Analyse numérique de quelques problèmes de contrôle et d'optimisation de forme pour des systèmes dynamiques

Arnaud Diego MÜNCH

Laboratoire de Mathématiques
Université de Franche-Comté
Besançon, France

HDR - Jeudi 30 octobre 2008

Plan de l’exposé

- Partie I: Contrôlabilité exacte / Stabilisation
- Partie II: Optimisation de forme
- Partie III: Problèmes en cours

- Partie I: Contrôlabilité exacte / Stabilisation
- Partie II: Optimisation de forme
- Partie III: Problèmes en cours

Plan de l'exposé

- Partie I: Contrôlabilité exacte / Stabilisation
- Partie II: Optimisation de forme
- Partie III: Problèmes en cours

Partie I: Contrôlabilité / Stabilisation

Soient $T > 0$, $\Omega \in \mathbb{R}^N$, $\boldsymbol{\Gamma_0} \subset \partial\Omega$, $(y^0, y^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, $\boldsymbol{v} \in L^2((0,T) \times \Gamma_0)$ et $y \in C((0,T), H^1(\Omega)) \cap C^1((0,T), L^2(\Omega))$ solution de

$$\begin{cases} y'' - \Delta y = 0 & (0,T) \times \Omega, \\ y = v\chi_{\Gamma_0}, & (0,T) \times \Omega, \\ (y, y') = (y^0, y^1), & \{0\} \times \Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Définition (Contrôlabilité à zéro)

Le système est nul contrôlable SSI il existe au moins une fonction v tel que $y(T,\cdot) = y'(T,\cdot) = 0$ dans Ω.

Théorème (Lions 88, Lebeau-Rauch-Bardos 92)

SI le triplet (T, Γ_0, Ω) vérifie la condition d'optique géométrique, ALORS il existe des fonctions $v \in L^2((0,T) \times \Gamma_0)$ telles que

$$(y(T), y'(T)) = (0,0) \Longrightarrow E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega (|y'|^2 + |\nabla y|^2)dx = 0, \forall t \geq T. \tag{2}$$

La méthode HUM (*Hilbert Uniqueness Method*) conduit au contrôle de norme L^2-minimale.

Soient $T > 0$, $\Omega \in \mathbb{R}^N$, $\boldsymbol{\Gamma_0} \subset \partial\Omega$, $(y^0, y^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, $\boldsymbol{v} \in L^2((0,T) \times \Gamma_0)$ et $y \in C((0,T), H^1(\Omega)) \cap C^1((0,T), L^2(\Omega))$ solution de

$$\begin{cases} y'' - \Delta y = 0 & (0,T) \times \Omega, \\ y = v\mathcal{X}_{\Gamma_0}, & (0,T) \times \Omega, \\ (y, y') = (y^0, y^1), & \{0\} \times \Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Définition (Contrôlabilité à zéro)

Le système est nul contrôlable SSI il existe au moins une fonction v tel que $y(T,\cdot) = y'(T,\cdot) = 0$ *dans* Ω.

(Lions 88, Lebeau-Rauch-Bardos 92)

SI le triplet (T, Γ_0, Ω) *vérifie la condition d'optique géométrique, ALORS il existe des fonctions* $v \in L^2((0,T) \times \Gamma_0)$ *telles que*

$$(y(T), y'(T)) = (0,0) \Longrightarrow E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega (|y'|^2 + |\nabla y|^2)dx = 0, \forall t \geq T. \tag{2}$$

La méthode HUM (*Hilbert Uniqueness Method*) conduit au contrôle de norme L^2-minimale.

Soient $T > 0$, $\Omega \in \mathbb{R}^N$, $\boldsymbol{\Gamma_0} \subset \partial\Omega$, $(y^0, y^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, $\boldsymbol{v} \in L^2((0,T) \times \Gamma_0)$ et $y \in C((0,T), H^1(\Omega)) \cap C^1((0,T), L^2(\Omega))$ solution de

$$\begin{cases} y'' - \Delta y = 0 & (0,T) \times \Omega, \\ y = v \chi_{\Gamma_0}, & (0,T) \times \Omega, \\ (y, y') = (y^0, y^1), & \{0\} \times \Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Définition (Contrôlabilité à zéro)

Le système est nul contrôlable SSI il existe au moins une fonction v tel que $y(T, \cdot) = y'(T, \cdot) = 0$ dans Ω.

Théorème (Lions 88, Lebeau-Rauch-Bardos 92)

SI le triplet (T, Γ_0, Ω) vérifie la condition d'optique géométrique, ALORS il existe des fonctions $v \in L^2((0,T) \times \Gamma_0)$ telles que

$$(y(T), y'(T)) = (0,0) \Longrightarrow E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega (|y'|^2 + |\nabla y|^2) dx = 0, \forall t \geq T. \tag{2}$$

La méthode HUM (*Hilbert Uniqueness Method*) conduit au contrôle de norme L^2-minimale.

On considère le problème homogène adjoint, avec $(\phi^0, \phi^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$

$$\begin{cases} \phi'' - \Delta\phi = 0 & (0,T)\times\Omega, \\ \phi = 0, & (0,T)\times\Omega, \\ (\phi, \phi') = (\phi^0, \phi^1), & \{0\}\times\Omega \end{cases} \tag{3}$$

de sorte que les éventuelles contrôles sont caractérisés (formellement) par

$$\int_0^T \int_{\Gamma_0} \boldsymbol{v}(t,\boldsymbol{x}) \frac{\partial \phi(t,\boldsymbol{x})}{\partial \nu} d\sigma dt = < y^1, \phi^0 >_{H-1, H_0^1} - \int_\Omega y^0 \phi^1 dx, \tag{4}$$

équation d'Euler-Lagrange pour l'application continue et strictement convexe $\mathcal{J} : (\phi^0, \phi^1) \to \mathbb{R}$

$$\mathcal{J}(\phi^0, \phi^1) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_0} \left| \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right|^2 d\sigma dt - < y^1, \phi^0 > + \int_\Omega y^0 \phi^1 dx. \tag{5}$$

Si $\mathcal{J}$ est coercive, alors $\mathcal{J}$ admet un minimum $(\hat{\phi}^0, \hat{\phi}^1)$, le système (1) est nul contrôlable et le contrôle de norme L^2-minimale est donné par

$$\boldsymbol{v} = \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \nu}, \qquad (0,T)\times\Gamma_0. \tag{6}$$

La coercivité de $\mathcal{J}$ est équivalente à l'inégalité d'observabilité :

$$\|\phi^0, \phi^1\|^2_{H_0^1 \times L^2} \leq \boldsymbol{C(T, \Gamma_0)} \int_0^T \int_{\Gamma_0} \left|\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\right|^2 d\sigma dt \quad \forall (\phi^0, \phi^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega). \tag{7}$$

On considère le problème homogène adjoint, avec $(\phi^0, \phi^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$

$$\begin{cases} \phi'' - \Delta\phi = 0 & (0,T) \times \Omega, \\ \phi = 0, & (0,T) \times \Omega, \\ (\phi, \phi') = (\phi^0, \phi^1), & \{0\} \times \Omega \end{cases} \tag{3}$$

de sorte que les éventuelles contrôles sont caractérisés (formellement) par

$$\int_0^T \int_{\Gamma_0} \boldsymbol{v}(t,\boldsymbol{x}) \frac{\partial \phi(t,\boldsymbol{x})}{\partial \nu} d\sigma dt =< y^1, \phi^0 >_{H-1,H_0^1} - \int_\Omega y^0 \phi^1 dx, \tag{4}$$

équation d'Euler-Lagrange pour l'application continue et strictement convexe $\mathcal{J} : (\phi^0, \phi^1) \to \mathbb{R}$

$$\mathcal{J}(\phi^0, \phi^1) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_0} \left| \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right|^2 d\sigma dt - < y^1, \phi^0 > + \int_\Omega y^0 \phi^1 dx. \tag{5}$$

Théorème

Si $\mathcal{J}$ est coercive, alors $\mathcal{J}$ admet un minimum $(\hat{\phi}^0, \hat{\phi}^1)$, le système (1) est nul contrôlable et le contrôle de norme L^2-minimale est donné par

$$\boldsymbol{v} = \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \nu}, \qquad (0,T) \times \Gamma_0. \tag{6}$$

La coercivité de $\mathcal{J}$ est équivalente à l'inégalité d'observabilité :

$$\|\phi^0, \phi^1\|^2_{H_0^1 \times L^2} \le C(T, \Gamma_0) \int_0^T \int_{\Gamma_0} \left|\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\right|^2 d\sigma dt \quad \forall (\phi^0, \phi^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega). \tag{7}$$

On considère le problème homogène adjoint, avec $(\phi^0, \phi^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$

$$\begin{cases} \phi'' - \Delta\phi = 0 & (0, T) \times \Omega, \\ \phi = 0, & (0, T) \times \Omega, \\ (\phi, \phi') = (\phi^0, \phi^1), & \{0\} \times \Omega \end{cases} \tag{3}$$

de sorte que les éventuelles contrôles sont caractérisés (formellement) par

$$\int_0^T \int_{\Gamma_0} \boldsymbol{v}(t, \boldsymbol{x}) \frac{\partial \phi(t, \boldsymbol{x})}{\partial \nu} d\sigma dt =< y^1, \phi^0 >_{H^{-1}, H_0^1} - \int_\Omega y^0 \phi^1 dx, \tag{4}$$

équation d'Euler-Lagrange pour l'application continue et strictement convexe $\mathcal{J} : (\phi^0, \phi^1) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\mathcal{J}(\phi^0, \phi^1) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_0} \left| \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right|^2 d\sigma dt - < y^1, \phi^0 > + \int_\Omega y^0 \phi^1 dx. \tag{5}$$

Théorème

Si $\mathcal{J}$ est coercive, alors $\mathcal{J}$ admet un minimum $(\hat{\phi}^0, \hat{\phi}^1)$, le système (1) est nul contrôlable et le contrôle de norme L^2-minimale est donné par

$$\boldsymbol{v} = \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \nu}, \qquad (0, T) \times \Gamma_0. \tag{6}$$

La coercivité de $\mathcal{J}$ est équivalente à l'inégalité d'observabilité :

$$\|\phi^0, \phi^1\|^2_{H_0^1 \times L^2} \leq C(T, \Gamma_0) \int_0^T \int_{\Gamma_0} \left|\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\right|^2 d\sigma dt \quad \forall (\phi^0, \phi^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega). \tag{7}$$

On considère le problème homogène adjoint, avec $(\phi^0, \phi^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$

$$\begin{cases} \phi'' - \Delta\phi = 0 & (0,T) \times \Omega, \\ \phi = 0, & (0,T) \times \Omega, \\ (\phi, \phi') = (\phi^0, \phi^1), & \{0\} \times \Omega \end{cases} \tag{3}$$

de sorte que les éventuelles contrôles sont caractérisés (formellement) par

$$\int_0^T \int_{\Gamma_0} \boldsymbol{v}(t, \boldsymbol{x}) \frac{\partial \phi(t, \boldsymbol{x})}{\partial \nu} d\sigma dt =< y^1, \phi^0 >_{H^{-1}, H_0^1} - \int_\Omega y^0 \phi^1 dx, \tag{4}$$

équation d'Euler-Lagrange pour l'application continue et strictement convexe $\mathcal{J} : (\phi^0, \phi^1) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\mathcal{J}(\phi^0, \phi^1) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_0} \left| \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right|^2 d\sigma dt - < y^1, \phi^0 > + \int_\Omega y^0 \phi^1 dx. \tag{5}$$

Théorème

Si $\mathcal{J}$ est coercive, alors $\mathcal{J}$ admet un minimum $(\hat{\phi}^0, \hat{\phi}^1)$, le système (1) est nul contrôlable et le contrôle de norme L^2-minimale est donné par

$$\boldsymbol{v} = \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \nu}, \qquad (0,T) \times \Gamma_0. \tag{6}$$

La coercivité de $\mathcal{J}$ est équivalente à l'inégalité d'observabilité :

$$\|\phi^0, \phi^1\|^2_{H_0^1 \times L^2} \leq \boldsymbol{C(T, \Gamma_0)} \int_0^T \int_{\Gamma_0} |\frac{\partial \phi}{\partial \nu}|^2 d\sigma dt \quad \forall (\phi^0, \phi^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega). \tag{7}$$

Sensibilité par rapport à une pertubation - Approximation numérique du contrôle

On considère une perturbation consistante du système :

$$\begin{cases} y_\delta'' - \Delta_\delta y_\delta = 0 & (0,T)\times\Omega_\delta, \\ y_\delta = v_\delta \chi_{\Gamma_0} & (0,T)\times\Omega_\delta, \\ (y_\delta, y_\delta') = (y^0, y^1) & \{0\}\times\Omega_\delta. \end{cases} \tag{8}$$

- Pour δ fixé, le système pertubé est-il nul contrôlable ?
- Quel est le comportement du contrôle v_δ lorsque δ tend vers zéro ?

Dans le cadre de l'approximation numérique,

- $\delta = h$ (approximation semi-discrète en espace);
- $\delta = (h, \Delta t)$ (approximation discrète espace-temps).

La réponse dépend du comportement de la constante d'observabilité C_δ de

$$\|\phi^0,\phi^1\|^2_{H^1_0\times L^2} \le C_\delta(T,\Gamma_0)\int_0^T\int_{\Gamma_0}\left|\frac{\partial\phi_\delta}{\partial\nu}\right|^2 d\sigma dt \quad \forall(\phi^0,\phi^1)\in H^1_0(\Omega)\times L^2(\Omega). \tag{9}$$

Sensibilité par rapport à une pertubation - Approximation numérique du contrôle

On considère une perturbation consistante du système :

$$\begin{cases} y_\delta'' - \Delta_\delta y_\delta = 0 & (0,T)\times\Omega_\delta, \\ y_\delta = v_\delta \chi_{\Gamma_0} & (0,T)\times\Omega_\delta, \\ (y_\delta, y_\delta') = (y^0, y^1) & \{0\}\times\Omega_\delta. \end{cases} \tag{8}$$

- Pour δ fixé, le système pertubé est-il nul contrôlable ?
- Quel est le comportement du contrôle v_δ lorsque δ tend vers zéro ?

Dans le cadre de l'approximation numérique,

- $\delta = h$ (approximation semi-discrète en espace);
- $\delta = (h, \Delta t)$ (approximation discrète espace-temps).

La réponse dépend du comportement de la constante d'observabilité C_δ de

$$\|\phi^0, \phi^1\|^2_{H_0^1\times L^2} \leq C_\delta(T,\Gamma_0)\int_0^T\int_{\Gamma_0} \left|\frac{\partial\phi_\delta}{\partial\nu}\right|^2 d\sigma dt \quad \forall(\phi^0,\phi^1)\in H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega). \tag{9}$$

On considère une perturbation consistante du système :

$$\begin{cases} y_\delta'' - \Delta_\delta y_\delta = 0 & (0,T)\times\Omega_\delta, \\ y_\delta = \boldsymbol{v_\delta \chi_{\Gamma_0}} & (0,T)\times\Omega_\delta, \\ (y_\delta, y_\delta') = (y^0, y^1) & \{0\}\times\Omega_\delta. \end{cases} \tag{8}$$

- Pour δ fixé, le système pertubé est-il nul contrôlable ?
- Quel est le comportement du contrôle v_δ lorsque δ tend vers zéro ?

Dans le cadre de l'approximation numérique,

- $\delta = h$ (approximation semi-discrète en espace);
- $\delta = (h, \Delta t)$ (approximation discrète espace-temps).

La réponse dépend du comportement de la constante d'observabilité C_δ de

$$\|\phi^0, \phi^1\|^2_{H^1_0\times L^2} \leq C_\delta(T, \Gamma_0) \int_0^T\int_{\Gamma_0} \left|\frac{\partial\phi_\delta}{\partial\nu}\right|^2 d\sigma dt \quad \forall(\phi^0,\phi^1)\in H^1_0(\Omega)\times L^2(\Omega). \tag{9}$$

On considère une perturbation consistante du système :

$$\begin{cases} y_\delta'' - \Delta_\delta y_\delta = 0 & (0,T)\times\Omega_\delta, \\ y_\delta = v_\delta \mathcal{X}_{\Gamma_0} & (0,T)\times\Omega_\delta, \\ (y_\delta, y_\delta') = (y^0, y^1) & \{0\}\times\Omega_\delta. \end{cases} \tag{8}$$

- Pour δ fixé, le système pertubé est-il nul contrôlable ?
- Quel est le comportement du contrôle v_δ lorsque δ tend vers zéro ?

Dans le cadre de l'approximation numérique,

- $\delta = h$ (approximation semi-discrète en espace);
- $\delta = (h, \Delta t)$ (approximation discrète espace-temps).

La réponse dépend du comportement de la constante d'observabilité C_δ de

$$\|\phi^0,\phi^1\|^2_{H_0^1\times L^2} \leq C_\delta(T,\Gamma_0)\int_0^T\int_{\Gamma_0} \left|\frac{\partial\phi_\delta}{\partial\nu}\right|^2 d\sigma dt \quad \forall(\phi^0,\phi^1)\in H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega). \tag{9}$$

Sensibilité par rapport à une pertubation - Approximation numérique du contrôle

On considère une perturbation consistante du système :

$$\begin{cases} y_\delta'' - \Delta_\delta y_\delta = 0 & (0,T)\times\Omega_\delta, \\ y_\delta = v_\delta \mathcal{X}_{\Gamma_0} & (0,T)\times\Omega_\delta, \\ (y_\delta, y_\delta') = (y^0, y^1) & \{0\}\times\Omega_\delta. \end{cases} \tag{8}$$

- Pour δ fixé, le système pertubé est-il nul contrôlable ?
- Quel est le comportement du contrôle v_δ lorsque δ tend vers zéro ?

Dans le cadre de l'approximation numérique,

- $\delta = h$ (approximation semi-discrète en espace);
- $\delta = (h, \Delta t)$ (approximation discrète espace-temps).

La réponse dépend du comportement de la constante d'observabilité C_δ de

$$\|\phi^0,\phi^1\|^2_{H_0^1\times L^2} \leq C_\delta(T,\Gamma_0)\int_0^T\int_{\Gamma_0} |\frac{\partial\phi_\delta}{\partial\nu}|^2 d\sigma dt \quad \forall(\phi^0,\phi^1)\in H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega). \tag{9}$$

Différences finies 1D centrées : Non convergence du controle discrèt $v_{h,\Delta t}$

$$\Omega = (0,1), \quad (y^0(x), y^1(x)) = (16\mathcal{X}_{(0,1/2)}(x), 0), \quad T = 2.4, \quad \Gamma_0 = \{1\}. \tag{10}$$

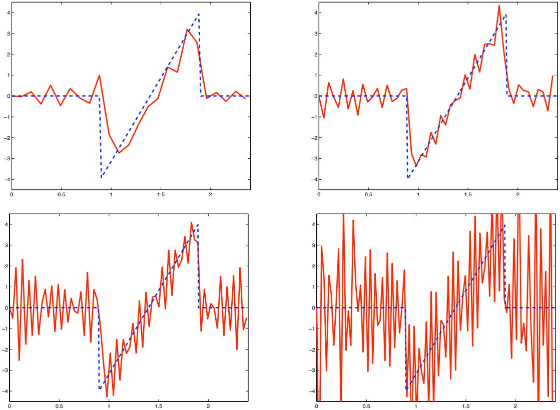


Figure: Comportement du contrôle $v_{h,\Delta t}$ pour $h = 1/10, 1/20, 1/40, 1/80$ avec $\Delta t = 0.98h$.

$\Longrightarrow$ Divergence exponentielle du contrôle discret

$$\exists c > 0, \|P(v_{h,\Delta t}) - v\|_{L^2(\Gamma_0 \times (0,T))} = O(e^{c/h}). \tag{11}$$

NULLE CONTRÔLABILITÉ + APPROXIMATION $\neq$ APPROXIMATION + NULLE CONTRÔLABILITÉ

$$\Omega = (0,1), \quad (y^0(x), y^1(x)) = (16\mathcal{X}_{(0,1/2)}(x), 0), \quad T = 2.4, \quad \Gamma_0 = \{1\}. \tag{10}$$

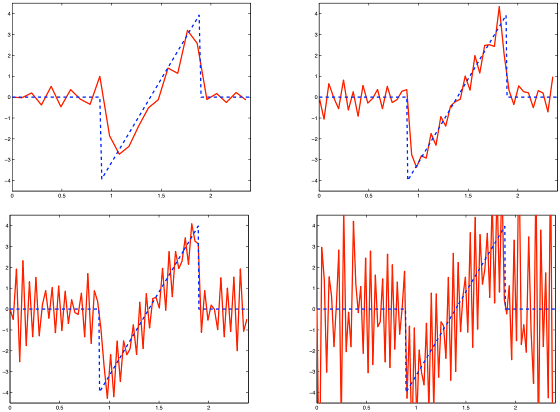


Figure: Comportement du contrôle $v_{h,\Delta t}$ pour $h = 1/10, 1/20, 1/40, 1/80$ avec $\Delta t = 0.98h$.

$\Longrightarrow$ Divergence exponentielle du contrôle discret

$$\exists c > 0, \|P(v_{h,\Delta t}) - v\|_{L^2(\Gamma_0\times(0,T))} = O(e^{c/h}). \tag{11}$$

NULLE CONTRÔLABILITÉ + APPROXIMATION $\neq$ APPROXIMATION + NULLE CONTRÔLABILITÉ

Non observabilité uniforme

$$\lim_{h\longrightarrow 0} C_h(T,\Gamma_0) = \lim_{h\longrightarrow 0} \sup_{(\phi_h^0,\phi_h^1)} \frac{\|\phi_h^0,\phi_h^1\|^2_{H_0^1\times L^2}}{\int_0^T\int_{\Gamma_0} |\phi_{h,\nu}|^2 d\sigma dt} = +\infty \qquad (12)$$

$(\mu_{k,h,\Delta})_k$ - spectre discret

$$\mu_{k,h,\Delta t} = \frac{2}{\Delta t} arcsin\left(\frac{\Delta t}{h}\sin(\frac{k\pi h}{2})\right), \quad k = 1,\cdots,J \qquad (13)$$

Le minimum de la vitesse de la groupe (gradient du diagramme de dispersion) est minorée par

$$\mu_{J,h,\Delta t} - \mu_{J-1,h,\Delta t} = O(h) \longrightarrow 0 \text{ quand } h \longrightarrow 0, \Delta t < h \qquad (14)$$

$$\mu_{j,h,\Delta t} - \mu_{j-1,h,\Delta t} = O(1), \quad \forall j = 2,\cdots,J, \Delta t = h \qquad (15)$$

[Glowinski-Kinton-Wheeler 89], [Glowinski-Li-Lions 90], [Glowinski 91], [Glowinski-Lions 95]
$\Longrightarrow$ Régularisation de Tychonoff - Elément fini mixte - Méthode multi-grilles.

[Zuazua' team 01,02,05,...] au niveau semi-discret
$\Longrightarrow$ Filtrage des hautes fréquences.

Non observabilité uniforme

$$\lim_{h\to 0} C_h(T,\Gamma_0) = \lim_{h\to 0} \sup_{(\phi_h^0,\phi_h^1)} \frac{\|\phi_h^0,\phi_h^1\|^2_{H_0^1\times L^2}}{\int_0^T\int_{\Gamma_0}|\phi_{h,\nu}|^2 d\sigma dt} = +\infty \tag{12}$$

$(\mu_{k,h,\Delta})_k$ - spectre discret

$$\mu_{k,h,\Delta t} = \frac{2}{\Delta t} arcsin\left(\frac{\Delta t}{h}\sin(\frac{k\pi h}{2})\right), \quad k = 1,\cdots,J \tag{13}$$

Le minimum de la vitesse de la groupe (gradient du diagramme de dispersion) est minorée par

$$\mu_{J,h,\Delta t} - \mu_{J-1,h,\Delta t} = O(h) \to 0 \text{ quand } h \to 0, \Delta t < h \tag{14}$$

$$\mu_{j,h,\Delta t} - \mu_{j-1,h,\Delta t} = O(1), \quad \forall j = 2,\cdots,J, \Delta t = h \tag{15}$$

[Glowinski-Kinton-Wheeler 89], [Glowinski-Li-Lions 90], [Glowinski 91], [Glowinski-Lions 95]
$\Longrightarrow$ Régularisation de Tychonoff - Elément fini mixte - Méthode multi-grilles.

[Zuazua' team 01,02,05,...] au niveau semi-discret
$\Longrightarrow$ Filtrage des hautes fréquences.

Effet des hautes fréquences

Non observabilité uniforme

$$\lim_{h\to 0} C_h(T,\Gamma_0) = \lim_{h\to 0} \sup_{(\phi_h^0,\phi_h^1)} \frac{\|\phi_h^0,\phi_h^1\|^2_{H_0^1\times L^2}}{\int_0^T\int_{\Gamma_0} |\phi_{h,\nu}|^2 d\sigma dt} = +\infty \quad (12)$$

$(\mu_{k,h,\Delta})_k$ - spectre discret

$$\mu_{k,h,\Delta t} = \frac{2}{\Delta t} arcsin\left(\frac{\Delta t}{h}\sin(\frac{k\pi h}{2})\right), \quad k = 1,\cdots,J \quad (13)$$

Le minimum de la vitesse de la groupe (gradient du diagramme de dispersion) est minorée par

$$\mu_{J,h,\Delta t} - \mu_{J-1,h,\Delta t} = O(h) \to 0 \text{ quand } h \to 0, \Delta t < h \quad (14)$$

$$\mu_{j,h,\Delta t} - \mu_{j-1,h,\Delta t} = O(1), \quad \forall j = 2,\cdots,J, \Delta t = h \quad (15)$$

[Glowinski-Kinton-Wheeler 89], [Glowinski-Li-Lions 90], [Glowinski 91], [Glowinski-Lions 95]
$\Longrightarrow$ Régularisation de Tychonoff - Elément fini mixte - Méthode multi-grilles.

[Zuazua' team 01,02,05,...] au niveau semi-discret
$\Longrightarrow$ Filtrage des hautes fréquences.

Non observabilité uniforme

$$\lim_{h\to 0} C_h(T,\Gamma_0) = \lim_{h\to 0} \sup_{(\phi_h^0,\phi_h^1)} \frac{\|\phi_h^0,\phi_h^1\|^2_{H_0^1\times L^2}}{\int_0^T\int_{\Gamma_0} |\phi_{h,\nu}|^2 d\sigma dt} = +\infty \quad (12)$$

$(\mu_{k,h,\Delta})_k$ - spectre discret

$$\mu_{k,h,\Delta t} = \frac{2}{\Delta t} arcsin\left(\frac{\Delta t}{h}\sin(\frac{k\pi h}{2})\right), \quad k=1,\cdots,J \quad (13)$$

Le minimum de la vitesse de la groupe (gradient du diagramme de dispersion) est minorée par

$$\mu_{J,h,\Delta t} - \mu_{J-1,h,\Delta t} = O(h) \to 0 \text{ quand } h\to 0, \Delta t < h \quad (14)$$

$$\mu_{j,h,\Delta t} - \mu_{j-1,h,\Delta t} = O(1), \quad \forall j = 2,\cdots,J, \Delta t = h \quad (15)$$

[Glowinski-Kinton-Wheeler 89], [Glowinski-Li-Lions 90], [Glowinski 91], [Glowinski-Lions 95]
$\Longrightarrow$ Régularisation de Tychonoff - Elément fini mixte - Méthode multi-grilles.

[Zuazua' team 01,02,05,...] au niveau semi-discret
$\Longrightarrow$ Filtrage des hautes fréquences.

On considère la discrétisation différence finie suivante :

$$\begin{cases} \Delta_{\Delta t} y_{h,\Delta t} + \mathbf{\frac{1}{4}(h^2 - \Delta t^2)\Delta_h \Delta_{\Delta t} y_{h,\Delta t}} - \Delta_h y_{h,\Delta t} = 0, \\ y_{h,\Delta t}(1,t) = v_{h,\Delta t}(1,t), \\ (y_h^0, y_h^1). \end{cases} \quad (16)$$

(AM, M2AN 05)

Soit $T > 2$. Le schéma aux différences finies, consistant d'ordre 2, inconditionnellement stable est uniformément contrôlable sous la condition "CFL"

$$0 < \frac{\Delta t}{h} \leq \sqrt{\frac{T}{2}} \quad (17)$$

Précisement, soit $(\boldsymbol{Y_{0h}}, \boldsymbol{Y_{1h}})$ une séquence discrète de la donnée initiale. Supposons que $(a_{k,h}, b_{k,h})_k$, les coefficients de Fourier de $(\boldsymbol{Y_{0h}}, \boldsymbol{Y_{1h}})$, vérifient

$$(a_{k,h})_k \rightarrow (a_k)_k, \quad \left(\frac{b_{k,h}}{\sqrt{\lambda_{k,h}^{\theta,\alpha}}}\right)_k \rightarrow \left(\frac{b_k}{k\pi}\right)_k \quad \textit{dans } l^2 \textit{ quand } h \rightarrow 0, \quad (18)$$

où (a_k, b_k) sont les coefficients de Fourier des données (y_0, y_1). Soit $(v_h)_h$ une séquence de contrôle. On a les convergences suivantes

$$\begin{aligned} Q(v_h) &\rightarrow v \ \textit{ dans } \ L^2(0,T) \ \textit{ quand } \ h \rightarrow 0, \\ hP(v_h)' &\rightarrow 0 \ \textit{ dans } \ L^2(0,T) \ \textit{ quand } \ h \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (19)$$

où v est le HUM contrôle.

On considère la discrétisation différence finie suivante :

$$\begin{cases} \Delta_{\Delta t} y_{h,\Delta t} + \frac{1}{4}(h^2 - \Delta t^2)\Delta_h \Delta_{\Delta t} y_{h,\Delta t} - \Delta_h y_{h,\Delta t} = 0, \\ y_{h,\Delta t}(1,t) = v_{h,\Delta t}(1,t), \\ (y_h^0, y_h^1). \end{cases} \tag{16}$$

Théorème (AM, M2AN 05)

Soit $T > 2$. Le schéma aux différences finies, consistant d'ordre 2, inconditionnellement stable est uniformément contrôlable sous la condition "CFL"

$$0 < \frac{\Delta t}{h} \leq \sqrt{\frac{T}{2}} \tag{17}$$

Précisement, soit $(\boldsymbol{Y_{0h}}, \boldsymbol{Y_{1h}})$ une séquence discrète de la donnée initiale. Supposons que $(a_{k,h}, b_{k,h})_k$, les coefficients de Fourier de $(\boldsymbol{Y_{0h}}, \boldsymbol{Y_{1h}})$, vérifient

$$(a_{k,h})_k \rightharpoonup (a_k)_k, \left(\frac{b_{k,h}}{\sqrt{\lambda_{k,h}^{\theta,\alpha}}}\right)_k \rightharpoonup \left(\frac{b_k}{k\pi}\right)_k \ \textit{dans}\ l^2\ \textit{quand}\ h \to 0, \tag{18}$$

où (a_k, b_k) sont les coefficients de Fourier des données (y_0, y_1). Soit $(v_h)_h$ une séquence de contrôle. On a les convergences suivantes

$$\begin{aligned} Q(v_h) &\rightharpoonup v \ \textit{dans}\ L^2(0,T)\ \textit{quand}\ h \to 0, \\ hP(v_h)' &\rightharpoonup 0 \ \textit{dans}\ L^2(0,T)\ \textit{quand}\ h \to 0 \end{aligned} \tag{19}$$

où v est le HUM contrôle.

- Formellement, le schéma contrôlable est la discrétisation différences finies de l'équation

$$y'' - y_{xx} + \boldsymbol{\varepsilon(h, \Delta t) y''_{xx}} = 0 \qquad (0, T) \times \Omega \tag{20}$$

qui n'est pas uniformément contrôlable. Le spectre associé présente un point d'accumulation

$$\lambda_k = \frac{(k\pi)^2}{1 - \varepsilon(h, \Delta_t)(k\pi)^2} \to -\frac{1}{\varepsilon(h, \Delta t)} \quad k \to \infty \tag{21}$$

- Si $h = \Delta t$, $\varepsilon(h, \Delta t) = 0$ et le schéma usuel, exacte, est contrôlable.
- Le schéma est d'autant plus CPU-efficace que T est grand ($\Delta t / h \leq \sqrt{T/2}$).

- Formellement, le schéma contrôlable est la discrétisation différences finies de l'équation

$$y'' - y_{xx} + \boldsymbol{\varepsilon(h, \Delta t) y''_{xx}} = 0 \qquad (0, T) \times \Omega \tag{20}$$

qui n'est pas uniformément contrôlable. Le spectre associé présente un point d'accumulation

$$\lambda_k = \frac{(k\pi)^2}{1 - \varepsilon(h, \Delta_t)(k\pi)^2} \to -\frac{1}{\varepsilon(h, \Delta t)} \quad k \to \infty \tag{21}$$

- Si $h = \Delta t$, $\varepsilon(h, \Delta t) = 0$ et le schéma usuel, exacte, est contrôlable.
- Le schéma est d'autant plus CPU-efficace que T est grand ($\Delta t / h \leq \sqrt{T/2}$).

- Formellement, le schéma contrôlable est la discrétisation différences finies de l'équation

$$y'' - y_{xx} + \boldsymbol{\varepsilon(h, \Delta t) y''_{xx}} = 0 \qquad (0, T) \times \Omega \tag{20}$$

qui n'est pas uniformément contrôlable. Le spectre associé présente un point d'accumulation

$$\lambda_k = \frac{(k\pi)^2}{1 - \varepsilon(h, \Delta_t)(k\pi)^2} \to -\frac{1}{\varepsilon(h, \Delta t)} \quad k \to \infty \tag{21}$$

- Si $h = \Delta t$, $\varepsilon(h, \Delta t) = 0$ et le schéma usuel, exacte, est contrôlable.
- Le schéma est d'autant plus CPU-efficace que T est grand ($\Delta t / h \leq \sqrt{T/2}$).

Schéma à deux paramètres θ et α, l'un pour contrôler la dispersion, l'autre la stabilité.

$$
(\mathcal{S}^{\theta,\alpha}_{h,\Delta t})
\begin{cases}
\frac{1}{\Delta t^2}\Big(\theta\Big[y^{n+1}_{j+1} - 2y^{n}_{j+1} + y^{n-1}_{j+1}\Big] + (1-2\theta)\Big[y^{n+1}_{j} - 2y^{n}_{j} + y^{n-1}_{j}\Big] + \theta\Big[y^{n+1}_{j-1} - 2y^{n}_{j-1} + y^{n-1}_{j-1}\Big]\Big) \\
\qquad = \frac{1}{h^2}\Big(\alpha\Big[y^{n+1}_{j+1} - 2y^{n+1}_{j} + y^{n+1}_{j-1}\Big] + (1-2\alpha)\Big[y^{n}_{j+1} - 2y^{n}_{j} + y^{n}_{j-1}\Big] + \alpha\Big[y^{n-1}_{j+1} - 2y^{n-1}_{j} + y^{n-1}_{j-1}\Big]\Big), \\
\qquad\qquad 1 \le j \le J+1,\ 0 \le n \le N, \\
y^n_0 = 0, \quad y^n_{J+1} = v^n_h, \qquad 0 \le n \le N, \\
\frac{y^0_j + y^1_j}{2} = y_{0j}, \quad \frac{y^1_j - y^0_j}{\Delta t} = y_{1j}, \qquad 0 \le j \le J+1.
\end{cases}
\tag{22}
$$

Les valeurs propres sont

$$
\lambda^{\theta,\alpha}_{k,h} = \left[\frac{2}{\Delta t}\arcsin\left(\frac{\nu\sin(k\pi h/2)}{\sqrt{1-4(\theta-\alpha\nu^2)\sin^2(k\pi h/2)}}\right)\right]^2, \quad \nu = \frac{\Delta t}{h} \quad \forall k = 1,\dots,J, \tag{23}
$$

Si $(\theta,\alpha,\nu) \in \mathcal{C} = \left\{(\theta,\alpha,\nu) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+_\star,\ \lim_{h\to 0}\cos^2(\pi h/2)(\nu^2(1-4\alpha)+4\theta) = 1\right\}$ *alors*

$$
\sqrt{\lambda^{\theta,\alpha}_{j,h}} - \sqrt{\lambda^{\theta,\alpha}_{j-1,h}} \ge \pi\min(1,\nu^{-2}), \quad \forall j = 2,\cdots,J \tag{24}
$$

Schéma à deux paramètres θ et α, l'un pour contrôler la dispersion, l'autre la stabilité.

$$
(\mathcal{S}^{\theta,\alpha}_{h,\Delta t})\begin{cases}
\frac{1}{\Delta t^2}\Big(\theta\Big[y^{n+1}_{j+1}-2y^{n}_{j+1}+y^{n-1}_{j+1}\Big]+(1-2\theta)\Big[y^{n+1}_{j}-2y^{n}_{j}+y^{n-1}_{j}\Big]+\theta\Big[y^{n+1}_{j-1}-2y^{n}_{j-1}+y^{n-1}_{j-1}\Big]\Big) \\
\quad =\frac{1}{h^2}\Big(\alpha\Big[y^{n+1}_{j+1}-2y^{n+1}_{j}+y^{n+1}_{j-1}\Big]+(1-2\alpha)\Big[y^{n}_{j+1}-2y^{n}_{j}+y^{n}_{j-1}\Big]+\alpha\Big[y^{n-1}_{j+1}-2y^{n-1}_{j}+y^{n-1}_{j-1}\Big]\Big), \\
\qquad\qquad 1\le j\le J+1,\, 0\le n\le N, \\
y^n_0=0,\quad y^n_{J+1}=v^n_h, \qquad 0\le n\le N, \\
\frac{y^0_j+y^1_j}{2}=y_{0j},\quad \frac{y^1_j-y^0_j}{\Delta t}=y_{1j}, \qquad 0\le j\le J+1.
\end{cases}
\tag{22}
$$

Les valeurs propres sont

$$
\lambda^{\theta,\alpha}_{k,h}=\left[\frac{2}{\Delta t}\arcsin\left(\frac{\nu\sin(k\pi h/2)}{\sqrt{1-4(\theta-\alpha\nu^2)\sin^2(k\pi h/2)}}\right)\right]^2,\quad \nu=\frac{\Delta t}{h}\quad \forall k=1,\dots,J, \tag{23}
$$

Lemme

Si $(\theta,\alpha,\nu)\in\mathcal{C}=\Big\{(\theta,\alpha,\nu)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+_\star,\, \lim_{h\to 0}\cos^2(\pi h/2)(\nu^2(1-4\alpha)+4\theta)=1\Big\}$ *alors*

$$
\sqrt{\lambda^{\theta,\alpha}_{j,h}}-\sqrt{\lambda^{\theta,\alpha}_{j-1,h}}\ge\pi\min(1,\nu^{-2}),\quad \forall j=2,\cdots,J \tag{24}
$$

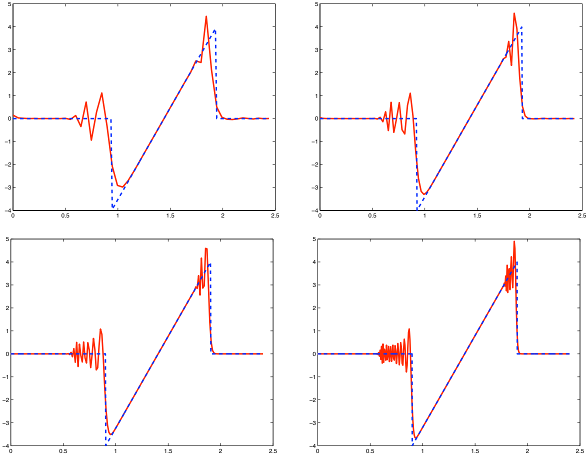


Figure: Avec le schéma modifié $\Delta t = 1.0954h$, $T = 2.4$ ($h = 1/20, 1/40, 1/80, 1/160$).

$$\|P(v_{h,\Delta t}) - v\|_{L^2(0,T)} = O(h). \tag{25}$$

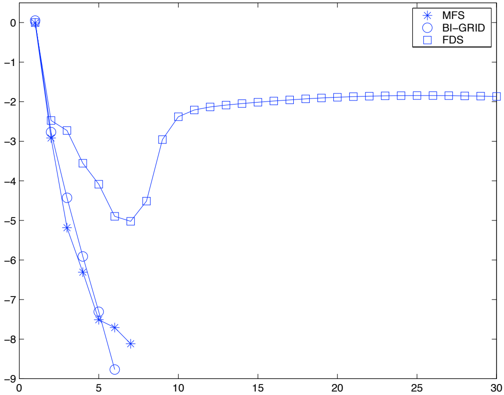


Figure: Log10(erreur relative du résidu) vs. itération du gradient conjugué - gauche : Schéma usuel (□), modifié ($\star$) et Bi-Grille ($\circ$).

$$Cond(\Lambda_{h,\Delta t}^{\theta,\alpha}) = O(h^{-2}). \quad (26)$$

Le schéma aux différences finies - semi-discret -à 5 points

$$(\mathcal{W}_h^{0,0,1})\begin{cases} w_{ij}''(t) + \dfrac{1}{h^2}\Big(4w_{ij}(t) - w_{i+1j}(t) - w_{i-1j}(t) - w_{ij+1}(t) - w_{ij-1}(t)\Big) = 0, \\ \qquad\qquad 1 \le i,j \le N, \quad 0 \le t \le T, \\ w_{i0}(t) = w_{iN+1}(t) = w_{0j}(t) = w_{N+1j}(t) = 0, \quad 0 \le i,j \le N+1, \quad 0 \le t \le T, \\ (w_{ij}(T), w_{ij}'(T)) = (w_{ij}^0, w_{ij}^1), \quad 0 \le i,j \le N+1. \end{cases} \tag{27}$$

n'est pas uniformément contrôlable. La vitesse de groupe associée à

$$\omega = \omega_{fd}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{2}{h}\sqrt{\sin^2\left(\frac{\xi_1 h}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\xi_2 h}{2}\right)}, \quad \boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2) \in (-\pi/h, \pi/h). \tag{28}$$

n'est pas uniformément minorée :

$$\min_{\boldsymbol{\xi}\in(-\pi/h,\pi/h)^2} |\nabla_\xi \omega_{fd}(\boldsymbol{\xi})| = \boldsymbol{O(h)}. \tag{29}$$

[Castro-Micu-AM, IMA Numer. Analysis 2008]
$(y, y') \in (Q^1, Q^0)$

$$\begin{cases} \dfrac{h^2}{16}\left(4w''_{ij} + 2w''_{i+1j} + 2w''_{i-1j} + 2w''_{ij+1} + 2w''_{ij-1} + w''_{i+1j+1} + w''_{i+1j-1} + w''_{i-1j+1} + w''_{i-1j-1}\right) \\ \qquad + \dfrac{1}{3}\left(8w_{ij} - w_{i+1j} - w_{i-1j} - w_{ij+1} - w_{ij-1} - w_{i+1j+1} - w_{i+1j-1} - w_{i-1j+1} - w_{i-1j-1}\right) = 0, \\ \qquad\qquad 1 \le i, j \le N, \\ + C.L. \end{cases} \tag{30}$$

$$\omega = \omega_{mfe}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{2}{h}\sqrt{\tan^2\left(\frac{\xi_1 h}{2}\right) + \tan^2\left(\frac{\xi_2 h}{2}\right) + \frac{2}{3}\tan^2\left(\frac{\xi_1 h}{2}\right)\tan^2\left(\frac{\xi_2 h}{2}\right)} \tag{31}$$

$$\forall \boldsymbol{\xi} \in (-\pi/h, \pi/h)^2 \qquad 1 \le |\nabla_{\xi}\omega_{mfe}(\boldsymbol{\xi})| \le O(h^{-3}) \tag{32}$$

(C. Castro, S. Micu, AM)

Le schéma semi-discret est uniformément contrôlable.

$$|\nabla_{\xi}\omega_{mfe}(\boldsymbol{\xi})| \ge O(\Delta t^{-1} h^3) \Longrightarrow \Delta t = O(h^3) \tag{33}$$

$$+\text{Newmark} \quad : |\nabla_{\xi}\omega_{mfe}(\boldsymbol{\xi})| \ge O(\Delta t^{-1} h^{3/2}) \Longrightarrow \Delta t = O(h^{3/2}) \tag{34}$$

[Castro-Micu-AM, IMA Numer. Analysis 2008]
$(y, y') \in (Q^1, Q^0)$

$$\begin{cases} \frac{h^2}{16}\left(4w''_{ij} + 2w''_{i+1j} + 2w''_{i-1j} + 2w''_{ij+1} + 2w''_{ij-1} + w''_{i+1j+1} + w''_{i+1j-1} + w''_{i-1j+1} + w''_{i-1j-1}\right) \\ \qquad + \frac{1}{3}\left(8w_{ij} - w_{i+1j} - w_{i-1j} - w_{ij+1} - w_{ij-1} - w_{i+1j+1} - w_{i+1j-1} - w_{i-1j+1} - w_{i-1j-1}\right) = 0, \\ \qquad\qquad 1 \leq i,j \leq N, \\ + C.L. \end{cases} \tag{30}$$

$$\omega = \omega_{mfe}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{2}{h}\sqrt{\tan^2\left(\frac{\xi_1 h}{2}\right) + \tan^2\left(\frac{\xi_2 h}{2}\right) + \frac{2}{3}\tan^2\left(\frac{\xi_1 h}{2}\right)\tan^2\left(\frac{\xi_2 h}{2}\right)} \tag{31}$$

$$\forall \boldsymbol{\xi} \in (-\pi/h, \pi/h)^2 \qquad \mathbf{1} \leq |\nabla_{\xi}\omega_{mfe}(\boldsymbol{\xi})| \leq O(h^{-3}) \tag{32}$$

Théorème (C. Castro, S. Micu, AM)

Le schéma semi-discret est uniformément contrôlable.

$$|\nabla_{\xi}\omega_{mfe}(\boldsymbol{\xi})| \geq O(\Delta t^{-1} h^3) \Longrightarrow \Delta t = O(h^3) \tag{33}$$

$$+\text{Newmark} \quad : |\nabla_{\xi}\omega_{mfe}(\boldsymbol{\xi})| \geq O(\Delta t^{-1} h^{3/2}) \Longrightarrow \Delta t = O(h^{3/2}) \tag{34}$$

[Castro-Micu-AM, IMA Numer. Analysis 2008]
$(y, y') \in (Q^1, Q^0)$

$$\begin{cases} \dfrac{h^2}{16}\Big(4w''_{ij} + 2w''_{i+1j} + 2w''_{i-1j} + 2w''_{ij+1} + 2w''_{ij-1} + w''_{i+1j+1} + w''_{i+1j-1} + w''_{i-1j+1} + w''_{i-1j-1}\Big) \\ \qquad + \dfrac{1}{3}\Big(8w_{ij} - w_{i+1j} - w_{i-1j} - w_{ij+1} - w_{ij-1} - w_{i+1j+1} - w_{i+1j-1} - w_{i-1j+1} - w_{i-1j-1}\Big) = 0, \\ \qquad\qquad 1 \le i,j \le N, \\ + C.L. \end{cases} \tag{30}$$

$$\omega = \omega_{mfe}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{2}{h}\sqrt{\tan^2\left(\frac{\xi_1 h}{2}\right) + \tan^2\left(\frac{\xi_2 h}{2}\right) + \frac{2}{3}\tan^2\left(\frac{\xi_1 h}{2}\right)\tan^2\left(\frac{\xi_2 h}{2}\right)} \tag{31}$$

$$\forall \boldsymbol{\xi} \in (-\pi/h, \pi/h)^2 \qquad \mathbf{1} \le |\nabla_{\xi}\omega_{mfe}(\boldsymbol{\xi})| \le O(h^{-3}) \tag{32}$$

Théorème (C. Castro, S. Micu, AM)

Le schéma semi-discret est uniformément contrôlable.

$$|\nabla_{\xi}\omega_{mfe}(\boldsymbol{\xi})| \ge O(\Delta t^{-1} h^3) \Longrightarrow \Delta t = O(h^3) \tag{33}$$

$$+\text{Newmark} \quad : |\nabla_{\xi}\omega_{mfe}(\boldsymbol{\xi})| \ge O(\Delta t^{-1} h^{3/2}) \Longrightarrow \Delta t = O(h^{3/2}) \tag{34}$$

[Castro-Micu-AM, IMA Numer. Analysis 2008]
$(y, y') \in (Q^1, Q^0)$

$$\begin{cases} \dfrac{h^2}{16}\Big(4w''_{ij} + 2w''_{i+1j} + 2w''_{i-1j} + 2w''_{ij+1} + 2w''_{ij-1} + w''_{i+1j+1} + w''_{i+1j-1} + w''_{i-1j+1} + w''_{i-1j-1}\Big) \\ \qquad + \dfrac{1}{3}\Big(8w_{ij} - w_{i+1j} - w_{i-1j} - w_{ij+1} - w_{ij-1} - w_{i+1j+1} - w_{i+1j-1} - w_{i-1j+1} - w_{i-1j-1}\Big) = 0, \\ \qquad\qquad 1 \leq i,j \leq N, \\ + C.L. \end{cases} \tag{30}$$

$$\omega = \omega_{mfe}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{2}{h}\sqrt{\tan^2\left(\frac{\xi_1 h}{2}\right) + \tan^2\left(\frac{\xi_2 h}{2}\right) + \frac{2}{3}\tan^2\left(\frac{\xi_1 h}{2}\right)\tan^2\left(\frac{\xi_2 h}{2}\right)} \tag{31}$$

$$\forall \boldsymbol{\xi} \in (-\pi/h, \pi/h)^2 \qquad \mathbf{1} \leq |\nabla_{\xi}\omega_{mfe}(\boldsymbol{\xi})| \leq O(h^{-3}) \tag{32}$$

Théorème (C. Castro, S. Micu, AM)

Le schéma semi-discret est uniformément contrôlable.

$$|\nabla_{\xi}\omega_{mfe}(\boldsymbol{\xi})| \geq O(\Delta t^{-1}h^3) \Longrightarrow \Delta t = O(h^3) \tag{33}$$

$$+\,\text{Newmark} \quad : |\nabla_{\xi}\omega_{mfe}(\boldsymbol{\xi})| \geq O(\Delta t^{-1}h^{3/2}) \Longrightarrow \Delta t = O(h^{3/2}) \tag{34}$$

Un schéma remarquable .... pour $\Omega = (0,1)^2$

Après introduction et optimisation d'un schéma générique à trois paramètres .....

$$\begin{aligned}\frac{h^2}{16}\Big(4w''_{ij} + 2w''_{i+1j} + 2w''_{i-1j} + 2w''_{ij+1} + 2w''_{ij-1} + w''_{i+1j+1} + w''_{i+1j-1} + w''_{i-1j+1} + w''_{i-1j-1}\Big)\\ + \frac{1}{2}\Big(4w_{ij} - w_{i+1j+1} - w_{i+1j-1} - w_{i-1j+1} - w_{i-1j-1}\Big) = 0, \qquad 1 \le i,j \le N,\end{aligned} \tag{35}$$

formellement associé à la semi-discrétisation de l'équation continue

$$(I + \frac{h^2}{4}\partial_x^2)(I + \frac{h^2}{4}\partial_y^2)w'' - (I + \frac{h^2}{4}\partial_x^2)\partial_y^2 w - (I + \frac{h^2}{4}\partial_y^2)\partial_x^2 w = 0, \quad (0,T)\times\Omega. \tag{36}$$

$$(\mathcal{W}^{1/4,1,0}_{\mathcal{N},h,\Delta t}) \begin{cases} (M^{1/4} + \frac{\Delta t^2}{4}K_h^{1,0})\dfrac{\mathbf{w}_h^{k+1} - 2\mathbf{w}_h^k + \mathbf{w}_h^{k-1}}{\Delta t^2} + K_h^{1,0}\mathbf{w}_h^k = 0, \quad \forall 0 \le k \le K,\\ \mathbf{w}_h^K = \mathbf{w}_h^0, \ \dfrac{\mathbf{w}_h^{K+1} - \mathbf{w}_h^{K-1}}{2\Delta t} = \mathbf{w}_h^1. \end{cases} \tag{37}$$

La vitesse de groupe vérifie $\min_{\xi\in(-\pi/h,\pi/h)^2} |\nabla_\xi \omega(\xi)| = \min(1, \frac{1}{2}h^2\Delta t^{-2})$.

(Asch-AM, JOTA, 08)

Soit $T > 2\sqrt{2}$. Le schéma $(\mathcal{W}^{1/4,1,0}_{\mathcal{N},h,\Delta t})$, consistant d'ordre 2 et inconditionnellement stable, est uniformément contrôlable sous la condition $\frac{\Delta t}{h} \le \sqrt{\frac{T}{2\sqrt{2}}}$.

$$|\xi| = \omega(\xi) \le \omega^{1/4,1,0}_{\mathcal{N},h,h/\sqrt{2}}(\xi) \le \sqrt{2}\,\omega(\xi), \quad \forall \xi \in (-\pi/h, \pi/h)^2. \tag{38}$$

Après introduction et optimisation d'un schéma générique à trois paramètres .....

$$\begin{aligned}\frac{h^2}{16}\Big(4w''_{ij} + 2w''_{i+1j} + 2w''_{i-1j} + 2w''_{ij+1} + 2w''_{ij-1} + w''_{i+1j+1} + w''_{i+1j-1} + w''_{i-1j+1} + w''_{i-1j-1}\Big)\\ + \frac{1}{2}\Big(4w_{ij} - w_{i+1j+1} - w_{i+1j-1} - w_{i-1j+1} - w_{i-1j-1}\Big) = 0, \qquad 1 \le i,j \le N,\end{aligned} \tag{35}$$

formellement associé à la semi-discrétisation de l'équation continue

$$(I + \frac{h^2}{4}\partial_x^2)(I + \frac{h^2}{4}\partial_y^2)w'' - (I + \frac{h^2}{4}\partial_x^2)\partial_y^2 w - (I + \frac{h^2}{4}\partial_y^2)\partial_x^2 w = 0, \quad (0,T)\times\Omega. \tag{36}$$

$$(\mathcal{W}^{1/4,1,0}_{\mathcal{N},h,\Delta t})\begin{cases}(M^{1/4} + \frac{\Delta t^2}{4}K_h^{1,0})\dfrac{\boldsymbol{w}_h^{k+1} - 2\boldsymbol{w}_h^k + \boldsymbol{w}_h^{k-1}}{\Delta t^2} + K_h^{1,0}\boldsymbol{w}_h^k = 0, \quad \forall 0 \le k \le K,\\ \boldsymbol{w}_h^K = \boldsymbol{w}_h^0, \ \dfrac{\boldsymbol{w}_h^{K+1} - \boldsymbol{w}_h^{K-1}}{2\Delta t} = \boldsymbol{w}_h^1.\end{cases} \tag{37}$$

Lemme

La vitesse de groupe vérifie $\min_{\boldsymbol{\xi}\in(-\pi/h,\pi/h)^2} |\nabla_\xi \omega(\boldsymbol{\xi})| = \min(1, \frac{1}{2}h^2\Delta t^{-2})$.

Théorème (Asch-AM, JOTA, 08)

Soit $T > 2\sqrt{2}$. Le schéma $(\mathcal{W}^{1/4,1,0}_{\mathcal{N},h,\Delta t})$, consistant d'ordre 2 et inconditionnellement stable, est uniformément contrôlable sous la condition $\frac{\Delta t}{h} \le \sqrt{\frac{T}{2\sqrt{2}}}$.

$$|\xi| = \omega(\xi) \le \omega^{1/4,1,0}_{\mathcal{N},h,h/\sqrt{2}}(\xi) \le \sqrt{2}\,\omega(\xi), \quad \forall \xi \in (-\pi/h,\pi/h)^2. \tag{38}$$

Après introduction et optimisation d'un schéma générique à trois paramètres .....

$$\begin{aligned}&\frac{h^2}{16}\left(4w''_{ij}+2w''_{i+1j}+2w''_{i-1j}+2w''_{ij+1}+2w''_{ij-1}+w''_{i+1j+1}+w''_{i+1j-1}+w''_{i-1j+1}+w''_{i-1j-1}\right)\\&\quad+\frac{1}{2}\left(4w_{ij}-w_{i+1j+1}-w_{i+1j-1}-w_{i-1j+1}-w_{i-1j-1}\right)=0,\qquad 1\le i,j\le N,\end{aligned}\tag{35}$$

formellement associé à la semi-discrétisation de l'équation continue

$$(I+\frac{h^2}{4}\partial_x^2)(I+\frac{h^2}{4}\partial_y^2)w''-(I+\frac{h^2}{4}\partial_x^2)\partial_y^2 w-(I+\frac{h^2}{4}\partial_y^2)\partial_x^2 w=0,\quad (0,T)\times\Omega.\tag{36}$$

$$(\mathcal{W}^{1/4,1,0}_{\mathcal{N},h,\Delta t})\left\{\begin{array}{l}(M^{1/4}+\frac{\Delta t^2}{4}K_h^{1,0})\frac{\boldsymbol{w}_h^{k+1}-2\boldsymbol{w}_h^{k}+\boldsymbol{w}_h^{k-1}}{\Delta t^2}+K_h^{1,0}\boldsymbol{w}_h^{k}=0,\qquad \forall 0\le k\le K,\\ \boldsymbol{w}_h^{K}=\boldsymbol{w}_h^{0},\ \frac{\boldsymbol{w}_h^{K+1}-\boldsymbol{w}_h^{K-1}}{2\Delta t}=\boldsymbol{w}_h^{1}.\end{array}\right.\tag{37}$$

Lemme

La vitesse de groupe vérifie $\min_{\boldsymbol{\xi}\in(-\pi/h,\pi/h)^2}|\nabla_\xi\omega(\boldsymbol{\xi})|=\min(1,\frac{1}{2}h^2\Delta t^{-2})$.

Théorème (Asch-AM, JOTA, 08)

Soit $T>2\sqrt{2}$. *Le schéma* $(\mathcal{W}^{1/4,1,0}_{\mathcal{N},h,\Delta t})$, *consistant d'ordre 2 et inconditionnellement stable, est uniformément contrôlable sous la condition* $\frac{\Delta t}{h}\le\sqrt{\frac{T}{2\sqrt{2}}}$.

$$|\xi|=\omega(\xi)\le\omega^{1/4,1,0}_{\mathcal{N},h,h/\sqrt{2}}(\xi)\le\sqrt{2}\,\omega(\xi),\quad\forall\xi\in(-\pi/h,\pi/h)^2.\tag{38}$$

Un schéma remarquable .... pour $\Omega = (0,1)^2$

Après introduction et optimisation d'un schéma générique à trois paramètres .....

$$\frac{h^2}{16}\left(4w''_{ij} + 2w''_{i+1j} + 2w''_{i-1j} + 2w''_{ij+1} + 2w''_{ij-1} + w''_{i+1j+1} + w''_{i+1j-1} + w''_{i-1j+1} + w''_{i-1j-1}\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(4w_{ij} - w_{i+1j+1} - w_{i+1j-1} - w_{i-1j+1} - w_{i-1j-1}\right) = 0, \qquad 1 \le i,j \le N, \tag{35}$$

formellement associé à la semi-discrétisation de l'équation continue

$$(I + \frac{h^2}{4}\partial_x^2)(I + \frac{h^2}{4}\partial_y^2)w'' - (I + \frac{h^2}{4}\partial_x^2)\partial_y^2 w - (I + \frac{h^2}{4}\partial_y^2)\partial_x^2 w = 0, \quad (0,T)\times\Omega. \tag{36}$$

$$(\mathcal{W}^{1/4,1,0}_{\mathcal{N},h,\Delta t}) \left\{ \begin{array}{l} (M^{1/4} + \frac{\Delta t^2}{4}K_h^{1,0})\dfrac{\boldsymbol{w}_h^{k+1} - 2\boldsymbol{w}_h^{k} + \boldsymbol{w}_h^{k-1}}{\Delta t^2} + K_h^{1,0}\boldsymbol{w}_h^k = 0, \qquad \forall 0 \le k \le K, \\ \boldsymbol{w}_h^K = \boldsymbol{w}_h^0, \quad \dfrac{\boldsymbol{w}_h^{K+1} - \boldsymbol{w}_h^{K-1}}{2\Delta t} = \boldsymbol{w}_h^1. \end{array} \right. \tag{37}$$

Lemme

La vitesse de groupe vérifie $\min_{\boldsymbol{\xi}\in(-\pi/h,\pi/h)^2} |\nabla_\xi \omega(\boldsymbol{\xi})| = \min(1, \frac{1}{2}h^2\Delta t^{-2})$.

Théorème (Asch-AM, JOTA, 08)

Soit $T > 2\sqrt{2}$. Le schéma $(\mathcal{W}^{1/4,1,0}_{\mathcal{N},h,\Delta t})$, consistant d'ordre 2 et inconditionnellement stable, est uniformément contrôlable sous la condition $\frac{\Delta t}{h} \le \sqrt{\frac{T}{2\sqrt{2}}}$.

$$|\xi| = \omega(\xi) \le \omega^{1/4,1,0}_{\mathcal{N},h,h/\sqrt{2}}(\xi) \le \sqrt{2}\,\omega(\xi), \quad \forall \xi \in (-\pi/h, \pi/h)^2. \tag{38}$$

Après introduction et optimisation d'un schéma générique à trois paramètres .....

$$\frac{h^2}{16}\left(4w''_{ij} + 2w''_{i+1j} + 2w''_{i-1j} + 2w''_{ij+1} + 2w''_{ij-1} + w''_{i+1j+1} + w''_{i+1j-1} + w''_{i-1j+1} + w''_{i-1j-1}\right) + \frac{1}{2}\left(4w_{ij} - w_{i+1j+1} - w_{i+1j-1} - w_{i-1j+1} - w_{i-1j-1}\right) = 0, \qquad 1 \le i,j \le N, \tag{35}$$

formellement associé à la semi-discrétisation de l'équation continue

$$(I + \frac{h^2}{4}\partial_x^2)(I + \frac{h^2}{4}\partial_y^2)w'' - (I + \frac{h^2}{4}\partial_x^2)\partial_y^2 w - (I + \frac{h^2}{4}\partial_y^2)\partial_x^2 w = 0, \quad (0,T)\times\Omega. \tag{36}$$

$$(\mathcal{W}^{1/4,1,0}_{\mathcal{N},h,\Delta t}) \begin{cases} (M^{1/4} + \frac{\Delta t^2}{4}K_h^{1,0})\dfrac{\boldsymbol{w_h^{k+1}} - 2\boldsymbol{w_h^k} + \boldsymbol{w_h^{k-1}}}{\Delta t^2} + K_h^{1,0}\boldsymbol{w_h^k} = 0, & \forall 0 \le k \le K, \\ \boldsymbol{w_h^K} = \boldsymbol{w_h^0}, \quad \dfrac{\boldsymbol{w_h^{K+1}} - \boldsymbol{w_h^{K-1}}}{2\Delta t} = \boldsymbol{w_h^1}. \end{cases} \tag{37}$$

Lemme

La vitesse de groupe vérifie $\min_{\boldsymbol{\xi}\in(-\pi/h,\pi/h)^2} |\nabla_\xi \omega(\boldsymbol{\xi})| = \min(1, \frac{1}{2}h^2\Delta t^{-2})$.

Théorème (Asch-AM, JOTA, 08)

Soit $T > 2\sqrt{2}$. *Le schéma* $(\mathcal{W}^{1/4,1,0}_{\mathcal{N},h,\Delta t})$, *consistant d'ordre 2 et inconditionnellement stable, est uniformément contrôlable sous la condition* $\frac{\Delta t}{h} \le \sqrt{\frac{T}{2\sqrt{2}}}$.

$$|\boldsymbol{\xi}| = \omega(\boldsymbol{\xi}) \le \omega^{1/4,1,0}_{\mathcal{N},h,h/\sqrt{2}}(\boldsymbol{\xi}) \le \sqrt{2}\,\omega(\boldsymbol{\xi}), \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in (-\pi/h,\pi/h)^2. \tag{38}$$

Illustration numérique

$$T = 3 > 2\sqrt{2}, \quad \Omega = (0,1)^2, \quad (y^0(\boldsymbol{x}), y^1(\boldsymbol{x})) = (40\mathcal{X}_D(\boldsymbol{x}), 0), \quad D = (1/3, 2/3)^2, \quad \Gamma_0 = \{x \in \partial\Omega, (1-x)(1-y) = 0\} \tag{39}$$

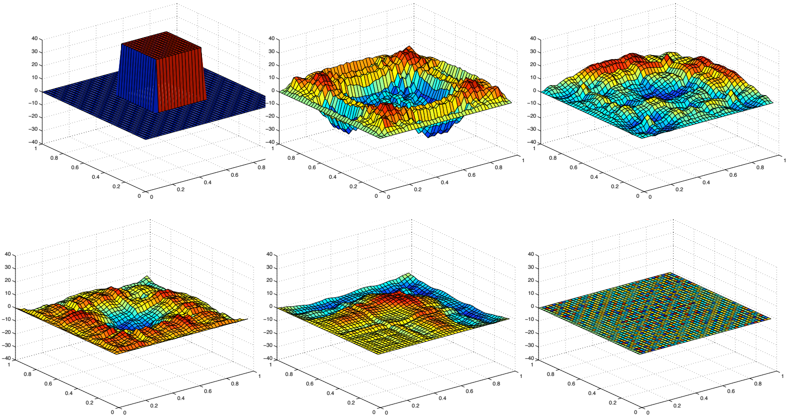


Figure: Contrôlabilité des conditions initiales (y^0, y^1) - Approximation $\boldsymbol{y_h}(t)$ sur Ω pour $t = 0, 3/7, 12/7, 15/7, 18/7$ et $T = 3$.

$$\begin{cases} y'' - \Delta y + a(\boldsymbol{x})\mathcal{X}_\omega y' = 0, & (0,T)\times\Omega, \\ y = 0, & (0,T)\times\partial\Omega, \\ (y(0,\cdot), y'(0,\cdot)) = (y^0, y^1), & \Omega, \end{cases} \tag{40}$$

avec $a \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^+)$, $(y^0, y^1) \in H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$, $\boldsymbol{\omega} \subset \boldsymbol{\Omega}$.

Théorème

Si (Ω, T, ω) vérifie l'optique géométrique

$$\exists \alpha, C > 0, \quad E(t) \le C E(0) e^{-\alpha t}, t > 0, \qquad E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega (|y'|^2 + |\nabla y|^2) dx \tag{41}$$

MAIS, SI $\omega \neq \Omega$, ALORS au niveau discret [Banks-Ito-Wang 91]

$$\exists \alpha_h, C_h > 0, \quad E_h(t) \le C_h E_h(0) e^{-\alpha_h t}, t > 0 \qquad \text{avec} \qquad \lim_{h\to 0} \alpha_h = 0 \tag{42}$$

(A. Pazoto, AM, 2005, COCV)

Le schéma semi-discret associée à l'équation (avec termes de viscosités en h^2 $(h = (h_1, h_2))$)

$$y'' - \Delta y + a(\boldsymbol{x})\mathcal{X}_\omega y' - h_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} y' - h_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} y' = 0, \quad (0,T)\times\Omega. \tag{43}$$

assure la décroissance exponentielle uniforme: $\exists \alpha_0 > 0$ tq. $\alpha_h \ge \alpha_0$ $\forall h > 0$.

$$\begin{cases} y'' - \Delta y + a(\mathbf{x})\mathcal{X}_\omega y' = 0, & (0,T)\times\Omega, \\ y = 0, & (0,T)\times\partial\Omega, \\ (y(0,\cdot), y'(0,\cdot)) = (y^0, y^1), & \Omega, \end{cases} \tag{40}$$

avec $a \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^+)$, $(y^0, y^1) \in H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$, $\boldsymbol{\omega} \subset \boldsymbol{\Omega}$.

Théorème

Si (Ω, T, ω) vérifie l'optique géométrique

$$\exists \alpha, C > 0, \quad E(t) \le CE(0)e^{-\alpha t}, t > 0, \qquad E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega (|y'|^2 + |\nabla y|^2)dx \tag{41}$$

MAIS, SI $\omega \neq \Omega$, ALORS au niveau discret [Banks-Ito-Wang 91]

$$\exists \alpha_h, C_h > 0, \quad E_h(t) \le C_h E_h(0)e^{-\alpha_h t}, t > 0 \qquad \text{avec} \qquad \lim_{h\to 0} \alpha_h = 0 \tag{42}$$

(A. Pazoto, AM, 2005, COCV)

Le schéma semi-discret associée à l'équation (avec termes de viscosités en h^2 $(h = (h_1, h_2))$)

$$y'' - \Delta y + a(\mathbf{x})\mathcal{X}_\omega y' - h_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} y' - h_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} y' = 0, \quad (0,T)\times\Omega. \tag{43}$$

assure la décroissance exponentielle uniforme: $\exists \alpha_0 > 0$ tq. $\alpha_h \ge \alpha_0\ \forall h > 0$.

$$\begin{cases} y'' - \Delta y + a(\boldsymbol{x})\mathcal{X}_\omega y' = 0, & (0,T)\times\Omega, \\ y = 0, & (0,T)\times\partial\Omega, \\ (y(0,\cdot), y'(0,\cdot)) = (y^0, y^1), & \Omega, \end{cases} \tag{40}$$

avec $a \in L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^+)$, $(y^0,y^1) \in H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$, $\boldsymbol{\omega \subset \Omega}$.

Théorème

Si (Ω, T, ω) vérifie l'optique géométrique

$$\exists \alpha, C > 0, \quad E(t) \le CE(0)e^{-\alpha t}, t > 0, \qquad E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega (|y'|^2 + |\nabla y|^2)dx \tag{41}$$

MAIS, SI $\omega \neq \Omega$, ALORS au niveau discret [Banks-Ito-Wang 91]

$$\exists \alpha_h, C_h > 0, \quad E_h(t) \le C_h E_h(0)e^{-\alpha_h t}, t > 0 \qquad \text{avec} \qquad \lim_{h\to 0}\alpha_h = 0 \tag{42}$$

Théorème (A. Pazoto, AM, 2005, COCV)

Le schéma semi-discret associée à l'équation (avec termes de viscosités en h^2 $(h = (h_1, h_2))$)

$$y'' - \Delta y + a(\boldsymbol{x})\mathcal{X}_\omega y' - \boldsymbol{h_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} y'} - \boldsymbol{h_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} y'} = 0, \quad (0,T)\times\Omega. \tag{43}$$

assure la décroissance exponentielle uniforme: $\exists \alpha_0 > 0$ tq. $\alpha_h \ge \alpha_0$ $\forall h > 0$.

L'analogue au niveau semi-discret de la relation

$$TE(0) = -\int_\Omega u_t\left(\boldsymbol{x}\cdot\nabla u + \frac{u}{2}\right)\Big|_0^T dx + \frac{1}{2}\int_0^T\int_{\partial\Omega}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\nu}\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2 d\nu dt, \quad \Omega\subset\mathbb{R}^2 \tag{44}$$

est

$$\begin{aligned} TE_{h_1,h_2}(0) &= \int_0^T E_{h_1,h_2}(t)dt \\ &= \cdots \quad ("\,bons"\ termes) \\ &- \frac{h_1h_2}{2}\sum_{j=0}^J\sum_{k\in\mathcal{I}_j}\int_0^T\left\{\left(\frac{u_{j+1,k}-u_{j,k}}{h_1}\right)^2+\left(\frac{u_{j,k+1}-u_{j,k}}{h_2}\right)^2\right\}dt \\ &+ \frac{h_1h_2}{2}\sum_{j=0}^J\sum_{k\in\mathcal{I}_j}\int_0^T\left\{\left(\frac{u_{j+1,k+1}-u_{j,k+1}}{h_1}\right)\left(\frac{u_{j+1,k}-u_{j,k}}{h_1}\right)\right\}dt \\ &+ \frac{h_1h_2}{2}\sum_{j=0}^J\sum_{k\in\mathcal{I}_j}\int_0^T\left\{\left(\frac{u_{j+1,k+1}-u_{j+1,k}}{h_2}\right)\left(\frac{u_{j,k+1}-u_{j,k}}{h_2}\right)\right\}dt \\ &+ \frac{h_1h_2}{4}\sum_{j=0}^J\sum_{k\in\mathcal{I}_j}\int_0^T\left\{h_1^2\left(\frac{u'_{j+1,k}-u'_{j,k}}{h_1}\right)^2+h_2^2\left(\frac{u'_{j,k+1}-u'_{j,k}}{h_2}\right)^2\right\}dt. \end{aligned} \tag{45}$$

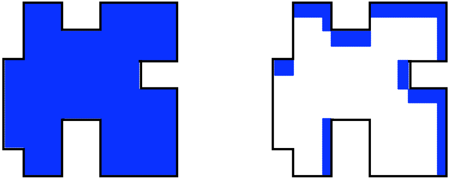


Figure: Domaine $\Omega \subset (0,1)^2$ et support $\omega \subset \Omega$ de la fonction de la dissipation *a*.

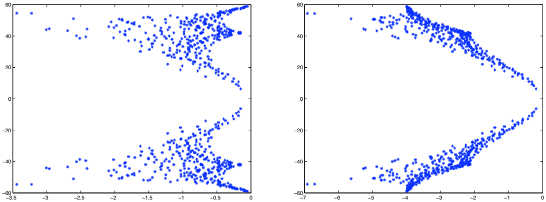


Figure: Distribution du spectre de $\mathcal{A}_h$ sans et avec termes de viscosité.

	$h = 1/20$	$h = 1/40$	$h = 1/80$	$h = 1/160$
sans viscosité	1.53×10^{-2}	9.34×10^{-3}	3.12×10^{-3}	2.3×10^{-4}
avec viscosité	2.32×10^{-1}	1.92×10^{-1}	1.90×10^{-1}	1.89×10^{-1}

Table: Abcisse spectrale de l'opérateur -max$\{Re(\lambda), \lambda \in \sigma(\mathcal{A}_h)\}$.

[Loreti-Geymonat-Valente, 92,95,00], [Pazoto-AM, DCDS-B 08], [AmmarKhodja-Geymonat-AM, 08]

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{\varepsilon}}'' + \boldsymbol{A_M} \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{\varepsilon}} + \varepsilon^2 \boldsymbol{A_F} \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = 0, \quad \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = (y_{\varepsilon,1}, y_{\varepsilon,2}, y_{\varepsilon,3}) & (0,T) \times \omega \\ y_{\varepsilon,\alpha} = \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{\alpha}}, (\varepsilon^2) y_{\varepsilon,3} = 0, (\varepsilon^2) \partial_n y_{\varepsilon,3} = \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{3}}, & (0,T) \times \partial\omega, \\ \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{0}} \in L^2(\omega)^3, \quad \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{\varepsilon}}' = \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{1}} \in H^{-1}(\omega) \times H^{-1}(\omega) \times H^{-2}(\omega) & \{0\} \times \omega \end{cases} \tag{46}$$

$\boldsymbol{A_M}$ opérateur membranaire - $\boldsymbol{A_F}$ opérateur de flexion

(Cas $\varepsilon > 0$, Miara-Valente, 99)

Si $T \geq T^\star(\varepsilon, courbure)$, alors il existe $\boldsymbol{v} = (v_\alpha, v_3) \in (L^2((0,T) \times \partial\omega))^3$ tel que $\boldsymbol{y}(T,\cdot) = \boldsymbol{y}'(T,\cdot) = \boldsymbol{0}$.

(Valente-Geymonat-Loreti)

Dans le cas d'une hémi-sphère de courbure C, $T^\star(\varepsilon, C) \approx 2 + C\varepsilon^{-1} \to \infty$ quand $\varepsilon \to 0$

- L'opérateur $\boldsymbol{A_M}$ auto-adjoint d'ordre mixte possède du spectre essentiel.
- Pour quelles données $(\boldsymbol{y}^0, \boldsymbol{y}^1)$ la contrôlabilité uniforme a-t-elle lieu ???

[Loreti-Geymonat-Valente, 92,95,00], [Pazoto-AM, DCDS-B 08], [AmmarKhodja-Geymonat-AM, 08]

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{\varepsilon}}'' + \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{\varepsilon}} + \varepsilon^2 \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = 0, \quad \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = (y_{\varepsilon,1}, y_{\varepsilon,2}, y_{\varepsilon,3}) & (0,T)\times\omega \\ y_{\varepsilon,\alpha} = \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{\alpha}}, (\varepsilon^2) y_{\varepsilon,3} = 0, (\varepsilon^2)\partial_n y_{\varepsilon,3} = \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{3}}, & (0,T)\times\partial\omega, \\ \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{0}} \in L^2(\omega)^3, \quad \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{\varepsilon}}' = \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{1}} \in H^{-1}(\omega)\times H^{-1}(\omega)\times H^{-2}(\omega) & \{0\}\times\omega \end{cases} \tag{46}$$

$\boldsymbol{A_M}$ opérateur membranaire - $\boldsymbol{A_F}$ opérateur de flexion

Théorème (Cas $\varepsilon > 0$, Miara-Valente, 99)

Si $T \geq T^\star(\varepsilon, courbure)$, alors il existe $\mathbf{v} = (v_\alpha, v_3) \in (L^2((0,T)\times\partial\omega))^3$ tel que $\mathbf{y}(T,\cdot) = \boldsymbol{y'}(T,\cdot) = \mathbf{0}$.

Théorème (Valente-Geymonat-Loreti)

Dans le cas d'une hémi-sphère de courbure C, $T^\star(\varepsilon, C) \approx 2 + C\varepsilon^{-1} \to \infty$ quand $\varepsilon \to 0$

- L'opérateur $\boldsymbol{A_M}$ auto-adjoint d'ordre mixte possède du spectre essentiel.
- Pour quelles données $(\boldsymbol{y^0}, \boldsymbol{y^1})$ la contrôlabilité uniforme a-t-elle lieu ???

[Loreti-Geymonat-Valente, 92,95,00], [Pazoto-AM, DCDS-B 08], [AmmarKhodja-Geymonat-AM, 08]

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}_\varepsilon'' + \boldsymbol{A_M y_\varepsilon} + \varepsilon^2 \boldsymbol{A_F y_\varepsilon} = 0, \quad \boldsymbol{y_\varepsilon} = (y_{\varepsilon,1}, y_{\varepsilon,2}, y_{\varepsilon,3}) & (0,T)\times\omega \\ y_{\varepsilon,\alpha} = \boldsymbol{v_\alpha}, (\varepsilon^2) y_{\varepsilon,3} = 0, (\varepsilon^2)\partial_n y_{\varepsilon,3} = \boldsymbol{v_3}, & (0,T)\times\partial\omega, \\ \boldsymbol{y_\varepsilon} = \boldsymbol{y^0} \in L^2(\omega)^3, \quad \boldsymbol{y_\varepsilon'} = \boldsymbol{y^1} \in H^{-1}(\omega)\times H^{-1}(\omega)\times H^{-2}(\omega) & \{0\}\times\omega \end{cases} \tag{46}$$

$\boldsymbol{A_M}$ opérateur membranaire - $\boldsymbol{A_F}$ opérateur de flexion

Théorème (Cas $\varepsilon > 0$, Miara-Valente, 99)

Si $T \geq T^\star(\varepsilon, courbure)$, alors il existe $\mathbf{v} = (v_\alpha, v_3) \in (L^2((0,T)\times\partial\omega))^3$ tel que $\mathbf{y}(T,\cdot) = \boldsymbol{y'}(T,\cdot) = \mathbf{0}$.

Théorème (Valente-Geymonat-Loreti)

Dans le cas d'une hémi-sphère de courbure C, $T^\star(\varepsilon, C) \approx 2 + C\varepsilon^{-1} \to \infty$ quand $\varepsilon \to 0$

- L'opérateur $\boldsymbol{A_M}$ auto-adjoint d'ordre mixte possède du spectre essentiel.
- Pour quelles données $(\boldsymbol{y^0}, \boldsymbol{y^1})$ la contrôlabilité uniforme a-t-elle lieu ???

[Loreti-Geymonat-Valente, 92,95,00], [Pazoto-AM, DCDS-B 08], [AmmarKhodja-Geymonat-AM, 08]

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{\varepsilon}}'' + \boldsymbol{A_M y_\varepsilon} + \varepsilon^2 \boldsymbol{A_F y_\varepsilon} = 0, \quad \boldsymbol{y_\varepsilon} = (y_{\varepsilon,1}, y_{\varepsilon,2}, y_{\varepsilon,3}) & (0,T)\times\omega \\ y_{\varepsilon,\alpha} = \boldsymbol{v_\alpha}, (\varepsilon^2) y_{\varepsilon,3} = 0, (\varepsilon^2)\partial_n y_{\varepsilon,3} = \boldsymbol{v_3}, & (0,T)\times\partial\omega, \\ \boldsymbol{y_\varepsilon} = \boldsymbol{y^0} \in L^2(\omega)^3, \quad \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{\varepsilon}}' = \boldsymbol{y^1} \in H^{-1}(\omega)\times H^{-1}(\omega)\times H^{-2}(\omega) & \{0\}\times\omega \end{cases} \tag{46}$$

$\boldsymbol{A_M}$ opérateur membranaire - $\boldsymbol{A_F}$ opérateur de flexion

Théorème (Cas $\varepsilon > 0$, Miara-Valente, 99)

Si $T \geq T^\star(\varepsilon, courbure)$, alors il existe $\boldsymbol{v} = (v_\alpha, v_3) \in (L^2((0,T)\times\partial\omega))^3$ tel que $\mathbf{y}(T,\cdot) = \boldsymbol{y}'(T,\cdot) = \mathbf{0}$.

Théorème (Valente-Geymonat-Loreti)

Dans le cas d'une hémi-sphère de courbure C, $T^\star(\varepsilon, C) \approx 2 + C\varepsilon^{-1} \to \infty$ quand $\varepsilon \to 0$

- L'opérateur $\boldsymbol{A_M}$ auto-adjoint d'ordre mixte possède du spectre essentiel.
- Pour quelles données $(\boldsymbol{y^0}, \boldsymbol{y^1})$ la contrôlabilité uniforme a-t-elle lieu ???

[Loreti-Geymonat-Valente, 92,95,00], [Pazoto-AM, DCDS-B 08], [AmmarKhodja-Geymonat-AM, 08]

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{\varepsilon}}'' + \boldsymbol{A_M} \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{\varepsilon}} + \varepsilon^2 \boldsymbol{A_F} \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = 0, \quad \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = (y_{\varepsilon,1}, y_{\varepsilon,2}, y_{\varepsilon,3}) & (0,T)\times\omega \\ y_{\varepsilon,\alpha} = \boldsymbol{v_\alpha}, (\varepsilon^2) y_{\varepsilon,3} = 0, (\varepsilon^2)\partial_n y_{\varepsilon,3} = \boldsymbol{v_3}, & (0,T)\times\partial\omega, \\ \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{0}} \in L^2(\omega)^3, \quad \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{\varepsilon}}' = \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{1}} \in H^{-1}(\omega)\times H^{-1}(\omega)\times H^{-2}(\omega) & \{0\}\times\omega \end{cases} \tag{46}$$

$\boldsymbol{A_M}$ opérateur membranaire - $\boldsymbol{A_F}$ opérateur de flexion

Théorème (Cas $\varepsilon > 0$, Miara-Valente, 99)

Si $T \geq T^\star(\varepsilon, courbure)$, alors il existe $\mathbf{v} = (v_\alpha, v_3) \in (L^2((0,T)\times\partial\omega))^3$ tel que $\mathbf{y}(T,\cdot) = \boldsymbol{y'}(T,\cdot) = \mathbf{0}$.

Théorème (Valente-Geymonat-Loreti)

Dans le cas d'une hémi-sphère de courbure C, $T^\star(\varepsilon, C) \approx 2 + C\varepsilon^{-1} \to \infty$ quand $\varepsilon \to 0$

- L'opérateur $\boldsymbol{A_M}$ auto-adjoint d'ordre mixte possède du spectre essentiel.
- Pour quelles données $(\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{0}}, \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{1}})$ la contrôlabilité uniforme a-t-elle lieu ???

[Ammar-Khodja, Geymonat, AM 08]

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}'' + \boldsymbol{A_M}\boldsymbol{y} = 0, \quad \boldsymbol{y} = (y_1, y_3) & (0,T)\times\omega \\ y_1(\cdot,0) = 0,\ y_1(\cdot,1) = \boldsymbol{v}, & (0,T) \\ (\boldsymbol{y}(0,\cdot), \boldsymbol{y}'(0,\cdot)) = (\boldsymbol{y^0}, \boldsymbol{y^1}), & \omega. \end{cases} \qquad \boldsymbol{A_M}\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} -(y_{1,11} + r^{-1}y_{3,1}) \\ r^{-1}(y_{1,1} + r^{-1}y_3) \end{pmatrix} \tag{47}$$

Question : $\forall(\boldsymbol{y^0}, \boldsymbol{y^1}) \in (L^2 \times L^2) \times (H^{-1} \times L^2), \exists v \in L^2((0,T)\times\{1\})$ tq $\boldsymbol{y}(T,\xi) = \boldsymbol{y'}(T,\xi) = 0$?

La contrôlabilité se réduit à l'inégalité d'observabilité

$$C_1 \|\phi^0, \phi^1\|^2_{\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{H}} \leq \int_0^T (\phi_{1,1} + r^{-1}\phi_3)^2(1,t)dt, \quad \boldsymbol{V} = H_0^1(\omega)\times L^2(\omega), \quad \boldsymbol{H} = L^2(\omega)\times L^2(\omega) \tag{48}$$

$$\sigma(\boldsymbol{A_M}) = \{0, r^{-2}, r^{-2}+(k\pi)^2, k>0\}, \quad \sigma_{ess}(\boldsymbol{A_M}) = \{0\}, \quad Ker\boldsymbol{A_M} = \{v_\zeta = (r^{-1}\zeta, -\zeta_1) \in \boldsymbol{H}, \zeta \in H_0^1(\omega)\} \tag{49}$$

Si $\phi^0, \phi^1 \in Ker\boldsymbol{A_M}$ alors $\phi(t,\cdot) \in Ker\boldsymbol{A_M} \rightarrow \phi_{1,1} + r^{-1}\phi_3 = 0$.

On ne peut avoir observabilité que dans un sous-espace de l'orthogonal de $Ker\boldsymbol{A_M}$:

$$\boldsymbol{H}^{\perp} = \{\boldsymbol{v} = (\psi_{,1}, -r^{-1}\psi) \in \boldsymbol{H}, \forall\psi \in H^1(\omega)\} \tag{50}$$

[Ammar-Khodja, Geymonat, AM 08]

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}'' + \boldsymbol{A_M}\boldsymbol{y} = 0, \quad \boldsymbol{y} = (y_1, y_3) & (0,T)\times\omega \\ y_1(\cdot,0) = 0,\ y_1(\cdot,1) = \boldsymbol{v}, & (0,T) \\ (\boldsymbol{y}(0,\cdot), \boldsymbol{y}'(0,\cdot)) = (\boldsymbol{y^0}, \boldsymbol{y^1}), & \omega. \end{cases} \qquad \boldsymbol{A_M}\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} -(y_{1,11} + r^{-1}y_{3,1}) \\ r^{-1}(y_{1,1} + r^{-1}y_3) \end{pmatrix} \tag{47}$$

Question : $\forall(\boldsymbol{y^0}, \boldsymbol{y^1}) \in (L^2 \times L^2) \times (H^{-1} \times L^2), \exists v \in L^2((0,T)\times\{1\})$ tq $\boldsymbol{y}(T,\xi) = \boldsymbol{y'}(T,\xi) = 0$?

La contrôlabilité se réduit à l'inégalité d'observabilité

$$C_1 \|\phi^0, \phi^1\|^2_{\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{H}} \leq \int_0^T (\phi_{1,1} + r^{-1}\phi_3)^2(1,t)dt, \quad \boldsymbol{V} = H_0^1(\omega)\times L^2(\omega), \quad \boldsymbol{H} = L^2(\omega)\times L^2(\omega) \tag{48}$$

$$\sigma(\boldsymbol{A_M}) = \{0, r^{-2}, r^{-2} + (k\pi)^2, k > 0\}, \quad \sigma_{ess}(\boldsymbol{A_M}) = \{0\}, \quad Ker\boldsymbol{A_M} = \{v_\zeta = (r^{-1}\zeta, -\zeta_1) \in \boldsymbol{H}, \zeta \in H_0^1(\omega)\} \tag{49}$$

Si $\phi^0, \phi^1 \in Ker\boldsymbol{A_M}$ alors $\phi(t,\cdot) \in Ker\boldsymbol{A_M} \rightarrow \phi_{1,1} + r^{-1}\phi_3 = 0$.

On ne peut avoir observabilité que dans un sous-espace de l'orthogonal de $Ker\boldsymbol{A_M}$:

$$H^{\perp} = \{\boldsymbol{v} = (\psi_{,1}, -r^{-1}\psi) \in \boldsymbol{H}, \forall\psi \in H^1(\omega)\} \tag{50}$$

[Ammar-Khodja, Geymonat, AM 08]

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}'' + \boldsymbol{A_M}\boldsymbol{y} = 0, \quad \boldsymbol{y} = (y_1, y_3) & (0,T)\times\omega \\ y_1(\cdot,0) = 0, \ y_1(\cdot,1) = \boldsymbol{v}, & (0,T) \\ (\boldsymbol{y}(0,\cdot), \boldsymbol{y}'(0,\cdot)) = (\boldsymbol{y^0}, \boldsymbol{y^1}), & \omega. \end{cases} \qquad \boldsymbol{A_M}\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} -(y_{1,11} + r^{-1}y_{3,1}) \\ r^{-1}(y_{1,1} + r^{-1}y_3) \end{pmatrix} \tag{47}$$

Question : $\forall(\boldsymbol{y^0}, \boldsymbol{y^1}) \in (L^2 \times L^2)\times(H^{-1}\times L^2), \exists v \in L^2((0,T)\times\{1\})$ tq $\boldsymbol{y}(T,\xi) = \boldsymbol{y'}(T,\xi) = 0$?

La contrôlabilité se réduit à l'inégalité d'observabilité

$$C_1 \|\phi^{\mathbf{0}}, \phi^{\mathbf{1}}\|^2_{\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{H}} \leq \int_0^T (\phi_{1,1} + r^{-1}\phi_3)^2(1,t)dt, \quad \boldsymbol{V} = H^1_0(\omega)\times L^2(\omega), \quad \boldsymbol{H} = L^2(\omega)\times L^2(\omega) \tag{48}$$

$$\sigma(\boldsymbol{A_M}) = \{0, r^{-2}, r^{-2}+(k\pi)^2, k>0\}, \quad \sigma_{ess}(\boldsymbol{A_M}) = \{0\}, \quad Ker\boldsymbol{A_M} = \{v_\zeta = (r^{-1}\zeta, -\zeta_1) \in \boldsymbol{H}, \zeta \in H^1_0(\omega)\} \tag{49}$$

Si $\phi^{\mathbf{0}}, \phi^{\mathbf{1}} \in Ker\boldsymbol{A_M}$ alors $\phi(t,\cdot) \in Ker\boldsymbol{A_M} \rightarrow \phi_{1,1} + r^{-1}\phi_3 = 0.$

On ne peut avoir observabilité que dans un sous-espace de l'orthogonal de $Ker\boldsymbol{A_M}$:

$$\boldsymbol{H}^{\perp} = \{\boldsymbol{v} = (\psi_{,1}, -r^{-1}\psi) \in \boldsymbol{H}, \forall\psi \in H^1(\omega)\} \tag{50}$$

[Ammar-Khodja, Geymonat, AM 08]

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}'' + \boldsymbol{A_M y} = 0, \quad \boldsymbol{y} = (y_1, y_3) & (0,T)\times\omega \\ y_1(\cdot,0) = 0, \; y_1(\cdot,1) = \boldsymbol{v}, & (0,T) \\ (\boldsymbol{y}(0,\cdot), \boldsymbol{y}'(0,\cdot)) = (\boldsymbol{y^0}, \boldsymbol{y^1}), & \omega. \end{cases} \qquad \boldsymbol{A_M y} = \begin{pmatrix} -(y_{1,11} + r^{-1} y_{3,1}) \\ r^{-1}(y_{1,1} + r^{-1} y_3) \end{pmatrix} \tag{47}$$

Question : $\forall (\boldsymbol{y^0}, \boldsymbol{y^1}) \in (L^2 \times L^2) \times (H^{-1} \times L^2), \exists v \in L^2((0,T)\times\{1\})$ tq $\boldsymbol{y}(T,\xi) = \boldsymbol{y'}(T,\xi) = 0$?

La contrôlabilité se réduit à l'inégalité d'observabilité

$$C_1 \|\phi^{\boldsymbol{0}}, \phi^{\boldsymbol{1}}\|^2_{\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{H}} \le \int_0^T (\phi_{1,1} + r^{-1}\phi_3)^2(1,t)dt, \quad \boldsymbol{V} = H_0^1(\omega)\times L^2(\omega), \quad \boldsymbol{H} = L^2(\omega)\times L^2(\omega) \tag{48}$$

$$\sigma(\boldsymbol{A_M}) = \{0, r^{-2}, r^{-2} + (k\pi)^2, k > 0\}, \quad \sigma_{ess}(\boldsymbol{A_M}) = \{0\}, \quad Ker\boldsymbol{A_M} = \{v_\zeta = (r^{-1}\zeta, -\zeta_1) \in \boldsymbol{H}, \zeta \in H_0^1(\omega)\} \tag{49}$$

Si $\phi^{\boldsymbol{0}}, \phi^{\boldsymbol{1}} \in Ker\boldsymbol{A_M}$ alors $\phi(t,\cdot) \in Ker\boldsymbol{A_M} \to \phi_{1,1} + r^{-1}\phi_3 = 0$.

On ne peut avoir observabilité que dans un sous-espace de l'orthogonal de $Ker\boldsymbol{A_M}$:

$$\boldsymbol{H}^{\perp} = \{\boldsymbol{v} = (\psi_{,1}, -r^{-1}\psi) \in \boldsymbol{H}, \forall\psi \in H^1(\omega)\} \tag{50}$$

[Ammar-Khodja, Geymonat, AM 08]

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}'' + \boldsymbol{A_M y} = 0, \quad \boldsymbol{y} = (y_1, y_3) & (0,T) \times \omega \\ y_1(\cdot, 0) = 0, \ y_1(\cdot, 1) = \boldsymbol{v}, & (0,T) \\ (\boldsymbol{y}(0,\cdot), \boldsymbol{y}'(0,\cdot)) = (\boldsymbol{y^0}, \boldsymbol{y^1}), & \omega. \end{cases} \qquad \boldsymbol{A_M y} = \begin{pmatrix} -(y_{1,11} + r^{-1} y_{3,1}) \\ r^{-1}(y_{1,1} + r^{-1} y_3) \end{pmatrix} \tag{47}$$

Question : $\forall (\boldsymbol{y^0}, \boldsymbol{y^1}) \in (L^2 \times L^2) \times (H^{-1} \times L^2), \exists v \in L^2((0,T) \times \{1\})$ tq $\boldsymbol{y}(T,\xi) = \boldsymbol{y'}(T,\xi) = 0$?

La contrôlabilité se réduit à l'inégalité d'observabilité

$$C_1 \|\boldsymbol{\phi^0}, \boldsymbol{\phi^1}\|^2_{\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{H}} \leq \int_0^T (\phi_{1,1} + r^{-1}\phi_3)^2(1,t)dt, \quad \boldsymbol{V} = H_0^1(\omega) \times L^2(\omega), \quad \boldsymbol{H} = L^2(\omega) \times L^2(\omega) \tag{48}$$

$$\sigma(\boldsymbol{A_M}) = \{0, r^{-2}, r^{-2} + (k\pi)^2, k > 0\}, \quad \sigma_{ess}(\boldsymbol{A_M}) = \{0\}, \quad Ker \boldsymbol{A_M} = \{v_\zeta = (r^{-1}\zeta, -\zeta_1) \in \boldsymbol{H}, \zeta \in H_0^1(\omega)\} \tag{49}$$

Si $\boldsymbol{\phi^0}, \boldsymbol{\phi^1} \in Ker \boldsymbol{A_M}$ alors $\phi(t,\cdot) \in Ker \boldsymbol{A_M} \to \phi_{1,1} + r^{-1}\phi_3 = 0$.

On ne peut avoir observabilité que dans un sous-espace de l'orthogonal de $Ker \boldsymbol{A_M}$:

$$\boldsymbol{H}^{\perp} = \{\boldsymbol{v} = (\psi_{,1}, -r^{-1}\psi) \in \boldsymbol{H}, \forall \psi \in H^1(\omega)\} \tag{50}$$

[Ammar-Khodja, Geymonat, AM (2008)]

Proposition (Observabilité non uniforme par rapport à r^{-1})

Soit $r > 0$. Pour tout temps T tel que

$$T > T^\star(r) \equiv \frac{2\pi}{\gamma}, \quad \gamma = \min\left(2r^{-1}, \sqrt{r^{-2}+\pi^2} - r^{-1}\right) \tag{51}$$

il existe deux constantes strictement positives $C_1(r)$ et $C_2(r)$ telles que

$$C_1(r)\|\phi^{\mathbf{0}}, \phi^{\mathbf{1}}\|^2_{\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{H}} \le \int_0^T (\phi_{1,1} + r^{-1}\phi_3)^2(1,t)dt \le C_2(r)\|\phi^{\mathbf{0}}, \phi^{\mathbf{1}}\|^2_{\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{H}} \tag{52}$$

pour tout $(\phi^{\mathbf{0}}, \phi^{\mathbf{1}}) \in \boldsymbol{V}^\perp \times \boldsymbol{H}^\perp$.

Théorème (Contrôlabilité non uniforme par rapport à r^{-1})

Soit $r > 0$. Pour tout $T > T^\star(r)$ et donnée initiale $(\boldsymbol{y^0}, \boldsymbol{y^1}) \in \boldsymbol{H}^\perp \times \boldsymbol{V}^{\perp\prime}$, il existe un contrôle $v \in L^2(0,T)$ qui conduit au repos à l'instant T la solution $\boldsymbol{y}$ associée à $(\boldsymbol{y^0}, \boldsymbol{y^1})$. De plus, le contrôle de norme L^2 minimale est donné par $v = (\phi_{1,1} + r^{-1}\phi_3)(1,\cdot)$ où ϕ est la solution du problème adjoint et associée à $(\phi^{\mathbf{0}}, \phi^{\mathbf{1}})$ minimum de $\mathcal{J}$ sur $\boldsymbol{V}^\perp \times \boldsymbol{H}^\perp$.

[Ammar-Khodja, Geymonat, AM (2008)]

Proposition (Observabilité non uniforme par rapport à r^{-1})

Soit $r > 0$. Pour tout temps T tel que

$$T > T^\star(r) \equiv \frac{2\pi}{\gamma}, \quad \gamma = \min\left(2r^{-1}, \sqrt{r^{-2}+\pi^2} - r^{-1}\right) \tag{51}$$

il existe deux constantes strictement positives $C_1(r)$ et $C_2(r)$ telles que

$$C_1(r)\|\phi^{\mathbf{0}}, \phi^{\mathbf{1}}\|^2_{\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{H}} \leq \int_0^T (\phi_{1,1} + r^{-1}\phi_3)^2(1,t)dt \leq C_2(r)\|\phi^{\mathbf{0}}, \phi^{\mathbf{1}}\|^2_{\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{H}} \tag{52}$$

pour tout $(\phi^{\mathbf{0}}, \phi^{\mathbf{1}}) \in \boldsymbol{V}^\perp \times \boldsymbol{H}^\perp$.

Théorème (Contrôlabilité non uniforme par rapport à r^{-1})

Soit $r > 0$. Pour tout $T > T^\star(r)$ et donnée initiale $(\boldsymbol{y}^{\mathbf{0}}, \boldsymbol{y}^{\mathbf{1}}) \in \boldsymbol{H}^\perp \times \boldsymbol{V}^{\perp\prime}$, il existe un contrôle $v \in L^2(0,T)$ qui conduit au repos à l'instant T la solution $\boldsymbol{y}$ associée à $(\boldsymbol{y}^{\mathbf{0}}, \boldsymbol{y}^{\mathbf{1}})$. De plus, le contrôle de norme L^2 minimale est donné par $v = (\phi_{1,1} + r^{-1}\phi_3)(1,\cdot)$ où ϕ est la solution du problème adjoint et associée à $(\phi^{\mathbf{0}}, \phi^{\mathbf{1}})$ minimum de $\mathcal{J}$ sur $\boldsymbol{V}^\perp \times \boldsymbol{H}^\perp$.

$$r^{-1} = \pi/5, T = 3.5 > T^\star(r) \approx 3.2552, \quad \boldsymbol{y^0} = \boldsymbol{v_0} + \boldsymbol{v_1} \quad \boldsymbol{y^1} = \mu_0 \boldsymbol{v_0} + \mu_2 \boldsymbol{v_2} \tag{53}$$

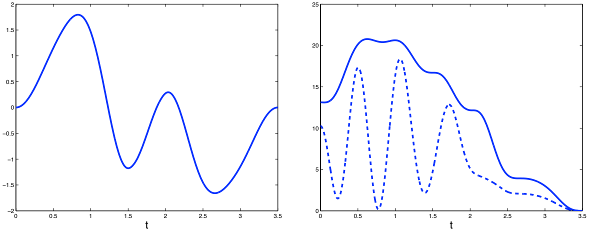


Figure: **Gauche**: contrôle $v(t)$ vs. $t \in (0, T)$; **Droite**: Energie (ligne pleine) et énergie cinétique (ligne tiretée) vs. $t \in (0, T)$.

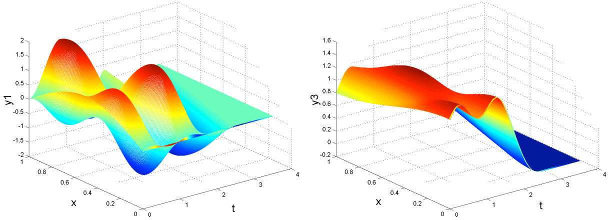


Figure: Solution contrôlée $\boldsymbol{y} = (y_1, y_3)$ sur $(0, T) \times \omega$.

$$\boldsymbol{y}(x_1, x_3) = y_1(\xi)\boldsymbol{\tau}(\xi) + y_3(\xi)\boldsymbol{\nu}(\xi), \quad \xi \in \omega \quad (x_1, x_3) = \phi(\xi) \tag{54}$$

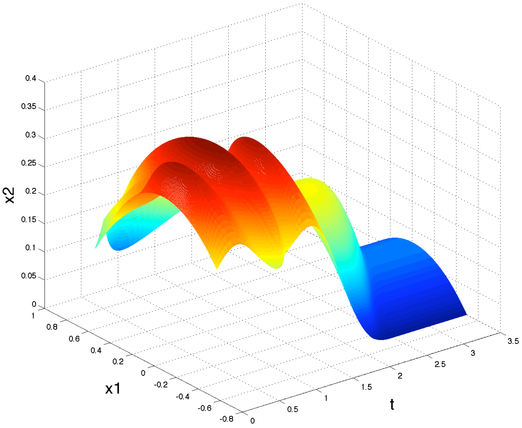


Figure: Evolution dans le plan (O, x_1, x_3) de l'arche contrôlée en fonction du temps $t \in (0, T)$.

Partie II: Optimisation de forme

[Fahroo-Ito, 97], [Freitas, 98], [Hebard-Henrot, 03, 05], [Henrot-Maillot, 05], [AM, Pedegral, Periago, JDE 06], [AM, AMCS 09]

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N = 1, 2$, $a \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^+)$, $L \in (0, 1)$, $T > 0$, $(u^0, u^1) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$,

$$(P^1_\omega): \quad \inf_{\mathcal{X}_\omega} I(\mathcal{X}_\omega) = \int_0^T \int_\Omega (|u_t|^2 + |\nabla u|^2) dxdt \tag{55}$$

soumis à

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + a(\boldsymbol{x}) \mathcal{X}_\omega u_t = 0 & (0, T) \times \Omega, \\ u = 0 & (0, T) \times \partial\Omega, \\ u(0, \cdot) = u^0, \quad u_t(0, \cdot) = u^1 & \{0\} \times \Omega, \\ \mathcal{X}_\omega \in L^\infty(\Omega; \{0, 1\}), & \\ \|\mathcal{X}_\omega\|_{L^1(\Omega)} \leq L \|\mathcal{X}_\Omega\|_{L^1(\Omega)} & \end{cases} \tag{56}$$

[Allaire-Jouve-Toader 03], [Wang-Wang-Zuo 03], [Burger-Osher 05], ...

$$(u^0(\boldsymbol{x}), u^1(\boldsymbol{x}) = (\sin(\pi x_1)\sin(\pi x_2), 0),\ \Omega = (0,1)^2,\ T = 1,\ L = 1/10,\ a(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}\mathcal{X}_\omega(\boldsymbol{x}). \quad (57)$$

$$E(\omega, \boldsymbol{a}, T) - E(\omega, 0, T) = -\frac{\boldsymbol{a}\alpha}{4}(2\alpha T - \sin(2\alpha T)) \int_\omega (u_0(\boldsymbol{x}))^2 dx + o(\boldsymbol{a}),\ \forall T \geq 0. \quad (58)$$

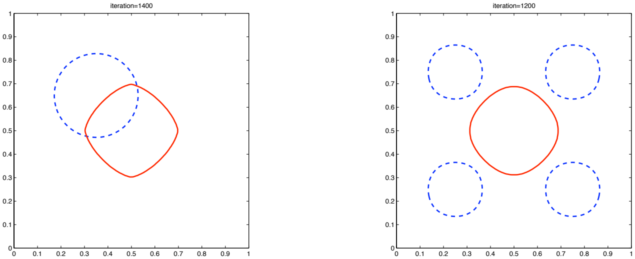


Figure: $\boldsymbol{a} = \mathbf{10}$. - Invariance de $\{\boldsymbol{x} \in \Omega, \psi(\boldsymbol{x}) = 0\}$ par rapport à l'initialisation $\{\boldsymbol{x} \in \Omega, \psi(\boldsymbol{x}) = 0\}$.

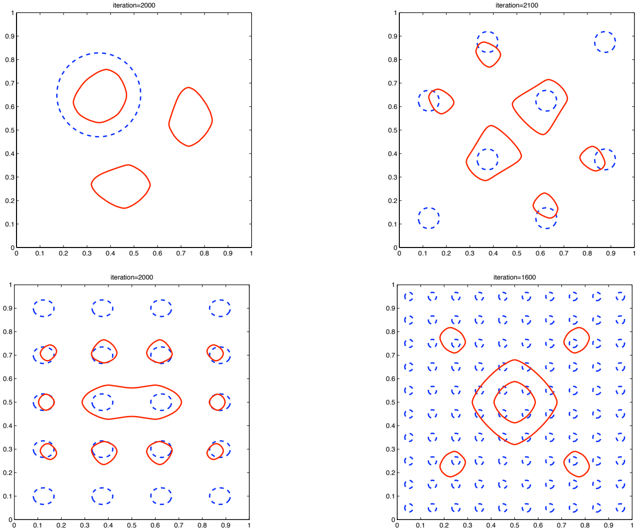


Figure: $\boldsymbol{a} = \mathbf{25}$. - Non invariance de l'ensemble limite $\{\boldsymbol{x} \in \Omega, \psi(\boldsymbol{x}) = 0\}$.

- Approche I : Homogénéisation (Tartar, Murat, Allaire, ...)
- Approche II: Reformulation varationnelle + Calcul des variations + Mesure de Young (Dacorogna, Fonseca, Michaille, Pedregal, ...)

- Approche I : Homogénéisation (Tartar, Murat, Allaire, ...)
- Approche II: Reformulation varationnelle + Calcul des variations + Mesure de Young (Dacorogna, Fonseca, Michaille, Pedregal, ...)

Reformulation variationnelle de (P^1_ω) (Cas $N=1$)

- Supposant ω indépendant du temps, on a (on note $Div = (\partial_t, \partial_x)$)

$$u_{tt} - \Delta u + a(x)\mathcal{X}_\omega u_t = 0 \Longleftrightarrow Div(u_t + a(x)\mathcal{X}_\omega u, -u_x) = 0 \tag{59}$$

$\Longrightarrow \exists v \in H^1((0,T)\times\Omega)$ tq. $u_t + a(x)\mathcal{X}_\omega u = v_x$ and $-u_x = -v_t$

-
$$A\nabla u + B\nabla v = -a\mathcal{X}_\omega \overline{u} \tag{60}$$

avec $\nabla u = \begin{pmatrix} u_t \\ u_x \end{pmatrix}$, $\nabla v = \begin{pmatrix} v_t \\ v_x \end{pmatrix}$, $\overline{u} = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

-
$$\omega = \{x \in \Omega, A\nabla u + B\nabla v = -a(x)\overline{u}\} \quad \text{et} \quad \Omega\backslash\omega = \{x \in \Omega, A\nabla u + B\nabla v = 0\} \tag{61}$$

- Soit le champ de vecteurs $U(t,x) = (u(t,x), v(t,x)) \in (H^1((0,T)\times(0,1)))^2$ et les deux ensembles de matrices

$$\begin{cases} \Lambda_0 = \left\{M \in \mathcal{M}^{2\times 2} : AM^{(1)} + BM^{(2)} = 0\right\} \\ \Lambda_{1,\lambda} = \left\{M \in \mathcal{M}^{2\times 2} : AM^{(1)} + BM^{(2)} = \lambda e_1\right\} \end{cases} \tag{62}$$

où $M^{(i)}$, $i = 1,2$ désigne la i-ème ligne de M, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

-
$$\omega = \{x \in \Omega, \nabla U \in \Lambda_{1,-a(x)U^{(1)}}\}, \quad \Omega\backslash\omega = \{x \in \Omega, \nabla U \in \Lambda_0\} \tag{63}$$

- Supposant ω indépendant du temps, on a (on note $Div = (\partial_t, \partial_x)$)

$$u_{tt} - \Delta u + a(x)\mathcal{X}_\omega u_t = 0 \Longleftrightarrow Div(u_t + a(x)\mathcal{X}_\omega u, -u_x) = 0 \tag{59}$$

$\Longrightarrow \exists v \in H^1((0,T)\times\Omega)$ tq. $u_t + a(x)\mathcal{X}_\omega u = v_x$ and $-u_x = -v_t$

- $$A\nabla u + B\nabla v = -a\mathcal{X}_\omega \overline{u} \tag{60}$$

avec $\nabla u = \begin{pmatrix} u_t \\ u_x \end{pmatrix}$, $\nabla v = \begin{pmatrix} v_t \\ v_x \end{pmatrix}$, $\overline{u} = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- $$\omega = \{x \in \Omega, A\nabla u + B\nabla v = -a(x)\overline{u}\} \quad \text{et} \quad \Omega\backslash\omega = \{x \in \Omega, A\nabla u + B\nabla v = 0\} \tag{61}$$

- Soit le champ de vecteurs $U(t,x) = (u(t,x), v(t,x)) \in (H^1((0,T)\times(0,1)))^2$ et les deux ensembles de matrices

$$\begin{cases} \Lambda_0 = \left\{M \in \mathcal{M}^{2\times 2} : AM^{(1)} + BM^{(2)} = 0\right\} \\ \Lambda_{1,\lambda} = \left\{M \in \mathcal{M}^{2\times 2} : AM^{(1)} + BM^{(2)} = \lambda e_1\right\} \end{cases} \tag{62}$$

où $M^{(i)}$, $i = 1,2$ désigne la i-ème ligne de M, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $$\omega = \{x \in \Omega, \nabla U \in \Lambda_{1,-a(x)U(1)}\}, \quad \Omega\backslash\omega = \{x \in \Omega, \nabla U \in \Lambda_0\} \tag{63}$$

- Supposant ω indépendant du temps, on a (on note $Div = (\partial_t, \partial_x)$)

$$u_{tt} - \Delta u + a(x)\mathcal{X}_\omega u_t = 0 \Longleftrightarrow Div(u_t + a(x)\mathcal{X}_\omega u, -u_x) = 0 \tag{59}$$

$\Longrightarrow \exists v \in H^1((0,T)\times\Omega)$ tq. $u_t + a(x)\mathcal{X}_\omega u = v_x$ and $-u_x = -v_t$

- $$A\nabla u + B\nabla v = -a\mathcal{X}_\omega \overline{u} \tag{60}$$

avec $\nabla u = \begin{pmatrix} u_t \\ u_x \end{pmatrix}$, $\nabla v = \begin{pmatrix} v_t \\ v_x \end{pmatrix}$, $\overline{u} = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- $$\omega = \{x \in \Omega, A\nabla u + B\nabla v = -a(x)\overline{u}\} \quad \text{et} \quad \Omega\backslash\omega = \{x \in \Omega, A\nabla u + B\nabla v = 0\} \tag{61}$$

- Soit le champ de vecteurs $U(t,x) = (u(t,x), v(t,x)) \in (H^1((0,T)\times(0,1)))^2$ et les deux ensembles de matrices

$$\begin{cases} \Lambda_0 = \left\{M \in \mathcal{M}^{2\times 2} : AM^{(1)} + BM^{(2)} = 0\right\} \\ \Lambda_{1,\lambda} = \left\{M \in \mathcal{M}^{2\times 2} : AM^{(1)} + BM^{(2)} = \lambda e_1\right\} \end{cases} \tag{62}$$

où $M^{(i)}$, $i = 1,2$ désigne la i-ème ligne de M, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $$\omega = \{x \in \Omega, \nabla U \in \Lambda_{1,-a(x)U^{(1)}}\}, \quad \Omega\backslash\omega = \{x \in \Omega, \nabla U \in \Lambda_0\} \tag{63}$$

- Supposant ω indépendant du temps, on a (on note $Div = (\partial_t, \partial_x)$)

$$u_{tt} - \Delta u + a(x)\mathcal{X}_\omega u_t = 0 \Longleftrightarrow Div(u_t + a(x)\mathcal{X}_\omega u, -u_x) = 0 \tag{59}$$

$\Longrightarrow \exists v \in H^1((0,T)\times\Omega)$ tq. $u_t + a(x)\mathcal{X}_\omega u = v_x$ and $-u_x = -v_t$

- $$A\nabla u + B\nabla v = -a\mathcal{X}_\omega \overline{u} \tag{60}$$

avec $\nabla u = \begin{pmatrix} u_t \\ u_x \end{pmatrix}$, $\nabla v = \begin{pmatrix} v_t \\ v_x \end{pmatrix}$, $\overline{u} = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- $$\omega = \{x \in \Omega, A\nabla u + B\nabla v = -a(x)\overline{u}\} \quad \text{et} \quad \Omega\backslash\omega = \{x\in\Omega, A\nabla u + B\nabla v = 0\} \tag{61}$$

- Soit le champ de vecteurs $U(t,x) = (u(t,x), v(t,x)) \in (H^1((0,T)\times(0,1)))^2$ et les deux ensembles de matrices

$$\begin{cases} \Lambda_0 = \left\{M \in \mathcal{M}^{2\times 2} : AM^{(1)} + BM^{(2)} = 0\right\} \\ \Lambda_{1,\lambda} = \left\{M \in \mathcal{M}^{2\times 2} : AM^{(1)} + BM^{(2)} = \lambda e_1\right\} \end{cases} \tag{62}$$

où $M^{(i)}$, $i=1,2$ désigne la i-ème ligne de M, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $$\omega = \{x\in\Omega, \nabla U \in \Lambda_{1,-a(x)U^{(1)}}\}, \quad \Omega\backslash\omega = \{x\in\Omega, \nabla U \in \Lambda_0\} \tag{63}$$

- Supposant ω indépendant du temps, on a (on note $Div = (\partial_t, \partial_x)$)

$$u_{tt} - \Delta u + a(x)\mathcal{X}_\omega u_t = 0 \Longleftrightarrow Div(u_t + a(x)\mathcal{X}_\omega u, -u_x) = 0 \tag{59}$$

$\Longrightarrow \exists v \in H^1((0,T)\times\Omega)$ tq. $u_t + a(x)\mathcal{X}_\omega u = v_x$ and $-u_x = -v_t$

-
$$A\nabla u + B\nabla v = -a\mathcal{X}_\omega \overline{u} \tag{60}$$

avec $\nabla u = \begin{pmatrix} u_t \\ u_x \end{pmatrix}$, $\nabla v = \begin{pmatrix} v_t \\ v_x \end{pmatrix}$, $\overline{u} = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

-
$$\omega = \{x \in \Omega, A\nabla u + B\nabla v = -a(x)\overline{u}\} \quad \text{et} \quad \Omega\backslash\omega = \{x \in \Omega, A\nabla u + B\nabla v = 0\} \tag{61}$$

- Soit le champ de vecteurs $U(t,x) = (u(t,x), v(t,x)) \in (H^1((0,T)\times(0,1)))^2$ et les deux ensembles de matrices

$$\begin{cases} \Lambda_0 = \left\{M \in \mathcal{M}^{2\times 2} : AM^{(1)} + BM^{(2)} = 0\right\} \\ \Lambda_{1,\lambda} = \left\{M \in \mathcal{M}^{2\times 2} : AM^{(1)} + BM^{(2)} = \lambda e_1\right\} \end{cases} \tag{62}$$

où $M^{(i)}$, $i = 1,2$ désigne la i-ème ligne de M, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

-
$$\omega = \{x \in \Omega, \nabla U \in \Lambda_{1,-a(x)U^{(1)}}\}, \quad \Omega\backslash\omega = \{x \in \Omega, \nabla U \in \Lambda_0\} \tag{63}$$

- Alors considérant les deux fonctions $W, V : \mathcal{M}^{2\times 2} \to R \cup \{+\infty\}$

$$W(x,U,M) = \begin{cases} \left|M^{(1)}\right|^2, & M \in \Lambda_0 \cup \Lambda_{1,-a(x)U^{(1)}} \\ +\infty, & \text{sinon} \end{cases} \quad V(x,U,M) = \begin{cases} 1, & M \in \Lambda_{1,-a(x)U^{(1)}} \\ 0, & M \in \Lambda_0 \setminus \Lambda_{1,-a(x)U^{(1)}} \\ +\infty, & \text{sinon} \end{cases} \tag{64}$$

- le problème (P^1_ω) est equivalent à la formulation vectorielle variationnelle

$$\left(VP^1_\omega\right) \quad m \equiv \inf_U \int_0^T \int_0^1 W(x, U(t,x), \nabla U(t,x))\ dx\, dt \tag{65}$$

soumis à

$$\begin{cases} U = (u,v) \in \left(H^1((0,T)\times(0,1))\right)^2 \\ U^{(1)}(t,0) = U^{(1)}(t,1) = 0, & t \in (0,T) \\ U^{(1)}(0,x) = u^0(x), \quad U^{(1)}_t(0,x) = u^1(x), & x \in \Omega \\ \int_0^1 V(x, U(t,x), \nabla U(t,x))\ dx \leq L \mid \Omega \mid, & t \in (0,T). \end{cases} \tag{66}$$

- Cette procédure transforme le problème scalaire $\left(P^1_\omega\right)$ avec contraintes intégrables ponctuelles en un problème non-convexe, variationnel $\left(VP^1_\omega\right)$.

- Alors considérant les deux fonctions $W, V : \mathcal{M}^{2\times 2} \to R \cup \{+\infty\}$

$$W(x,U,M) = \begin{cases} \left|M^{(1)}\right|^2, & M \in \Lambda_0 \cup \Lambda_{1,-a(x)U^{(1)}} \\ +\infty, & \text{sinon} \end{cases} \quad V(x,U,M) = \begin{cases} 1, & M \in \Lambda_{1,-a(x)U^{(1)}} \\ 0, & M \in \Lambda_0 \setminus \Lambda_{1,-a(x)U^{(1)}} \\ +\infty, & \text{sinon} \end{cases} \tag{64}$$

- le problème (P^1_ω) est equivalent à la formulation vectorielle variationnelle

$$\left(VP^1_\omega\right) \quad m \equiv \inf_U \int_0^T \int_0^1 W(x, U(t,x), \nabla U(t,x))\ dx\, dt \tag{65}$$

soumis à

$$\begin{cases} U = (u,v) \in \left(H^1((0,T)\times(0,1))\right)^2 \\ U^{(1)}(t,0) = U^{(1)}(t,1) = 0, & t \in (0,T) \\ U^{(1)}(0,x) = u^0(x), \quad U^{(1)}_t(0,x) = u^1(x), & x \in \Omega \\ \int_0^1 V(x, U(t,x), \nabla U(t,x))\ dx \le L \mid \Omega \mid, & t \in (0,T). \end{cases} \tag{66}$$

- Cette procédure transforme le problème scalaire $\left(P^1_\omega\right)$ avec contraintes intégrables ponctuelles en un problème non-convexe, variationnel $\left(VP^1_\omega\right)$.

- Alors considérant les deux fonctions $W, V : \mathcal{M}^{2\times 2} \to R \cup \{+\infty\}$

$$W(x,U,M) = \begin{cases} \left|M^{(1)}\right|^2, & M \in \Lambda_0 \cup \Lambda_{1,-a(x)U^{(1)}} \\ +\infty, & \text{sinon} \end{cases} \quad V(x,U,M) = \begin{cases} 1, & M \in \Lambda_{1,-a(x)U^{(1)}} \\ 0, & M \in \Lambda_0 \setminus \Lambda_{1,-a(x)U^{(1)}} \\ +\infty, & \text{sinon} \end{cases} \tag{64}$$

- le problème (P^1_ω) est equivalent à la formulation vectorielle variationnelle

$$\left(VP^1_\omega\right) \quad m \equiv \inf_U \int_0^T \int_0^1 W\left(x, U(t,x), \nabla U(t,x)\right)\, dx\, dt \tag{65}$$

soumis à

$$\begin{cases} U = (u,v) \in \left(H^1\left((0,T)\times(0,1)\right)\right)^2 \\ U^{(1)}(t,0) = U^{(1)}(t,1) = 0, & t \in (0,T) \\ U^{(1)}(0,x) = u^0(x), \quad U^{(1)}_t(0,x) = u^1(x), & x \in \Omega \\ \int_0^1 V\left(x, U(t,x), \nabla U(t,x)\right)\, dx \le L \mid \Omega \mid, & t \in (0,T). \end{cases} \tag{66}$$

- Cette procédure transforme le problème scalaire $\left(P^1_\omega\right)$ avec contraintes intégrables ponctuelles en un problème non-convexe, variationnel $\left(VP^1_\omega\right)$.

- Une mesure de Young ν est une famille de mesure de probabilité $\{\nu_x\}_{x\in\Omega}$ associée à une suite de fonctions $(f_j)_j$ telle que $f_j : \Omega \longrightarrow A$ et $supp(\nu_x) \subset A$.

  Quelque soit la suite $\{\phi(f_j)\}$ ($\phi : A \longrightarrow R$), convergeant faiblement dans $L^\infty(\Omega) - \star$, la limite faible peut être exprimée en terme de ν:

$$\lim_j \int_\Omega \phi(f_j)h(x)dx = \int_\Omega h(x) \int_A \boldsymbol{\phi(\lambda) d\nu_x(\lambda)} dx \quad \forall h \in L^1(\Omega). \tag{67}$$

- Soit $(U_j)_j$ une suite minimisante pour la fonctionnelle $\int_0^T \int_\Omega W(x,t,\nabla U)dxdt$. Alors le théorème fondamentale des mesures de Young implique que

$$lim_{j\to\infty} \int_0^T \int_\Omega W(x,t,\nabla U_j(x,t))dxdt = \int_0^T \int_\Omega \int_{\mathcal{M}^{2\times 2}} W(x,t,A)d\nu_{x,t}(A)dxdt \tag{68}$$

  où $\nu = \{\nu_{x,t}\}$ est la mesure de Young associée à la suite $\{\nabla U_j\}$. [Kinderleher-Pedregal, 92].

- Une mesure de Young ν est une famille de mesure de probabilité $\{\nu_x\}_{x\in\Omega}$ associée à une suite de fonctions $(f_j)_j$ telle que $f_j : \Omega \longrightarrow A$ et $supp(\nu_x) \subset A$.

  Quelque soit la suite $\{\phi(f_j)\}$ ($\phi : A \longrightarrow R$), convergeant faiblement dans $L^\infty(\Omega) - \star$, la limite faible peut être exprimée en terme de ν:

$$\lim_j \int_\Omega \phi(f_j)h(x)dx = \int_\Omega h(x) \int_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{\phi(\lambda) d\nu_x(\lambda)} dx \quad \forall h \in L^1(\Omega). \tag{67}$$

- Soit $(U_j)_j$ une suite minimisante pour la fonctionnelle $\int_0^T \int_\Omega W(x,t,\nabla U)dxdt$. Alors le théorème fondamentale des mesures de Young implique que

$$lim_{j\to\infty} \int_0^T \int_\Omega W(x,t,\nabla U_j(x,t))dxdt = \int_0^T \int_\Omega \int_{\mathcal{M}^{2\times 2}} W(x,t,A)d\nu_{x,t}(A)dxdt \tag{68}$$

  où $\nu = \{\nu_{x,t}\}$ est la mesure de Young associée à la suite $\{\nabla U_j\}$. [Kinderleher-Pedregal, 92].

- Une formulation relaxée de (VP^1_ω) est [Dacorogna 89,07]

$$\overline{m} = \min_{U,s} \left\{ \int_0^T \int_\Omega CQW\left(t, x, \nabla U\left(t, x\right), s\left(x\right)\right) dxdt \right\} \quad (= m) \tag{69}$$

où le minimum est pris sur $U \in \left(H^1\left((0,T) \times (0,1)\right)\right)^2$ satisfaisant les conditions aux limites et les fonctions s les contraintes

$$0 \leq s(x) \leq 1 \quad \forall x \in \Omega, \quad \text{and} \quad \int_\Omega s(x)\, dx \leq L\,|\Omega|\,. \tag{70}$$

- $CQW(t, x, \nabla U(t, x), s(x))$ quasi-convexifié contraint de la densité W et pour $(F, s) \in \mathcal{M}^{2\times 2} \times \mathbb{R}$ est défini par

$$CQW(t, x, F, s) = \inf_\nu \left\{ \int_{\mathcal{M}^{2\times 2}} W(t, x, M)\, d\nu(M) : \ \nu \in \mathcal{A}(F, s) \right\}, \tag{71}$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(F,s) \quad = \quad & \left\{ \nu : \nu \text{ est une homogène } H^1 - \text{mesure de Young}, \right. \\ & \left. F = \int_{\mathcal{M}^{2\times 2}} M d\nu(M) \quad \text{and} \quad \int_{\mathcal{M}^{2\times 2}} V(M)\, d\nu(M) = s \right\}. \end{aligned}$$

- Une formulation relaxée de (VP^1_ω) est [Dacorogna 89,07]

$$\overline{m} = \min_{U,s} \left\{ \int_0^T \int_\Omega CQW\left(t, x, \nabla U\left(t, x\right), s\left(x\right)\right) dxdt \right\} \quad (= m) \tag{69}$$

où le minimum est pris sur $U \in \left(H^1\left((0, T) \times (0, 1)\right)\right)^2$ satisfaisant les conditions aux limites et les fonctions s les contraintes

$$0 \leq s\left(x\right) \leq 1 \quad \forall x \in \Omega, \quad \text{and} \quad \int_\Omega s\left(x\right) dx \leq L\left|\Omega\right| . \tag{70}$$

- $CQW\left(t, x, \nabla U\left(t, x\right), s\left(x\right)\right)$ quasi-convexifié contraint de la densité W et pour $(F, s) \in \mathcal{M}^{2\times 2} \times \mathbb{R}$ est défini par

$$CQW\left(t, x, F, s\right) = \inf_\nu \left\{ \int_{\mathcal{M}^{2\times 2}} W\left(t, x, M\right) d\nu\left(M\right) : \ \nu \in \mathcal{A}\left(F, s\right) \right\}, \tag{71}$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\left(F, s\right) \quad = \quad & \left\{ \nu : \nu \text{ est une homogène } H^1 - \text{mesure de Young}, \right. \\ & \left. F = \int_{\mathcal{M}^{2\times 2}} M d\nu\left(M\right) \quad \text{and} \quad \int_{\mathcal{M}^{2\times 2}} V\left(M\right) d\nu\left(M\right) = s \right\}. \end{aligned}$$

La classe $\mathcal{A}(F,s)$ des mesures de Young gradient n'est pas explicite. La stratégie est la suivante [Fonseca-Muller 00], [Pedregal 05] :

- On minimise sur $\nu \in \mathcal{A}^\star$, la classe des mesures polyconvexes telles que

$$\mathcal{A}(F,s) \subset \mathcal{A}^\star(F,s), \forall F, s \tag{72}$$

$$\mathcal{A}^\star(F,s) = \Big\{\nu : \nu \text{ est une mesure de Young homogène }, \nu \text{ commute avec le déterminant}, \\ F = \int_{\mathcal{M}^{2\times 2}} M d\nu(M), s = \int_{\mathcal{M}^{2\times 2}} V(U,M) d\nu(M)\Big\}. \tag{73}$$

$$CPW(F,s) = \min_{\nu} \Big\{ \int_{\mathcal{M}^{2\times 2}} W(M) d\nu(M) : \nu \in \mathcal{A}^\star \Big\} \leq CQW(F,s) \tag{74}$$

- On étudie si la mesure optimale $\nu_{opt} \in \mathcal{A}^\star$ satisfait une condition de rang un, pour obtenir alors que ν_{opt} appartient à la classe des laminés $\mathcal{A}_\star$ telle que

$$\mathcal{A}_\star(F,s) \subset \mathcal{A}(F,s), \quad \forall F, s \tag{75}$$

- On conclut alors que $\nu_{opt} \in \mathcal{A}$ et conduit à l'expression de *CQW* et *m*.

La classe $\mathcal{A}(F,s)$ des mesures de Young gradient n'est pas explicite. La stratégie est la suivante [Fonseca-Muller 00], [Pedregal 05] :

- On minimise sur $\nu \in \mathcal{A}^\star$, la classe des mesures polyconvexes telles que

$$\mathcal{A}(F,s) \subset \mathcal{A}^\star(F,s), \forall F, s \tag{72}$$

$$\mathcal{A}^\star(F,s) = \Big\{\nu : \nu \text{ est une mesure de Young homogène }, \nu \text{ commute avec le déterminant}, \\ F = \int_{\mathcal{M}^{2\times 2}} M d\nu(M),\ s = \int_{\mathcal{M}^{2\times 2}} V(U,M) d\nu(M)\Big\}. \tag{73}$$

$$CPW(F,s) = \min_{\nu} \left\{ \int_{\mathcal{M}^{2\times 2}} W(M) d\nu(M) : \nu \in \mathcal{A}^\star \right\} \leq CQW(F,s) \tag{74}$$

- On étudie si la mesure optimale $\nu_{opt} \in \mathcal{A}^\star$ satisfait une condition de rang un, pour obtenir alors que ν_{opt} appartient à la classe des laminés $\mathcal{A}_\star$ telle que

$$\mathcal{A}_\star(F,s) \subset \mathcal{A}(F,s), \quad \forall F, s \tag{75}$$

- On conclut alors que $\nu_{opt} \in \mathcal{A}$ et conduit à l'expression de *CQW* et *m*.

La classe $\mathcal{A}(F,s)$ des mesures de Young gradient n'est pas explicite. La stratégie est la suivante [Fonseca-Muller 00], [Pedregal 05] :

- On minimise sur $\nu \in \mathcal{A}^\star$, la classe des mesures polyconvexes telles que

$$\mathcal{A}(F,s) \subset \mathcal{A}^\star(F,s), \forall F, s \tag{72}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^\star(F,s) = \Big\{\nu :& \nu \text{ est une mesure de Young homogène }, \nu \text{ commute avec le déterminant},\\ & F = \int_{\mathcal{M}^{2\times 2}} M d\nu(M),\, s = \int_{\mathcal{M}^{2\times 2}} V(U,M) d\nu(M)\Big\}.\end{aligned} \tag{73}$$

$$CPW(F,s) = \min_{\nu} \Big\{ \int_{\mathcal{M}^{2\times 2}} W(M) d\nu(M) : \nu \in \mathcal{A}^\star \Big\} \leq CQW(F,s) \tag{74}$$

- On étudie si la mesure optimale $\nu_{opt} \in \mathcal{A}^\star$ satisfait une condition de rang un, pour obtenir alors que ν_{opt} appartient à la classe des laminés $\mathcal{A}_\star$ telle que

$$\mathcal{A}_\star(F,s) \subset \mathcal{A}(F,s), \quad \forall F, s \tag{75}$$

- On conclut alors que $\nu_{opt} \in \mathcal{A}$ et conduit à l'expression de *CQW* et *m*.

$$(RP^1_\omega): \quad inf_{\color{red}{\mathbf{s(x)}} \in L^\infty(\Omega)} \int_0^T \int_\Omega (u_t^2 + |\nabla u|^2)\, dx\, dt \tag{76}$$

soumis à

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + a(\boldsymbol{x})\color{red}{\mathbf{s(x)}}\color{black} u_t = 0 & (0, T) \times \Omega, \\ u = 0 & (0, T) \times \partial\Omega, \\ u(0, \cdot) = u^0, \quad u_t(0, \cdot) = u^1 & \{0\} \times \Omega, \\ 0 \le \color{red}{\mathbf{s(x)}}\color{black} \le 1, \quad \int_\Omega \color{red}{\mathbf{s(x)}}\color{black}\, dx \le L\,|\Omega| & \Omega. \end{cases} \tag{77}$$

$\{\mathcal{X} \in L^\infty(\Omega; \{0, 1\})\} \Longrightarrow \{s \in L^\infty(\Omega; [0, 1])\}$

(AM - Pedregal - Periago 06)

Le problème (RP^1_ω) est une relaxation de (P^1_ω) au sens suivant :

$$(RP^1_\omega): \quad inf_{s(x)\in L^\infty(\Omega)} \int_0^T \int_\Omega (u_t^2 + |\nabla u|^2)\, dx\, dt \tag{76}$$

soumis à

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + a(\boldsymbol{x})\mathbf{s}(\boldsymbol{x})u_t = 0 & (0,T)\times\Omega, \\ u = 0 & (0,T)\times\partial\Omega, \\ u(0,\cdot) = u^0, \quad u_t(0,\cdot) = u^1 & \{0\}\times\Omega, \\ 0 \le \mathbf{s}(\boldsymbol{x}) \le 1, \quad \int_\Omega \mathbf{s}(\boldsymbol{x})\, dx \le L\,|\Omega| & \Omega. \end{cases} \tag{77}$$

$\{\mathcal{X} \in L^\infty(\Omega;\{0,1\})\} \Longrightarrow \{s \in L^\infty(\Omega;[0,1])\}$

Théorème (AM - Pedregal - Periago 06)

Le problème (RP^1_ω) est une relaxation de (P^1_ω) au sens suivant :

- *(RP^1_ω) est posé;*
- *L'infimum de (P^1_ω) est égal au minimum de (RP^1_ω);*
- *Si s est optimale pour (RP^1_ω), alors les suites optimales de domaines $(\omega_j)_j$ pour (P^1_ω) sont exactement celles pour laquelle la mesure de Young associée à $(\mathcal{X}_{\omega_j})_j$ est*

$$s(x)\delta_{G_1} + (1-s(x))\delta_{G_0}. \tag{78}$$

$G_1 \in \Lambda_1,\ G_0 \in \Lambda_0,\ G_1 - G_0 = a \otimes n,\ n = (0,1).$

$$(RP^1_\omega) : \quad inf_{\mathbf{s(x)}\in L^\infty(\Omega)} \int_0^T \int_\Omega (u_t^2 + |\nabla u|^2)\, dx\, dt \tag{76}$$

soumis à

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + a(\boldsymbol{x})\mathbf{s(x)}u_t = 0 & (0,T)\times\Omega, \\ u = 0 & (0,T)\times\partial\Omega, \\ u(0,\cdot) = u^0, \quad u_t(0,\cdot) = u^1 & \{0\}\times\Omega, \\ 0 \le \mathbf{s(x)} \le 1, \quad \int_\Omega \mathbf{s(x)}\, dx \le L\,|\Omega| & \Omega. \end{cases} \tag{77}$$

$\{\mathcal{X} \in L^\infty(\Omega;\{0,1\})\} \Longrightarrow \{s \in L^\infty(\Omega;[0,1])\}$

Théorème (AM - Pedregal - Periago 06)

Le problème (RP^1_ω) est une relaxation de (P^1_ω) au sens suivant :

- *(RP^1_ω) est posé;*
- *L'infimum de (P^1_ω) est égal au minimum de (RP^1_ω);*
- *Si s est optimale pour (RP^1_ω), alors les suites optimales de domaines $(\omega_j)_j$ pour (P^1_ω) sont exactement celles pour laquelle la mesure de Young associée à $(\mathcal{X}_{\omega_j})_j$ est*

$$s(x)\delta_{G_1} + (1-s(x))\delta_{G_0}. \tag{78}$$

$G_1 \in \Lambda_1,\ G_0 \in \Lambda_0,\ G_1 - G_0 = a \otimes n,\ n = (0,1).$

$$(RP^1_\omega): \quad inf_{\mathbf{s(x)} \in L^\infty(\Omega)} \int_0^T \int_\Omega (u_t^2 + |\nabla u|^2)\, dx\, dt \tag{76}$$

soumis à

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + a(\boldsymbol{x})\mathbf{s(x)} u_t = 0 & (0,T) \times \Omega, \\ u = 0 & (0,T) \times \partial\Omega, \\ u(0,\cdot) = u^0, \quad u_t(0,\cdot) = u^1 & \{0\} \times \Omega, \\ 0 \leq \mathbf{s(x)} \leq 1, \quad \int_\Omega \mathbf{s(x)}\, dx \leq L\,|\Omega| & \Omega. \end{cases} \tag{77}$$

$\{\mathcal{X} \in L^\infty(\Omega;\{0,1\})\} \Longrightarrow \{s \in L^\infty(\Omega;[0,1])\}$

Théorème (AM - Pedregal - Periago 06)

Le problème (RP^1_ω) est une relaxation de (P^1_ω) au sens suivant :

- *(RP^1_ω) est posé;*
- *L'infimum de (P^1_ω) est égal au minimum de (RP^1_ω);*
- *Si s est optimale pour (RP^1_ω), alors les suites optimales de domaines $(\omega_j)_j$ pour (P^1_ω) sont exactement celles pour laquelle la mesure de Young associée à $(\mathcal{X}_{\omega_j})_j$ est*

$$s(x)\delta_{G_1} + (1 - s(x))\delta_{G_0}. \tag{78}$$

$G_1 \in \Lambda_1,\ G_0 \in \Lambda_0,\ G_1 - G_0 = a \otimes n,\ n = (0,1).$

$$(RP^1_\omega): \quad inf_{\mathbf{s(x)}\in L^\infty(\Omega)} \int_0^T\int_\Omega (u_t^2+|\nabla u|^2)\,dx\,dt \tag{76}$$

soumis à

$$\begin{cases} u_{tt}-\Delta u+a(\mathbf{x})\mathbf{s(x)}u_t=0 & (0,T)\times\Omega,\\ u=0 & (0,T)\times\partial\Omega,\\ u(0,\cdot)=u^0, \quad u_t(0,\cdot)=u^1 & \{0\}\times\Omega,\\ 0\le \mathbf{s(x)}\le 1, \quad \int_\Omega \mathbf{s(x)}\,dx\le L\,|\Omega| & \Omega. \end{cases} \tag{77}$$

$\{\mathcal{X}\in L^\infty(\Omega;\{0,1\})\}\Longrightarrow\{s\in L^\infty(\Omega;[0,1])\}$

Théorème (AM - Pedregal - Periago 06)

Le problème (RP^1_ω) est une relaxation de (P^1_ω) au sens suivant :

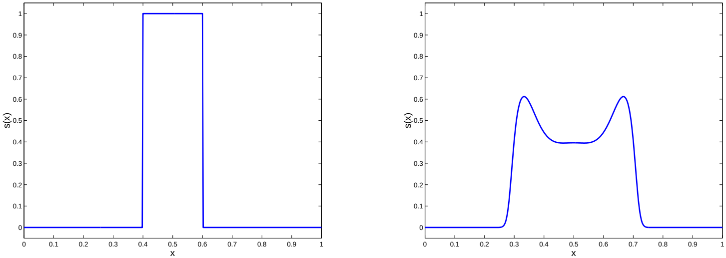
- *(RP^1_ω) est posé;*
- *L'infimum de (P^1_ω) est égal au minimum de (RP^1_ω);*
- *Si s est optimale pour (RP^1_ω), alors les suites optimales de domaines $(\omega_j)_j$ pour (P^1_ω) sont exactement celles pour laquelle la mesure de Young associée à $(\mathcal{X}_{\omega_j})_j$ est*

$$s(x)\delta_{G_1}+(1-s(x))\delta_{G_0}. \tag{78}$$

$G_1\in\Lambda_1,\ G_0\in\Lambda_0,\ G_1-G_0=a\otimes n,\ n=(0,1).$

Illustrations numériques pour (RP^1_ω)

$$\Omega = (0,1), \quad (u^0(x), u^1(x)) = \sin(\pi x), 0), \quad L = 1/5, \quad T = 1 \tag{79}$$

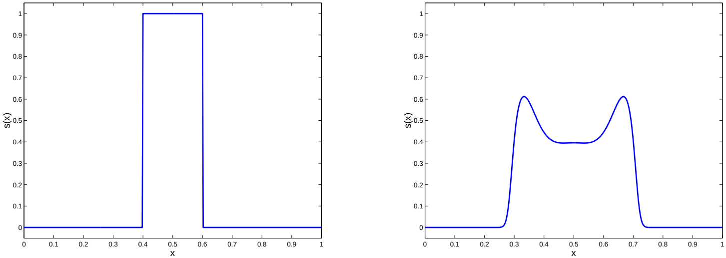


Densité optimale pour $a(x) = 1$ (Gauche) et $a(x) = 10$ (Droite)

- Si $a \leq a^\star(\Omega, L, u^0, u^1)$, $\{x \in \Omega, 0 < s(x) < 1\} = \emptyset$, $(RP^1_\omega) \equiv (P^1_\omega)$ est bien posé
- Si $a > a^\star(\Omega, L, u^0, u^1)$, $\{x \in \Omega, 0 < s(x) < 1\} \neq \emptyset$, $(RP^1_\omega) \neq (P^1_\omega)$ n'est pas bien posé

Illustrations numériques pour (RP^1_ω)

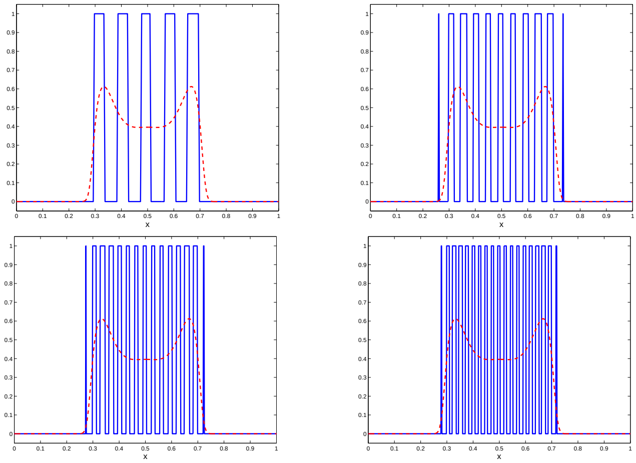
$$\Omega = (0,1), \quad (u^0(x), u^1(x)) = \sin(\pi x), 0), \quad L = 1/5, \quad T = 1 \tag{79}$$



Densité optimale pour $a(x) = 1$ (Gauche) et $a(x) = 10$ (Droite)

- Si $a \leq a^\star(\Omega, L, u^0, u^1)$, $\{x \in \Omega, 0 < s(x) < 1\} = \emptyset$, $(RP^1_\omega) \equiv (P^1_\omega)$ est bien posé
- Si $a > a^\star(\Omega, L, u^0, u^1)$, $\{x \in \Omega, 0 < s(x) < 1\} \neq \emptyset$, $(RP^1_\omega) \neq (P^1_\omega)$ n'est pas bien posé

$$\Omega = (0,1), \quad (y^0(x), y^1(x)) = (\sin(\pi x), 0), \quad L = 1/5, \quad T = 1 \tag{80}$$



$\sharp\omega_j$	10	20	30	40
$I(\mathcal{X}_{\omega_j})$	4.133	3.721	3.541	3.431

$$lim_{\sharp\omega_j \to \infty} I(\mathcal{X}_{\omega_j}) = I(s_{opt}) \approx 3.421$$

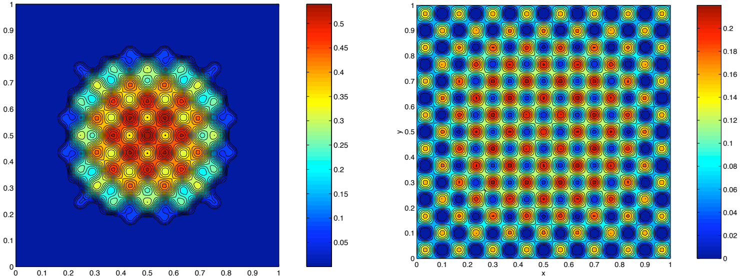


Figure: Isovaleurs de la densité s optimale pour $a(\boldsymbol{x}) = 25\mathcal{X}_\Omega(\boldsymbol{x})$ (**Gauche**) et $a(\boldsymbol{x}) = 50\mathcal{X}_\Omega(\boldsymbol{x})$ (**Droite**) - $T = 1$ - PRÉSENCE D'UNE MICRO-STRUCTURE POUR a SUFFISAMMENT GRAND.

[Maestre-AM-Pedegral, IFB 08]

- Soient $\Omega \subset \mathbb{R}$, $0 < \alpha < \beta < \infty$, $L \in (0,1)$, $T > 0$, $(u^0, u^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$.

$$(P^2_\omega): \quad \inf_{\mathcal{X}_\omega} I(\mathcal{X}_\omega) = \int_0^T \int_\Omega (|u_t|^2 + a(t, \boldsymbol{x}, \mathcal{X}_\omega)|\nabla u|^2) dxdt \tag{81}$$

avec par exemple

$$a(t, \boldsymbol{x}, \mathcal{X}_\omega) = 1 \quad \text{(cas quadratique)} \quad \text{ou} \quad a(t, \boldsymbol{x}, \mathcal{X}_\omega) = \alpha \mathcal{X}_\omega + \beta(1 - \mathcal{X}_\omega) \quad \text{(cas compliance)} \tag{82}$$

soumis à

$$\begin{cases} u_{tt} - div\Big([\alpha \mathcal{X}_\omega + \beta(1 - \mathcal{X}_\omega)]\nabla u\Big) = 0 & (0,T) \times \Omega, \\ u = 0 & (0,T) \times \partial\Omega, \\ u(0,\cdot) = u^0, \quad u_t(0,\cdot) = u^1 & \Omega, \\ \mathcal{X}_\omega \in L^\infty((0,T) \times \Omega; \{0,1\}), & \\ \|\mathcal{X}_\omega\|_{L^1(\Omega)} \leq L\|\mathcal{X}_\Omega\|_{L^1(\Omega)} & (0,T) \end{cases} \tag{83}$$

- ω dépend de $\boldsymbol{x}$ et de t: *Matériaux dynamiques* [Lurie 99, 00, 02].

[Maestre-AM-Pedegral, IFB 08]

- Soient $\Omega \subset \mathbb{R},\ 0 < \alpha < \beta < \infty,\ L \in (0,1),\ T > 0,\ (u^0, u^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$.

$$(P^2_\omega): \quad \inf_{\mathcal{X}_\omega} I(\mathcal{X}_\omega) = \int_0^T \int_\Omega (|u_t|^2 + a(t, \boldsymbol{x}, \mathcal{X}_\omega)|\nabla u|^2) dxdt \tag{81}$$

avec par exemple

$$a(t, \boldsymbol{x}, \mathcal{X}_\omega) = 1 \quad \text{(cas quadratique)} \quad \text{ou} \quad a(t, \boldsymbol{x}, \mathcal{X}_\omega) = \alpha \mathcal{X}_\omega + \beta(1 - \mathcal{X}_\omega) \quad \text{(cas compliance)} \tag{82}$$

soumis à

$$\begin{cases} u_{tt} - div\Big([\alpha \mathcal{X}_\omega + \beta(1 - \mathcal{X}_\omega)]\nabla u\Big) = 0 & (0, T) \times \Omega, \\ u = 0 & (0, T) \times \partial\Omega, \\ u(0, \cdot) = u^0, \quad u_t(0, \cdot) = u^1 & \Omega, \\ \mathcal{X}_\omega \in L^\infty((0, T) \times \Omega; \{0, 1\}), & \\ \|\mathcal{X}_\omega\|_{L^1(\Omega)} \le L \|\mathcal{X}_\Omega\|_{L^1(\Omega)} & (0, T) \end{cases} \tag{83}$$

- ω dépend de $\boldsymbol{x}$ et de t: *Matériaux dynamiques* [Lurie 99, 00, 02].

- $h(t,x) = \beta a_\alpha(t,x) - \alpha a_\beta(t,x), \qquad a(t,x,\mathcal{X}) = \mathcal{X}(t,x)a_\alpha(t,x) + (1-\mathcal{X}(t,x))a_\beta(t,x)$
-
$$(RP^2_\omega): \qquad \min_{U,s} \int_0^T \int_\Omega CQW(t,\mathbf{x},\nabla U(t,\mathbf{x}),s(t,\mathbf{x}))dxdt$$

soumis à

$$\begin{cases} U=(u,v) \in H^1([0,T]\times\Omega)^2, \ \ tr(\nabla U(t,\mathbf{x}))=0, \\ U^{(1)}(0,\mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}), \ \ U_t^{(1)}(0,\mathbf{x}) = u_1(\mathbf{x}) \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ U^{(1)}(t,1) = U^{(1)}(t,0) = 0 \quad \text{dans} \quad [0,T], \\ 0 \le s(t,\mathbf{x}) \le 1, \int_\Omega s(t,\mathbf{x})\,dx \le V_\alpha|\Omega| \ \ \forall t \in [0,T], \end{cases}$$

- $CQW(t,\mathbf{x},F,s)$ est **explicitement** donné par

$$\begin{cases} \dfrac{h}{s\beta(\beta-\alpha)^2}(\beta^2|F_{12}|^2 + |F_{21}|^2 + 2\beta F_{12}F_{21}) + |F_{11}|^2 - \dfrac{a_\beta}{\beta}F_{12}F_{21} & \text{si } \boldsymbol{h(t,x) \ge 0, \psi(F,s) \le 0} \\ \dfrac{-h}{(1-s)\alpha(\beta-\alpha)^2}(\alpha^2|F_{12}|^2 + |F_{21}|^2 + 2\alpha F_{12}F_{21}) + |F_{11}|^2 - \dfrac{a_\alpha}{\alpha}F_{12}F_{21}, & \text{si } \boldsymbol{h(t,x) \le 0, \psi(F,s) \le 0} \\ -detF + \dfrac{1}{s(1-s)(\beta-\alpha)^2}\Big(((1-s)\beta^2(\alpha+a_\alpha) + s\alpha^2(\beta+a_\beta))|F_{12}|^2 & \\ \qquad + ((1-s)(\alpha+a_\alpha) + s(\beta+a_\beta))|F_{21}|^2 + 2((\alpha+a_\alpha)\beta - sh)F_{12}F_{21}\Big) & \text{si } \boldsymbol{\psi(F,s) \ge 0}. \end{cases}$$

$\psi(F,s) = \frac{(\alpha(1-s)+\beta s)}{(\beta-\alpha)}\left(F_{21} + \lambda^-_{\alpha,\beta}(s)F_{12}\right)\left(F_{21} + \lambda^+_{\alpha,\beta}(s)F_{12}\right)$

- $h(t,x) = \beta a_\alpha(t,x) - \alpha a_\beta(t,x), \qquad a(t,x,\mathcal{X}) = \mathcal{X}(t,x)a_\alpha(t,x) + (1-\mathcal{X}(t,x))a_\beta(t,x)$
-
$$(RP^2_\omega): \qquad \min_{U,s} \int_0^T \int_\Omega CQW(t,\boldsymbol{x},\nabla U(t,\boldsymbol{x}), s(t,\boldsymbol{x}))dxdt$$

soumis à

$$\begin{cases} U = (u,v) \in H^1([0,T]\times\Omega)^2, \;\; tr(\nabla U(t,\boldsymbol{x})) = 0, \\ U^{(1)}(0,\boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{x}), \;\; U^{(1)}_t(0,\boldsymbol{x}) = u_1(\boldsymbol{x}) \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ U^{(1)}(t,1) = U^{(1)}(t,0) = 0 \quad \text{dans} \quad [0,T], \\ 0 \le s(t,\boldsymbol{x}) \le 1, \displaystyle\int_\Omega s(t,\boldsymbol{x})\,dx \le V_\alpha|\Omega| \;\; \forall t \in [0,T], \end{cases}$$

- $CQW(t,\boldsymbol{x},F,s)$ est **explicitement** donné par

$$\begin{cases} \dfrac{h}{s\beta(\beta-\alpha)^2}(\beta^2|F_{12}|^2 + |F_{21}|^2 + 2\beta F_{12}F_{21}) + |F_{11}|^2 - \dfrac{a_\beta}{\beta}F_{12}F_{21} & \text{si } \boldsymbol{h(t,x) \ge 0, \psi(F,s) \le 0} \\ \dfrac{-h}{(1-s)\alpha(\beta-\alpha)^2}(\alpha^2|F_{12}|^2 + |F_{21}|^2 + 2\alpha F_{12}F_{21}) + |F_{11}|^2 - \dfrac{a_\alpha}{\alpha}F_{12}F_{21}, & \text{si } \boldsymbol{h(t,x) \le 0, \psi(F,s) \le 0} \\ -detF + \dfrac{1}{s(1-s)(\beta-\alpha)^2}\Big(((1-s)\beta^2(\alpha+a_\alpha) + s\alpha^2(\beta+a_\beta))|F_{12}|^2 & \\ \qquad + ((1-s)(\alpha+a_\alpha) + s(\beta+a_\beta))|F_{21}|^2 + 2((\alpha+a_\alpha)\beta - sh)F_{12}F_{21}\Big) & \text{si } \boldsymbol{\psi(F,s) \ge 0}. \end{cases}$$

$\psi(F,s) = \frac{(\alpha(1-s)+\beta s)}{(\beta-\alpha)}\left(F_{21} + \lambda^-_{\alpha,\beta}(s)F_{12}\right)\left(F_{21} + \lambda^+_{\alpha,\beta}(s)F_{12}\right)$

- $h(t,x)=\beta a_\alpha(t,x)-\alpha a_\beta(t,x), \qquad a(t,x,\mathcal{X})=\mathcal{X}(t,x)a_\alpha(t,x)+(1-\mathcal{X}(t,x))a_\beta(t,x)$
- $$(RP^2_\omega): \qquad \min_{U,s}\int_0^T\int_\Omega CQW(t,\boldsymbol{x},\nabla U(t,\boldsymbol{x}),s(t,\boldsymbol{x}))dxdt$$

  soumis à

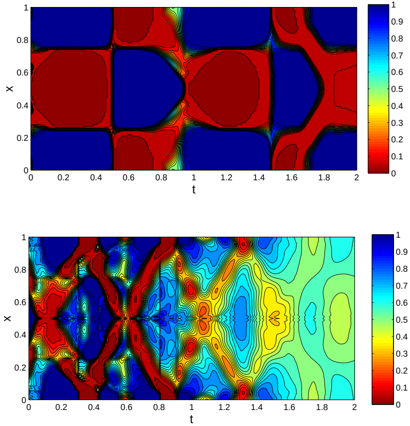
  $$\begin{cases} U=(u,v)\in H^1([0,T]\times\Omega)^2, \;\; tr(\nabla U(t,\boldsymbol{x}))=0, \\ U^{(1)}(0,\boldsymbol{x})=u_0(\boldsymbol{x}), \;\; U^{(1)}_t(0,\boldsymbol{x})=u_1(\boldsymbol{x}) \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ U^{(1)}(t,1)=U^{(1)}(t,0)=0 \quad \text{dans} \quad [0,T], \\ 0\le s(t,\boldsymbol{x})\le 1, \displaystyle\int_\Omega s(t,\boldsymbol{x})\,dx \le V_\alpha|\Omega| \;\; \forall t\in[0,T], \end{cases}$$

- $CQW(t,\boldsymbol{x},F,s)$ est **explicitement** donné par

$$\begin{cases} \dfrac{h}{s\beta(\beta-\alpha)^2}(\beta^2|F_{12}|^2+|F_{21}|^2+2\beta F_{12}F_{21})+|F_{11}|^2-\dfrac{a_\beta}{\beta}F_{12}F_{21} \quad \text{si } \boldsymbol{h(t,x)\ge 0, \psi(F,s)\le 0} \\ \dfrac{-h}{(1-s)\alpha(\beta-\alpha)^2}(\alpha^2|F_{12}|^2+|F_{21}|^2+2\alpha F_{12}F_{21})+|F_{11}|^2-\dfrac{a_\alpha}{\alpha}F_{12}F_{21}, \quad \text{si } \boldsymbol{h(t,x)\le 0, \psi(F,s)\le 0} \\ -detF+\dfrac{1}{s(1-s)(\beta-\alpha)^2}\Big(((1-s)\beta^2(\alpha+a_\alpha)+s\alpha^2(\beta+a_\beta))|F_{12}|^2 \\ \qquad +((1-s)(\alpha+a_\alpha)+s(\beta+a_\beta))|F_{21}|^2+2((\alpha+a_\alpha)\beta-sh)F_{12}F_{21}\Big) \quad \text{si } \boldsymbol{\psi(F,s)\ge 0}. \end{cases}$$

$$\psi(F,s)=\tfrac{(\alpha(1-s)+\beta s)}{(\beta-\alpha)}\Big(F_{21}+\lambda^-_{\alpha,\beta}(s)F_{12}\Big)\Big(F_{21}+\lambda^+_{\alpha,\beta}(s)F_{12}\Big)$$

$$\Omega = (0,1), \;\; T = 2, \;\; (u^0, u^1) = (\sin(\pi x), 0), \;\; L = 1/2, \;\; (a_\alpha, a_\beta) = (\alpha, \beta) \tag{84}$$



Iso-valeurs de la densité optimale s sur $(0, T) \times \Omega$ Haut: $(\alpha, \beta) = (1, 1.1)$ -Bas:$(\alpha, \beta) = (1, 10)$.

[Maestre, AM, Pedregal, SIAM Appl. Math. 07]

- Optimisation simultanée par rapport à $\omega_1 \subset (0,T) \times \Omega$ et $\omega_2 \subset \Omega$

$$(P^3_\omega): \quad \inf_{\mathcal{X}_{\omega_1}, \mathcal{X}_{\omega_2}} I(\mathcal{X}_{\omega_1}, \mathcal{X}_{\omega_2}) = \int_0^T \int_\Omega (|u_t|^2 + a(t, \boldsymbol{x}, \mathcal{X}_{\omega_1})|\nabla u|^2) dxdt \tag{85}$$

soumis à

$$\begin{cases} u_{tt} - div\Big([\alpha \mathcal{X}_{\omega_1} + \beta(1 - \mathcal{X}_{\omega_1})]\nabla u\Big) + a(\boldsymbol{x})\mathcal{X}_{\omega_2} u_t = 0 & (0,T) \times \Omega, \\ u = 0 & (0,T) \times \partial\Omega, \\ u(0,\cdot) = u^0, \quad u_t(0,\cdot) = u^1 & \{0\} \times \Omega, \\ \mathcal{X}_{\omega_1} \in L^\infty(\Omega \times (0,T); \{0,1\}), & \\ \mathcal{X}_{\omega_2} \in L^\infty(\Omega; \{0,1\}), & \\ \|\mathcal{X}_{\omega_1}(t,\cdot)\|_{L^1(\Omega)} \leq L_{des} \|\mathcal{X}_\Omega\|_{L^1(\Omega)}, & (0,T) \\ \|\mathcal{X}_{\omega_2}\|_{L^1(\Omega)} \leq L_{dam} \|\mathcal{X}_\Omega\|_{L^1(\Omega)}, & \end{cases} \tag{86}$$

$L_{dam}, L_{des} \in (0,1)$.

- $$(RP^3_\omega): \qquad \min_{U,s,r} \int_0^T \int_\Omega CQW(t,\boldsymbol{x},\nabla U(t,x),s(t,\boldsymbol{x}),r(x))dxdt$$

  soumis à

$$\begin{cases} U=(u,v)\in H^1([0,T]\times\Omega)^2, \quad \boldsymbol{\psi(t,x,\nabla U,s,r)=0} \\ tr(\nabla U(t,\boldsymbol{x})) = u_t + v_x = a(x)r(x)u(t,x), \text{ dans } (0,T)\times\Omega \\ U^{(1)}(0,\boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{x}),\ U_t^{(1)}(0,\boldsymbol{x}) = u_1(\boldsymbol{x}) \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ U^{(1)}(t,1) = U^{(1)}(t,0) = 0 \quad \text{dans} \quad [0,T], \\ 0\le s(t,x)\le 1, \int_\Omega s(t,x)\,dx \le L_\alpha|\Omega| \quad \forall t\in[0,T], \\ 0\le r(x)\le 1, \quad \int_\Omega r(x)dx \le L_d|\Omega| \end{cases}$$

- $CQW(t,\boldsymbol{x},F,s,r)$ est **explicitement** donné par

$$CQW(U,F,s,r) = |F_{11}|^2 + \frac{a_\alpha}{s(\beta-\alpha)^2}|\beta F_{12}+F_{21}|^2 + \frac{a_\beta}{(1-s)(\beta-\alpha)^2}|\alpha F_{12}+F_{21}|^2 \qquad (87)$$

$$\psi(F,s,r) = \frac{(\alpha(1-s)+\beta s)}{(\beta-\alpha)}\left(F_{21}+\lambda^-_{\alpha,\beta}(s)F_{12}\right)\left(F_{21}+\lambda^+_{\alpha,\beta}(s)F_{12}\right)$$

- Laminé d'ordre 1 $\Longrightarrow$ (Effet régularisant sur la micro-structure optimale) OU (Pas de laminée d'ordre deux dans (RP^2_ω)).

- $$(RP^3_\omega): \qquad \min_{U,s,r} \int_0^T \int_\Omega CQW(t, \boldsymbol{x}, \nabla U(t,x), s(t,\boldsymbol{x}), r(x))dxdt$$

soumis à

$$\begin{cases} U = (u,v) \in H^1([0,T] \times \Omega)^2, \quad \boldsymbol{\psi(t, x, \nabla U, s, r) = 0} \\ tr(\nabla U(t,\boldsymbol{x})) = u_t + v_x = a(x)r(x)u(t,x), \text{ dans } (0,T) \times \Omega \\ U^{(1)}(0,\boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{x}), \ U_t^{(1)}(0,\boldsymbol{x}) = u_1(\boldsymbol{x}) \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ U^{(1)}(t,1) = U^{(1)}(t,0) = 0 \quad \text{dans} \quad [0,T], \\ 0 \le s(t,x) \le 1, \int_\Omega s(t,x)\,dx \le L_\alpha |\Omega| \ \ \forall t \in [0,T], \\ 0 \le r(x) \le 1, \quad \int_\Omega r(x)dx \le L_d |\Omega| \end{cases}$$

- $CQW(t, \boldsymbol{x}, F, s, r)$ est **explicitement** donné par

$$CQW(U,F,s,r) = |F_{11}|^2 + \frac{a_\alpha}{s(\beta-\alpha)^2}|\beta F_{12} + F_{21}|^2 + \frac{a_\beta}{(1-s)(\beta-\alpha)^2}|\alpha F_{12} + F_{21}|^2 \qquad (87)$$

$$\psi(F,s,r) = \frac{(\alpha(1-s)+\beta s)}{(\beta-\alpha)}\left(F_{21} + \lambda^-_{\alpha,\beta}(s)F_{12}\right)\left(F_{21} + \lambda^+_{\alpha,\beta}(s)F_{12}\right)$$

- Laminé d'ordre 1 $\Longrightarrow$ (Effet régularisant sur la micro-structure optimale) OU (Pas de laminée d'ordre deux dans (RP^2_ω)).

- $$(RP^3_\omega): \qquad \min_{U,s,r} \int_0^T \int_\Omega CQW(t, \boldsymbol{x}, \nabla U(t,x), s(t,\boldsymbol{x}), r(x)) dxdt$$

  soumis à

$$\begin{cases} U = (u,v) \in H^1([0,T]\times\Omega)^2, \quad \boldsymbol{\psi(t, x, \nabla U, s, r) = 0} \\ tr(\nabla U(t,\boldsymbol{x})) = u_t + v_x = a(x)r(x)u(t,x), \ \text{dans } (0,T)\times\Omega \\ U^{(1)}(0,\boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{x}), \ U_t^{(1)}(0,\boldsymbol{x}) = u_1(\boldsymbol{x}) \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ U^{(1)}(t,1) = U^{(1)}(t,0) = 0 \quad \text{dans} \quad [0,T], \\ 0 \le s(t,x) \le 1, \ \int_\Omega s(t,x)\,dx \le L_\alpha|\Omega| \ \ \forall t \in [0,T], \\ 0 \le r(x) \le 1, \quad \int_\Omega r(x)dx \le L_d|\Omega| \end{cases}$$

- $CQW(t, \boldsymbol{x}, F, s, r)$ est **explicitement** donné par

$$CQW(U,F,s,r) = |F_{11}|^2 + \frac{a_\alpha}{s(\beta-\alpha)^2}|\beta F_{12} + F_{21}|^2 + \frac{a_\beta}{(1-s)(\beta-\alpha)^2}|\alpha F_{12} + F_{21}|^2 \qquad (87)$$

$$\psi(F,s,r) = \frac{(\alpha(1-s)+\beta s)}{(\beta-\alpha)}\left(F_{21} + \lambda^-_{\alpha,\beta}(s)F_{12}\right)\left(F_{21} + \lambda^+_{\alpha,\beta}(s)F_{12}\right)$$

- Laminé d'ordre 1 $\Longrightarrow$ (Effet régularisant sur la micro-structure optimale) OU (Pas de laminée d'ordre deux dans (RP^2_ω)).

$$(\mathrm{P}_t) \quad \text{Minimiser en } \mathcal{X} : \quad J_t\left(\mathcal{X}\right) = \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega K\left(t,x\right)\nabla u\left(t,x\right)\cdot\nabla u\left(t,x\right)dxdt$$

$$\begin{cases} \left(\beta(t,x)u\left(t,x\right)\right)' - \mathrm{div}\,\left(K\left(t,x\right)\nabla u\left(t,x\right)\right) = f(t,x) & \text{dans} \quad (0,T)\times\Omega, \\ u = 0 & \text{sur} \quad (0,T)\times\partial\Omega, \\ u\left(0,x\right) = u_0\left(x\right) & \text{dans} \quad \Omega, \end{cases} \tag{88}$$

avec

$$\beta\left(t,x\right) = \mathcal{X}\left(t,x\right)\beta_1 + \left(1-\mathcal{X}\left(t,x\right)\right)\beta_2, K\left(t,x\right) = \mathcal{X}\left(t,x\right)k_1 I_N + \left(1-\mathcal{X}\left(t,x\right)\right)k_2 I_N,$$

Théorème (AM, Pedregal, Periago, JMPA 2008)

$$(RP_t) \quad \textit{Minimiser en } \left(\theta,\overline{G},u\right): \quad \overline{J_t}(\theta,\overline{G},u) = \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega\left[k_1\frac{\left|\overline{G}-k_2\nabla u\right|^2}{\theta\left(k_1-k_2\right)^2} + k_2\frac{\left|\overline{G}-k_1\nabla u\right|^2}{\left(1-\theta\right)\left(k_2-k_1\right)^2}\right]dxdt$$

$$\begin{cases} G\in L^2\left(\left(0,T\right)\times\Omega;\mathbb{R}^{N+1}\right), & u\in H^1\left(\left(0,T\right)\times\Omega;\mathbb{R}\right), \\ \left(\left(\theta\beta_1+\left(1-\theta\right)\beta_2\right)u\right)' - div\,\overline{G} = 0 & dans\ H^{-1}\left(\left(0,T\right)\times\Omega\right), \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \quad p.\,p.\ t\in\left[0,T\right], & u\left(0\right) = u_0 \quad dans\ \Omega, \\ \theta\in L^\infty\left(\left(0,T\right)\times\Omega;\left[0,1\right]\right), \quad \int_\Omega\theta\left(t,x\right)dx = L|\Omega| \quad p.p.\ t\in\left(0,T\right). & \end{cases}$$

est une relaxation de (P_t) au sens suivant :

(i) *Il existe au moins un minimum pour (RP_t),*

(ii) *l'infimum de (VP_t) est égal au minimum de (RP_t), et*

(iii) *la mesure de Young associée à (RP_t) (et donc la micro-structure optimale de (VP_t)) peut être déterminée sous la forme d'un laminé du premier ordre dont la direction est explicite en terme de la solution optimale de (RP_t).*

$$(\mathrm{P}_t) \quad \text{Minimiser en } \mathcal{X} : \quad J_t(\mathcal{X}) = \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega K(t,x)\,\nabla u(t,x)\cdot\nabla u(t,x)\,dxdt$$

$$\begin{cases} (\beta(t,x)u(t,x))' - \text{div }(K(t,x)\nabla u(t,x)) = f(t,x) & \text{dans} \quad (0,T)\times\Omega, \\ u = 0 & \text{sur} \quad (0,T)\times\partial\Omega, \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{dans} \quad \Omega, \end{cases} \tag{88}$$

avec

$$\beta(t,x) = \mathcal{X}(t,x)\,\beta_1 + (1-\mathcal{X}(t,x))\,\beta_2, K(t,x) = \mathcal{X}(t,x)\,k_1 I_N + (1-\mathcal{X}(t,x))\,k_2 I_N,$$

Théorème (AM, Pedregal, Periago, JMPA 2008)

$$(RP_t) \quad \textit{Minimiser en } \left(\theta,\overline{G},u\right) : \quad \overline{J_t}(\theta,\overline{G},u) = \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega \left[k_1\frac{\left|\overline{G}-k_2\nabla u\right|^2}{\theta\,(k_1-k_2)^2} + k_2\frac{\left|\overline{G}-k_1\nabla u\right|^2}{(1-\theta)\,(k_2-k_1)^2}\right]dxdt$$

$$\begin{cases} G\in L^2\left((0,T)\times\Omega;\mathbb{R}^{N+1}\right), & u\in H^1((0,T)\times\Omega;\mathbb{R}), \\ ((\theta\beta_1+(1-\theta)\,\beta_2)\,u)' - div\,\overline{G} = 0 & dans\ H^{-1}((0,T)\times\Omega), \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \quad p.\,p.\ t\in[0,T], & u(0) = u_0 \quad dans\ \Omega, \\ \theta\in L^\infty((0,T)\times\Omega;[0,1]), \quad \int_\Omega\theta(t,x)\,dx = L|\Omega| \quad p.p.\ t\in(0,T). \end{cases}$$

est une relaxation de (P_t) au sens suivant :

(i) *Il existe au moins un minimum pour (RP_t),*

(ii) *l'infimum de (VP_t) est égal au minimum de (RP_t), et*

(iii) *la mesure de Young associée à (RP_t) (et donc la micro-structure optimale de (VP_t)) peut être déterminée sous la forme d'un laminé du premier ordre dont la direction est explicite en terme de la solution optimale de (RP_t).*

$$(\mathrm{P}_t) \quad \text{Minimiser en } \mathcal{X} : \quad J_t(\mathcal{X}) = \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega K(t,x)\nabla u(t,x)\cdot\nabla u(t,x)\,dxdt$$

$$\left\{\begin{array}{lll} (\beta(t,x)u(t,x))' - \mathrm{div}\ (K(t,x)\nabla u(t,x)) = f(t,x) & \text{dans} & (0,T)\times\Omega, \\ u = 0 & \text{sur} & (0,T)\times\partial\Omega, \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{dans} & \Omega, \end{array}\right. \tag{88}$$

avec

$$\beta(t,x) = \mathcal{X}(t,x)\beta_1 + (1-\mathcal{X}(t,x))\beta_2,\ K(t,x) = \mathcal{X}(t,x)k_1 I_N + (1-\mathcal{X}(t,x))k_2 I_N,$$

Théorème (AM, Pedregal, Periago, JMPA 2008)

$$(RP_t) \quad \textit{Minimiser en } \left(\theta,\overline{G},u\right) : \quad \overline{J_t}(\theta,\overline{G},u) = \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega \left[k_1\frac{\left|\overline{G}-k_2\nabla u\right|^2}{\theta(k_1-k_2)^2} + k_2\frac{\left|\overline{G}-k_1\nabla u\right|^2}{(1-\theta)(k_2-k_1)^2}\right]dxdt$$

$$\left\{\begin{array}{ll} G\in L^2\left((0,T)\times\Omega;\mathbb{R}^{N+1}\right), & u\in H^1((0,T)\times\Omega;\mathbb{R}), \\ ((\theta\beta_1+(1-\theta)\beta_2)u)' - div\,\overline{G} = 0 & dans\ H^{-1}((0,T)\times\Omega), \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \quad p.\ p.\ t\in[0,T], & u(0) = u_0 \quad dans\ \Omega, \\ \theta\in L^\infty((0,T)\times\Omega;[0,1]), \quad \int_\Omega\theta(t,x)\,dx = L|\Omega| \quad p.p.\ t\in(0,T). & \end{array}\right.$$

est une relaxation de (P_t) au sens suivant :

(i) *Il existe au moins un minimum pour (RP_t),*

(ii) *l'infimum de (VP_t) est égal au minimum de (RP_t), et*

(iii) *la mesure de Young associée à (RP_t) (et donc la micro-structure optimale de (VP_t)) peut être déterminée sous la forme d'un laminé du premier ordre dont la direction est explicite en terme de la solution optimale de (RP_t).*

$$(\mathrm{P}_t) \quad \text{Minimiser en } \mathcal{X} : \quad J_t(\mathcal{X}) = \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega K(t,x)\nabla u(t,x)\cdot\nabla u(t,x)\,dxdt$$

$$\begin{cases} (\beta(t,x)u(t,x))' - \operatorname{div}\,(K(t,x)\nabla u(t,x)) = f(t,x) & \text{dans} \quad (0,T)\times\Omega, \\ u = 0 & \text{sur} \quad (0,T)\times\partial\Omega, \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{dans} \quad \Omega, \end{cases} \tag{88}$$

avec

$$\beta(t,x) = \mathcal{X}(t,x)\,\beta_1 + (1-\mathcal{X}(t,x))\,\beta_2,\ K(t,x) = \mathcal{X}(t,x)\,k_1 I_N + (1-\mathcal{X}(t,x))\,k_2 I_N,$$

Théorème (AM, Pedregal, Periago, JMPA 2008)

$$(RP_t) \quad \textit{Minimiser en } \left(\theta,\overline{G},u\right): \quad \overline{J_t}(\theta,\overline{G},u) = \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega \left[k_1\frac{\left|\overline{G}-k_2\nabla u\right|^2}{\theta\,(k_1-k_2)^2} + k_2\frac{\left|\overline{G}-k_1\nabla u\right|^2}{(1-\theta)\,(k_2-k_1)^2}\right]dxdt$$

$$\begin{cases} G\in L^2\left((0,T)\times\Omega;\mathbb{R}^{N+1}\right), & u\in H^1((0,T)\times\Omega;\mathbb{R}), \\ ((\theta\beta_1+(1-\theta)\,\beta_2)\,u)' - \mathit{div}\,\overline{G} = 0 & \mathit{dans}\ H^{-1}((0,T)\times\Omega), \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \quad \textit{p. p. } t\in[0,T], & u(0) = u_0 \quad \mathit{dans}\ \Omega, \\ \theta\in L^\infty((0,T)\times\Omega;[0,1]), \quad \int_\Omega\theta(t,x)\,dx = L|\Omega| \quad \textit{p.p. } t\in(0,T). & \end{cases}$$

est une relaxation de (P_t) au sens suivant :

(i) *Il existe au moins un minimum pour (RP_t),*

(ii) *l'infimum de (VP_t) est égal au minimum de (RP_t), et*

(iii) *la mesure de Young associée à (RP_t) (et donc la micro-structure optimale de (VP_t)) peut être déterminée sous la forme d'un laminé du premier ordre dont la direction est explicite en terme de la solution optimale de (RP_t).*

[AM 06,07,08] [Asch-Lebeau 99], [Chambolle-Santosa 03], [Periago 09]

- Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N, \;\; N = 1, 2, \;\; (u^0, u^1) \in H^1_0(\Omega) \times L^2(\Omega), \;\; L \in (0,1), T > 0$

$$(P^4_\omega): \quad \inf_{\mathcal{X}_\omega} \|v_\omega\|^2_{L^2(\omega\times(0,T))} \tag{89}$$

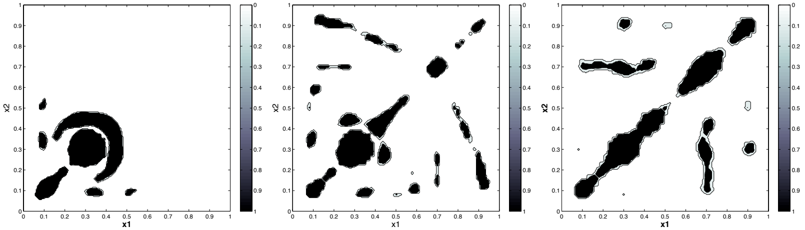
où v_ω est un nul contrôle supporté dans $(0, T) \times \omega$ pour

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = v_\omega \mathcal{X}_\omega & (0, T) \times \Omega, \\ u = 0 & (0, T) \times \partial\Omega, \\ u(0, \cdot) = u^0, \quad u_t(0, \cdot) = u^1 & \{0\} \times \Omega \end{cases} \tag{90}$$

et soumis à

$$\begin{cases} \text{Le système (90) peut être observé de} & (0, T) \times \omega, \\ \|\mathcal{X}_\omega\|_{L^1(\Omega)} \leq L \|\mathcal{X}_\Omega\|_{L^1(\Omega)} \end{cases} \tag{91}$$

Soient $\Omega = (0,1)^2$ et $(u^0, u^1) = (e^{-80(x_1-0.3)^2-80(x_2-0.3)^2}, 0)$ et $L = 1/10$



Iso-valeurs de la densité optimale s sur Ω pour $T = 0.5$, $T = 1$, $T = 3$.

- $\{x \in \Omega, 0 < s(x) < 1\} = \emptyset$, $(RP^4_\omega) \equiv (P^4_\omega)$ et est bien posé.

[Ph. Destuynder 87,88,89]

- Soit $\omega \subset \Omega \in \mathbb{R}^2$, $0 < \alpha \leq \beta$, $u_0 \in H^{1/2}(\Gamma_0)$, $g \in L^2(\Gamma_g)$ et u solution de

$$\begin{cases} -div(a_{\mathcal{X}_\omega} \nabla u) = 0, \quad a_{\mathcal{X}_\omega} = \alpha \mathcal{X}_\omega + \beta(1 - \mathcal{X}_\omega) & \Omega, \\ u = u_0 & \Gamma_0 \subset \partial\Omega, \\ \beta \nabla u \cdot \boldsymbol{\nu} = g & \Gamma_g \subset \partial\Omega. \end{cases} \tag{92}$$

- Pour tout $L \in (0,1)$, le problème d'optimisation est

$$(P) : \quad \inf_{\mathcal{X}_\omega \in \mathcal{X}_L} g_\psi(u, \mathcal{X}_\omega) = \int_\Omega a_{\mathcal{X}_\omega}(\boldsymbol{x})(A_\psi(\boldsymbol{x})\nabla u, \nabla u)dx, \quad A_\psi = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \psi_{1,1} & 2\psi_{1,2} \\ 0 & -\psi_{1,1} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{X}_L = \{\mathcal{X} \in L^\infty(\Omega, \{0,1\}), \mathcal{X} = 0 \text{ sur } \mathcal{D} \cup \partial\Omega, \|\mathcal{X}\|_{L^1(\Omega)} = L|\Omega|\} \tag{93}$$

g_ψ - Taux de restitution de l'énergie

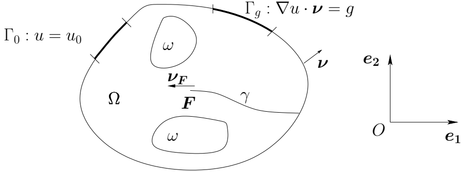


Figure: Structure fissurée soumis à un chargement frontière sur Γ_0 - Optimisation de la distribution des deux matériaux de caractéristique α et β supporté sur $\omega \subset \Omega$ et Ω/ω respectivement.

[Ph. Destuynder 87,88,89]

- Soit $\omega \subset \Omega \in \mathbb{R}^2$, $0 < \alpha \leq \beta$, $u_0 \in H^{1/2}(\Gamma_0)$, $g \in L^2(\Gamma_g)$ et u solution de

$$\begin{cases} -\,div(a_{\mathcal{X}_\omega} \nabla u) = 0, \quad a_{\mathcal{X}_\omega} = \alpha \mathcal{X}_\omega + \beta(1 - \mathcal{X}_\omega) & \Omega, \\ u = u_0 & \Gamma_0 \subset \partial\Omega, \\ \beta \, \nabla u \cdot \boldsymbol{\nu} = g & \Gamma_g \subset \partial\Omega. \end{cases} \tag{92}$$

- Pour tout $L \in (0, 1)$, le problème d'optimisation est

$$(P): \qquad \inf_{\mathcal{X}_\omega \in \mathcal{X}_L} g_\psi(u, \mathcal{X}_\omega) = \int_\Omega a_{\mathcal{X}_\omega}(\boldsymbol{x})(A_\psi(\boldsymbol{x})\nabla u, \nabla u)dx, \quad A_\psi = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \psi_{1,1} & 2\psi_{1,2} \\ 0 & -\psi_{1,1} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{X}_L = \{\mathcal{X} \in L^\infty(\Omega, \{0,1\}), \mathcal{X} = 0 \text{ sur } \mathcal{D} \cup \partial\Omega, \|\mathcal{X}\|_{L^1(\Omega)} = L|\Omega|\} \tag{93}$$

g_ψ - Taux de restitution de l'énergie

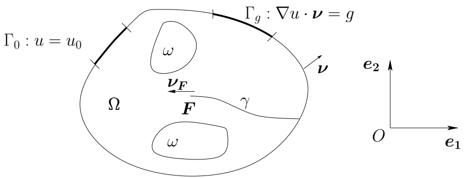


Figure: Structure fissurée soumis à un chargement frontière sur Γ_0 - Optimisation de la distribution des deux matériaux de caractéristique α et β supporté sur $\omega \subset \Omega$ et Ω/ω respectivement.

Théorème (AM, Pedregal)

Le problème suivant

$$(RP): \qquad \min_{s,t} I(s,t) = \int_\Omega g_\psi(\overline{u}, s)dx \tag{94}$$

soumis à

$$\begin{cases} s \in L^\infty(\Omega, [0,1]), s = 0 \ dans \ \mathcal{D} \cup \partial\Omega, \|s\|_{L^1(\Omega)} = L|\Omega|, \\ t \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^2), \quad |t| = 1, \end{cases} \tag{95}$$

où $\overline{u} = \overline{u}(s,t)$ est solution du problème non linéaire

$$\begin{cases} div\Big(A(s)\nabla\overline{u} + B(s)|\nabla\overline{u}|t\Big) = 0, & dans \ \Omega, \\ \overline{u} = u_0, & sur \ \Gamma_0, \\ \beta\nabla\overline{u}\cdot\boldsymbol{\nu} = g, & sur \ \Gamma_g. \end{cases} \tag{96}$$

$$A(s) = \frac{\lambda^+(s) + \lambda^-(s)}{2} = \frac{2\alpha\beta + s(1-s)(\beta-\alpha)^2}{2(\alpha(1-s)+\beta s)}, \quad B(s) = \frac{\lambda^+(s) - \lambda^-(s)}{2} = \frac{s(1-s)(\beta-\alpha)^2}{2(\alpha(1-s)+\beta s)}. \tag{97}$$

est une relaxation du problème originel (P).

Remarque

Si $s \in \{0,1\}$, alors $A(s) = \alpha s + \beta(1-s) = a_{\chi_\omega}$, $B(s) = 0$ et $u \equiv \overline{u}$.

Théorème (AM, Pedregal)

Le problème suivant

$$(RP): \qquad \min_{s,t} I(s,t) = \int_\Omega g_\psi(\overline{u}, s)dx \tag{94}$$

soumis à

$$\begin{cases} s \in L^\infty(\Omega, [0,1]), s = 0 \ dans \ \mathcal{D} \cup \partial\Omega, \|s\|_{L^1(\Omega)} = L|\Omega|, \\ t \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^2), \quad |t| = 1, \end{cases} \tag{95}$$

où $\overline{u} = \overline{u}(s,t)$ est solution du problème non linéaire

$$\begin{cases} div\Big(A(s)\nabla\overline{u} + B(s)|\nabla\overline{u}|t\Big) = 0, & dans \ \Omega, \\ \overline{u} = u_0, & sur \ \Gamma_0, \\ \beta\nabla\overline{u}\cdot\boldsymbol{\nu} = g, & sur \ \Gamma_g. \end{cases} \tag{96}$$

$$A(s) = \frac{\lambda^+(s) + \lambda^-(s)}{2} = \frac{2\alpha\beta + s(1-s)(\beta-\alpha)^2}{2(\alpha(1-s)+\beta s)}, \quad B(s) = \frac{\lambda^+(s) - \lambda^-(s)}{2} = \frac{s(1-s)(\beta-\alpha)^2}{2(\alpha(1-s)+\beta s)}. \tag{97}$$

est une relaxation du problème originel (P).

Remarque

Si $s \in \{0,1\}$, alors $A(s) = \alpha s + \beta(1-s) = a_{\mathcal{X}_\omega}$, $B(s) = 0$ et $u \equiv \overline{u}$.

$$\Omega = (0,1),\ \ \gamma = [0.5,1]\times\{1/2\},\ \ L = 2/5,\ \ u = 0 \text{ sur } \{0\}\times[0,1],\ \ u = 1/2 \text{ sur } [0.5,0.8]\times\{1\} \qquad (98)$$

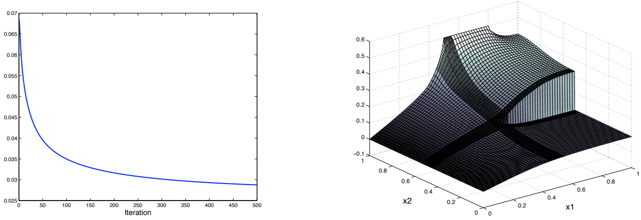


Figure: $(\alpha,\beta) = (1,2)$- $I(s^{(k)}, t^{(k)})$ vs. k (**gauche**) et solution u correspondante sur Ω (**droite**).

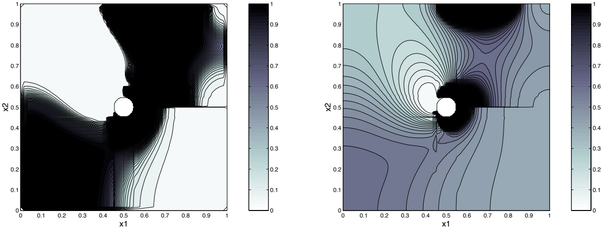


Figure: Iso-valeurs de la densité optimale : $(\alpha,\beta) = (1,2)$ et $(\alpha,\beta) = (1,10)$.

Fissure et Contrôle Optimal : Minimisation du taux par une contre force

[Hild, AM, Ousset, CMAME 09]
Minimisation du taux par rapport a une contre-force frontière h:

$$\inf_{h\in L^2(\partial\Omega)} g_\psi(u,G), \quad G = g\mathcal{X}_{\Gamma_g} + h\mathcal{X}_{\Gamma_h}, \Gamma_h \subset \partial\Omega/(\gamma \cup \Gamma_g) \tag{99}$$

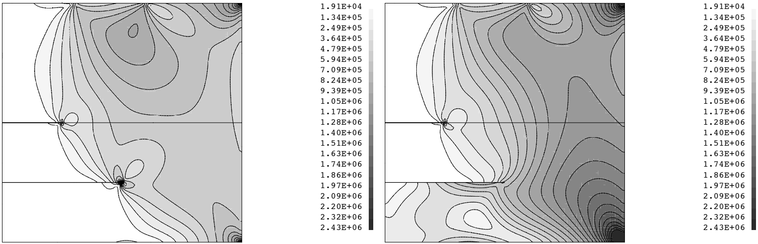


Figure: Iso-valeurs des contraintes de Von Mises sur Ω - sans contre-force : $g_\psi(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h},0) \approx 0.232N/m$; avec contre-force : $g_\psi(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h}^{opt},\mathcal{X}_{\Gamma_h}) \approx 0.0556N/m$.

Partie III : En cours / Perspectives

[En cours avec F. Hubert et F. Boyer dans le cadre de l'ANR CoNum]

- Soient $c > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $\omega \in \Omega$, $T > 0$. Pour toute trajectoire $\boldsymbol{y_T}$, il existe un contrôle $\boldsymbol{u} \in L^2((0,T)\times\omega)$ tel que y solution de

$$\begin{cases} y' - c\Delta y = \mathcal{X}_\omega \boldsymbol{u} & (0,T)\times\Omega, \\ y = 0 & (0,T)\times\partial\Omega, \\ y(0,\cdot) = 0 & \{0\}\times\Omega \end{cases} \quad \text{vérifie} \quad \boldsymbol{y(T,\cdot) = y_T} \tag{100}$$

- En 1-D, la constante d'observabilité $C(h) = \sup_{\phi_h} \frac{\|\phi_h(\cdot,0)\|^2}{\int_0^T\int_\omega \phi_h^2(t,x)dxdt}$ est uniformément bornée.
- mais $cond(\Lambda_h) \leq C(h)h^{-2} \sup_{\phi_h} \frac{\int_0^T\int_\omega \phi_h^2(t,x)dxdt}{\|\phi_h(0,\cdot)\|^2}$ se comporte en $exp(1/h)$

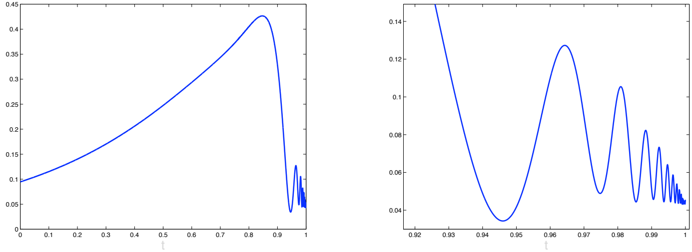


Figure: $\Omega = (0,1)$ - $\omega = (0.2, 0.8)$ - $\|u(t,\cdot)\|_{L^2(\omega)}$ vs $t \in [0,T]$ - $T = 1$ - $y_T(x) = e^{-c\pi^2 T}\sin(\pi x)$

$\Longrightarrow y' - y_{xx} + h^\alpha y'_{xx} = 0, \alpha \in (1,2]$

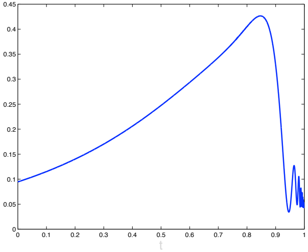
[En cours avec F. Hubert et F. Boyer dans le cadre de l'ANR CoNum]

- Soient $c > 0, \Omega \subset \mathbb{R}^N, \omega \in \Omega, T > 0$. Pour toute trajectoire $\boldsymbol{y_T}$, il existe un contrôle $\boldsymbol{u} \in L^2((0,T)\times\omega)$ tel que y solution de

$$\begin{cases} y' - c\Delta y = \mathcal{X}_\omega \boldsymbol{u} & (0,T)\times\Omega, \\ y = 0 & (0,T)\times\partial\Omega, \\ y(0,\cdot) = 0 & \{0\}\times\Omega \end{cases} \quad \text{vérifie} \quad \boldsymbol{y(T,\cdot) = y_T} \tag{100}$$

- En 1-D, la constante d'observabilité $C(h) = \sup_{\phi_h} \dfrac{\|\phi_h(\cdot,0)\|^2}{\int_0^T\int_\omega \phi_h^2(t,x)dxdt}$ est uniformément bornée.

- mais $cond(\Lambda_h) \leq C(h)h^{-2}\sup_{\phi_h} \dfrac{\int_0^T\int_\omega \phi_h^2(t,x)dxdt}{\|\phi_h(0,\cdot)\|^2}$ se comporte en $exp(1/h)$



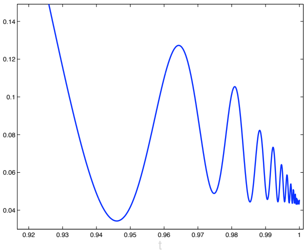


Figure: $\Omega = (0,1)$ - $\omega = (0.2, 0.8)$ - $\|u(t,\cdot)\|_{L^2(\omega)}$ vs $t \in [0,T]$ - $T = 1$ - $y_T(x) = e^{-c\pi^2 T}\sin(\pi x)$

$\Longrightarrow y' - y_{xx} + h^\alpha y'_{xx} = 0, \alpha \in (1,2]$

[En cours avec F. Hubert et F. Boyer dans le cadre de l'ANR CoNum]

- Soient $c > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $\omega \in \Omega$, $T > 0$. Pour toute trajectoire $\boldsymbol{y_T}$, il existe un contrôle $\boldsymbol{u} \in L^2((0,T) \times \omega)$ tel que y solution de

$$\begin{cases} y' - c\Delta y = \mathcal{X}_\omega \boldsymbol{u} & (0,T) \times \Omega, \\ y = 0 & (0,T) \times \partial\Omega, \\ y(0,\cdot) = 0 & \{0\} \times \Omega \end{cases} \quad \text{vérifie} \quad \boldsymbol{y(T,\cdot) = y_T} \tag{100}$$

- En 1-D, la constante d'observabilité $C(h) = \sup_{\phi_h} \frac{\|\phi_h(\cdot,0)\|^2}{\int_0^T \int_\omega \phi_h^2(t,x)dxdt}$ est uniformément bornée.
- mais $cond(\Lambda_h) \leq C(h)h^{-2} \sup_{\phi_h} \frac{\int_0^T \int_\omega \phi_h^2(t,x)dxdt}{\|\phi_h(0,\cdot)\|^2}$ se comporte en $exp(1/h)$

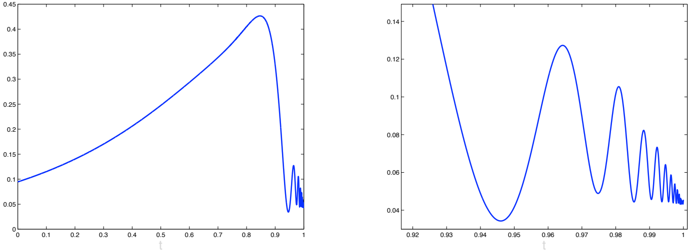


Figure: $\Omega = (0,1)$ - $\omega = (0.2, 0.8)$ - $\|u(t,\cdot)\|_{L^2(\omega)}$ vs $t \in [0,T]$ - $T = 1$ - $y_T(x) = e^{-c\pi^2 T}\sin(\pi x)$

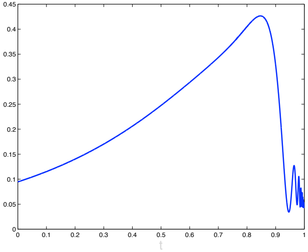
$\Longrightarrow y' - y_{xx} + h^\alpha y'_{xx} = 0, \alpha \in (1,2]$

[En cours avec F. Hubert et F. Boyer dans le cadre de l'ANR CoNum]

- Soient $c > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $\omega \in \Omega$, $T > 0$. Pour toute trajectoire $\boldsymbol{y_T}$, il existe un contrôle $\boldsymbol{u} \in L^2((0,T) \times \omega)$ tel que y solution de

$$\begin{cases} y' - c\Delta y = \mathcal{X}_\omega \boldsymbol{u} & (0,T) \times \Omega, \\ y = 0 & (0,T) \times \partial\Omega, \\ y(0,\cdot) = 0 & \{0\} \times \Omega \end{cases} \quad \text{vérifie} \quad \boldsymbol{y(T,\cdot) = y_T} \tag{100}$$

- En 1-D, la constante d'observabilité $C(h) = \sup_{\phi_h} \dfrac{\|\phi_h(\cdot,0)\|^2}{\int_0^T\int_\omega \phi_h^2(t,x)dxdt}$ est uniformément bornée.
- mais $cond(\Lambda_h) \le C(h)h^{-2} \sup_{\phi_h} \dfrac{\int_0^T\int_\omega \phi_h^2(t,x)dxdt}{\|\phi_h(0,\cdot)\|^2}$ se comporte en $exp(1/h)$



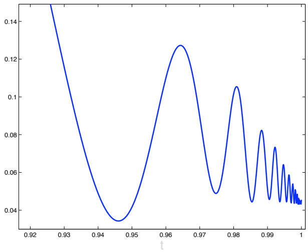


Figure: $\Omega = (0,1)$ - $\omega = (0.2, 0.8)$ - $\|u(t,\cdot)\|_{L^2(\omega)}$ vs $t \in [0,T]$ - $T = 1$ - $y_T(x) = e^{-c\pi^2 T}\sin(\pi x)$

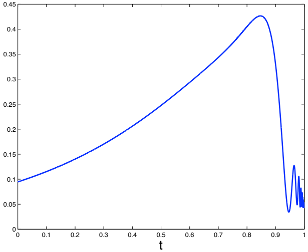
$\Longrightarrow y' - y_{xx} + h^\alpha y'_{xx} = 0, \alpha \in (1,2]$

[En cours avec F. Hubert et F. Boyer dans le cadre de l'ANR CoNum]

- Soient $c > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $\omega \in \Omega$, $T > 0$. Pour toute trajectoire $\boldsymbol{y_T}$, il existe un contrôle $\boldsymbol{u} \in L^2((0,T)\times\omega)$ tel que y solution de

$$\begin{cases} y' - c\Delta y = \mathcal{X}_\omega \boldsymbol{u} & (0,T)\times\Omega, \\ y = 0 & (0,T)\times\partial\Omega, \\ y(0,\cdot) = 0 & \{0\}\times\Omega \end{cases} \quad \text{vérifie} \quad \boldsymbol{y(T,\cdot) = y_T} \tag{100}$$

- En 1-D, la constante d'observabilité $C(h) = \sup_{\phi_h} \dfrac{\|\phi_h(\cdot,0)\|^2}{\int_0^T\int_\omega \phi_h^2(t,x)dxdt}$ est uniformément bornée.
- mais $cond(\Lambda_h) \leq C(h)h^{-2} \sup_{\phi_h} \dfrac{\int_0^T\int_\omega \phi_h^2(t,x)dxdt}{\|\phi_h(0,\cdot)\|^2}$ se comporte en $exp(1/h)$



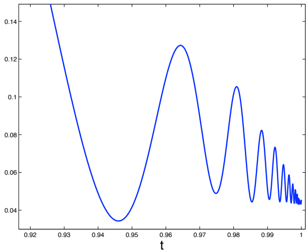


Figure: $\Omega = (0,1)$ - $\omega = (0.2, 0.8)$ - $\|u(t,\cdot)\|_{L^2(\omega)}$ vs $t \in [0,T]$ - $T = 1$ - $y_T(x) = e^{-c\pi^2 T}\sin(\pi x)$

$\Longrightarrow y' - y_{xx} + \boldsymbol{h^\alpha y'_{xx}} = 0, \alpha \in (1,2]$

[En cours avec F. Ammar-Khodja, G. Geymonat et K. Mauffrey]
$\omega = (0,1)^2$, $(\xi_1, \xi_2) \in \omega$ - Deux contrôles $y_\alpha = v_\alpha$ pour les trois composantes de $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)$.

$$\boldsymbol{A_M y} = \begin{pmatrix} -a^{1111}(y_{1,11} + \boldsymbol{r^{-1}y_{3,1}}) - a^{1212}y_{1,22} - (a^{1212} + a^{1122})y_{2,21} \\ -a^{1212}y_{2,11} - a^{2222}y_{2,22} - (a^{2211} + a^{1212})y_{1,12} - a^{2211}\boldsymbol{r^{-1}y_{3,2}} \\ \boldsymbol{r^{-1}}(a^{1111}(y_{1,1} + \boldsymbol{r^{-1}y_3}) + a^{2211}y_{2,2}) \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{A_M} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & B \\ B^\star & a^{1111}r^{-2}I \end{pmatrix}. \tag{101}$$

$$a^{1111} = a^{2222} = \frac{8\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}; \; a^{1122} = a^{2211} = \frac{4\lambda\mu}{\lambda+2\mu}, \; a^{1212} = 2\mu \tag{102}$$

- $Ker\boldsymbol{A_M} = \{\phi \in \boldsymbol{V} = H_0^1(\omega) \times H_0^1(\omega) \times L^2(\omega), \phi_{1,1} + r^{-1}\phi_3 = 0, \phi_{2,2} = 0, \phi_{1,2} + \phi_{2,1} = 0\} = \{\boldsymbol{0}\}$
- $\sigma_{ess}(\boldsymbol{A_M}) = [0, \frac{2(3\lambda+2\mu)\mu}{\lambda+\mu}r^{-2}] \neq \emptyset \Longrightarrow$ Non contrôlabilité uniforme dans $(L^2(\omega))^3 \times \boldsymbol{V'}$
- $a^{1111}r^{-2} \in \sigma(\boldsymbol{A_M}) \backslash \sigma_{ess}(\boldsymbol{A_M})$ associée à la fonction propre $(0,0,1)$
- $\lambda \in \sigma(\boldsymbol{A_M})$ tel que $\lambda \neq a^{1111}r^{-2}$ vérifient

$$\left(\boldsymbol{A} + \frac{r^{-2}}{\lambda - a^{1111}r^{-2}}BB^\star\right)(\phi_1, \phi_2) = \lambda(\phi_1, \phi_2), \quad (\phi_1, \phi_2) \in H_0^1(\omega) \times H_0^1(\omega) \tag{103}$$

[En cours avec F. Ammar-Khodja, G. Geymonat et K. Mauffrey]
$\omega = (0,1)^2$, $(\xi_1, \xi_2) \in \omega$ - Deux contrôles $y_\alpha = v_\alpha$ pour les trois composantes de $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)$.

$$\boldsymbol{A_M y} = \begin{pmatrix} -a^{1111}(y_{1,11} + \boldsymbol{r^{-1} y_{3,1}}) - a^{1212} y_{1,22} - (a^{1212} + a^{1122}) y_{2,21} \\ -a^{1212} y_{2,11} - a^{2222} y_{2,22} - (a^{2211} + a^{1212}) y_{1,12} - a^{2211} \boldsymbol{r^{-1} y_{3,2}} \\ \boldsymbol{r^{-1}}(a^{1111}(y_{1,1} + \boldsymbol{r^{-1} y_3}) + a^{2211} y_{2,2}) \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{A_M} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & B \\ B^\star & a^{1111} r^{-2} I \end{pmatrix}. \tag{101}$$

$$a^{1111} = a^{2222} = \frac{8\mu(\lambda+\mu)}{\lambda + 2\mu}; \ a^{1122} = a^{2211} = \frac{4\lambda\mu}{\lambda+2\mu}, \ a^{1212} = 2\mu \tag{102}$$

- $Ker \boldsymbol{A_M} = \{\phi \in \boldsymbol{V} = H_0^1(\omega) \times H_0^1(\omega) \times L^2(\omega), \phi_{1,1} + r^{-1}\phi_3 = 0, \phi_{2,2} = 0, \phi_{1,2} + \phi_{2,1} = 0\} = \{\boldsymbol{0}\}$
- $\sigma_{ess}(\boldsymbol{A_M}) = [0, \frac{2(3\lambda+2\mu)\mu}{\lambda+\mu} r^{-2}] \neq \emptyset \Longrightarrow$ Non contrôlabilité uniforme dans $(L^2(\omega))^3 \times \boldsymbol{V'}$
- $a^{1111} r^{-2} \in \sigma(\boldsymbol{A_M}) \backslash \sigma_{ess}(\boldsymbol{A_M})$ associée à la fonction propre $(0,0,1)$
- $\lambda \in \sigma(\boldsymbol{A_M})$ tel que $\lambda \neq a^{1111} r^{-2}$ vérifient

$$\left(\boldsymbol{A} + \frac{r^{-2}}{\lambda - a^{1111} r^{-2}} BB^\star\right)(\phi_1, \phi_2) = \lambda(\phi_1, \phi_2), \quad (\phi_1, \phi_2) \in H_0^1(\omega) \times H_0^1(\omega) \tag{103}$$

[En cours avec F. Ammar-Khodja, G. Geymonat et K. Mauffrey]
$\omega = (0,1)^2$, $(\xi_1,\xi_2) \in \omega$ - Deux contrôles $y_\alpha = v_\alpha$ pour les trois composantes de $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)$.

$$\boldsymbol{A_M y} = \begin{pmatrix} -a^{1111}(y_{1,11} + \boldsymbol{r^{-1}y_{3,1}}) - a^{1212}y_{1,22} - (a^{1212}+a^{1122})y_{2,21} \\ -a^{1212}y_{2,11} - a^{2222}y_{2,22} - (a^{2211}+a^{1212})y_{1,12} - a^{2211}\boldsymbol{r^{-1}y_{3,2}} \\ \boldsymbol{r^{-1}}(a^{1111}(y_{1,1} + \boldsymbol{r^{-1}y_3}) + a^{2211}y_{2,2}) \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{A_M} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & B \\ B^\star & a^{1111}r^{-2}I \end{pmatrix}. \tag{101}$$

$$a^{1111} = a^{2222} = \frac{8\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu};\; a^{1122} = a^{2211} = \frac{4\lambda\mu}{\lambda+2\mu},\; a^{1212} = 2\mu \tag{102}$$

- $Ker\boldsymbol{A_M} = \{\phi \in \boldsymbol{V} = H_0^1(\omega)\times H_0^1(\omega)\times L^2(\omega), \phi_{1,1} + r^{-1}\phi_3 = 0, \phi_{2,2} = 0, \phi_{1,2}+\phi_{2,1} = 0\} = \{\boldsymbol{0}\}$
- $\sigma_{ess}(\boldsymbol{A_M}) = [0, \frac{2(3\lambda+2\mu)\mu}{\lambda+\mu}r^{-2}] \neq \emptyset \implies$ Non contrôlabilité uniforme dans $(L^2(\omega))^3 \times \boldsymbol{V'}$
- $a^{1111}r^{-2} \in \sigma(\boldsymbol{A_M})\backslash\sigma_{ess}(\boldsymbol{A_M})$ associée à la fonction propre $(0,0,1)$
- $\lambda \in \sigma(\boldsymbol{A_M})$ tel que $\lambda \neq a^{1111}r^{-2}$ vérifient

$$\left(\boldsymbol{A} + \frac{r^{-2}}{\lambda - a^{1111}r^{-2}}BB^\star\right)(\phi_1,\phi_2) = \lambda(\phi_1,\phi_2), \quad (\phi_1,\phi_2) \in H_0^1(\omega)\times H_0^1(\omega) \tag{103}$$

[En cours avec F. Ammar-Khodja, G. Geymonat et K. Mauffrey]
$\omega = (0,1)^2$, $(\xi_1, \xi_2) \in \omega$ - Deux contrôles $y_\alpha = v_\alpha$ pour les trois composantes de $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)$.

$$\boldsymbol{A_M y} = \begin{pmatrix} -a^{1111}(y_{1,11} + r^{-1} y_{3,1}) - a^{1212} y_{1,22} - (a^{1212} + a^{1122}) y_{2,21} \\ -a^{1212} y_{2,11} - a^{2222} y_{2,22} - (a^{2211} + a^{1212}) y_{1,12} - a^{2211} r^{-1} y_{3,2} \\ r^{-1}(a^{1111}(y_{1,1} + r^{-1} y_3) + a^{2211} y_{2,2}) \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{A_M} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & B \\ B^\star & a^{1111} r^{-2} I \end{pmatrix}. \tag{101}$$

$$a^{1111} = a^{2222} = \frac{8\mu(\lambda+\mu)}{\lambda + 2\mu}; \; a^{1122} = a^{2211} = \frac{4\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}, \; a^{1212} = 2\mu \tag{102}$$

- $Ker \boldsymbol{A_M} = \{\phi \in \boldsymbol{V} = H_0^1(\omega) \times H_0^1(\omega) \times L^2(\omega), \phi_{1,1} + r^{-1}\phi_3 = 0, \phi_{2,2} = 0, \phi_{1,2} + \phi_{2,1} = 0\} = \{\boldsymbol{0}\}$
- $\sigma_{ess}(\boldsymbol{A_M}) = [0, \frac{2(3\lambda+2\mu)\mu}{\lambda+\mu} r^{-2}] \neq \emptyset \Longrightarrow$ Non contrôlabilité uniforme dans $(L^2(\omega))^3 \times \boldsymbol{V'}$
- $a^{1111} r^{-2} \in \sigma(\boldsymbol{A_M}) \backslash \sigma_{ess}(\boldsymbol{A_M})$ associée à la fonction propre $(0,0,1)$
- $\lambda \in \sigma(\boldsymbol{A_M})$ tel que $\lambda \neq a^{1111} r^{-2}$ vérifient

$$\left(\boldsymbol{A} + \frac{r^{-2}}{\lambda - a^{1111} r^{-2}} B B^\star\right)(\phi_1, \phi_2) = \lambda(\phi_1, \phi_2), \quad (\phi_1, \phi_2) \in H_0^1(\omega) \times H_0^1(\omega) \tag{103}$$

Est-il possible d'éliminer le spectre essentiel en agissant sur la distribution de deux matériaux dans ω ????!?

$$(\lambda(\boldsymbol{\xi}), \mu(\boldsymbol{\xi})) = (\lambda_\alpha, \mu_\alpha)\mathcal{X}_{\mathcal{O}}(\boldsymbol{\xi}) + (\lambda_\beta, \mu_\beta)(1 - \mathcal{X}_{\mathcal{O}}(\boldsymbol{\xi})), \quad \boldsymbol{\xi} \in \omega, \quad \mathcal{O} \subset \omega$$

$$\inf_{\mathcal{O}\subset\omega} \sup_{\boldsymbol{\phi^0}, \boldsymbol{\phi^1}} \frac{\|\boldsymbol{\phi^0}, \boldsymbol{\phi^1}\|^2_{\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{H}}}{\int_0^T \int_{\partial\omega} b_M(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\phi}) d\sigma dt} \tag{104}$$

[en cours avec F. Ammar-Khodja et S. Micu]
Contrôlabilité exacte en $x = 0$ d'une corde soumis à un obstacle en $x = 1$

$$\begin{cases} y'' - y_{xx} = 0 & (t,x) \in (0,T) \times (0,1), \\ y(t,0) = \boldsymbol{u(t)} & t \in (0,T), \\ \boldsymbol{y(t,1) \geq \psi(t), \;\; y_x(t,1) \geq 0, \;\; (y(t,1) - \psi(t))y_x(t,1) = 0} & t \in (0,T), \\ y(0,x) = y^0(x), \;\; y'(0,x) = y^1(x) & x \in (0,1) \end{cases} \tag{105}$$

$\forall (y^0, y^1) \in H^1(0,1) \times L^2(0,1)$ tq $y^0(1) \geq \psi(0)$, $\exists u \in H^1(0,T)$ tq $y(T) = y'(T) = 0$?

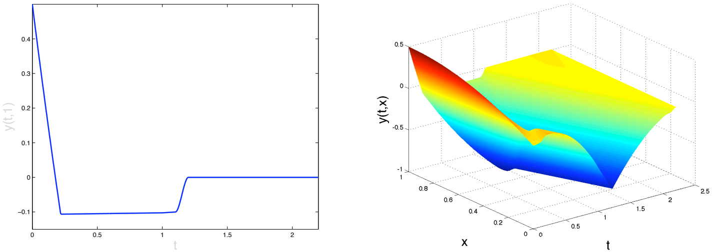


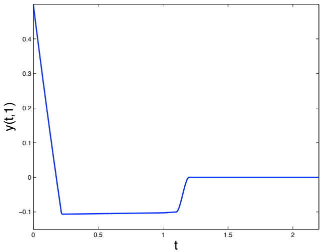
Figure: $\phi(t) = -l = -1/10$; **Gauche**: $y(t,1)$ vs. $t \in (0,T)$; **Droite**: $y(t,x)$ vs. $(t,x) \in (0,T) \times (0,1)$

$\Longrightarrow$ Extension au cas $N = 2$ et au cas d'obstacles internes mobiles.

[en cours avec F. Ammar-Khodja et S. Micu]
Contrôlabilité exacte en $x = 0$ d'une corde soumis à un obstacle en $x = 1$

$$\begin{cases} y'' - y_{xx} = 0 & (t,x) \in (0,T) \times (0,1), \\ y(t,0) = \boldsymbol{u(t)} & t \in (0,T), \\ \boldsymbol{y(t,1) \geq \psi(t), \ \ y_x(t,1) \geq 0, \ \ (y(t,1) - \psi(t)) y_x(t,1) = 0} & t \in (0,T), \\ y(0,x) = y^0(x), \ \ y'(0,x) = y^1(x) & x \in (0,1) \end{cases} \tag{105}$$

$\forall (y^0, y^1) \in H^1(0,1) \times L^2(0,1)$ tq $y^0(1) \geq \psi(0)$, $\exists u \in H^1(0,T)$ tq $y(T) = y'(T) = 0$?



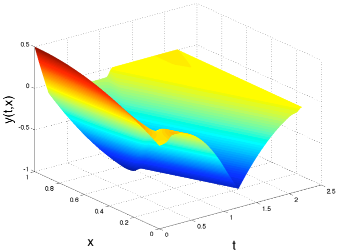


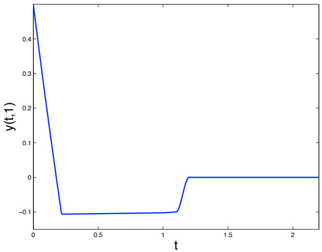
Figure: $\phi(t) = -l = -1/10$; **Gauche**: $y(t,1)$ vs. $t \in (0,T)$; **Droite**: $y(t,x)$ vs. $(t,x) \in (0,T) \times (0,1)$

$\Longrightarrow$ Extension au cas $N = 2$ et au cas d'obstacles internes mobiles.

[en cours avec F. Ammar-Khodja et S. Micu]
Contrôlabilité exacte en $x = 0$ d'une corde soumis à un obstacle en $x = 1$

$$\begin{cases} y'' - y_{xx} = 0 & (t,x) \in (0,T) \times (0,1), \\ y(t,0) = \boldsymbol{u(t)} & t \in (0,T), \\ \boldsymbol{y(t,1) \geq \psi(t), \ \ y_x(t,1) \geq 0, \ \ (y(t,1) - \psi(t))y_x(t,1) = 0} & t \in (0,T), \\ y(0,x) = y^0(x), \ \ y'(0,x) = y^1(x) & x \in (0,1) \end{cases} \tag{105}$$

$\forall (y^0, y^1) \in H^1(0,1) \times L^2(0,1)$ tq $y^0(1) \geq \psi(0)$, $\exists u \in H^1(0,T)$ tq $y(T) = y'(T) = 0$?



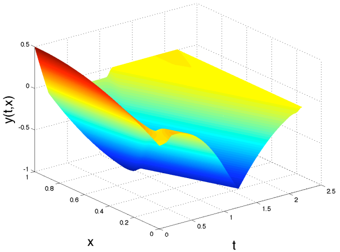


Figure: $\phi(t) = -l = -1/10$; **Gauche**: $y(t,1)$ vs. $t \in (0,T)$; **Droite**: $y(t,x)$ vs. $(t,x) \in (0,T) \times (0,1)$

$\Longrightarrow$ Extension au cas $N = 2$ et au cas d'obstacles internes mobiles.

MERCI BEAUCOUP - MUCHAS GRACIAS