

C. R. Acad. Sci. Paris, t. 329, Série II b, p. 1–6, 2001

Analyse asymptotique d'un assemblage collé en élasticité non linéaire

Françoise KRASUCKI^a, Arnaud MÜNCH^b, Yves OUSSET^c

^a LMGC, CNRS, université Montpellier II, case 048, place Eugène Bataillon, 34695 Montpellier cedex 5, France

^b LMM université Paris VI, CNRS, ONERA 29, av de la div. Leclerc, BP 72, 92322, Chatillon, France

^c ONERA, 29, av de la div. Leclerc, BP 72, 92322, Chatillon, France

Courriel : krasucki@imgc.univ-montp2.fr; munch@onera.fr; yo@onera.fr

(Reçu le 28 février 2001, accepté après révision le 9 avril 2001)

Résumé.

Dans le cadre de l'élasticité non linéaire, on étudie le comportement d'un joint de colle d'épaisseur d'ordre ε reliant deux solides. Lorsque les rigidités de la colle et des solides sont dans un rapport ε , l'analyse fournit un modèle limite où la colle est remplacée par une interface élastique non linéaire tandis que le comportement des adhérents est linéaire. Nous montrons l'existence de solutions de ce modèle et la non unicité sur un exemple unidimensionnel. © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

solids and structures / collage / analyse asymptotique / élasticité non linéaire

Asymptotic analysis of a bonded joint in nonlinear elasticity

Abstract.

Within the framework of nonlinear elasticity, we study the behaviour of a bonded joint formed by two adherents and a joint of thickness εh . When the stiffness of the adhesive is of order ε with respect to the adherends, the analysis gives us a limit model where the constitutive equations of the adherend are only linear. We show existence of solutions of the model and discuss the unicity. © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

solides et structures / bonding / asymptotic analysis / nonlinear elasticity

Abridged English version

Within the framework of nonlinear elasticity, we consider, in the Euclidean space E^3 referred to the orthonormal frame $(O; e_1, e_2, e_3)$ a bonded assembly Ω_ε formed by two adherends Ω^\pm connected by the adhesive $\Omega_\varepsilon^m = S \times]-h\varepsilon/2, h\varepsilon/2[$ of thickness εh ; h is a global characteristic length of Ω_ε and ε is a small dimensionless parameter. The assembly is fixed on the part $\Gamma_u^\pm \subset \partial\Omega^\pm$ and is submitted to surface loads $f_\varepsilon^d \in (L^2(\Gamma_f^\pm))^3$ on $\Gamma_f^\pm \subset \partial\Omega^\pm$ such that $\Gamma_u^\pm \cap \Gamma_f^\pm = \emptyset$ (see figure 1), the external boundary of the adhesive being traction free. Finally, it is assumed that the elastic materials are of the St Venant–Kirchhoff type, i.e. that the constitutive equations are linear relations between the Green–St Venant strain tensor $\gamma(u^\varepsilon)$ and the second Piola–Kirchhoff stress tensor σ^ε ; $\sigma^\varepsilon = R^\varepsilon : \gamma(u^\varepsilon)$ where $\gamma(u) = \frac{1}{2}(F^t F - I_3)$, $F = I_3 + \nabla u$. R^ε is the material stiffness tensor and let S^ε be its inverse. As usual in the literature [4–6], the stiffness tensor of the adhesive is assumed to be of order ε compared to the adherent's ones. As a consequence, three tensors of the same order R^\pm , R^m , independent of ε are introduced; they are such that $R^\varepsilon = R^\pm$ in Ω^\pm and $R^\varepsilon = \varepsilon R^m$ in Ω_ε^m .

Note présentée par Jean-Baptiste LEBLOND.

S1620-7742(01)01345-9/FLA

© 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés

F. Krasucki et al.

The variational formulation of the problem to be solved is given by the equations (1)–(2) where the unknown \mathbf{u}^ε and $\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon$ are respectively in the spaces $\mathbf{V}^\varepsilon = \{\mathbf{v} \in (W^{1,4}(\Omega_\varepsilon))^3, \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_u^\pm\}$ and $\boldsymbol{\Sigma}^\varepsilon = L_s^2(\Omega_\varepsilon)$. The purpose is to derive a limit model as ε tends to zero, taking into account the previous assumptions. Scaling the variable $x_3^\varepsilon = \varepsilon x_3$ in order to have domains Ω^\pm and Ω^m independent of ε and the applied loads $\mathbf{f}_\varepsilon^d(x^\varepsilon) = \varepsilon \mathbf{f}^d(x)$, the unknowns $\mathbf{u}^\varepsilon(x^\varepsilon) = \mathbf{u}(\varepsilon, x)$ and $\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon(x^\varepsilon) = \boldsymbol{\sigma}(\varepsilon, x)$ remaining unchanged, problem (1)–(2) is transformed to problem (3)–(4). Now, the solution is written as a formal asymptotic expansion series in terms of ε : $(\mathbf{u}(\varepsilon, x), \boldsymbol{\sigma}(\varepsilon, x)) = \varepsilon(\mathbf{u}^1, \boldsymbol{\sigma}^1) + \varepsilon^2(\mathbf{u}^2, \boldsymbol{\sigma}^2) + \dots$ and the terms of the same order in ε are identified [1,2]. The leading terms $(\mathbf{u}^1, \boldsymbol{\sigma}^1)$ are solutions of the problem (5)–(6) in which the behaviour of the adherends is linear whereas only the terms containing the derivatives with respect to x_3 are retained in Ω^m (7₃)–(7₄). The transmission equations on S^\pm are nonlinear (7₅)–(7₆) whereas the boundary conditions on Γ_u^\pm and Γ_f^\pm remains unchanged (7₇)–(7₈).

As in the linear case [5,6], we see that a linear solution with respect to x_3 , satisfies the equations (7₃)–(7₆). Then it is found that the solution has to minimize the functional I given by (9) in which the adhesive domain is reduced to its mid-surface S , the energy of adhesion taking the following expression:

$$I^m(\mathbf{v}) = \frac{1}{2h} \int_S \left[R_{\alpha 3 \beta 3}^m [v_\alpha][v_\beta] + \frac{R_{3333}^m}{4h^2} \left([v_\alpha]^2 + ([v_3] + h)^2 - h^2 \right)^2 \right] dS, \quad \alpha, \beta \in \{1, 2\}$$

The fonctionnal I defined in the space $\tilde{\mathbf{V}} = \{\mathbf{v}^+ \in (H^1(\Omega^+))^3, \mathbf{v}^- \in (H^1(\Omega^-))^3, \mathbf{v}^\pm = 0 \text{ sur } \Gamma_u^\pm\}$ is coercive and lower semicontinuous due to the compact injection $(H^{1/2}(S))^3 \hookrightarrow (L^3(S))^3$ [3], and so it has at least a minimum. As a consequence, the problem (5), (6) has at least one solution \mathbf{u}^1 linear with respect to x_3 in Ω^m (Theorem 1). On the other hand, it can be seen on a one dimensional example that the uniqueness is not insured.

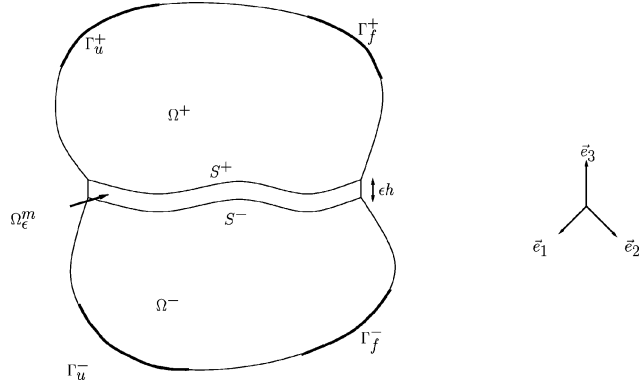
1. Position du problème

On considère dans l'espace euclidien \mathbf{E}^3 muni du repère orthonormé $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ un multimatériau Ω_ε constitué de trois corps occupant dans la configuration de référence les domaines Ω^+, Ω^- et Ω_ε^m , suffisamment réguliers. Ω_ε^m est défini par $\Omega_\varepsilon^m = S \times]-h\varepsilon/2, h\varepsilon/2[$ avec S contenu dans le plan $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. On note S^+ (resp. S^-) la surface définie par $S \times \{h\varepsilon/2\} \subset \partial\Omega^+$ (resp. $S \times \{-h\varepsilon/2\} \subset \partial\Omega^-$) où $\partial\Omega^\pm$ désigne le bord de Ω^\pm . Le paramètre adimensionnel ε est destiné à tendre vers zéro, h est une dimension caractéristique de Ω^\pm . Les bords $\partial\Omega^\pm$ sont décomposés de la façon suivante : $\partial\Omega^\pm = \bar{S}^\pm \cup \bar{\Gamma}_u^\pm \cup \bar{\Gamma}_f^\pm$, les trois ensembles étant disjoints et suffisamment réguliers (voir figure 1). Par simplicité, on nomme Ω^\pm les adhérents et Ω_ε^m l'adhésif. La structure est soumise à une distribution surfacique de force $\mathbf{f}_\varepsilon^d \in (L^2(\Gamma_f^\pm))^3$ sur Γ_f^\pm et est fixée sur Γ_u^\pm . Le bord $\partial S \times]-h\varepsilon/2, h\varepsilon/2[$, correspondant aux faces externes de l'adhésif est supposé libre de contraintes. On suppose que les matériaux sont élastiques non linéaires. Plus précisément, on se place dans le cadre des grands déplacements et on prend une loi de type St Venant–Kirchhoff. Pour décrire l'état déformé, on utilise une représentation lagrangienne. On note $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u})$ le tenseur de Green–Lagrange défini par $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^t \mathbf{F} - \mathbf{I}_3)$, où $\mathbf{u}(x^\varepsilon)$ désigne le champs des déplacements, $\mathbf{F} = \mathbf{I}_3 + \nabla \mathbf{u}$ le gradient de la déformation et $(\nabla \mathbf{u})_{ij} = u_{i,j}$. On note également $\boldsymbol{\sigma}(x^\varepsilon)$ le second tenseur de Piola–Kirchhoff et on a la loi de comportement $\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon = \mathbf{R}^\varepsilon : \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}^\varepsilon)$, où \mathbf{R}^ε désigne le tenseur d'ordre 4 de rigidité du matériau. Son inverse, le tenseur de souplesse, est noté \mathbf{S}^ε . Pour simplifier, on se limite à des matériaux monocliniques d'axes \mathbf{e}_3 . On suppose que l'adhésif a une rigidité faible devant celle des adhérents, ce que l'on traduit par $\mathbf{R}^\varepsilon = \mathbf{R}^\pm$ dans Ω^\pm et $\mathbf{R}^\varepsilon = \varepsilon \mathbf{R}^m$ dans Ω_ε^m , $\mathbf{R}^+, \mathbf{R}^-$ et \mathbf{R}^m étant du même ordre de grandeur et indépendants de ε . On adopte la convention de l'indice répété. Les indices latins varient entre 1 et 3 et les indices grecs varient entre 1 et 2.

La formulation mixte d'Hellinger–Reissner du problème variationnel correspondant (à $\varepsilon > 0$ fixé) s'écrit alors :

Analyse asymptotique d'un assemblage collé en élasticité non linéaire

Figure 1. Assemblage collé.



$$\begin{cases}
 (\mathbf{u}^\varepsilon, \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon) \in \mathbf{V}^\varepsilon \times \boldsymbol{\Sigma}^\varepsilon \\
 \int_{\Omega_\varepsilon} S_{ijkl}^\varepsilon \sigma_{kl}^\varepsilon \tau_{ij} \, d\Omega_\varepsilon = \int_{\Omega_\varepsilon} \tau_{ij} \gamma_{ij}(u^\varepsilon) \, d\Omega_\varepsilon \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Sigma}^\varepsilon \\
 \int_{\Omega_\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon (\delta_{jk} + u_{k,j}^\varepsilon) v_{k,i} \, d\Omega_\varepsilon = \int_{\Gamma_f^\pm} \mathbf{f}_\varepsilon^d \cdot \mathbf{v} \, dS \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}^\varepsilon
 \end{cases}
 \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

où les espaces \mathbf{V}^ε et $\boldsymbol{\Sigma}^\varepsilon$ sont définis par :

$$\begin{cases}
 \mathbf{V}^\varepsilon = \{ \mathbf{v} \in (W^{1,4}(\Omega_\varepsilon))^3, \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_u^\pm \} \\
 \boldsymbol{\Sigma}^\varepsilon = L_s^2(\Omega_\varepsilon) = \{ \boldsymbol{\tau} = (\tau_{ij}); \tau_{ij} \in L^2(\Omega_\varepsilon); \tau_{ij} = \tau_{ji} \}
 \end{cases}$$

Afin de poser le problème sur un ouvert fixe, on utilise les techniques développées par Ciarlet–Destuynder [1] et on effectue une dilatation de rapport ε^{-1} dans la direction \mathbf{e}_3 dans l'adhésif Ω_ε^m . Les ouverts Ω_ε^\pm sont translatés de $\pm \frac{h}{2}(1 - \varepsilon)$ dans la même direction. On note $x = (x_1, x_2, x_3)$ les variables définies par ces transformations. Le champ $\mathbf{u}(\varepsilon; x)$ est défini sans changement d'échelle par $\mathbf{u}(\varepsilon; x) = \mathbf{u}^\varepsilon(x^\varepsilon)$. La même correspondance, sans changement d'échelle est adoptée pour le tenseur des contraintes ainsi que pour les modules de rigidité. Enfin, on effectue un «rescaling» des forces de bord défini par $\mathbf{f}_\varepsilon^d(x^\varepsilon) = \varepsilon \mathbf{f}^d(x)$. Le problème (P^ε) se transforme en un problème $(P(\varepsilon))$ posé sur Ω et défini par :

$$\begin{cases}
 (\mathbf{u}(\varepsilon; x), \boldsymbol{\sigma}(\varepsilon; x)) \in \mathbf{V} \times \boldsymbol{\Sigma} \\
 \int_{\Omega^\pm} S_{ijkl}^\pm \sigma_{kl} \tau_{ij} \, d\Omega + \int_{\Omega^m} S_{ijkl}^m \sigma_{kl} \tau_{ij} \, d\Omega = \varepsilon^{-1} \int_{\Omega^m} \frac{\tau_{33}}{2} u_{i,3} u_{i,3} \, d\Omega + \int_{\Omega^\pm} \tau_{ij} \gamma_{ij}(u) \, d\Omega \\
 \quad + \int_{\Omega^m} (\tau_{i3} u_{i,3} + \tau_{\alpha 3} u_{i,3} u_{i,\alpha}) \, d\Omega \\
 \quad + \varepsilon \int_{\Omega^m} \left(\tau_{\alpha\beta} (\gamma_{\alpha\beta}(u) + \frac{1}{2} u_{3,\beta} u_{3,\beta}) + \tau_{\alpha 3} u_{3,\alpha} \right) \, d\Omega \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Sigma} \\
 \int_{\Omega^\pm} \sigma_{ik} (\delta_{jk} + u_{j,k}) v_{j,i} \, d\Omega + \varepsilon^{-1} \int_{\Omega^m} \sigma_{33} u_{j,3} v_{j,3} \, d\Omega \\
 \quad + \int_{\Omega^m} (\sigma_{\alpha 3} (u_{j,3} v_{j,\alpha} + u_{j,\alpha} v_{j,3}) + \sigma_{i3} v_{i,3}) \, d\Omega \\
 \quad + \varepsilon \int_{\Omega^m} (\sigma_{\alpha\beta} u_{j,\alpha} v_{j,\beta} + \sigma_{\alpha j} v_{j,\alpha}) \, d\Omega = \varepsilon \int_{\Gamma_f^\pm} \mathbf{f}^d \cdot \mathbf{v} \, dS \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}
 \end{cases}
 \quad \begin{matrix} (3) \\ (4) \end{matrix}$$

F. Krasucki et al.

avec :

$$\mathbf{V} = \{ \mathbf{v} \in (W^{1,4}(\Omega))^3, \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_u^\pm \} \quad \text{et} \quad \Sigma = L_s^2(\Omega)$$

2. Développement asymptotique formel

On recherche la solution sous forme d'un développement asymptotique formel. De façon analogue au cas des plaques non linéaires [1] et des poutres non linéaires [2], on choisit a priori un type de développement asymptotique. Ici, on prend :

$$(\mathbf{u}(\varepsilon, x), \boldsymbol{\sigma}(\varepsilon, x)) = \varepsilon(\mathbf{u}^1, \boldsymbol{\sigma}^1) + \varepsilon^2(\mathbf{u}^2, \boldsymbol{\sigma}^2) + \dots$$

Le premier terme du développement $(\mathbf{u}^1, \boldsymbol{\sigma}^1)$ vérifie alors le problème (P¹) suivant :

$$(P^1) \left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{u}^1, \boldsymbol{\sigma}^1) \in \mathbf{V}^1 \times \Sigma^1 \\ \int_{\Omega^\pm} S_{ijkl}^\pm \sigma_{kl}^1 \tau_{ij} \, d\Omega + \int_{\Omega^m} S_{ijkl}^m \sigma_{kl}^1 \tau_{ij} \, d\Omega \\ = \int_{\Omega^m} \left(\frac{\tau_{33}}{2} u_{i,3}^1 u_{i,3}^1 + \tau_{i3} u_{i,3}^1 \right) d\Omega + \int_{\Omega^\pm} \tau_{ij} u_{j,i}^1 \, d\Omega \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \Sigma^1 \\ \int_{\Omega^\pm} \sigma_{ij}^1 v_{j,i}^\pm \, d\Omega + \int_{\Omega^m} (\sigma_{33}^1 u_{j,3}^1 v_{j,3}^m + \sigma_{i3}^1 v_{i,3}^m) \, d\Omega \\ = \int_{\Gamma_f^\pm} \mathbf{f}^d \cdot \mathbf{v}^\pm \, dS \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}^1 \end{array} \right. \quad (5)$$

avec

$$\mathbf{V}^1 = \{ \mathbf{v} = (\mathbf{v}^\pm, \mathbf{v}^m) \in (L^4(\Omega))^3; \mathbf{v}^\pm \in (H^1(\Omega^\pm))^3, v_{i,3}^m \in L^4(\Omega^m), \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_u^\pm \}$$

et $\Sigma^1 = L_s^2(\Omega)$

Remarquons, en suivant la démarche de Ciarlet–Rabier [3], que les solutions du problème (P¹) sont les points critiques de la fonctionnelle coercive J définie sur \mathbf{V}^1 par :

$$J(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega^\pm} R_{ijkl}^\pm v_{k,l}^\pm v_{i,j}^\pm \, d\Omega \\ + \frac{1}{2} \int_{\Omega^m} \left[R_{\alpha 3 \beta 3}^m v_{\alpha,3}^m v_{\beta,3}^m + \frac{R_{3333}^m}{4} (v_{\alpha,3}^m v_{\alpha,3}^m + (v_{3,3}^m + 1)^2 - 1) \right] d\Omega - \int_{\Gamma_f^\pm} \mathbf{f}^d \cdot \mathbf{v}^\pm \, dS$$

Les équations locales correspondante au problème (P¹) sont alors (en éliminant pour simplifier l'exposant 1) :

Analyse asymptotique d'un assemblage collé en élasticité non linéaire

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sigma_{ij}^{\pm} = R_{ijkl}^{\pm} \frac{u_{k,l}^{\pm} + u_{l,k}^{\pm}}{2} & \text{dans } \Omega^{\pm} \\ \sigma_{ij,j}^{\pm} = 0 & \text{dans } \Omega^{\pm} \\ \sigma_{ij}^m = R_{ij\alpha 3}^m u_{\alpha,3}^m + \frac{1}{2} R_{ij33}^m (u_{\alpha,3}^m u_{\alpha,3}^m + (u_{3,3}^m + 1)^2 - 1) & \text{dans } \Omega^m \\ (\sigma_{i3}^m + \sigma_{33}^m u_{i,3}^m)_{,3} = 0 & \text{dans } \Omega^m \\ \mathbf{u}^{\pm} = \mathbf{u}^m & \text{en } x_3 = \pm \frac{h}{2} \\ \sigma_{i3}^{\pm} = \sigma_{i3}^m + \sigma_{33}^m u_{i,3}^m & \text{en } x_3 = \pm \frac{h}{2} \\ \mathbf{u}^{\pm} = 0 & \text{sur } \Gamma_u^{\pm} \\ (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})^{\pm} = \mathbf{f}^d & \text{sur } \Gamma_f^{\pm} \end{array} \right. \quad (7)$$

Il apparait ainsi que les adhérents, au premier ordre, ont un comportement linéaire géométrique tandis que celui de l'adhésif reste non linéaire.

Remarque 1. – Pour être physiquement acceptable, les solutions $(\mathbf{u}^{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}^{\varepsilon})$ doivent satisfaire la condition de préservation de l'orientation $\det(\mathbf{F}^{\varepsilon}) > 0$. Cette condition est, au premier ordre, automatiquement vérifiée dans Ω^{\pm} , tandis qu'elle impose dans Ω^m la condition :

$$u_{3,3}^m + 1 > 0 \quad (8)$$

Il faut donc satisfaire cette relation pour des chargements conduisant à l'écrasement du joint.

3. Existence de la solution du problème limite (P¹)

THÉORÈME 1. – *Le problème (P¹) admet au moins une solution u dont la restriction à Ω^m est linéaire par rapport à x_3 .*

Démonstration. – En effet, ce type de solution satisfait les équations (7₃) et (7₄) dans Ω^m . Dans ce cas, la fonctionnelle J est transformée en :

$$I(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega^{\pm}} R_{ijkl}^{\pm} v_{k,l}^{\pm} v_{i,j}^{\pm} d\Omega + \frac{1}{2h} \int_S \left[R_{\alpha 3 \beta 3}^m [v_{\alpha}] [v_{\beta}] + \frac{R_{3333}^m}{4h^2} ([v_{\alpha}] [v_{\alpha}] + ([v_3] + h)^2 - h^2)^2 \right] dS - \int_{\Gamma_f^{\pm}} \mathbf{f}^d \cdot \mathbf{v}^{\pm} dS \quad (9)$$

où $[v] = v|_{S^+} - v|_{S^-}$. La fonctionnelle I est définie sur l'espace $\tilde{\mathbf{V}} = \{\mathbf{v}^{\pm} \in (H^1(\Omega^{\pm}))^3, \mathbf{v}^{\pm} = 0 \text{ sur } \Gamma_u^{\pm}\}$. I est coercive. On montre qu'elle est faiblement séquentiellement continue inférieurement en utilisant la propriété d'injection compacte de $(H^{1/2}(S))^3$ dans $(L^3(S))^3$. \square

Remarque 2. – Dans [4], les auteurs adoptent une autre démarche. Ils considèrent le cas où le comportement est du type Saint Venant–Kirchhoff dans toute la structure. Sans analyse asymptotique et à l'aide d'hypothèses a priori, ils choisissent une solution linéaire en x_3 dans l'adhésif; ils en déduisent une expression différente des déformations $\gamma_{\alpha 3}$ faisant intervenir les déformations de la surface moyenne du joint.

Remarque 3. – A l'image du cas linéaire [5,6], le joint disparaît d'un point de vue géométrique et est représenté par une énergie d'adhésion définie sur la surface moyenne S .

F. Krasucki et al.

4. Unicité de la solution

Les équations (7₄) impliquent que le vecteur $\sigma_{i3}^m + \sigma_{33}^m u_{i,3}^m$ est constant (par rapport à x_3) dans Ω^m . Les équations (7₆) entraînent alors $\sigma_{i3}^m + \sigma_{33}^m u_{i,3}^m = \sigma_{i3}^+$ ($= \sigma_{i3}^-$). En utilisant (7₆), on vérifie que le vecteur $u_{i,3}$ doit alors satisfaire le système de trois équations polynomiales de degré 3 :

$$R_{i3\alpha 3}^m u_{\alpha,3}^m + \frac{1}{2} R_{i333}^m (u_{\alpha,3}^m u_{\alpha,3}^m + (u_{3,3}^m + 1)^2 - 1) + \frac{1}{2} R_{3333}^m (u_{\alpha,3}^m u_{\alpha,3}^m + (u_{3,3}^m + 1)^2 - 1) u_{i,3}^m = \sigma_{i3}^+ (= \sigma_{i3}^-)$$

Si ce système a, pour un second membre σ_{i3}^\pm donné, une solution $(u_{i,3}^m)$ unique, alors u_i^m est linéaire en x_3 dans Ω^m . Dans le cas unidimensionnel, l'égalité précédente devient :

$$\frac{1}{2} R_{3333}^m [(u_{3,3}^m + 1)^2 - 1] [u_{3,3}^m + 1] = \sigma_{33}^+ \quad (10)$$

et trois cas sont à considérer :

- (i) $\sigma_{33}^+ / R_{3333}^m < -1 / (3\sqrt{3})$. L'unique solution de (10) ne vérifie pas la condition (8) de sorte que le problème n'admet pas de solution physiquement admissible.
- (ii) $-1 / (3\sqrt{3}) \leq \sigma_{33}^+ / (R_{3333}^m) < 0$. L'équation (10) admet trois solutions (éventuellement de multiplicité 2) telles que :

$$-1 - \frac{2}{\sqrt{3}} \leq z_1 \leq z_2 \leq z_3 \leq -1 + \frac{2}{\sqrt{3}}$$

dont deux seulement sont admissibles vérifiant :

$$-1 < z_2 \leq z_3 < 0$$

On peut donc prendre u_3^m continue et linéaire par morceaux dans Ω^m avec $u_{3,3}^m \in \{z_2, z_3\}$ presque partout. Cependant, il est aisé de vérifier que le minimum de l'énergie J est obtenu avec la solution linéaire $u_{3,3}^m(x_3) = z_3$ dans Ω^m .

- (iii) $\sigma_{33}^+ / R_{3333}^m \geq 0$. Il n'y a qu'une solution de (10) vérifiant la condition (8) : $u_{3,3}^m(x_3) = z_3$, $z_3 \geq 0$.

5. Conclusion

Sous l'hypothèse que les petits paramètres géométrique et matériau sont du même ordre, un modèle limite d'assemblage collé a été obtenu à l'aide de la technique des développements asymptotiques. Ce modèle montre que le comportement des adhérents est linéaire, tandis que celui de la colle est non linéaire. Enfin, il inclut le modèle linéaire étudié en [5,6]. Dans [7] une autre variété de comportement non linéaire a été étudié.

Références bibliographiques

- [1] Ciarlet P., Destuynder P., A justification of a nonlinear model in plate theory, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* (1979) 227–258.
- [2] Cimetiere A., Geymonat G., Le Dret H., Raoult A., Tutek Z., Asymptotic theory and analysis for displacements and stress distribution in nonlinear elastic straight slender rods, *J. Elasticity* 19 (1988) 111–161.
- [3] Ciarlet P., Rabier P., Les équations de Von Karman, *Lecture Notes in Math.*, Vol. 826, Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- [4] Edlund U., Klarbring A., A geometrically nonlinear model of the adhesive joint problem and its numerical treatment, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* (1992) 327–350.
- [5] Destuynder P., Michavila F., Santos A., Ousset Y., Some theoretical aspects in computational analysis of adhesive lap joints, *Internat. J. Numer. Methods Engrg.* (1992) 1237–1262.
- [6] Geymonat G., Krasucki F., Lenci S., Mathematical analysis of a bonded joint with a soft thin adhesive, *Math. Mech. Solids* 4 (1999) 201–255.
- [7] Licht C., Michaille G., Une modélisation du comportement d'un joint collé élastique, *C. R. Acad. Sci. Paris, Serie I* 322 (1996) 295–300.