

Modélisation, Analyse, Contrôle

Arnaud Münch



Journée Simulation et optimisation dans l'industrie
Mardi 14 Novembre 2017

Partie I - Contrôle des systèmes dynamiques : Définition, exemples académiques et problématiques.

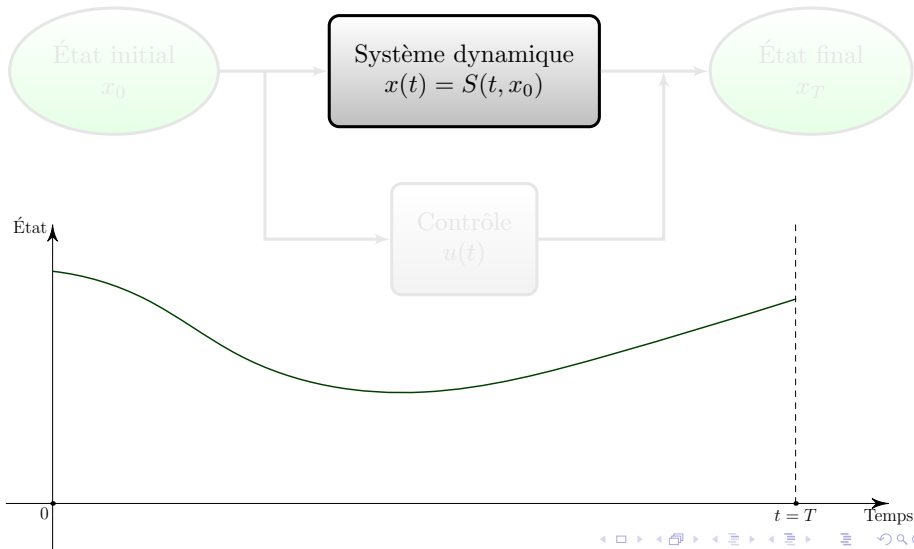
Partie II - Application au maintien hors gel des chaussées - Collaboration avec le CEREMA.

Partie I - Contrôle des EDPs: Définition, exemples académiques et problématiques.

avec Nicolae Cîrdea (LMBP),

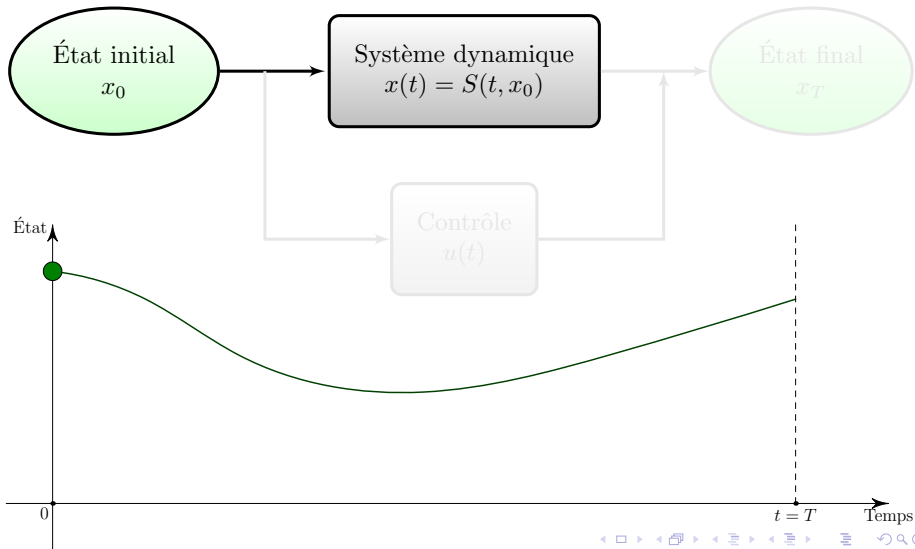
PROBLÉMATIQUE EN THÉORIE DU CONTRÔLE

ACTION AU COURS DU TEMPS SUR UN SYSTÈME DYNAMIQUE
EN VUE DE LE CONDUIRE EN UN TEMPS DONNÉ À UN ÉTAT DONNÉ.



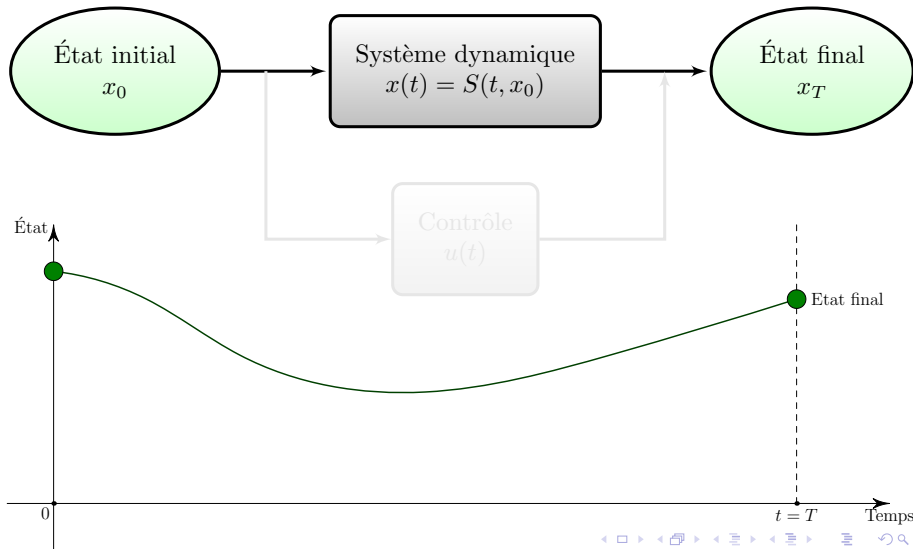
PROBLÉMATIQUE EN THÉORIE DU CONTRÔLE

ACTION AU COURS DU TEMPS SUR UN SYSTÈME DYNAMIQUE
EN VUE DE LE CONDUIRE EN UN TEMPS DONNÉ À UN ÉTAT DONNÉ.



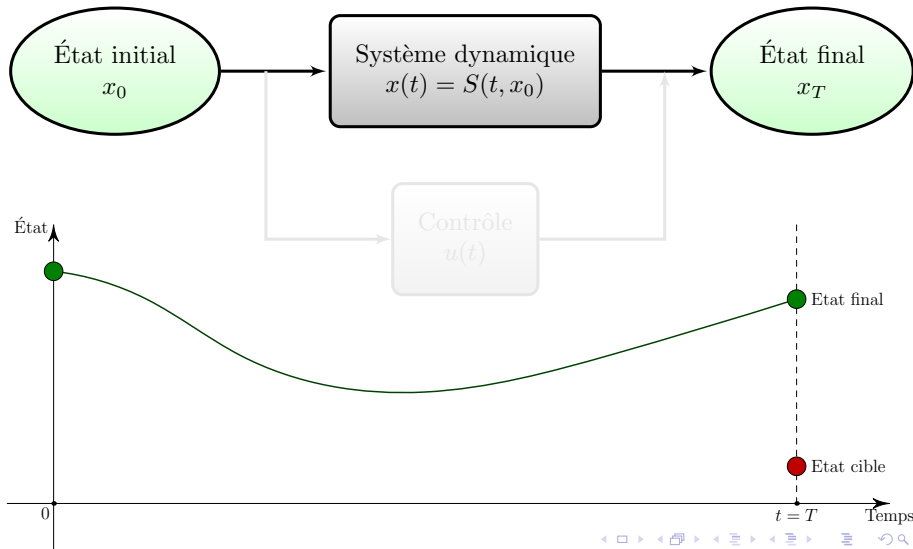
PROBLÉMATIQUE EN THÉORIE DU CONTRÔLE

ACTION AU COURS DU TEMPS SUR UN SYSTÈME DYNAMIQUE
EN VUE DE LE CONDUIRE EN UN TEMPS DONNÉ À UN ÉTAT DONNÉ.



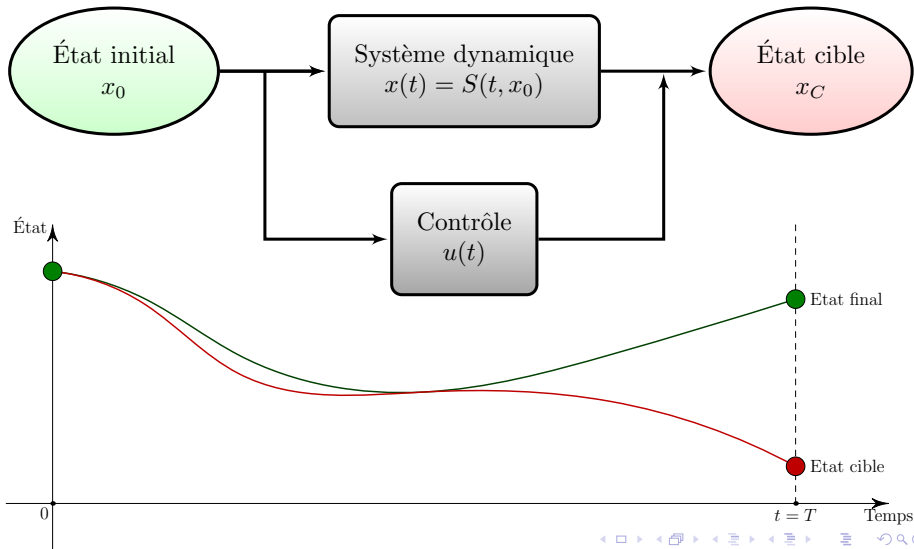
PROBLÉMATIQUE EN THÉORIE DU CONTRÔLE

ACTION AU COURS DU TEMPS SUR UN SYSTÈME DYNAMIQUE
EN VUE DE LE CONDUIRE EN UN TEMPS DONNÉ À UN ÉTAT DONNÉ.



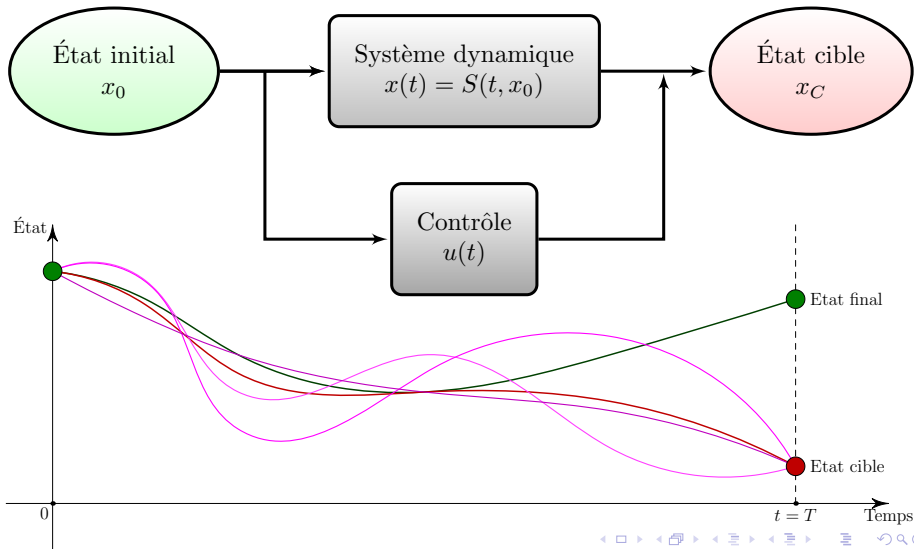
PROBLÉMATIQUE EN THÉORIE DU CONTRÔLE

ACTION AU COURS DU TEMPS SUR UN SYSTÈME DYNAMIQUE
EN VUE DE LE CONDUIRE EN UN TEMPS DONNÉ À UN ÉTAT DONNÉ.



PROBLÉMATIQUE EN THÉORIE DU CONTRÔLE

ACTION AU COURS DU TEMPS SUR UN SYSTÈME DYNAMIQUE
EN VUE DE LE CONDUIRE EN UN TEMPS DONNÉ À UN ÉTAT DONNÉ.



Une infinité de domaines concernés et d'exemples

- Dynamique des populations
- Transport optimal, trafic routier,
- Problèmes inverses - Contrôle non destructif
- Interaction fluides-structure
- Automatique - Robotique
- Finances, Aéronautique
- Viabilité
-

EXEMPLE 1: LE PENDULE

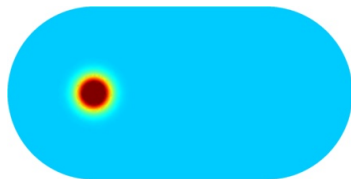
Figure: Evolution du pendule dans le plan sans contrôle (gauche) et avec contrôle (droite).

EXEMPLE 2: CONTRÔLE ACOUSTIQUE ACTIF

RÉDUIRE UNE SOURCE DE BRUIT DANS UNE PIÈCE

Équation de propagation des ondes :

$$\begin{cases} y(x, t) : \text{amplitude sonore} \\ \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} - c^2(x) \Delta y(x, t) = 0, t > 0 \\ \text{état initial à } y(x, t = 0) \text{ donné} \end{cases}$$



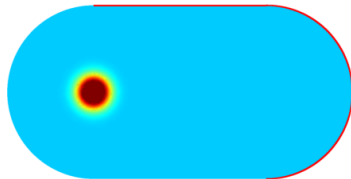
Évolution de l'onde sonore sans contrôle

- Action à l'intérieur de la pièce (contrôle distribué) :

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} - c^2(x) \Delta y(x, t) = u(x, t) 1_\omega$$

- Action au bord de la pièce (contrôle frontière)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} - c^2(x) \Delta y(x, t) = 0 \\ y = u \end{cases}$$



Évolution de l'onde sonore avec contrôle

EXEMPLE 2: CONTRÔLE ACOUSTIQUE ACTIF

RÉDUIRE UNE SOURCE DE BRUIT DANS UNE PIÈCE

Équation de propagation des ondes :

$$\left\{ \begin{array}{l} y(x, t) : \text{amplitude sonore} \\ \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial^2 t} - c^2(x) \Delta y(x, t) = 0, t > 0 \\ \text{état initial à } y(x, t = 0) \text{ donné} \end{array} \right.$$

Évolution de l'onde sonore sans contrôle

- Action à l'intérieur de la pièce (contrôle distribué) :

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial^2 t} - c^2(x) \Delta y(x, t) = u(x, t) 1_\omega$$

- Action au bord de la pièce (contrôle frontière)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial^2 t} - c^2(x) \Delta y(x, t) = 0 \\ y = u \end{array} \right.$$

Évolution de l'onde sonore avec contrôle

RÉDUIRE UNE ONDE DE SURFACE

Figure: Évolution d'une onde de surface sans contrôle (gauche) et avec contrôle (droite).

EXEMPLE 4 : CONTRÔLE VIBRATOIRE ACTIF - CAS NON LINÉAIRE D'UN OBSTACLE UNILATÉRAL

CONTRÔLE D'UNE CORDE VIBRANTE

Corde élastique homogène de longueur 1 :

- soumise à un obstacle unilatéral à l'extrémité droite en $x = 1$: $y(x = 1, t) \geq -1/10$
- contrôle en $T = 2$ à l'extrémité gauche en $x = 0$: $y(x = 0, t) = u(t)$

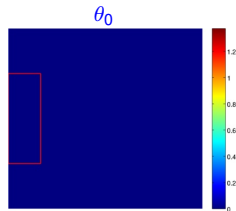
Figure: Evolution de la corde sans contrôle (gauche) et avec contrôle (droite).

EXEMPLE 5 : PROBLÈME D'ASSERVISSEMENT THERMIQUE

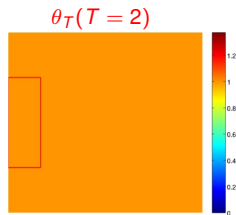
CHAUFFER UNE PIÈCE D'HABITATION DE FAÇON HOMOGENÈME

Équation de diffusion de la chaleur

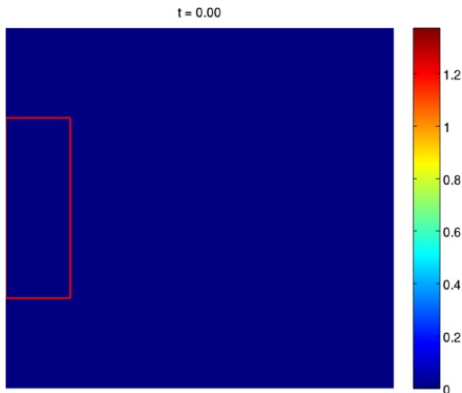
$$\begin{cases} \partial_t \theta - \Delta \theta = 1_{\omega} u, & \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ \partial_\nu \theta - \alpha(x)\theta = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times (0, T) \\ \theta(0) = \theta_0, \quad \theta(T) = \theta_T, & \text{dans } \Omega \end{cases}$$



État initial



État cible

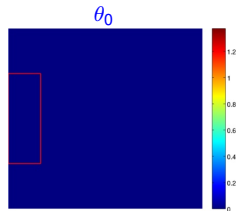


EXEMPLE 5 : PROBLÈME D'ASSERVISSEMENT THERMIQUE

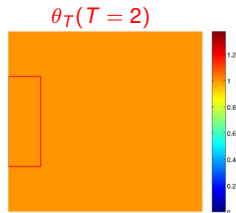
CHAUFFER UNE PIÈCE D'HABITATION DE FAÇON HOMOGENÈME

Équation de diffusion de la chaleur

$$\begin{cases} \partial_t \theta - \Delta \theta = 1_{\omega} u, & \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ \partial_\nu \theta - \alpha(x)\theta = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times (0, T) \\ \theta(0) = \theta_0, \quad \theta(T) = \theta_T, & \text{dans } \Omega \end{cases}$$



État initial



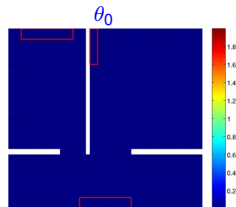
État cible

EXEMPLE 5 : PROBLÈME D'ASSERVISSEMENT THERMIQUE

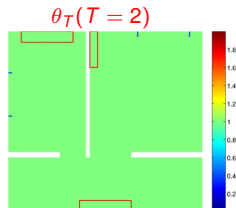
CHAUFFER UNE PIÈCE D'HABITATION DE FAÇON HOMOGENÈME

Équation de diffusion de la chaleur

$$\begin{cases} \partial_t \theta - \Delta \theta = 1_{\omega} u, & \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ \partial_\nu \theta - \alpha(x)\theta = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times (0, T) \\ \theta(0) = \theta_0, \quad \theta(T) = \theta_T, & \text{dans } \Omega \end{cases}$$



État initial



État cible

EXEMPLE 6 D'UN SYSTÈME DE RÉACTION-DIFFUSION - APPLICATIONS EN MÉDECINE

Contrôlabilité de la croissance tumorale

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $T > 0$, $Q_T = \Omega \times (0, T)$, $\Sigma_T = \partial\Omega \times (0, T)$.

$$\begin{cases} \partial_t y_1 = d_1 \Delta y_1 + a_1 \left(1 - \frac{y_1}{k_1}\right) y_1 - (\alpha_{1,2} y_2 + k_{1,3} y_3) y_1 & \text{dans } Q_T \\ \partial_t y_2 = d_2 \Delta y_2 + a_2 \left(1 - \frac{y_2}{k_2}\right) y_2 - (\alpha_{2,1} y_1 + k_{2,3} y_3) y_2 & \text{dans } Q_T \\ \partial_t y_3 = d_3 \Delta y_3 - a_3 y_3 + u & \text{dans } Q_T \\ \partial_n y_i = 0 & \text{sur } \Sigma_T \\ y_i(x, 0) = y_i^0 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

- y_1 : densité de cellules tumorales
- y_2 : densité de cellules normales
- y_3 : concentration du médicament
- u : le contrôle – le taux d'injection du médicament

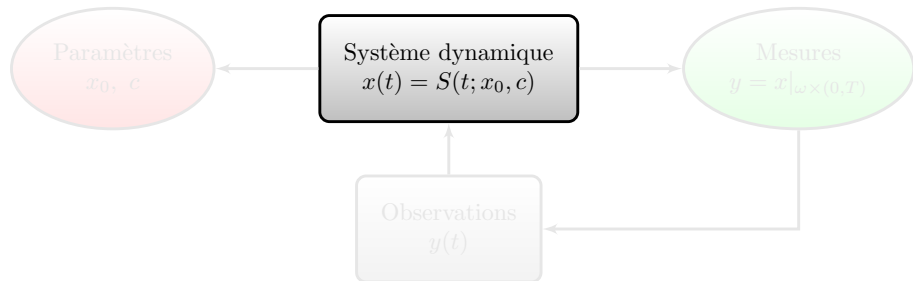
S. Chakrabarty, F. Hanson, Distributed parameters deterministic model for treatment of brain tumours, 2009.

Exemple 7 : Contrôler l'écoulement d'un fluide dans un canal

CONTRÔLER L'ÉCOULEMENT D'UN FLUIDE DANS UN CANAL

$$\left\{ \begin{array}{ll} y_t - \nu \Delta y + \nabla \pi = f \mathbf{1}_\omega, & \text{dans } Q_T \\ \nabla \cdot y = 0, & \text{dans } Q_T \\ y = 0 & \text{sur } \Sigma_T \\ y(\cdot, 0) = y_0, & \text{dans } \Omega \end{array} \right.$$

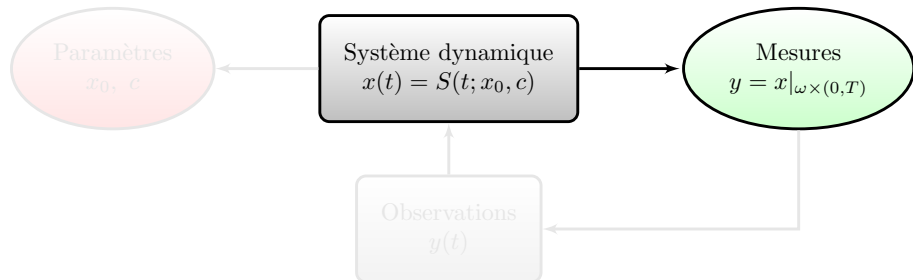
MAIS AUSSI LES PROBLÈMES INVERSES



$$\frac{\partial^2 w}{\partial^2 t} - c^2 \Delta w = 0$$

état initial inconnu

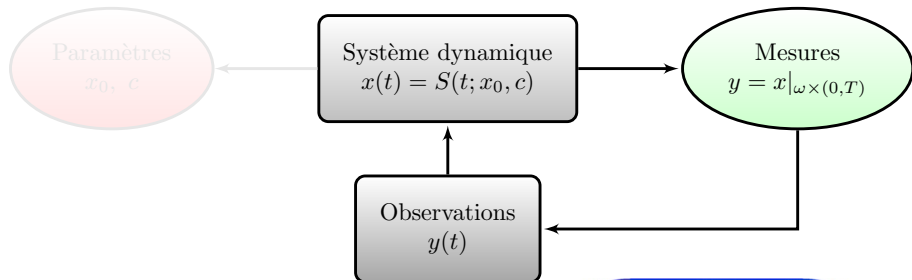
MAIS AUSSI LES PROBLÈMES INVERSES



$$\frac{\partial^2 w}{\partial^2 t} - c^2 \Delta w = 0$$

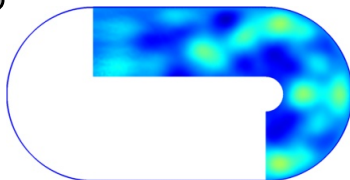
état initial inconnu

MAIS AUSSI LES PROBLÈMES INVERSES



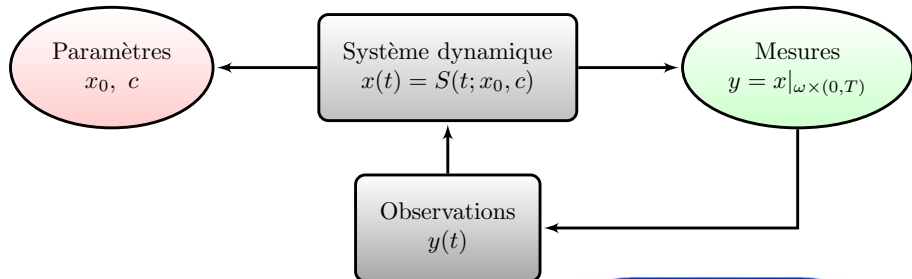
$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - c^2 \Delta w = 0$$

état initial inconnu



Résolution du problème inverse

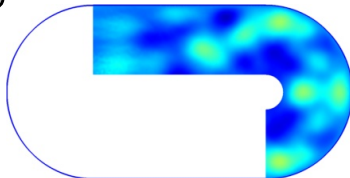
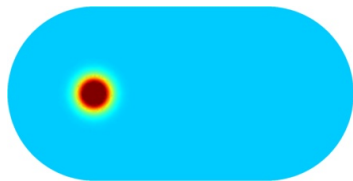
MAIS AUSSI LES PROBLÈMES INVERSES



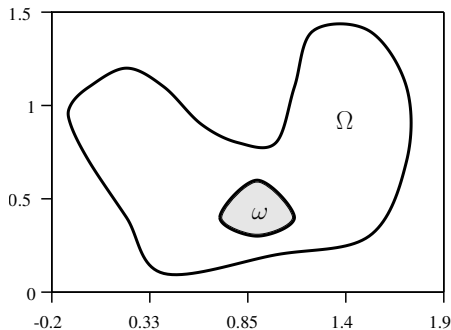
$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - c^2 \Delta w = 0$$

état initial inconnu

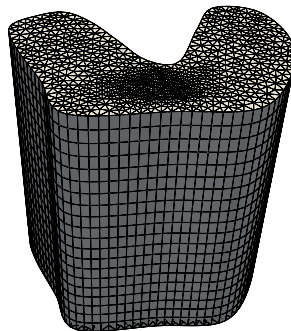
Résolution du problème inverse



Exemple 2D - Observation partielle sur le domaine q_T



(a)

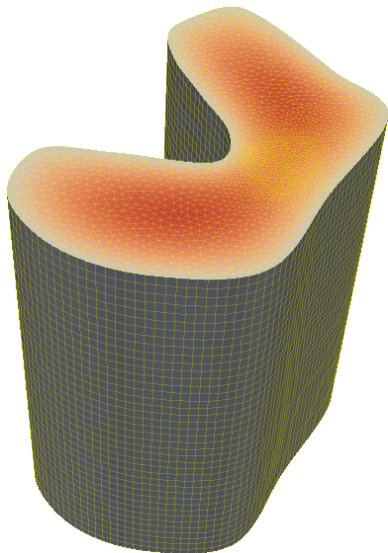


(b)

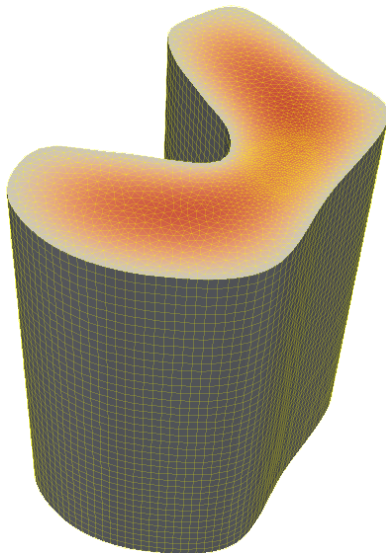
Mesh number	0	1	2
Number of elements	5 730	44 900	196 040
Number of nodes	3 432	24 633	103 566

Caractéristiques des maillages éléments finis espace-temps associée au domaine $\Omega \times (0, T)$.

Exemple 2D- Observation sur le sous-domaine q_T



(a)



(b)

y and y_h in Q_T



Au quotidien d'un controleur

- 1 Tache 1: **Modélisation** mathématique des phénomènes physiques;
- 2 Tache 2: Analyse mathématique du **problème direct** (existence de solution, unicité, comportement qualitatif);
- 3 Tache 3: **Analyse** de la **contrôlabilité** du système (exactement contrôlable, approximativement contrôlable, stabilisation associée);
 - Choix d'un critère de minimisation;
 - Optimisation de forme et de position sur le support du contrôle;
 - Réduction du nombre de contrôles par rapport au nombre d'états à contrôler (pour les systèmes couplés);
 - Notion de contrôles hierarchiques (stratégie de type Stackelberg-Nash);
 - Notion de contrôle robuste ;
- 4 Tache 4: **Méthode d'approximation** d'un contrôle (réalisant un critère donnée);
- 5 Tache 5: **Analyse numérique** du problème de contrôlabilité et de la méthode d'approximation;
- 6 Tache 6: Mise en œuvre **informatique**.

Partie II - Application au maintien hors gel des chaussées - Collaboration avec Frederic Bernardin du CEREMA ¹-Clermont.

Projet : Chaussées chauffantes et récupératrices d'énergie par circulation d'un fluide caloporteur au sein d'une couche poreuse de la chaussée

¹Centre d'études et d'expertises sur les risques, l'environnement, la mobilité et l'aménagement

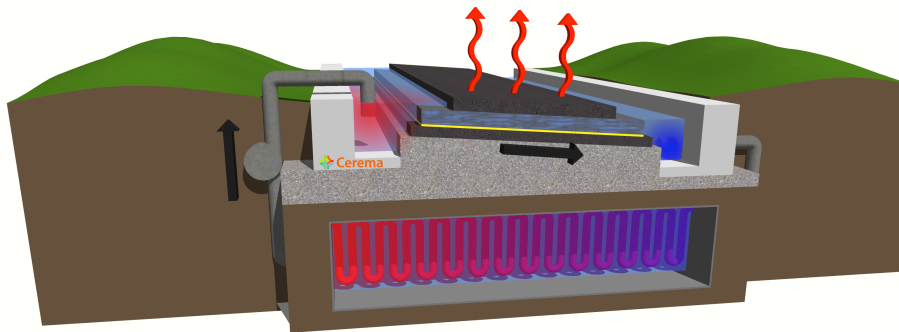
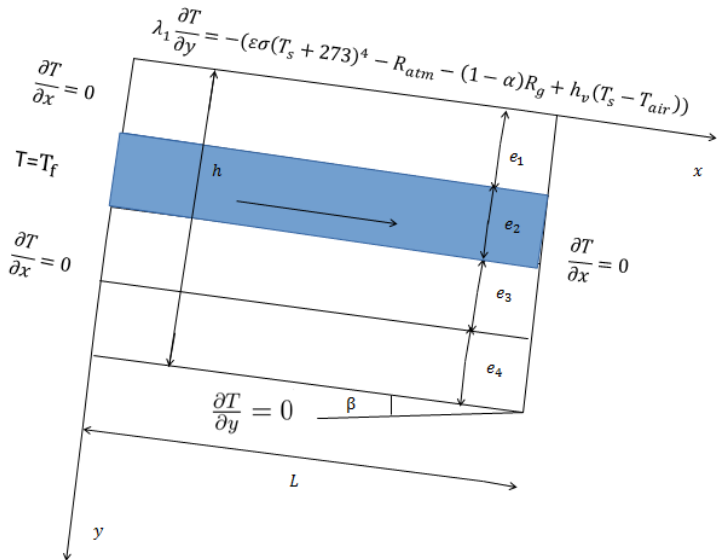


Figure: Schema of the demonstrator (case of heating)

COUPE 2D TRANSVERSALE



MODÉLISATION DU SOUS-SOL

The road is assumed to have no longitudinal slant and to be infinite in its third dimension. h and L denote the height of the road structure and its length, respectively. The hydraulic regime is assumed stationary with hydraulic parameters independent of temperature T . Denoting by $1 \leq i \leq 4$ the indices of the road layers, the thermo-hydraulic model is as follows. For $0 \leq x \leq L$ and $0 \leq y \leq h$:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\rho C)_i \frac{\partial T}{\partial t}(t, x, y) = \lambda_i \Delta T(t, x, y), \quad i = 1, 3 \text{ or } i = 4 \\ (\rho C)_2 \frac{\partial T}{\partial t}(t, x, y) + (\rho C)_f v \frac{\partial T}{\partial x}(t, x, y) = (\lambda_2 + \phi_2 \lambda_f) \Delta T(t, x, y) \\ v = -K \frac{H_2 - H_1}{L} \end{array} \right. \quad (1)$$

where

$(\rho C)_i, \lambda_i, \phi_i$	specific heat, thermal conductivity and porosity of layer i
$(\rho C)_f, \lambda_f$	specific heat, thermal conductivity of the fluid
v	Darcy fluid velocity along x
K	hydraulic conductivity of the porous asphalt
H_1, H_2	hydraulic heads imposed upstream and downstream of fluid circulating in porous draining asphalt layer

MODÉLISATION À LA SURFACE :

Road surface boundary condition expresses the energy budget between road and atmosphere ²:

$$\lambda_1 \frac{\partial T}{\partial y}(t, x, 0) = \varepsilon(t)\sigma \left(T(t, x, 0) + 273.15 \right)^4 - R_{atm}(t) - (1 - A(t))R_g(t) + H_v(t)(T(t, x, 0) - T_a(t)) + \frac{L_f}{3600} I(t), \quad (2)$$

ε, A	emissivity, albedo of the road surface
σ	Stefan-Boltzmann constant ($5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$)
R_{atm}	atmospheric radiation (W/m^2),
R_g	global radiation (W/m^2)
T_a	air temperature ($^{\circ}\text{C}$),
I	snowrate (mm.h^{-1})
L_f	latent heat of fusion of the ice per kg (J.kg^{-1})
$H_v = C\rho_a \times \rho_a(V_{wind}C_d + C_{d1})$	convection heat transfer coefficient ($\text{W/m}^2\text{K}$)
$C\rho_a$	thermal capacity (J/kg.K) of the air
ρ_a	density of the air (kg/m^3)
V_{wind}	wind velocity (m/s)

²Asfour, Bernardin, 2015 : Experimental validation of 2d hydrothermal modelling of porous pavement



Figure: The Egletons demonstrator

The injection temperature of the fluid is imposed :

$$\forall e_1 \leq y \leq e_1 + e_2, \forall t \geq 0, T(t, 0, y) = T_{inj}(y, t). \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \inf_{T_{inj} \in L^1(0, T, [e_1, e_1 + e_2])} J(T_{inj}) := \int_0^T \int_{e_1}^{e_1 + e_2} T_{inj}(y, t) dy dt, \\ \text{subject to } T_{inj}(y, t) \geq 0, \quad T(x, 0, t) \geq \underline{T}, \quad \forall t \in (0, T), x \in (0, L), \quad T = T(T_{inj}) \text{ solves (5)} \end{array} \right. \quad (4)$$

SIMPLIFICATION DU PROBLÈME - LE CAS 1D

1D - model: $\theta = \theta(y, t)$ denotes the temperature in Kelvin at the point y and at time t solves

$$\left\{ \begin{array}{l} c(y) \frac{\partial \theta}{\partial t}(y, t) - \frac{\partial}{\partial y} \left(k(y) \frac{\partial \theta}{\partial y}(y, t) \right) = q_s(t) \delta(y^0), \quad (y, t) \in Q_T = (0, L) \times (0, T), \\ -k(0) \frac{\partial \theta}{\partial y}(0, t) = f_1(t) - f_2(t) \theta(0, t) - \sigma \varepsilon(t) \theta^4(0, t), \quad t \in (0, T), \\ \theta(y, 0) = \theta_0(y), \quad y \in (0, L), \quad \frac{\partial \theta}{\partial y}(L, t) = 0, \quad t \in (0, T), \\ f_1(t) = (1 - A(t)) R_g(t) + R_{atm}(t) + H_v(t) \theta_a(t) - \frac{L_f}{3600} I(t), \quad f_2(t) = H_v(t). \end{array} \right. \quad (5)$$

Optimal control problem:

$$\left\{ \begin{array}{l} \inf_{q_s \in K} J(q_s) := \int_0^T q_s(t) dt, \\ \text{subject to } q_s \in K = \left\{ q_s \in L^1(0, T), q_s(t) \geq 0, \theta(0, t) \geq \underline{\theta}, \forall t \in (0, T), \theta = \theta(q_s) \text{ solves (5)} \right\} \end{array} \right.$$

q_s m^2 (W/m^2)
 J (Wh ou J)

$$-k(0) \frac{\partial \theta}{\partial y}(0, t) = f_1(t) - f_2(t)\theta(0, t) - \sigma \varepsilon(t)\theta^4(0, t), \quad t \in (0, T),$$

$$f_1(t) = (1 - A(t))R_g(t) + R_{atm}(t) + H_v(t)\theta_a(t) - \frac{L_f}{3600}I(t),$$
(6)

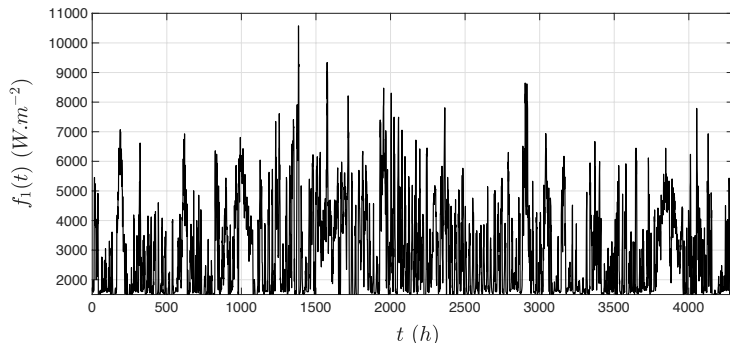


Figure: The function f_1 from data of the french highway A75 in Cantal (1100 m altitude) - October 2009- March 2010

LE CONTRÔLE OPTIMAL EN NORME L^1

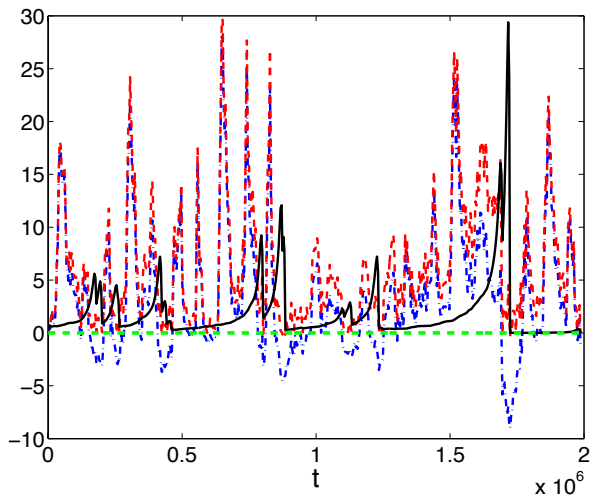


Figure: Control of minimal L^1 norm

LE CONTRÔLE OPTIMAL EN NORME L^∞ - CONTRÔLE BANG-BANG

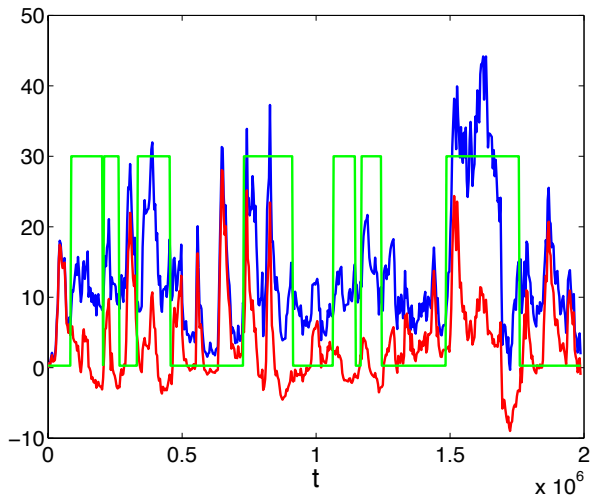


Figure: The bang-bang control. $\lambda = 382.2 - L = 0.5$



Figure: The Egletons demonstrator

- Lien vers l'équipe Equations aux dérivées partielles et Analyse numérique :

<http://recherche.math.univ-bpclermont.fr/equipes/edp.php>

- Lien sur arte.tv (émission du 2 avril 2016):

<https://sites.arte.tv/futuremag/fr/les-routes-de-demain-futuremag>

- Lien vers l'équipe Equations aux dérivées partielles et Analyse numérique :

<http://recherche.math.univ-bpclermont.fr/equipes/edp.php>

- Lien sur arte.tv (émission du 2 avril 2016):

<https://sites.arte.tv/futuremag/fr/les-routes-de-demain-futuremag>

MERCI DE VOTRE ATTENTION