iffstar, Nantes) la thèse de Grégoire Rivière qui aborde des questions de problèmes de contrôle optimal non linéaires avec pour applications le dimensionnement des routes. J'ai co-encadré avec Nicolae Cindea l'étudiant espagnole Francisco Javier Marin Marin de mi-janvier à mi-avril 2017 dans le cadre de sa thèse (préparée à Cartagène).

5.2 Descriptif des travaux de recherche depuis 2011

Depuis 2011, j'ai publié avec 12 co-auteurs 19 articles dans des revues à comités de lecture (plus deux notes aux comptes rendus de l'académie, série mathématiques): le tableau 2 résume cette activité. Sur cette période, mon activité de recherche a principalement porté sur la contrôlabilité d'EDPs, notamment les équations hyperboliques type équation des ondes et paraboliques type équation de la chaleur. La fin de la période 2011-2016 aborde, par analogie, la thématique proche des problèmes inverses.

Revue	Co-auteur(s)	Année
Journal of differential equations [A25]	F. Periago	2011
SIAM control and optimization [A26]	F. Ammar-Khodja, K. Mauffrey	2011
Mathematical control and related fields [A27]	E. Fernàndez-Cara	2012
S$\vec{e}$MA journal [A28]	E. Fernàndez-Cara	2013
Evol. Eq. Control Theory [A29]	-	2013
ESAIM: COCV [A30]	E. Fernández-Cara, N. Cîndea	2013
System and control letters [A31]	F. Periago	2013
SIAM control and optimization [A34]	C. Castro, N. Cîndea	2014
Journal of optimization, theory and applications [A32]	E. Fernàndez-Cara	2014
European journal of applied mathematics [A33]	P. Pedregal	2014
Mathematics of controls, signals and systems [A35]	-	2015
Calcolo [A36]	N. Cîndea	2015
Advances in computational mathematics [A38]	D. Souza	2016
Journal of dynamics and differential equations [A39]	K. Ammari	2016
International journal for numerical methods in engineering [A40]	J. Martinez, F. Periago, M. Kessler	2016
Inverse Problem [A37,A41]	N. Cîndea	2015, 2016
Journal of ill-posed and inverse problem [A42]	D. Souza	2016
Journal of scientific computing [A43]	E. Fernàndez-Cara, D. Souza	2016

Table 2: Activité de publication depuis 2011.

La majorité des travaux mentionnés dans le tableau 2 concerne l'approximation numérique de contrôle aux trajectoires. Prenons, à titre d'exemple, l'équation hyperbolique unidimensionnelle considérée dans [A30,A36]:

$$\left\{\begin{array}{lll} y_{tt}-(a(x)y_x)_x+b(x,t)y=0, & & (x,t)\in(0,1)\times(0,T)\\ y(0,t)=0, & y(1,t)=v(t), & t\in(0,T)\\ y(x,0)=y_0(x), & y_t(x,0)=y_1(x), & x\in(0,1)\end{array}\right. \tag{1}$$

avec $a\in C^3([0,1])$ tel que $a(x)\geq a_0>0$ dans $[0,1]$, $b\in L^\infty((0,1)\times(0,T))$, $y_0\in L^2(0,1)$ et $y_1\in H^{-1}(0,1)$; $v=v(t)$ est une fonction *contrôle* (une fonction de $L^2(0,T)$) et $y=y(x,t)$ l'état correspondant. Pour tout $(y_0,y_1)\in\boldsymbol{Y}:=L^2(0,1)\times H^{-1}(0,1)$ et $v\in L^2(0,T)$, ce système admet une solution unique telle que $y\in C^0([0,T];L^2(0,1))\cap C^1([0,T];H^{-1}(0,1))$. (29) est nulle contrôlable au temps T si et seulement si elle est *exactement contrôlable* dans $\boldsymbol{Y}$ au temps T, i.e. si et seulement si pout tout $(y_0,y_1)\in\boldsymbol{Y}$ et tout $(z_0,z_1)\in\boldsymbol{Y}$ il existe un contrôle $v\in L^2(0,T)$ tel que y satisfait

$$y(\cdot\,,T)=z_0,\quad y_t(\cdot\,,T)=z_1\quad\text{dans}\quad(0,1).$$

La contrôlabilité de (29) est équivalente, par dualité, à l'observabilité du système adjoint correspondant :

$$\left\{\begin{array}{ll} L\varphi:=\varphi_{tt}-(a(x)\varphi_x)_x+b(x,t)\varphi=0 & \text{dans } Q_T\\ \varphi=0 & \text{sur } \Sigma_T\\ (\varphi(\cdot\,,T),\varphi_t(\cdot\,,T))=(\varphi_0,\varphi_1) & \text{dans } (0,1).\end{array}\right. \tag{2}$$

Précisément, (2) est observable si et seulement il existe une constante C_{obs} dite d'observabilité telle que

$$\|\varphi_0\|^2_{H^1_0(0,1)}+\|\varphi_1\|^2_{L^2(0,1)}\leq C_{obs}\|\varphi_x(1,\cdot)\|^2_{L^2(0,T)}\quad\forall(\varphi_0,\varphi_1)\in\boldsymbol{H}:=H^1_0(0,1)\times L^2(0,1) \tag{3}$$

avec φ solution de (2).

Cette inégalité est démontrée dans [A30], généralisant celle obtenue par J-L. Lions dans le cas des coefficients constants (en utilisant la méthode des multiplicateurs). Précisément, l'inégalité d'observabilité généralisée (dite inégalité de Carleman globale) suivante est obtenue:

$$\begin{aligned} s\int_{-T}^{T}\int_0^1 e^{2s\varphi}\left(|w_t|^2+|w_x|^2\right)dx\,dt+s^3\int_{-T}^{T}\int_0^1 e^{2s\varphi}|w|^2\,dx\,dt\\ \leq M\int_{-T}^{T}\int_0^1 e^{2s\varphi}|Lw|^2\,dx\,dt+Ms\int_{-T}^{T}e^{2s\varphi}|w_x(1,t)|^2\,dt\end{aligned} \tag{4}$$

pour tout $w\in L^2(-T,T;H^1_0(0,1))$ satisfaisant $Lw\in L^2((0,1)\times(-T,T))$ et $w_x(1,\cdot)\in L^2(-T,T)$ sous la condition

$$T>\frac{1}{\beta}\max_{[0,1]}a(x)^{1/2}(x-x_0) \tag{5}$$

avec $x_0<0$ et β un paramètre dépendant de $a(x)$. Le poids φ est une fonction bornée de t et de x (voir Théorème 2.1 de [A30]). Elle implique notamment l'inégalité

$$\|p(\cdot,0)\|^2_{H^1_0(0,1)}+\|p_t(\cdot,0)\|^2_{L^2(0,1)}\leq C\bigg(\|p_x(1,\cdot)\|^2_{L^2(0,T)}+\|Lp\|^2_{L^2(Q_T)}\bigg) \tag{6}$$

pour tout $p\in P$, le complété pour la norme $L^2(Q_T)$ de l'espace $P_0=\{p: Lp\in L^2(Q_T),p_x(1,\cdot)\in L^2(0,T),p_{x=0}=p_{x=1}=0\}$. Cette inégalité d'observabilité, fondamentale, est plus forte que (3) car elle relaxe la contrainte $Lp=0$.

La contrôlabilité de (29) étant acquise, on cherche une famille de fonctions $\{v_h\}_{h>0}$ convergeant fortement vers un contrôle v quand un paramètre d'approximation $h\to 0$. Au préalable, les contrôles aux trajectoires v n'étant pas uniques, il est nécessaire d'ajouter un critère supplémentaire:

un choix naturel est celui de minimiser la norme L^2 du contrôle (comme dans [A36]) menant au problème d'optimisation :

$$\begin{cases} \text{Minimiser} \quad J(y,v) := \dfrac{1}{2}\|v\|^2_{L^2(0,T)} \\ \text{soumis à} \quad (y,v) \in \mathcal{C}(y_0,y_1;T) \end{cases} \tag{7}$$

où $\mathcal{C}(y_0,y_1;T)$ désigne l'ensemble des contrôles aux trajectoires admissibles. Le théorème de Fenchel-Rockafellar implique alors l'égalité

$$\inf_{(y,v)\in\mathcal{C}(y_0,y_1;T)} J(y,v) = -\min_{(\varphi_0,\varphi_1)\in \boldsymbol{H}} J^\star(\varphi_0,\varphi_1)$$

où la fonctionnelle conjuguée $J^\star$ est donnée par

$$J^\star(\varphi_0,\varphi_1) := \frac{1}{2}\int_0^T |a(1)\varphi_x(1,t)|^2\,dt + \int_0^1 y_0(x)\,\varphi_t(x,0)\,dx - \langle y_1, \varphi(\cdot\,,0)\rangle_{H^{-1},H^1_0} \tag{8}$$

avec φ la solution du problème adjoint (2). Le contrôle de norme L^2 minimale est alors donné par $v = a(1)\hat\varphi_x(1,t)$ ou $\hat\varphi$ est solution de ((2)) associée à $(\hat\varphi_0,\hat\varphi_1)$ optimal pour $J^\star$. De fait, l'approximation du contrôle se réduit à une approximation de $\hat\varphi_x(1,t)$ et donc $\hat\varphi$ et donc de $(\hat\varphi_0,\hat\varphi_1)$!

La difficulté ici est de déterminer une approximation φ_h de φ, élément d'un espace de dimension finie telle $L\varphi_h = 0$, sans quoi on ne plus appliquer (3) à φ_h ! L'approche standard, qui constitue une **première façon** de procéder, consiste préliminairement à introduire une discrétisation de l'équation (29) puis de considérer la fonctionnelle discrétisée associée, notée J_h. En d'autres termes, on contrôle un système discrétisé. Le système adjoint discrétisé correspondant étant de dimension finie, on peut lui associer une constante d'observabilité discrète $C_{obs,h}$ telle que

$$\|\varphi_0^h\|^2_{H^1_0(0,1)} + \|\varphi_1^h\|^2_{L^2(0,1)} \le C_{obs,h}\|(\varphi_x(1,\cdot))_h\|^2_{L^2(0,T)} \quad \forall(\varphi_0^h,\phi_1^h)\in \boldsymbol{H}_h \tag{9}$$

où $(\varphi_x(1,\cdot))_h$ désigne une discrétisation de $\varphi_x(1,\cdot)$. De fait, pour chaque valeur du paramètre h, on peut aussi associer un élément v_h qui contrôle le système discrétisé. Cependant, afin d'assurer la convergence de la suite $\{v_h\}_{h>0}$, il est nécessaire que $C_{obs,h}$ soit uniformément bornée. Depuis les travaux de R. Glowinski dans les années 90 (repris par de nombreux auteurs dont ceux de l'équipe de E. Zuazua), il est reconnu que les discrétisations usuelles de (29) ne conduisent pas à une constante $C_{obs,h}$ uniformément bornée en h. Cela est dû aux solutions numériques hautes fréquences qui se propagent à une vitesse proportionnelle à h. Il s'agit de déterminer des discrétisations de (29) menant à des constantes $C_{obs,h}$ bornées. Ce type d'étude a été effectué ces dernières années mais principalement dans des situations académiques restrictives (géométries simples, coefficients constants, discrétisation uniforme, etc). Citons notamment dans le cas des coefficients constants les travaux [A5,A10] pour le cas $\Omega = (0,1)$ et [A19] pour le cas $\Omega = (0,1)^2$. Ce constat est la principale motivation pour exploiter une autre façon de déterminer une approximation convergente $\{v_h\}$, évitant ces difficultés.

Une seconde méthode est basée sur l'utilisation non pas de (3) mais de (6) qui précisément relache la contrainte $L\varphi = 0$! et peut-être écrite dans tout sous-espace $P_h \subset P$ de dimension finie. La variable est içi φ et conduit à des méthodes variationnelles en espace et en temps. Il s'agit alors, non pas de discrétiser les équations mais d'introduire des espaces de dimension finie, sous-espace des espaces fonctionnels dans lesquels les propriétés de contrôlabilité ont lieu.

Une façon naturelle de rentrer dans le cadre de (6) est d'introduire un multiplicateur de Lagrange pour gérer la contrainte $L\varphi = 0$. Afin de minimiser $J^\star$, on considère alors le problème de type point-selle

$$\max_{\lambda\in L^2(Q_T)}\min_{\varphi\in P} \mathcal{L}(\varphi,\lambda) := J^\star(\varphi) + <\lambda, L\varphi>_{L^2(Q_T)}\,. \tag{10}$$

Les conditions d'optimalité du premier ordre associées au lagrangien $\mathcal{L}$ s'écrivent: trouver $(\varphi, \lambda) \in P \times L^2(Q_T)$ solution de la formulation mixte

$$\begin{cases} a(\varphi, \overline{\varphi}) + b(\lambda, \overline{\varphi}) = l(\overline{\varphi}), & \forall \overline{\varphi} \in P, \\ b(\lambda, \overline{\varphi}) = 0, & \forall \overline{\lambda} \in L^2(Q_T). \end{cases} \tag{11}$$

Le caractère bien posé de cette formulation mixte est la conséquence de trois propriétés: i) la coercivité de a sur le noyau de b; cela résulte de la définition de la norme mise sur P; ii) la condition inf-sup sur la forme b; cela résulte de la dépendance continue des solutions de (2) par rapport au second membre $L\varphi$; iii) la linéarité de l qui découle de (6).

On introduit alors le système approché : trouver $(\varphi_h, \lambda_h) \in P_h \times M_h$ solution de la formulation mixte

$$\begin{cases} a(\varphi_h, \overline{\varphi}_h) + b(\lambda, \overline{\varphi}_h) = l(\overline{\varphi}_h), & \forall \overline{\varphi}_h \in P_h, \\ b(\lambda_h, \overline{\varphi}_h) = 0, & \forall \overline{\lambda}_h \in M_h. \end{cases} \tag{12}$$

La difficulté principale est de vérifier la condition inf-sup discrète, c'est-à-dire que la constante

$$\delta_h := \inf_{\lambda_h \in M_h} \sup_{\varphi \in P_h} \frac{b(\varphi_h, \lambda_h)}{\|\varphi_h\|_{P_h} \|\lambda_h\|_{M_h}} \tag{13}$$

est strictement positive, guarantissant l'existence et l'unicité du couple solution (φ_h, λ_h). Supposant cela, la théorie de l'approximation conduit alors aux estimations

$$\|(\varphi, \lambda) - (\varphi_h, \lambda_h)\|_{P \times L^2} \leq C_1(\delta_h) \operatorname{dist}(\varphi, P_h) + C_2(\delta_h) \operatorname{dist}(\lambda, M_h) \tag{14}$$

avec C_1, C_2 des constantes telles que $C_1(\delta_h), C_2(\delta_h) \to \infty$ lorsque $\delta_h \to 0$. Dans le cas général, l'évaluation de δ_h, qui naturellement dépend des choix faits pour P_h et M_h, est hors d'atteinte. Cependant, il est possible de modifier la formulation (11) afin de permet de s'affranchir de cette difficulté. Précisément, on remarque que le multiplicateur λ coincide avec la solution controlée de (29). Cela résulte de la première équation de la formulation mixte (11). De fait, on peut modifier le lagrangien $\mathcal{L}$ par

$$\mathcal{L}_\alpha(\varphi, \lambda) := \mathcal{L}(\varphi, \lambda) - \frac{\alpha}{2}\left(\|L\lambda\|^2_{L^2(H^{-1})} + \|\lambda(1, \cdot) - a(1)\varphi_x(1, \cdot)\|^2_{L^2(0,T)} \right) \tag{15}$$

avec $\alpha > 0$ suffisamment petit. La formulation mixte correspondante prend la forme

$$\begin{cases} a_\alpha(\varphi, \overline{\varphi}) + b_\alpha(\lambda, \overline{\varphi}) = l_{1,\alpha}(\overline{\varphi}), & \forall \overline{\varphi} \in P, \\ b_\alpha(\lambda, \overline{\varphi}) - c_\alpha(\lambda, \overline{\lambda}) = l_{2,\alpha}(\overline{\lambda}), & \forall \overline{\lambda} \in \Lambda \subset L^2(Q_T) \end{cases} \tag{16}$$

qui admet la même solution que (11) mais qui bénéficie d'une propriété de coercivité par rapport à la variable λ, du fait de la présence de la forme bilinéaire c_α. Après introduction d'une approximation conforme P_h et Λ_h des espaces P et Λ, on obtient des estimations de la forme

$$\|(\varphi, \lambda) - (\varphi_h, \lambda_h)\|_{P \times L^2} \leq C_1 \operatorname{dist}(\varphi, P_h) + C_2 \operatorname{dist}(\lambda, \Lambda_h) \tag{17}$$

qui permettent d'obtenir **la convergence forte** de φ_h vers φ dans P (et donc de $a(1)\varphi_{x,h}(1, \cdot)$ vers $a(1)\varphi_x(1, \cdot) := v$ dans $L^2(0,T)$)

$$\|a(1)\varphi_{h,x}(1, \cdot) - v\|_{L^2(0,T)} \to 0, \qquad \text{quand} \quad h \to 0. \tag{18}$$

En précisant les espaces $P_h \subset P$ et $M_h \subset L^2(Q_T)$, il est même possible de déterminer des taux de convergence par rapport au paramètre h. Cette seconde approche relève des méthodes d'optimisation avec contraintes couplées à des techniques d'analyse numérique standard tandis que la première relève de méthodes de contrôlabilité en dimension finie. La seconde approche est très générale et s'applique à tout système d'équations aux dérivées partielles pour lequel une inégalité de Carleman globale a lieu. Par ailleurs, il est important de remarquer qu'elle est appropriée à l'adaptation de maillage.

Cette méthode variationnelle a ainsi été appliquée à l'équation de la chaleur dans [A28,A38]

$$\begin{cases} y_t - \nabla\cdot(c(x)\nabla y) + d(x,t)y = v\,1_\omega, & \text{dans} \quad Q_T, \\ y = 0, & \text{sur} \quad \Sigma_T, \\ y(x,0) = y_0(x), & \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{19}$$

avec un contrôle v cette fois-ci distribué sur un sous-domaine de mesure non nulle ω de Ω. Compte tenu du caractère fortement régularisant du noyau de la chaleur, la situation est sensiblement différente, le contrôle de norme L^2 minimale est fortement oscillant dans un voisinage de $\Omega\times\{t = T\}$. D'un point de vue numérique, la situation est plus difficile que celle du cas hyperbolique. Afin d'éviter ces oscillations, difficiles à capturer numériquement, il est nécéssaire ici de considérer des fonctionnelles à poids, de la forme

$$\begin{cases} \text{Minimiser} \quad J(y,v) := \dfrac{1}{2}\displaystyle\iint_{q_T} \rho_0^2|v|^2\,dx\,dt \\ \text{Soumis à} \quad (y,v)\in\mathcal{C}(y_0,T) \end{cases} \tag{20}$$

avec $\rho_0 \in \mathcal{R} := \{w : w \in C(Q_T); w \geq \rho_\star > 0 \text{ in } Q_T; w \in L^\infty(Q_{T-\delta})\ \forall\delta > 0\}$ et $\rho_\star \in \mathbb{R}$. En particulier, le poids ρ_0 peut exploser à l'infini. Ce problème d'optimisation est bien posé et conduit au problème dual équivalent suivant

$$\min_{\varphi\in\widetilde{W}_{\rho_0,\rho}} \hat{J}^\star(\varphi) = \frac{1}{2}\iint_{q_T} \rho_0^{-2}|\varphi(x,t)|^2 dx\,dt + (y_0,\,\varphi(\cdot,0))_{L^2(\Omega)} \tag{21}$$

en la variable φ où $\widetilde{W}_{\rho_0,\rho}$ est un espace à poids de la forme

$$\widetilde{W}_{\rho_0,\rho} = \{\varphi\in\widetilde{\Phi}_{\rho_0,\rho} : \rho^{-1}L^\star\varphi = 0 \text{ in } L^2(Q_T)\}$$

faisant apparaître la contrainte $L^\star\varphi := -\varphi_t - \nabla\cdot(c(x)\nabla\varphi) + d(x,t)\varphi = 0$. Ce problème est bien posé pour tout $\rho_0 \in \mathcal{R}$. En revanche, pour que la formulation mixte correspondante soit bien posée, en particulier que la forme linéaire l soit continue, il est nécéssaire de supposer que le poids ρ est un poids de type Carleman de la forme

$$\rho(x,t) := exp\left(\frac{\beta(x)}{T-t}\right), \quad \beta(x) := K_1\left(e^{K_2} - e^{\beta_0(x)}\right),$$

présentant un caractère exponentiel lorsque $t\to T^-$. Cela force la solution controlée à s'écraser exponentiellement lorsque $t\to T^-$: indirectement, cela génère un contrôle qui est très régulier lorsque $t\to T^-$ (en particulier borné), contrairement au contrôle de norme L^2 minimale. A cette différence près, les remarques faites dans le cas hyperbolique demeurent: en particulier, cette méthode permet d'obtenir une convergence forte de l'approximation. Le cas de l'opérateur de Stokes est traité dans l'article [A43]. Les expériences numériques illustrent la robustesse et la stabilité de cette approche, par rapport à l'approche standard discutée dans [A32] (avec une minimisation itérative de la fonctionnelle $J^\star$ par rapport aux données initiales du problème adjoint).

La publication [A27] considère l'approximation numérique de contrôle pour l'équation de la chaleur semi-linéaire de la forme

$$\begin{cases} y_t - \nabla\cdot(c(x)\nabla y) + f(y) = v\,1_\omega, & \text{dans} \quad Q_T, \\ y = 0, & \text{sur} \quad \Sigma_T, \\ y(x,0) = y_0(x), & \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{22}$$

contrôlable à zéro lorsque la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, lipschitzienne vérifie $f(0) = 0$ et l'hypothèse de croissance à l'infini:

$$\frac{f(s)}{|s| \log^{3/2}(1+|s|)} \to 0 \qquad s \to \infty. \tag{23}$$

La méthode repose sur l'introduction du système linéaire

$$\begin{cases} y_t - \nabla \cdot (c(x)\nabla y) + y\frac{f(z)}{z} = v_z\, 1_\omega, & \text{dans} \quad Q_T, \\ y = 0, & \text{sur} \quad \Sigma_T, \\ y(x,0) = y_0(x), & \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{24}$$

et de l'opérateur continu et compact $\Lambda : L^2(Q_T) \to L^2(Q_T)$ tel que $\Lambda(z) = y$, la solution controlée par v_z. [A27] traite la résolution de l'équation $\Lambda(z) - z = 0$ par le calcul des itérés de Picard $\{z^n\}$ définis par $z^{n+1} = \Lambda(z^n)$ ainsi que par une méthode type moindre carrées en minimisant la fonctionnelle $z \to \|\Lambda(z) - z\|^2_{L^2(Q_T)}$. Le cas du système de Navier-Stokes est étudié dans [A43].

Les références [A33,A35] abordent ce même problème de l'approximation numérique de contrôles en utilisant à nouveau une méthode variationnelle mais de type moindres-carrées. Pour cette même raison, cette méthode très générale est appropriée à l'adaptation de maillages. A titre d'exemple, considérons la situation du système de Stokes instationnaire traitée dans [A35]

$$\begin{cases} \mathbf{y}_t - \nu\Delta\mathbf{y} + \nabla\pi = \mathbf{f}\, 1_\omega, \quad \nabla \cdot \mathbf{y} = 0 \quad \text{dans} \quad Q_T := \Omega \times (0,T) \\ \mathbf{y} = \mathbf{0} \quad \text{sur} \quad \Sigma_T, \quad \mathbf{y}(\cdot,0) = \mathbf{y}_0 \quad \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{25}$$

où $\mathbf{y}$ désigne le vecteur vitesse d'un fluide, π la pression correspondante, $\mathbf{f}$ une force extérieure. 1_ω désigne la fonction indicatrice de ω, sous-domaine de Ω. Ce système admet une solution faible unique $(\mathbf{y},\pi)$ de régularité $(\mathbf{y},\pi) \in \mathcal{A}_0 := (C^0([0,T];\mathbf{H}) \cap L^2(0,T;\mathbf{V})) \times L^2(0,T;U)$, $\mathbf{H}, \mathbf{V}, U$ étant des espaces appropriées. L'approximation numérique de ce problème est classique en introduisant des méthodes de type Lagrangien puis une discrétisation en espace puis en temps.

L'approximation du système (25) peut également être abordée en minimisant par rapport à $(\mathbf{y},\pi) \in \mathcal{A}_0$ la quantité

$$\|\mathbf{y}_t - \nu\Delta\mathbf{y} + \nabla\pi - \mathbf{f}\, 1_\omega\|^2_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega\times(0,T))} + \|\nabla \cdot \mathbf{y}\|^2_{L^2(\Omega\times(0,T))} \tag{26}$$

menant à une méthode de type moindres-carrées. Ce problème extremal se reformule de la façon équivalente suivante:

$$\inf_{(\mathbf{y},\pi)\in\mathcal{A}} E(\mathbf{y},\pi) = \frac{1}{2}\iint_{Q_T} (|\mathbf{v}_t|^2 + |\nabla\mathbf{v}|^2 + |\nabla\cdot\mathbf{y}|^2)\, d\mathbf{x}\, dt \tag{27}$$

avec $\mathcal{A} := \{(y,\pi) \in \mathcal{A}_0, y(\cdot,0) = y_0\}$ et où le correcteur $\mathbf{v}$ est solution de

$$\begin{cases} -\mathbf{v}_{tt} - \Delta\mathbf{v} + (\mathbf{y}_t - \nu\Delta\mathbf{y} + \nabla\pi - \mathbf{f}\, 1_\omega) = 0, \quad \text{dans} \quad Q_T, \\ \mathbf{v} = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma_T, \quad \mathbf{v}_t = 0 \quad \text{sur} \quad \Omega \times \{0,T\}. \end{cases} \tag{28}$$

On montre en effet que l'unique point critique de E est la solution du système de Stokes. Cela réduit la résolution de (25) à la construction d'une suite minimisante pour E. Chaque itérée requiert simplement la résolution du problème elliptique espace-temps (28) en la variable $\mathbf{v}$.

Remarquablement, cette approche de type moindres carrées permet d'aborder la contrôlabilité de (25) où la force $\mathbf{f}$ est désormais une inconnue de façon à ce que $\mathbf{y}(\cdot,T) = 0$. En effet, il suffit de rajouter comme inconnue à E la variable $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(Q_T)$ et la condition $\mathbf{y}(\cdot,T) = 0$ à l'espace $\mathcal{A}$! La référence [A33] traite le cas de l'équation de la chaleur tandis que [A35] traite le système de Stokes ci-dessus. On montre notamment la convergence forte de toute suite minimisante de E vers la solution de (25).

Plus récemment, les références [A37,A41,A43] abordent des problèmes inverses linéaires, où l'on cherche la solution d'un système aux dérivées partielles à partir d'une information - dite observation - partielle. Dans [A41], on cherche à reconstruire le couple (y, μ) solution de

$$\left\{ \begin{array}{ll} y_{tt} - \nabla \cdot (c(x)\nabla y) + d(x,t)y = \sigma(t)\mu(x), & (x,t) \in Q_T \\ y = 0, & (x,t) \in \Sigma_T \\ (y(\cdot,0), y_t(\cdot,0)) = (0.,0.), & x \in \Omega \end{array} \right. \tag{29}$$

connaissant la dérivée normale $y_{obs,\nu} := \nabla y \cdot \boldsymbol{\nu}$ sur la partie Γ_T du bord $\Sigma_T := \partial\Omega \times (0,T)$. La méthode naturelle pour aborder ce type de problème est de relaxer la contrainte $\nabla y \cdot \boldsymbol{\nu} - y_{\nu,obs} = 0$ sur Γ_T et de minimiser la fonctionnelle

$$\left\{ \begin{array}{l} \inf J(y,\mu) := \dfrac{1}{2} \|c(x)(\nabla y \cdot \boldsymbol{\nu} - y_{\nu,obs})\|^2_{L^2(\Gamma_T)}, \\ \text{soumis à} \quad (y,\mu) \in W \end{array} \right. \tag{$\mathcal{P}_{y,\mu}$}$$

où l'espace W est défini par

$$\begin{aligned} W := \Big\{ &(y,\mu);\ y \in C([0,T]; H^1_0(\Omega)) \cap C^1([0,T]; L^2(\Omega)),\ \mu \in H^{-1}(\Omega), \\ &Ly - \sigma\mu = 0 \,\text{dans}\, Q_T,\ y(\cdot,0) = y_t(\cdot,0) = 0 \Big\}. \end{aligned} \tag{30}$$

Ce type de problèmes d'optimisation est très proche de ceux rencontrés plus haut et peut-être abordé par des méthodes variationnelles en introduisant un multiplicateur de Lagrange pour gérer la contrainte $Ly - \sigma\mu = 0$ dans $L^2(Q_T)$. Une propriété de continuation unique suffit pour guarantir le caractère bien posé de la formulation mixte (contrairement aux problèmes de contrôle qui nécessitent une propriété plus forte d'observabilité). La stabilité et l'unicité de la reconstruction sont la conséquence de l'inégalité suivante : il existe une constante positive $C_{obs} = C(\Gamma_T, T, \|c\|_{C^1(\overline{\Omega})}, \|d\|_{L^\infty(\Omega)})$ telle que

$$\|\mu\|^2_{H^{-1}(\Omega)} \le C_{obs} \Big(\|c(x)\partial_\nu y\|^2_{L^2(\Gamma_T)} + \|Ly - \sigma\mu\|^2_{L^2(Q_T)} \Big), \quad \forall (y,\mu) \in Y \tag{$\mathcal{H}_2$}$$

où

$$\begin{aligned} Y := \Big\{ &(y,\mu);\ y \in C([0,T]; H^1_0(\Omega)) \cap C^1([0,T]; L^2(\Omega)),\ \mu \in H^{-1}(\Omega), \\ &Ly - \sigma\mu \in L^2(Q_T) \,\text{dans}\, Q_T,\ y(\cdot,0) = y_t(\cdot,0) = 0 \Big\}. \end{aligned} \tag{31}$$

L'analyse numérique de ces problèmes est effectuée dans [A37,A41]. La référence [A43] traite un problème similaire pour l'équation de la chaleur, au préalable réécrite comme un système d'ordre un, faisant intervenir le flux $\boldsymbol{p}$

$$y_t - \nabla \cdot \boldsymbol{p} + d(x,t)y = 0, \quad \boldsymbol{p} - c(x)\nabla y = 0, \qquad (x,t) \in \Omega \times (0,T). \tag{32}$$

Cela permet de travailler avec des espaces fonctionnelles d'ordre moins élevés, typiquement des espaces à la fois H^1 en temps et en espace. Cela facilite l'analyse numérique ainsi que l'implémentation numérique. On remarque également que le schéma numérique qui en résulte ne vérifie pas la condition inf-sup discrète uniforme et doit de fait être enrichi d'un terme de stabilisation.

5.3 Projets de recherche

5.3.1 Estimation numérique de constantes d'observabilité

La propriété de contrôlabilité de nombreuses EDP linéaires est liée à celle de l'observabilité du système adjoint correspondant: par exemple, la contrôlabilité distribuée à zéro de l'équation de la chaleur

$$\begin{cases} \mathbf{y}_t - \Delta \mathbf{y} = \mathbf{f}\, 1_\omega \quad \text{dans} \quad Q_T := \Omega \times (0,T) \\ \mathbf{y} = \mathbf{0} \quad \text{sur} \quad \Sigma_T, \quad \mathbf{y}(\cdot,0) = \mathbf{y}_0 \quad \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{33}$$

est équivalente à l'existence d'une constante $C_{obs} > 0$ tel que :

$$\|\boldsymbol{\varphi}(\cdot,0)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_{obs} \, \|\boldsymbol{\varphi}\|^2_{L^2(\omega\times(0,T))} \tag{34}$$

pour toute solution $\boldsymbol{\varphi}$ du problème rétrograde

$$\begin{cases} -\boldsymbol{\varphi}_t - \Delta \boldsymbol{\varphi} = 0 \quad \text{dans} \quad Q_T := \Omega \times (0,T) \\ \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0} \quad \text{sur} \quad \Sigma_T, \quad \boldsymbol{\varphi}(\cdot,T) = \boldsymbol{\varphi}_T \quad \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{35}$$

avec $\boldsymbol{\varphi}_T$ dans $L^2(\Omega)$. Ici, ω désigne un ouvert non vide de Ω, un domaine borné et régulier de $\mathbb{R}^N$. Cette constante d'observabilité C_{obs} reliée au coût du contrôle $\mathbf{f}$ est en fait donnée par:

$$C_{obs}^{-1} = \inf_{\boldsymbol{\varphi}_T \in L^2(Q_T)} \frac{\|\boldsymbol{\varphi}\|^2_{L^2(\omega\times(0,T))}}{\|\boldsymbol{\varphi}(\cdot,0)\|^2_{L^2(\Omega)}}. \tag{36}$$

L'évaluation numérique de C_{obs}^{-1} permet d'évaluer le coût du contrôle par rapport à divers paramètres (le temps de contrôlabilité T, la mesure de ω, etc) ou bien encore de conjecturer la contrôlabilité d'un système d'EDP donné ! Le problème spectral (36) fait intervenir l'opérateur de contrôle, résolu de façon itérative par une méthode type puissance itérée (voir [A39]). Chaque itération requiert la résolution d'un problème de contrôlabilité, en utilisant par exemple les méthodes robustes développées dans [A28,A36,A38] notamment. Mentionnons deux exemples ouverts:

- Le comportement de la constante d'observabilité par rapport à T et ε de l'équation de transport avec un contrôle frontière f

$$\begin{cases} y_t - \varepsilon y_{xx} + M y_x = 0, & (x,t) \in (0,1)\times(0,T), \\ y(1,t) = f(t), & t \in (0,T), \end{cases} \tag{37}$$

  considérée ces dernières années par Glass, Coron, Guerrero et Lissy. La contrôlabilité est montrée, uniformément par rapport à ε, lorsque le temps T est suffisamment grand. Il s'agit içi d'évaluer numériquement le temps minimal de contrôlabilité lorsque $\varepsilon \to 0^+$ selon le signe de M. La controlabilité numérique de (37) est non triviale. D'une part, une couche limite apparaît lorsque $\varepsilon \to 0$. D'autre part, pour $T \geq 1/M$, la norme $\|y_\varepsilon(T)\|_{H^{-1}(\Omega)}$ de la solution non controlée atteint pour ε petit le zéro numérique et retourne une approximation numérique du contrôle optimal arbitrairement petite (alors que le contrôle théorique explose lorsque $\varepsilon \to 0$) ! [Travail en collaboration avec Michel Duprez de Marseille et l'équipe contrôle du laboratoire Jacques-Louis Lions de Paris 6]

- Le comportement de la constante d'observabilité par rapport aux nombres de contrôles pour l'opérateur d'élasticité en dimension deux d'espace.

$$\begin{cases} \mathbf{y}_{tt} - \mu\Delta\mathbf{y} - (\lambda+\mu)\nabla div\mathbf{y} = 0, & (\mathbf{x},t) \in \Omega\times(0,T), \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ \mathbf{y} = \mathbf{f}, & (\mathbf{x},t) \in \partial\Omega\times(0,T). \end{cases} \tag{38}$$

  La contrôlabilité exacte a lieu lorsque l'on utilise deux contrôles, i.e. lorsque $\mathbf{f} = (f_1, f_2) \in \mathbf{L}^2(\partial\Omega\times(0,T))$, $f_1 \neq 0, f_2 \neq 0$ (Lions 1988). En revanche, la question de la contrôlabilité de (38) avec un seul contrôle reste ouverte: le couplage entre les deux équations est d'ordre deux, ordre non couvert par les résultats actuels (traitant la contrôlabilité avec moins de controles que d'états) Si la constante d'observabilité reste bornée lorsqu'un des deux contrôles tend vers zéro (par exemple $\|f_2\|_{L^2} \to 0$), on pourra conjecturer que le système de l'élasticité (38) reste contrôlable avec un seul contrôle. Cela soulève également la question du comportement du premier contrôle lorsque le second dégénère ainsi que celle du temps minimal (dans les cas positifs lorsque l'on passe de deux à un seul contrôle) [Travail en collaboration avec S. Micu et D. A de Souza].

De la même façon, il serait interessant de considérer un argument de point fixe par rapport à la variable adjointe sur la constante d'observabilité associée à l'equation (24) afin de déterminer si l'exposant $p = 3/2$ apparaissant dans (23) peut-être amélioré: c'est-à-dire si la contrôllabilité uniforme peut avoir lieu pour $p \in [3/2, 2[$.

5.3.2 Problème direct, inverse et de contrôle non linéaire: approximation numérique

Les résultats de controlabilité pour des EDP non linéaires sont majoritairement obtenues via des théorèmes de point fixe (type Schauder ou Kakutani) qui ne sont pas adaptables en pratique, les opérateurs en jeu n'étant pas contractants. Des travaux récents indépendants de Klibanov d'une part et de Baudouin-DeBuban-Ervedoza d'autre part permettent néanmoins de traiter des problèmes inverses non linéaires tels que la reconstruction d'un potentiel ou d'un coefficient d'une EDP à partir d'une observation partielle: ces travaux basés sur des méthode type moindre-carrées reposent sur l'introduction de fonctionnelles quadratiques à poids de la forme

$$J(y) := \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega \rho_1^2|Ly - f|^2\,dx\,dt + \frac{1}{2}\int_0^T\int_\omega \rho_2^2|y - y_{obs}|^2\,dx\,dt \tag{39}$$

avec des poids ρ_1 et ρ_2 convenablement choisis afin de guarantir une proprieté de stricte convexité. y_{obs} est l'observation et L l'opérateur principal de l'EDP correspondante. Les liens étroits entre problèmes inverses et problème de contrôle (mis en évidence par Klibanov dans les années 80, exploités par Yamamoto depuis et notamment utilisés dans [A37,A41]) peuvent permettre de déterminer des méthodes convergentes pour résoudre des problèmes non linéaire de contrôle. Remarquons que l'influence des poids de type Carleman est discuté dans [A27] concernant l'équation de la chaleur semi-linéaire (22) [Travail en collaboration avec D. A de Souza].

Par ailleurs, la méthode variationnelle introduite dans [A33] pour l'équation de la chaleur puis dans [A35] permet de résoudre de façon très naturelle des problèmes directes (stationnaire ou non) et des problèmes de contrôlabilité. Pour des problèmes linéaires, elle permet de construire une approximation fortement convergente (de l'unique solution du problème directe ou d'une solution contrôlée et d'un contrôle associé). Une étude récente avec Pablo Pedregal (voir le travail soumis) montre que cela est également vrai pour le problème directe du système de Navier-Stokes stationnaire, dans les cas d'unicité. Précisément, on montre que si la quantité $\nu^{-2}\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)}$ est suffisamment petite, alors toute suite minimisante de la fonctionnelle $E : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^+$

$$E(\mathbf{y}, \pi) := \frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla \mathbf{v}|^2 + |\nabla\cdot\mathbf{y}|^2)\,d\mathbf{x} \tag{40}$$

avec $\mathcal{A} = \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ et le correcteur $\mathbf{v}$ unique solution dans $\mathbf{H}_0^1(Q_T)$ du problème elliptique

$$\begin{cases} -\Delta\mathbf{v} + (-\nu\Delta\mathbf{y} + div(\mathbf{y}\otimes\mathbf{y}) + \nabla\pi - \mathbf{f}) = 0, \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ \mathbf{v} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{41}$$

convergence fortement vers la solution du problème

$$\begin{cases} -\nu\Delta\mathbf{y} + (\mathbf{y}\cdot\nabla)\mathbf{y} + \nabla\pi = \mathbf{f}, \quad \nabla\cdot\mathbf{y} = 0 \quad \text{in} \quad \Omega \\ \mathbf{y} = \mathbf{0} \quad \text{on} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{42}$$

Ce type de résultat est également obtenu pour des équations de la forme (22) avec des nonlinéarité faible (typiquement des fonctions sous-linéaire). Le cas fortement linéaire, par exemple lorsque la quantité $\nu^{-2}\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)}$ n'est pas suffisamment petite, donne des résultats satisfaisant sur le plan numérique, mais reste ouvert d'un point de vue théorique [Travail en collaboration avec Pablo Pedregal].

5.3.3 Problème de contrôle avec incertitudes sur les données: Aspects théorique et numérique

Le travail [A40] en collaboration avec des probabilistes et analystes de Cartagène étudie un problème de contrôle optimal pour une équation de la chaleur, avec des incertitudes à la fois sur des coefficients de l'équation ainsi que sur la variable contrôle. La minimisation d'une fonctionnelle, dépendant de la variance du système aléatoire sous-jacent, est étudiée et mise en œuvre numériquement. Nous souhaitons étudier le cas un peu plus difficile de la controlabilité exacte, notamment sur des systèmes de poutres avec incertudes sur les coefficients et/ou données initiales à contrôler. Il s'agit de généraliser les méthodes et outils traditionnelles à ce cas aléatoire, par exemple les inégalités d'observabilités. Des résultats préliminaires ont été obtenu récemment en ce sens par l'équipe de E. Zuazua. A cette fin, le doctorant Francesco Marin Marin de Cartagene fera une visite de trois mois a Clermont-Ferrand [Travail en collaboration avec N. Cindea, M. Kessler, F. Marin, J. Martinez, F. Periago].

5.4 Publications significatives

- *Optimal design of the damping set for the stabilization of the wave equation*, avec P. Pedregal et F. Periago. Journal of Differential Equations, **231(1)**, 330-353 (2006).

  Nous considérons une équation des ondes amorties de façon interne puis considérons le problème de la minimisation de l'énergie au temps $T > 0$ par rapport au support du terme d'amortissement. En raison du phénomène d'over-damping, ce problème est mal posé et fait apparaitre une micro-structure. En réécrivant l'équation sous forme divergence, nous calculons l'enveloppe quasi-convexe à l'aide de mesures de Young et assoçions ainsi un problème d'optimisation bien posé dont le minimum coïncide avec l'infimum du problème initial. La micro-structure fait apparaître un laminé d'ordre un. Enfin, nous montrons comment associer à la densité optimale une suite de fonction caractéristique minimisante pour le problème initial.

- *Exact controllability of a string submitted to a boundary unilateral obstacle*, avec F. Ammar-Khodja et S. Micu. Annales de l'Institut Henri Poincaré, Série C. **27(4)** 1097-1019 (2010)

  Nous montrons en utilisant les formules de D'Alembert l'existence de contrôle $H^1(0,T)$ agissant à l'extrémité gauche d'une poutre de longueur un soumise à l'extrémité droite à un obstacle mobile de type Signorini. La démonstration est constructive et permet l'approximation numérique. Il s'agit d'un problème de contrôlabilité non linéaire.

- *Numerical approximation of null controls for the heat equation : ill-posedness and remedies*, avec E. Zuazua. Inverse Problems. **26(8)** (2010)

  Cet article propose et analyse quelques stratégies d'approximation pour le contrôle de l'équation de la chaleur. Différentes régularisations sont introduites. Elles sont ensuite comparées à l'approximation obtenue en utilisant des transformations de type Kannai, permettant l'obtention de contrôle pour l'équation de la chaleur à partir de contrôles pour l'équation des ondes plus une solution fondamentale de l'équation de la chaleur.

- *Exact controllability of a system of mixed order with essential spectrum*, avec F. Ammar-Khodja et K. Mauffrey. SIAM Control and Optimization, **49**, 1857-1879 (2011)

  On considère un système couplé de deux équations présentant un spectre essentiel de type intervalle. En utilisant des arguments spectraux et une extension des inégalités de type Ingham à la dimension 2, nous montrons la contrôlabilité de ce système pour les données initiales générées par l'orthogonal du spectre essentiel. Nous montrons également la perte de contrôlabilité uniforme dûe à ce spectre essentiel. Un tel système apparaît dans la modélisation des coques minces élastiques en régime membranaire. Les modes du spectre essentiel sont dits des modes de résonnance.

- *Controllability of the Linear One-dimensional Wave Equation with Inner Moving Forces*, avec C. Castro et N. Cindea, SIAM Control and Optimization, **52**, 4027-4056 (2014)

  Ce travail adresse d'un point théorique et numérique la contrôlabilité de l'équation des ondes par un contrôle interne dont le support est non-cylindrique. On vérife, en utilisant les formules de D'Alembert et des arguments de compacité, qu'une inégalité d'observabilité généralisée a lieu (et implique la contrôlabilité) dès que le support du contrôle vérifie les conditions d'optiques géométriques usuelles. Cette inégalité permet alors une approximation numérique robuste via l'introduction d'une formulation mixte. Ce travail a été récemment étendu au cas de la dimension N par G. Lebeau, J. Le Rousseau et E. Trélat