C. R. Acad. Sci. Paris, t. 328, Série II *b*, p. 471–476, 2000
Endommagement, fatigue, rupture/*Damage, fatigue, rupture*

Taux de restitution de l'énergie pour une poutre courbe mince

Arnaud MÜNCH, Yves OUSSET

Office national d'études et de recherches aérospatiales, 29, av. de la division Leclerc, BP 72, 92322, Chatillon cedex, France
Courriel : Arnaud.Munch@onera.fr ; Yves.Ousset@onera.fr

(Reçu le 5 avril 2000, accepté le 13 avril 2000)

Résumé. Soit un domaine bidimensionnel élancé en état de déformations planes, occupé par deux matériaux séparés par une interface curviligne régulière. On suppose qu'une fissure se propage le long de cette interface. L'expression du taux de restitution de l'énergie est dérivée à l'aide de la θ-méthode, dans le repère local lié à l'interface. Il apparait des termes complémentaires issues de la dérivation de la métrique locale. © 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

mécanique de la rupture / délaminage / analyse numérique

Energy release rate for a thin curvilinear beam

Abstract. *Let a thin two-dimensional domain be in a plane strains state. It is made of two materials separated by a regular curvilinear interface along of which a crack is assumed to propagate. The expression of the energy release rate is derived in local coordinates using the so-called θ-method. It is shown that there are complementary terms related to the derivation of the local metric. © 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS*

fracture mechanics / delamination / numerical analysis

Abridged English version

Within the linear elasticity framework, we consider the plane problem set in a thin two-dimensional domain ω^ϵ of thickness 2ϵ made of two subdomains consisting of two different materials separated by a curvilinear interface γ. The domain ω^ϵ is fixed on the side γ_0 and submitted to a normal load on the opposite side. A crack is assumed to exist on the part γ_f of γ. Our purpose is to compute the energy release rate associated to the evolution of the crack front F along γ (*see figure 1* for notation).

To derive the mechanical energy in respect to the evolution of the crack front, we first express the formulation in a local reference frame associated to the interface γ. Let γ be described by the regular map ϕ:

$$\phi :]\zeta_1^G, \zeta_1^D[\to \gamma, \quad x = \phi(\zeta_1)$$

which permits us to define a local basis (e_1, e_2) along γ and his associated cobasis (e^1, e^2) (1) [1]. The domain ω^ϵ is then transformed into the domain $\widehat{\omega}^\epsilon$ using *relation* (2) and we note (u_1, u_2) the covariant

Note présentée par Jean-Baptiste LEBLOND.

S1620-7742(00)00037-4/FLA

components of the displacement u seen as a covector:

$$u = u_1 e^1 + u_2 \tilde{\nu}$$

As ϵ is small, the cracked domain $\widehat{\omega}^\epsilon$ is approximated by an assembly of three beams $\hat{\gamma}_i$ connected at the crack tip $\widehat{F}$ [2]. In each beam:

- the displacements field is of the Bernoulli–Euler–Navier type (3);
- the tangential stress σ^{11} is linear with respect to the normal coordinate ζ_2 (4);
- the stress components σ^{12} and σ^{22} are neglected.

Finally, introducing the two moments n and m (5) on each sub-domain and integrating with respect to the thickness variable, the variational formulation (6) and the mechanical energy J (7) are written on $\hat{\gamma}$.

The expression of the energy release rate is then obtained by deriving analytically both the variational problem and the mechanical energy J, using the so-called θ-method where θ describes the crack tip advance along $\hat{\gamma}$ [3]. This gives the variational problem satisfied by the first lagrangian derivative $(u^{(1)}, n^{(1)}, m^{(1)})$ of (u, n, m) (10) and the expression of the energy release rate (11). As in the anti-plane problem [4], this expression is the sum of two terms:

- a term involving the derivatives of θ, which is the usual term;
- a term involving θ only related to the derivation of the local metric induced by the curvature of γ.

We can note the presence in the last term of the second derivative of the curvature what impose to have $\phi \in C^3(\hat{\gamma})$. Then, using the constitutive and equilibrium *equations* (8) and the jump *conditions* (9), the energy release rate is expressed in terms of the jumps of both the traction and the bending strain energy densities at the crack tip (12).

1. Problème à résoudre

1.1. Présentation du problème

Soit ω^ϵ un domaine courbe du plan, d'épaisseur 2ϵ petite, constitué de deux matériaux isotropes séparés par une interface γ (confondue avec la ligne moyenne de ω^ϵ) régulière, décrite par la carte ϕ :

$$\phi : \left]\zeta_1^G, \zeta_1^D\right[\rightarrow \gamma, \quad x = \phi(\zeta_1)$$

Le domaine, supposé en état de déformations planes, est encastré sur le bord latéral γ_0 et chargé en flexion sur le bord opposé γ_t (*figure 1*). L'interface γ contient une fissure sur sa partie γ_f dont on se propose de calculer le taux de restitution de l'énergie associé à sa propagation le long de γ.

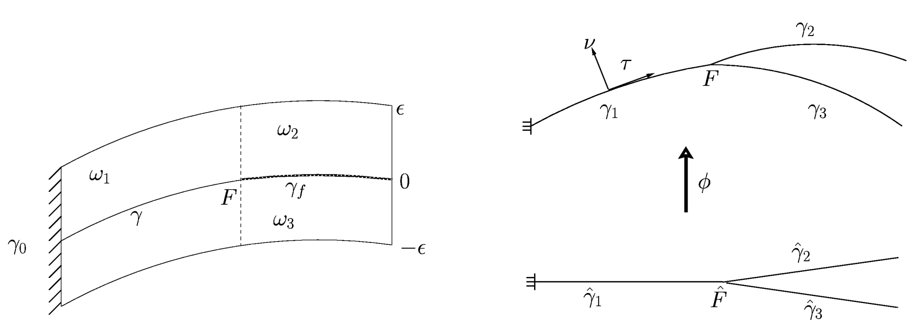

Figure 1. Définition et notations.

Figure 1. *Definition and notations.*

On rappelle que la carte ϕ permet de définir une base locale le long de γ [1] :

$$e_1 = \tau = \phi^{'}, \qquad e_2 = \nu = \|\tau\|^{-1}(-\tau_1, \tau_2)^t$$

$(\phi^{'} = \mathrm{d}\phi/\mathrm{d}\zeta_1)$ de cobase associée :

$$e^1 = \|\tau\|^{-2}\overline{\tau}, \qquad e^2 = \overline{\nu} \tag{1}$$

($\overline{\tau}$: transposé de τ). Tout point x de ω^ϵ peut être écrit sous la forme :

$$x = \phi(\zeta_1) + \zeta_2\nu(\zeta_1) \tag{2}$$

1.2. Modèle multi-poutres

Compte tenu de la faible épaisseur de ω^ϵ, celui-ci est modélisé par un assemblage de trois poutres γ_i raccordées en front de fissure F [2]. Supposant le rayon de courbure de γ d'ordre unité, le modèle retenu est le suivant.

- Dans chaque poutre, le champs des déplacements est de type Bernoulli–Euler–Navier :

$$u_1(\zeta_1, \zeta_2) = (1 - C\zeta_2)\overline{u}_1(\zeta_1) - \zeta_2\overline{u}_2^{'}(\zeta_1), \qquad u_2(\zeta_1, \zeta_2) = \overline{u}_2(\zeta_1) \tag{3}$$

où C est la courbure $(C = \|\tau\|^{-2}\overline{\nu} \cdot \tau^{'})$ et où u est considéré comme un champ de covecteurs :

$$u = u_1 e^1 + u_2\overline{\nu}$$

- La contrainte axiale est donnée par l'expression :

$$\sigma^{11} = \overline{R} \cdot \left[\gamma(\overline{u}) - \zeta_2\rho(\overline{u})\right] \tag{4}$$

où $\overline{R}$ désigne la rigidité axiale reliée à sa valeur R^{o} en repère cartésien orthonormé par la relation $\overline{R} = \|\tau\|^4 R^{\mathrm{o}}$ (inversement, $\overline{S} = \|\tau\|^{-4} S^{\mathrm{o}}$), γ est la déformation axiale :

$$\gamma(\overline{u}) = \overline{u}_1^{'} - e^1 \cdot \tau^{'}\overline{u}_1 - \|\tau\|^2\overline{u}_2$$

et ρ est la déformation de courbure :

$$\rho(\overline{u}) = \overline{u}_2^{''} - e^1 \cdot \tau^{'}\overline{u}_2^{'} + \|\tau\|^2 C^2\overline{u}_2 + C^{'}\overline{u}_1$$

Introduisant les efforts et les rigidités généralisés :

$$(n, m) = \int_{h^-}^{h^+} (1, -\zeta_2)\sigma^{11}\,\mathrm{d}\zeta_2\,; \quad \left(R^T, R^C, R^F\right) = \int_{h^-}^{h^+} (1, \zeta_2, \zeta_2^2)\overline{R}\,\mathrm{d}\zeta_2 \tag{5}$$

le problème variationnel s'écrit :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\hat{\gamma}} \left[\left(S^T n + S^C m\right)p + \left(S^C n + S^F m\right)q\right]\mathrm{d}\zeta_1 = \int_{\hat{\gamma}} \left[p\gamma(\overline{u}) + q\rho(\overline{u})\right]\mathrm{d}\zeta_1 & \forall (p, q) \in L^2(\hat{\gamma}) \\ \displaystyle\int_{\hat{\gamma}} \left[n\gamma(\overline{v}) + m\rho(\overline{v})\right]\mathrm{d}\zeta_1\|\tau\| = l(\overline{v}) & \forall\, \overline{v} \in V \end{cases} \tag{6}$$

en notant

$$\begin{pmatrix} S^T & S^C \\ S^C & S^F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^T & -R^C \\ -R^C & R^F \end{pmatrix}^{-1}, \qquad \hat{\gamma} = \bigcup_{i=1}^{3} \hat{\gamma}_i, \qquad V = V_1 \times V_2$$

et :

$$V_1 = \left\{ \overline{v}_1 \; ; \; \overline{v}_{1|\hat{\gamma}_i} \in H^1(\hat{\gamma}_i) \; ; \; \overline{v}_1\left(\zeta_1^G\right) = 0 \text{ et } \overline{v}_1 \text{ continu en } \widehat{F} \right\}$$
$$V_2 = \left\{ \overline{v}_2 \; ; \; \overline{v}_{2|\hat{\gamma}_i} \in H^2(\hat{\gamma}_i) \; ; \; \overline{v}_2\left(\zeta_1^G\right) = \overline{v}_2^{'}\left(\zeta_1^G\right) = 0 \,; \; \overline{v}_2 \text{ et } \overline{v}_2^{'} \text{ continus en } \widehat{F} \right\}$$

L'énergie mécanique associée s'écrit :

$$J = \frac{1}{2} \int_{\hat{\gamma}} \left[n\gamma(\overline{u}) + m\rho(\overline{u}) \right] \|\tau\| \, \mathrm{d}\zeta_1 - l(\overline{u}) \tag{7}$$

Remarquons que le *problème* (6) conduit aux équations locales d'équilibre :

$$\begin{cases} \left(\|\tau\| n\right)^{'} + \|\tau\| e^1 \cdot \tau^{'} n - \|\tau\| C^{'} m = 0 \\ \left(\|\tau\| m\right)^{''} + \left(\|\tau\| m e^1 \cdot \tau^{'}\right)^{'} + \|\tau\|^3 C^2 m - \|\tau\|^3 C n = 0 \end{cases} \tag{8}$$

et pour une interface régulière, aux conditions de raccord en $\widehat{F}$:

$$[[n]] = [[m]] = [[m^{'}]] = 0, \qquad [[f]] = f_1 - f_2 - f_3, \quad f_i = f_{|\hat{\gamma}_i} \tag{9}$$

2. Taux de restitution de l'énergie

La cinématique de $\widehat{F}$ est décrite par une fonction $\theta(\zeta_1)$ régulière, à support dans un voisinage de $\widehat{F}$. On lui associe la transformation $\mathcal{F}^\eta$:

$$\mathcal{F}^\eta : \hat{\gamma} \to \hat{\gamma}^\eta, \qquad \zeta_1^\eta = \zeta_1 + \eta\theta(\zeta_1) \quad \forall \eta > 0$$

L'expression du taux de restitution de l'énergie est obtenue en procédant de la façon habituelle [3] ; notamment, la solution est développée en une série de puissances de η :

$$(u^\eta, n^\eta, m^\eta) = (u, n, m) + \eta\left(u^{(1)}, n^{(1)}, m^{(1)}\right) + \mathrm{o}(\eta)$$

De plus, il faut, comme dans [4], développer la métrique locale induite par la carte ϕ :

$$\tau^\eta = \tau + \eta\theta\tau^{'} + \mathrm{o}(\eta), \qquad \nu^\eta = \nu + \eta\theta\nu^{'} + \mathrm{o}(\eta), \qquad C^\eta = C + \eta\theta C^{'} + \mathrm{o}(\eta)$$
$$e^{1\eta} \cdot \left(\tau^\eta\right)^{'} = e^1 \cdot \tau^{'} + \eta\theta\left(e^1 \cdot \tau^{'}\right)^{'} + \mathrm{o}(\eta)$$

ainsi que le terme de souplesse :

$$S^\eta = S + 4\eta\theta e^1 \cdot \tau^{'} S + \mathrm{o}(\eta)$$

L'identifi cation des termes du premier ordre en η fournit les résultats suivants.

Dérivées lagrangiennes

$\left(u^{(1)}, n^{(1)}, m^{(1)}\right)$ est solution du problème variationnel suivant :

$$\left\{\begin{aligned}
&\int_{\hat{\gamma}} \left[\left(S^T n^{(1)} + S^C m^{(1)}\right)p + \left(S^C n^{(1)} + S^F m^{(1)}\right)q\right] \mathrm{d}\zeta_1 - \int_{\hat{\gamma}} \left[p\gamma\left(\overline{u}^{(1)}\right) + q\rho\left(\overline{u}^{(1)}\right)\right] \mathrm{d}\zeta_1 \\
&\quad = - \int_{\hat{\gamma}} p\overline{u}_1^{'}\theta^{'} - \int_{\hat{\gamma}} q\left(2\overline{u}_2^{''}\theta^{'} + \overline{u}_2^{'}\theta^{''} - e^1 \cdot \tau^{'}\overline{u}_2^{'}\theta^{'}\right) \mathrm{d}\zeta_1 \\
&\qquad - 4\int_{\hat{\gamma}} \theta e^1 \cdot \tau^{'} \left[\left(S^T n + S^C m\right)p + \left(S^C n + S^F m\right)q\right] \mathrm{d}\zeta_1 \\
&\qquad - \int_{\hat{\gamma}} \theta p\left[\left(e^1 \cdot \tau^{'}\right)^{'}\overline{u}_1 + \|\tau\|^2\left(2Ce^1 \cdot \tau^{'} + C^{'}\right)\overline{u}_2\right] \mathrm{d}\zeta_1 \\
&\qquad - \int_{\hat{\gamma}} \theta q\left[\left(e^1 \cdot \tau^{'}\right)^{'}\overline{u}_2^{'} - 2\|\tau\|^2 C\left(Ce^1 \cdot \tau^{'} + C^{'}\right)\overline{u}_2 - C^{''}\overline{u}_1\right] \mathrm{d}\zeta_1 \quad \forall (p,q) \in L^2(\hat{\gamma}) \\
&\int_{\hat{\gamma}} \left[n^{(1)}\gamma(v) + m^{(1)}\rho(v)\right] \|\tau\| \,\mathrm{d}\zeta_1 \\
&\quad = - \int_{\hat{\gamma}} \left[n\gamma(v) + m\rho(v)\right] \|\tau\|\theta^{'} \,\mathrm{d}\zeta_1 + \int_{\hat{\gamma}} nv_1^{'}\theta^{'}\|\tau\| \,\mathrm{d}\zeta_1 \\
&\qquad + \int_{\hat{\gamma}} \|\tau\| m\left(2v_2^{''}\theta^{'} + v_2^{'}\theta^{''} - e^1 \cdot \tau^{'} v_2^{'}\theta^{'}\right) \mathrm{d}\zeta_1 - \int_{\hat{\gamma}} \theta\|\tau\| e^1 \cdot \tau^{'} \left[n\gamma(v) + m\rho(v)\right] \mathrm{d}\zeta_1 \\
&\qquad + \int_{\hat{\gamma}} \theta\|\tau\| n\left[\left(e^1 \cdot \tau^{'}\right)^{'} v_1 + \|\tau\|^2\left(2Ce^1 \cdot \tau^{'} + C^{'}\right)v_2\right] \mathrm{d}\zeta_1 \\
&\qquad + \int_{\hat{\gamma}} \theta\|\tau\| m\left[\left(e^1 \cdot \tau^{'}\right)^{'} v_2^{'} - 2\|\tau\|^2 C\left(Ce^1 \cdot \tau^{'} + C^{'}\right)v_2 - C^{''}v_1\right] \mathrm{d}\zeta_1 \quad \forall v \in V
\end{aligned}\right. \tag{10}$$

Taux de restitution

Écrivant (6) pour des fonctions test $(v,p,q) = (u^{(1)}, n^{(1)}, m^{(1)})$ et (10) pour $(v,p,q) = (u,n,m)$, nous exprimons le taux de restitution de l'énergie associé au déplacement θ du front $\widehat{F}$ sous la forme :

$$\begin{aligned}
g(\theta) = &-\frac{1}{2}\int_{\hat{\gamma}} \left[n\gamma(\overline{u}) + m\rho(\overline{u})\right] \|\tau\|\theta^{'} \,\mathrm{d}\zeta_1 + \int_{\hat{\gamma}} m\left(2\overline{u}_2^{''}\theta^{'} + \overline{u}_2^{'}\theta^{''} - e^1 \cdot \tau^{'}\overline{u}_2^{'}\theta^{'}\right) \|\tau\| \,\mathrm{d}\zeta_1 \\
&+ \frac{3}{2}\int_{\hat{\gamma}} \theta\|\tau\| e^1 \cdot \tau^{'} \left[n\gamma(\overline{u}) + m\rho(\overline{u})\right] \mathrm{d}\zeta_1 + \int_{\hat{\gamma}} \theta\|\tau\| n\left[\left(e^1 \cdot \tau^{'}\right)^{'}\overline{u}_1 + \|\tau\|^2\left(2Ce^1 \cdot \tau^{'} + C^{'}\right)\overline{u}_2\right] \mathrm{d}\zeta_1 \\
&+ \int_{\hat{\gamma}} \theta\|\tau\| m\left[\left(e^1 \cdot \tau^{'}\right)^{'}\overline{u}_2^{'} - 2\|\tau\|^2 C\left(Ce^1 \cdot \tau^{'} + C^{'}\right)\overline{u}_2 - C^{''}\overline{u}_1\right] \mathrm{d}\zeta_1 + \int_{\hat{\gamma}} n\overline{u}_1^{'}\theta^{'}\|\tau\| \,\mathrm{d}\zeta_1
\end{aligned} \tag{11}$$

Force de fissuration

Utilisant les équations d'équilibre (8), les conditions de saut en $\widehat{F}$ (9) ainsi que la relation :

$$n^{'}\gamma + m^{'}\rho = m\gamma^{'} + m\rho^{'} - 4e^1 \cdot \tau^{'}(n\gamma + m\rho)$$

on exprime g en fonction des contraintes et des déformations en front de fi ssure :

$$g(\theta) = \frac{1}{2}\left(\left[\left[n\frac{\mathrm{d}\overline{u}_1}{\mathrm{d}\zeta_1}\right]\right] + \left[\left[m\frac{\mathrm{d}^2\overline{u}_2}{\mathrm{d}\zeta_1^2}\right]\right]\right)\|\tau(\widehat{F})\|\theta\left(\widehat{F}\right) \tag{12}$$

Remarques

- Comme dans le cas anti-plan [4], la forme intégrale (11) du taux de restitution contient, en plus des termes habituels facteurs de $\theta^{'}$, des termes facteurs de θ. Ces termes peuvent être regroupés en deux ensembles : un ensemble lié à la représentation paramétrique de γ qui s'annule si la variable est l'abcisse curviligne et un ensemble lié à la courbure qui s'annule si celle-ci est constante (γ est une droite ou un arc de cercle).
- On notera dans l'expression du taux de restitution (11) la présence de la quantité $C^{''}$ qui impose à la carte ϕ une régularité $C^3(\hat{\gamma})$. En revanche, la seconde expression du taux (12), moins précise numériquement requiert seulement une régularité $C^1(\hat{\gamma})$.

3. Conclusion

Nous venons de dériver pour le problème plan, l'expression du taux de restitution de l'énergie associée à une fissure se propageant le long d'une interface curviligne. Outre les termes habituels faisant intervenir les dérivées de θ, cette expression contient un terme lié à la dérivation de la métrique locale. Il est à remarquer que ces termes font intervenir la dérivée 4^e de la carte et qu'il faudra en tenir compte pour l'approximation de γ si celle-ci n'est pas connue analytiquement.

Références bibliographiques

[1] Choquet-Bruhat Y., DeWitt-Morette C., Dillard-Bleick, Analysis, Manifolds and Physics, North-Holland, Amsterdam, 1982.

[2] Nevers T., Études numériques du delaminage dans les plaques composites stratifiées, Thèse ECP, 1986.

[3] Destuynder Ph., Djaoua M., Lescure S., Quelques remarques sur la mécanique de la rupture élastique, J. Mec. Theor. Appl. 2 (1983) 113–135.

[4] Ousset Y., Taux de restitution de l'énergie associé à une fissure se propageant le long d'une interface curviligne, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. IIb 324 (1997) 603–609.