

**THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ
PIERRE ET MARIE CURIE**

Spécialité :
MÉCANIQUE

Présentée par
Arnaud MÜNCH

Pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS VI

Sujet de la thèse :
**PROPAGATION DE FISSURES TRIDIMENSIONNELLES
DANS LES STRUCTURES STRATIFIÉES :
INTERFACES COURBES ET ASSEMBLAGES COLLÉS**

Soutenue le 18 Septembre 2002 devant le jury composé de :

Jean-Louis CHABOCHE	Examineur
Philippe DESTUYNDER	Examineur
Françoise KRASUCKI	Co-directrice
Jean-Baptiste LEBLOND	Président
Frédéric LEBON	Rapporteur
Jean-Jacques MARIGO	Rapporteur
Yves OUSSET	Co-directeur

Thèse préparée au sein du Département Mécanique du Solide et de
l'Endommagement de l'Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales

Remerciements

Les modestes travaux qui vont suivre sont le fruit de la collaboration et d'échanges avec de nombreuses personnes qu'il convient ici de saluer.

Je souhaite, en premier lieu, exprimer ma gratitude à Yves OUSSET, lequel initiant ce travail, a su accorder sa confiance à un étudiant dont l'existence même de la théorie de la mécanique (de la rupture) était inconnue. Je lui suis reconnaissant de m'avoir proposé un sujet de recherche très riche puis de m'avoir laissé aller jusqu'au bout de mes idées. J'exprime également toute ma gratitude à Françoise KRASUCKI, qui assurant la direction universitaire de cette thèse a su malgré ses diverses charges, m'accorder quelques précieux moments et ainsi enrichir ce travail.

En second lieu, je tiens à remercier MM. Pascal GEOFFROY et Serge KRUCH, qui ont su supporter mon incomparable bonne humeur permanente pendant trois ans et permis de ce fait de travailler dans un environnement scientifique exceptionnel. Naturellement, je remercie tous mes camarades de jeu de l'unité loi de comportement et mécanique de l'endommagement, tout particulièrement Daniel LOUIS pour son aide déterminante dans le couplage entre le code de remaillage et le code de calcul de structure.

Je remercie ensuite Frédéric LEBON et Jean-Jacques MARIGO d'avoir rapporté ce travail avec diligence malgré l'appel du repos estival. Par ailleurs, je suis très honoré que Philippe DESTUYNDER ait accepté d'examiner ce travail. Il est bien peu de dire que les développements qui suivent s'inspirent de ces travaux. Je souhaite également remercier Jean-Louis CHABOCHE, infatigable chercheur, passionné donc passionnant, d'avoir examiné ce travail pourtant à la frontière de son très large domaine de compétence. Enfin, je remercie Jean-Baptiste LEBLOND d'avoir assuré la présidence de ce jury.

Il convient également de saluer les personnes qui ont manifesté de l'intérêt pour nos travaux, parmi lesquelles : Radhi ABDELMOULA, Olivier ALLIX, Guy BARLES, Laurent BOURGEOIS, Alain COMBESCURE, Michèle COUTRIS, Michel CROUZEIX, Glyn DAVIES, Gilles FRANCFORT, Giuseppe GEYMONAT, Colette GUILOPPE, Pierre LADEVEZE, Véronique LAZARUS, Dominique LEGUILLON, Alain MIGNOT, Bernard PHILIPPE.

Enfin, et surtout, je remercie mes proches pour leurs soutiens sans faille depuis tant d'années, en particulier mes parents à qui je dédie bien modestement ce travail.



Table des matières

Introduction	9
Principales notations et définitions	11
1 Rappels préliminaires et notations	13
1.1 Elasticité tridimensionnelle	13
1.1.1 Caractérisation des états d'équilibres	13
1.1.2 Lois de comportement hyperélastiques	15
1.2 Dérivation sur un ouvert variable	19
1.2.1 La θ -méthode	19
1.2.2 Prise en compte de la condition de non interpénétration	23
Partie I : Délaminage dans les structures courbes	25
2 Problématique	27
2.1 Quelques travaux tridimensionnels	28
2.2 Quelques travaux sur les fissures non planes	30
3 Modèles de poutres délaminiées	35
3.1 Problème à résoudre	35
3.1.1 Problème de l'élasticité en repère global	35
3.1.2 Problème de l'élasticité en repère local	37
3.2 Dérivée lagrangienne de l'énergie	42
3.3 Analyse asymptotique et convergence des énergies	45
3.3.1 Rappels sur la méthode asymptotique	45
3.3.2 Convergence de la dérivée lagrangienne première de l'énergie	48
3.4 Modèles limites	52
3.4.1 Modèle de Bernoulli-Euler-Navier	52
3.4.2 Modèle de Timoshenko	56
3.5 Solutions analytiques et influences de la courbure sur la rupture	57
3.5.1 Sans prise en compte de l'effort tranchant	59
4 Calculs des dérivées lagrangiennes	65
4.1 Rappels de géométrie différentielle et réécriture de la formulation variationnelle	65
4.2 Dérivées lagrangiennes pour des coques minces linéaires	70
4.2.1 Expressions du tenseur des déformations planes	70
4.2.2 Modèles de coque mince	72

4.2.3	Modèle de coque peu profonde délaminée	75
4.2.4	Mise en œuvre de la θ -méthode	76
4.2.5	Dérivées première et seconde dans le cas coque peu profonde	78
4.3	Dérivées lagrangiennes pour des coques épaisses	80
4.3.1	Elasticité linéaire	80
4.3.2	Grands déplacements	82
4.4	Exemples de cartes	83
4.4.1	L'arche cylindrique	83
4.4.2	Le paraboléoïde hyperbolique	85
5	Modèle de propagation et mise en œuvre	87
5.1	Modèle de propagation	87
5.1.1	Position du problème et rappels sur le critère de Griffith	87
5.1.2	Le postulat du principe du minimum de l'énergie	88
5.1.3	Calcul de la nouvelle position d'équilibre	91
5.1.4	Cas des évolutions spontanées	96
5.2	Mise en œuvre	101
5.2.1	Description du front et définition de θ	101
5.2.2	Description de l'élément fini	103
5.2.3	Algorithme	104
6	Applications	109
6.1	Double cantilever beam (DCB) - Surface plane	109
6.2	Front fermé - Cas plan	118
6.2.1	Cas isotrope	118
6.2.2	Cas d'un stratifié	124
6.3	Arche cylindrique	129
6.3.1	Front débouchant	131
6.3.2	Front fermé	133
	Partie II : Modèles de rupture de joint collé en élasticité non linéaire	139
7	Problématique	141
7.1	Sur la modélisation du joint	142
7.2	Sur la modélisation de la rupture du joint	144
8	Modèles de joint collé en élasticité non linéaire	147
8.1	Position du problème	147
8.2	Densité de Saint Venant-Kirchhoff	149
8.2.1	Formulation variationnelle et dilatation selon l'épaisseur	150
8.2.2	Développement asymptotique formel	151
8.2.3	Le cas unidimensionnel	153
8.2.4	Etude du problème limite \mathcal{P}^1	157
8.3	Densité de Ciarlet-Geymonat	161
8.3.1	Développement de l'énergie I_{CG}^e	162
8.3.2	Etude de I_{CG}^1	163
8.3.3	Comparaison des modèles limite dans le cas unidimensionnel	168

8.4	Mise en œuvre numérique	170
8.5	Applications	172
8.5.1	Cube soumis à un chargement surfacique axial	172
8.5.2	Convergence numérique	175
8.5.3	Assemblage à simple recouvrement	175
9	Rupture du joint	179
9.1	Modélisation de la rupture du joint	179
9.2	Dérivées lagrangiennes de E	180
9.2.1	Densité de Saint Venant-Kirchhoff	180
9.2.2	Densité de Ciarlet-Geymonat	183
9.3	Commentaires sur les modèles limites	184
9.3.1	Modèle de propagation et amorçage	184
9.3.2	Analogie avec les modèles d' <i>interfaces endommageables</i>	186
9.3.3	Convergence vers les modèles d'interface parfaite	188
9.4	Applications	189
9.4.1	Solution analytique dans le cas d'une poutre linéaire	189
9.4.2	Structure DCB - Front ouvert	191
9.4.3	Assemblage circulaire troué	202
10	Multi-délamination	207
10.1	Problématique	207
10.2	Deux délaminages parallèles au sein d'une DCB	208
10.3	Fronts elliptiques internes	214
	Conclusions et Perspectives	219
	Bibliographie	223

Introduction

Nous nous intéressons dans ce document à la propagation de fissures tridimensionnelles dans les structures stratifiées. L'étude des fissures et de leurs évolutions est un sujet qui a été abordé de façon très intense ces trente dernières années¹. Ce fait s'explique par le nombre important de disciplines concernées, en amont ou en aval, par cette thématique, de la physique moléculaire aux mathématiques en passant par la métallurgie et la mécanique des solides. Ainsi, l'évolution de fissure peut-elle être décrite par des outils issus de la théorie des fonctions à variables complexes et, par ailleurs, expérimentalement détectée par des techniques de shearographie [TAILLADE (2001)]. Dans le cadre de la mécanique, cette thématique est connue sous l'appellation de *mécanique de la rupture* [BUI (1978)], discipline à l'origine charnière de la métallurgie et de la mécanique du solide, apparue dans les années 60, ayant pour objet l'identification de paramètres ou la mise en évidence de quantités fondamentales régissant l'évolution et l'influence de défauts dans les milieux supposés homogènes élastiques tels que les matériaux métalliques. Depuis ces vingt dernières années, cette théorie, exposée dans [BUI (1978)], illustrée dans les textes de l'école CEA-INRIA-EDF 82-83 [RUPTURE (1982)] et dont un panorama assez complet est donné dans [BUI & EHRLACHER (1997)], a été étendue à de multiples lois de comportement [LEMAITRE & CHABOCHE (1985)], incluant, par exemple, les effets dynamiques, la plasticité sur des matériaux périodiques, hétérogènes, par exemple les matériaux stratifiés composites. Ces développements permettent aujourd'hui de décrire assez finement l'évolution des défauts sur des exemples structuraux, en prenant en compte des phénomènes aussi complexes que le flambage, le contact, le frottement, les échanges de température et autres phénomènes mécaniques ([NGUYEN (2000)]). La tendance actuelle en plein essor est le couplage de phénomènes multi-échelles ([CARRERE (2001)] et ses références) visant à (mieux) prendre en compte les caractéristiques fines (observées par exemple à une échelle microscopique) dans une modélisation macroscopique, tendance rendue possible par le développement conjoint des moyens informatiques et des méthodes de calculs scientifiques (pour une application voir [FEYEL (1998)] et ses références).

Dans ce document, nous étudions la propagation de fissures d'interface présentes au sein des matériaux stratifiés, processus appelé délaminage et constituant avec la fissuration transverse, le mode majeur de rupture de ce type de matériau. La vision que nous utilisons est exclusivement macroscopique. Nous nous plaçons dans le cadre de la mécanique de la rupture fragile en n'utilisant que des densités d'énergie élastique, principalement la densité de Saint Venant-Kirchhoff. Cette vision, négligeant les effets dynamiques, les échanges de température, etc, peut sembler très pauvre pour décrire un phénomène aussi irréversible et brutal que la fissuration. Cette démarche reste cependant acceptable dans la mesure où notre description du processus est globale et n'utilise que des quantités énergétiques, énergie et dérivées d'énergie, nettement moins sensibles, par

¹plus de 1000 articles, issus de journaux de mécanique entre 1992 et 2002, pris au sens large, et contenant dans leur titre le mot fissure sont répertoriés.

exemple à la zone de plasticité, supposée réduite mais nécessairement présente, en fond de fissure, ou aux méthodes de résolution numérique, que des quantités locales, fonction du champ de déplacements et dérivées de déplacements. Par ailleurs, certaines de ces fonctions, par exemple les contraintes, sont prédites infinies en fond de fissure par la mécanique de la rupture, fondée sur la densité de Saint Venant-Kirchhoff. Un tel résultat n'est pas conforme à la réalité, aucun matériau ne pouvant supporter des contraintes arbitrairement grandes. Enfin, insistons sur le fait que cette vision globale est parfaitement en phase avec la méthode des éléments finis.

Le document comporte deux parties non indépendantes, précédées d'un chapitre de rappels. La **première partie** concerne l'étude de la propagation d'un front de fissure le long d'une surface connue non nécessairement plane de l'espace. Supposant que cette surface est décrite par une carte régulière, cette étude permet d'aborder la question de l'influence des paramètres géométriques sur la propagation, mais également d'aborder celle de la stabilité du front vis-à-vis de sa forme. La **deuxième partie** concerne l'étude de la rupture d'un joint de colle (ou interphase) de faible rigidité reliant deux solides. Une analyse asymptotique rigoureuse et formelle sur l'épaisseur du joint permet de ramener cette situation d'une interphase à la situation d'une interface de la première partie. Nous profitons de la faible rigidité du joint par rapport aux deux solides pour utiliser la densité de Ciarlet-Geymonat et montrer ses avantages tant théoriques que numériques sur la densité de Saint Venant-Kirchhoff. Que ce soit pour la situation de l'interface (première partie) ou pour la situation de l'interphase (seconde partie), le modèle de propagation repose sur un principe de moindre énergie équivalent dans un sens (variationnel) faible à un critère de type Griffith, principe introduit dans [EHLACHER (1985)], utilisé dans [FEDELICH (1990)] dans le cas du laplacien, puis développé et enrichi dans [FRANCFORT & MARIGO (1998)].

L'approche est plutôt orientée du côté mathématique ; à ce propos, le lecteur peut comprendre notre étude de la propagation d'une fissure comme l'étude d'une surface de discontinuité alimentée par quelques considérations et restrictions mécaniques élémentaires. L'étude se veut aussi rigoureuse que possible ; cependant, pour ne pas tripler le volume du document, certains points ne sont pas développés en détail. Nous employons la θ -méthode pour dériver les énergies par rapport au domaine, utilisons la méthode des développements asymptotiques ainsi que la théorie des coques. Les travaux présentés dans ce document ont le souhait d'enrichir les travaux de [NEVERS (1986)] et [DESTUYNDER *et al.* (1992)], fondés sur ([GRIFFITH (1920)], [BUI (1978)], [DESTUYNDER *et al.* (1983)], [DJAOUA (1983)], [KLARBRING (1991)]) et s'appuient pour cela de façon essentielle sur ([CIARLET & DESTUYNDER (1979)], [DESTUYNDER (1980)], [CIARLET & GEYMONAT (1982)], [CIARLET (1988)], [FRANCFORT & MARIGO (1998)], [OUSSET (1999)], [GEYMONAT *et al.* (1999)], [CIARLET (2000)]).

Principales notations et définitions

Les notations sont empruntées à l'ouvrage de référence [CIARLET (1988)]. La **convention d'Einstein est systématiquement utilisée**. Les lettres latines i, j, k, \dots prennent leurs valeurs dans l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ tandis que les lettres grecques α, β, \dots , prennent, à l'exception de ϵ et ν , leurs valeurs dans l'ensemble $\{1, 2\}$.

- \mathbb{M}_n^+ : ensemble des matrices d'ordre n de déterminant strictement positif.
- \mathbb{M}_n^s : ensemble des matrices symétriques d'ordre n .
- Ω : domaine (ouvert borné connexe de frontière Lipschitzienne) de l'espace euclidien \mathbb{R}^3 .
- $\partial\Omega, \bar{\Omega}$: frontière et adhérence de Ω .
- $B = (O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$: repère orthonormé direct de \mathbb{R}^3 .
- (x_1, x_2, x_3) : coordonnées cartésiennes d'un point \mathbf{x} de Ω .
- $\boldsymbol{\sigma}$: second tenseur (d'ordre 2) des contraintes de Piola-Kirchhoff.
- \mathbf{E} : tenseur des déformations de Green-Lagrange $\mathbf{E}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T + \nabla\mathbf{u}^T \cdot \nabla\mathbf{u})$.
- $\mathbf{e}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T)$.
- $\mathbf{F}^T, Tr(\mathbf{F}), cof\mathbf{F}, det\mathbf{F}$: Transposée, trace, matrice des cofacteurs, déterminant de \mathbf{F} .
- $\mathbb{R} = (R_{ijkl}), \mathbb{S} = (S_{ijkl})$: tenseur d'ordre 4 de rigidité, de souplesse (repère global).
- l_f : application linéaire associée à la distribution surfacique de force \mathbf{f} de support $\Gamma_f \subset \partial\Omega$.
- Γ_u : partie de $\partial\Omega$ où le champ des déplacements \mathbf{u} est identiquement nul.
- $\check{W}_{SV}, \check{W}_{CG}$: densité d'énergie de Saint Venant-Kirchhoff, de Ciarlet-Geymonat.
- $I(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$: énergie mécanique associée à Ω .
- $D(\gamma)$: énergie de rupture.
- p.p. : abréviation pour presque partout.
- ω : surface moyenne de Ω .
- $\omega_d \subset \omega$: surface délaminée.
- γ_f : front de fissure $\subset \omega$.
- $\boldsymbol{\theta}$: déplacement virtuel du front défini sur un voisinage S_θ de γ_f .
- $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$: coordonnées curvilignes d'un point $\boldsymbol{\zeta}$ de Ω .
- $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$: (resp. $(\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3)$) base contravariante (resp. covariante) associée à la surface moyenne ω .
- $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3)$: (resp. $(\mathbf{g}^1, \mathbf{g}^2, \mathbf{g}^3)$) base contravariante (resp. covariante) associée à Ω .
- \mathbf{n}, \mathbf{m} : effort résultant et moment de flexion.

- $a_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta}$: composantes covariantes du tenseur de changement de métrique et du tenseur de courbure associés à ω .
- $g_{\alpha\beta}$: composantes covariantes du tenseur de changement de métrique associé à Ω .
- $|a| = \det(a_{\alpha\beta}) > 0, |g| = \det(g_{\alpha\beta}) = (1 - 2H\zeta_3 + H\zeta_3^2)^2|a|$.
- $H(\zeta_\alpha), K(\zeta_\alpha)$: courbure moyenne et de Gauss au point (ζ_α) de ω .
- $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$: symboles de Christoffel.
- $v_{\alpha|\beta} = v_{\alpha,\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$: dérivée covariante de \mathbf{v} .
- $\gamma_{\alpha\beta}, \rho_{\alpha\beta}$: variation linéaire de $a_{\alpha\beta}$ et $b_{\alpha\beta}$.
- $L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ mesurable et tel que } (\int_\Omega |f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x})^{1/p} < \infty\}$ ($p \in [1, \infty[$).
- $L^\infty(\Omega) = \{\Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ mesurable et tel que } \exists C \text{ tel que } |f(\mathbf{x})| < C \text{ p.p. sur } \Omega\}$.
- $W^{m,p}(\Omega) = \{\mathbf{u} \in L^p(\Omega); \text{ tq } D^\alpha \mathbf{u} \in L^p(\Omega), \forall |\alpha| \leq m\}$ ($p \in [1, \infty]$).
- $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$.
- λ, λ_c : facteur de charge, facteur de charge critique.
- $I^{(1)}(\boldsymbol{\theta})$: dérivée de l'énergie I dans la direction $\boldsymbol{\theta}$.
- $I^{(2)}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\psi})$: dérivée de $I^{(1)}(\boldsymbol{\theta})$ dans la direction $\boldsymbol{\psi}$.
- $g(\boldsymbol{\theta}) = -I^{(1)}(\boldsymbol{\theta})$: taux de restitution défini sur V_θ .
- G : force de délaminage ou taux de restitution local défini sur le front γ_f tel que $g(\boldsymbol{\theta}) = \int_{\gamma_f} G \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\nu} d\Gamma$.
- G_c : Taux de restitution critique.
- $L_s^2(\Omega) = \{\boldsymbol{\tau} = (\tau_{ij}), \tau_{ij} \in L^2(\Omega), \tau_{ij} = \tau_{ji}\}$.
- div : opérateur de divergence.
- $[f]$ défini sur S : saut de la fonction f au passage de la discontinuité S .
- ϵ : petit paramètre positif sans dimension.

D'une manière générale, les quantités munies du symbole $\hat{}$ désignent des termes attachés au repère local de Ω . Ainsi :

- $\hat{\omega}$: partie de \mathbb{R}^2 associée à ω par la relation $\phi(\hat{\omega}) = \omega$.
- $\hat{\Omega}$: partie de \mathbb{R}^3 associée à Ω par la relation $\varphi(\hat{\Omega}) = \Omega$.
- $\hat{\gamma}_f \subset \hat{\omega}$ représentation locale du front γ_f .
- $\hat{\mathbf{u}} = (\hat{u}_i)$: champ de vecteur tel que $\hat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\zeta}) = \hat{u}^i \mathbf{a}^i(\boldsymbol{\zeta}) = u_i \mathbf{e}_i = \mathbf{u}(\mathbf{x})$.
- $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = (\hat{\sigma}^{ij})$: tenseur d'ordre 2 tel que $\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\zeta}) = \hat{\sigma}^{ij} \mathbf{a}_i(\boldsymbol{\zeta}) \otimes \mathbf{a}_j(\boldsymbol{\zeta}) = \sigma_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$.
- $\hat{I}(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\boldsymbol{\sigma}})$: énergie mécanique exprimée dans le repère local telle que $\hat{I}(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}) = I(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$.
- $\hat{D}(\hat{\gamma}_f)$: énergie de rupture exprimée dans le repère local telle que $\hat{D}(\hat{\gamma}_f) = D(\gamma_f)$.
- $\hat{\mathbb{R}} = (\mathbb{R}^{ijkl}), \hat{\mathbb{S}} = (\mathbb{S}_{ijkl})$: tenseurs de rigidité et de souplesse exprimés dans le repère local.

Chapitre 1

Rappels préliminaires et notations

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions constamment utilisées dans la suite et précisons les hypothèses mécaniques adoptées dans ce travail.

1.1 Elasticité tridimensionnelle

1.1.1 Caractérisation des états d'équilibres

Soit S un solide occupant en l'absence de forces l'ouvert Ω borné connexe de l'espace euclidien \mathbb{R}^3 . Soit $\partial\Omega$ sa frontière supposée suffisamment régulière et soit $\overline{\Omega}$ son adhérence dans \mathbb{R}^3 . Le volume Ω occupé par le solide S est appelé *la configuration de référence*. L'espace euclidien \mathbb{R}^3 est muni d'une base orthogonale directe $\mathbb{B} = (O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ d'origine O et de la norme euclidienne faisant de \mathbb{R}^3 un espace vectoriel normé. La structure est encastrée sur une partie de sa frontière $\Gamma_u \subset \partial\Omega$ de $d\Omega$ -mesure non nulle et est soumise à une distribution surfacique de force \mathbf{f} sur $\Gamma_f \subset \partial\Omega$ de telle sorte que $\Gamma_u \cap \Gamma_f = \emptyset$. Pour décrire l'état déformé du solide S occupant le volume Ω^φ , nous utilisons une description lagrangienne. Tout point $M^\varphi(\mathbf{x}^\varphi)$ de $\overline{\Omega}^\varphi$ de composantes $\mathbf{x}^\varphi = (x_1^\varphi, x_2^\varphi, x_3^\varphi)$ dans la base \mathbb{B} est l'image d'un point $M(\mathbf{x})$ de $\overline{\Omega}$ par l'application $\varphi : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$, suffisamment régulière, injective, et préservant l'orientation, c'est-à-dire vérifiant :

$$\boxed{\det \nabla \varphi(\mathbf{x}) > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \overline{\Omega}.} \quad (1.1)$$

Cette condition assure que le mouvement du solide ne conduit ni à un écrasement ni à une inversion de la matière. A toute déformation φ est associé un déplacement \mathbf{u} , champ de vecteurs $\mathbf{u} : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ défini par la relation :

$$\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}) \quad (1.2)$$

et notons $\mathbf{F} : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{M}_3^+$ le gradient de la déformation φ , $\mathbf{F} = \nabla \varphi = \mathbf{I}_3 + \nabla \mathbf{u}$. Le tenseur des déformations de Cauchy-Green à droite, noté $\mathbf{C} = (\nabla \varphi^T \cdot \nabla \varphi)$, apparaît en formant la quantité :

$$|\varphi(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})|^2 = \delta \mathbf{x}^T \nabla \varphi^T(\mathbf{x}) \cdot \nabla \varphi(\mathbf{x}) \delta \mathbf{x} + o(|\delta \mathbf{x}|^2), \quad \mathbf{x}, \mathbf{x} + \delta \mathbf{x} \in \overline{\Omega}, \quad (1.3)$$

pour toute déformation φ différentiable au point $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$ et s'interprète alors comme un tenseur de dilatation égale à l'identité \mathbf{I}_3 si et seulement si la déformation correspondante représente un

mouvement rigide du solide. Introduisons enfin le tenseur des déformations de Green-Lagrange \mathbf{E} ¹ :

$$\mathbf{E} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}_3) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u}^T \cdot \nabla \mathbf{u}) \quad (1.4)$$

mesurant l'écart entre une déformation donnée et une déformation rigide. Le tenseur \mathbf{E} symétrique admet trois valeurs propres réelles associées à trois directions propres. Si la plus grande de ces trois valeurs est suffisamment petite, alors on rentre dans le cadre des *petites déformations*. Associons aux grandeurs cinématiques \mathbf{E} et \mathbf{C} les grandeurs mécaniques traduisant la notion d'effort, et menant au principe des travaux virtuels. Dans ce document, nous négligeons les effets d'inertie ainsi que les éventuels échanges de température, au cours de l'évolution. L'axiome de l'équilibre statique, également connu sous le nom de principe des contraintes d'Euler-Cauchy ([GERMAIN (1972)], [GURTIN (1981)]) assure alors l'existence d'un tenseur de contrainte symétrique $\boldsymbol{\sigma}^\varphi$, appelé le tenseur de Cauchy, vérifiant à l'équilibre dans la position déformée Ω^φ le système d'équations aux dérivées partielles suivant :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^\varphi = 0 & \text{dans } \Omega^\varphi, \\ \boldsymbol{\sigma}^\varphi = (\boldsymbol{\sigma}^\varphi)^T & \text{dans } \Omega^\varphi, \\ \boldsymbol{\sigma}^\varphi \cdot \boldsymbol{\nu}^\varphi = \mathbf{f}^\varphi & \text{sur } \Gamma_f^\varphi, \end{cases} \quad (1.5)$$

lorsque $\boldsymbol{\nu}^\varphi$ désigne la normale unitaire extérieure à Γ_f^φ . En appliquant la formule de Stokes, le système précédent est formellement équivalent à l'équation variationnelle :

$$\int_{\Omega^\varphi} \operatorname{Tr}(\boldsymbol{\sigma}^\varphi \cdot \nabla \mathbf{v}^\varphi) d\Omega^\varphi = \int_{\Gamma_f^\varphi} \mathbf{f}^\varphi \cdot \mathbf{v}^\varphi d\Gamma^\varphi, \quad (1.6)$$

pour tout champ de vecteur $\mathbf{v}^\varphi : \overline{\Omega^\varphi} \rightarrow \mathbb{R}^3$ suffisamment régulier et satisfaisant $\mathbf{v}^\varphi = \mathbf{0}$ sur Γ_u^φ . La relation précédente, égalant à l'équilibre le travail des efforts intérieurs au cours du déplacement virtuel \mathbf{v}^φ , au travail des efforts extérieurs, traduit *le principe des travaux virtuels* tandis que les relations (1.5) sont appelées *les équations d'équilibre locales*. Les relations précédentes, établies sur la configuration déformée Ω^φ en terme de la variable d'Euler \mathbf{x}^φ , ne sont pas utilisables pour le calcul de la déformation φ . Pour remédier à cela, il est d'usage de transporter ces relations sur la configuration de référence Ω en terme de la variable de Lagrange \mathbf{x} ; le système (1.5) devient :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^T) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T & \text{dans } \Omega, \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \boldsymbol{\nu} = \mathbf{f} & \text{sur } \Gamma_f, \end{cases} \quad (1.7)$$

lorsque $\boldsymbol{\nu}$ désigne la normale unitaire extérieure à Γ_f tandis que (1.6) s'écrit :

$$\int_{\Omega} \operatorname{Tr}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \nabla \mathbf{v}) d\Omega = \int_{\Gamma_f} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\Gamma \quad ; \quad \mathbf{f} = \mathbf{f}^\varphi \det \mathbf{F}|_{\Gamma_f}, \quad (1.8)$$

pour tout champ de vecteurs $\mathbf{v} : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ satisfaisant $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ sur Γ_u . Le tenseur $\boldsymbol{\sigma}$, symétrique, défini selon $\boldsymbol{\sigma}^\varphi = \frac{1}{\det \mathbf{F}} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^T$ est appelé le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff.

¹appelé également dans [CIARLET (1988)] le tenseur des déformations de Green-Saint Venant.

La relation $\mathbf{f} = \mathbf{f}^\varphi \det \mathbf{F}|_{\Gamma_f}$ montre que la distribution de force surfacique \mathbf{f} dépend *a priori* de la déformation φ , inconnue du problème. Dans le but de simplifier la résolution mathématique de (1.8), nous supposons, de façon restrictive, que \mathbf{f} est une *force morte*, indépendante de φ . Il résulte de cette hypothèse que l'intégrale qui apparaît dans le second membre de (1.8) s'écrit comme la dérivée de Gâteaux $G'(\varphi) \cdot \mathbf{v}$ de la fonctionnelle G telle que :

$$G : \{\psi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3\} \rightarrow G(\psi) = \int_{\Gamma_f} \hat{G}(\mathbf{x}, \psi(\mathbf{x}), \nabla \psi(\mathbf{x})) d\Gamma . \quad (1.9)$$

La force \mathbf{f} est alors une force dite *conservative*. Dans la suite, nous supposerons également que cette force est proportionnelle à un facteur de charge noté $\lambda \in \mathbb{R}$.

Les équations d'équilibre (1.7) dans la configuration de référence Ω constituent un problème aux limites dont les inconnues sont les six composantes du tenseur symétrique des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ et les trois composantes du déplacement. Afin que le problème mathématique soit correctement posé, il faut fournir à l'équation d'équilibre (1.7)₁ six relations supplémentaires. C'est l'objet des lois de comportement prenant en compte la nature du matériau, reliant le tenseur des contraintes au tenseur des déformations.

1.1.2 Lois de comportement hyperélastiques

Dans ce document, nous nous restreignons à la classe particulière des matériaux hyperélastiques, lesquels après avoir été soumis à une sollicitation, reviennent à leur configuration de référence instantanément². Précisément, un matériau est hyperélastique s'il existe une fonction $\hat{W} : \bar{\Omega} \times \mathbb{M}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable par rapport à $\mathbf{F} \in \mathbb{M}_+^3$ telle que :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{F}) \cdot \mathbf{F}^T = \frac{\partial \hat{W}}{\partial \mathbf{F}}(\mathbf{x}, \mathbf{F}) \quad \forall \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, \mathbf{F} \in \mathbb{M}_+^3 . \quad (1.10)$$

La fonction \hat{W} est appelée la *densité d'énergie* par unité de volume de la configuration de référence. Dans ce cas, le premier membre de (1.8) s'écrit également comme la dérivée de Gâteaux $W'(\varphi) \cdot \mathbf{v}$ de la fonctionnelle W telle que :

$$W : \{\psi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3\} \rightarrow W(\psi) = \int_{\Omega} \hat{W}(\mathbf{x}, \nabla \psi(\mathbf{x})) d\Omega \quad (1.11)$$

et les solutions vérifiant les équations d'équilibre locales (1.7) minimisent alors la fonctionnelle :

$$I(\psi) = \int_{\Omega} \hat{W}(\mathbf{x}, \nabla \psi) d\Omega - G(\psi) \quad (1.12)$$

sur l'ensemble des déformations admissibles. La fonctionnelle I s'interprète comme l'énergie potentielle de la structure S , différence de l'énergie de déformation interne W et de l'énergie due aux forces externes G . Dans le cas où les matériaux sont isotropes dans leur configuration de référence et satisfont le principe de l'indifférence matérielle, le théorème de représentation de Rivlin-Ericksen [CIARLET (1988), p. 109] assure d'une part, que la densité d'énergie \hat{W} n'est fonction

²indépendamment de toute croissance éventuelle de défauts

que des trois invariants du tenseur de dilatation $\mathbf{C} : i_{\mathbf{C}} = (Tr\mathbf{C}, TrCof\mathbf{C}, det\mathbf{C})$ et d'autre part, que le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff prend la forme suivante :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{F}) = \gamma_0(\mathbf{x}, i_{\mathbf{C}})\mathbf{I}_3 + \gamma_1(\mathbf{x}, i_{\mathbf{C}})\mathbf{C} + \gamma_2(\mathbf{x}, i_{\mathbf{C}})\mathbf{C}^2 . \quad (1.13)$$

Puis, à l'aide des relations suivantes :

$$\|\mathbf{F}\|^2 \equiv Tr(\mathbf{F}^T \mathbf{F}) = 3 + 2Tr\mathbf{E} , \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} \|cof\mathbf{F}\|^2 &\equiv TrCof(\mathbf{F}^T \mathbf{F}) = \frac{1}{2} \left((Tr\mathbf{F}^T \mathbf{F})^2 - Tr(\mathbf{F}^T \mathbf{F})^2 \right) \\ &= 3 + 4Tr\mathbf{E} + 2(Tr\mathbf{E})^2 - 2Tr\mathbf{E}^2 , \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} det\mathbf{F}^T \mathbf{F} &= \frac{1}{6}(Tr\mathbf{F}^T \mathbf{F})^3 - \frac{1}{2}Tr\mathbf{F}^T \mathbf{F}Tr(\mathbf{F}^T \mathbf{F})^2 + \frac{1}{3}Tr(\mathbf{F}^T \mathbf{F})^3 \\ &= 1 + 2 \left[Tr\mathbf{E} + (Tr\mathbf{E})^2 - Tr\mathbf{E}^2 \right] + 8det\mathbf{E} , \end{aligned} \quad (1.16)$$

en linéarisant les fonctions γ_i autour de la configuration de référence $i_{\mathbf{I}_3} = (3, 3, 1)$ selon $\gamma_i(i_{\mathbf{C}}) = \gamma(i_{\mathbf{I}_3}) + \dot{\gamma}_i(i_{\mathbf{I}_3})Tr\mathbf{E} + o(\mathbf{E})$, et en tenant compte du fait que l'état initial est libre d'effort, le tenseur $\boldsymbol{\sigma}$ prend la forme :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{F}) = \check{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}, \mathbf{E}) = \lambda(\mathbf{x})Tr\mathbf{E} \mathbf{I}_3 + 2\mu(\mathbf{x})\mathbf{E} + o(\mathbf{E}) , \quad (1.17)$$

$\lambda(\mathbf{x})$ et $\mu(\mathbf{x})$ sont les constantes de Lamé au point $\mathbf{x} \in \Omega$. Cette relation est valable lorsque les termes d'ordre $\mathbf{E}^n, n > 1$ en les déformations sont négligeables, dans une norme appropriée, devant les tenseurs \mathbf{I}_3 et \mathbf{E} , autrement dit lorsque la configuration déformée reste proche de la configuration de référence, cadre des *petites déformations*.

DENSITÉ D'ÉNERGIE DE SAINT VENANT-KIRCHHOFF

Une première catégorie de matériaux s'obtient simplement en négligeant les termes $o(\mathbf{E})$ dans (1.17) : $\check{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}, \mathbf{C}) = \lambda(\mathbf{x})Tr\mathbf{E} \mathbf{I}_3 + 2\mu(\mathbf{x})\mathbf{E}$, ou bien composante par composante :

$$\check{\sigma}_{ij}(\mathbf{E}) = R_{ijkl}E_{kl} , \quad (1.18)$$

et le tenseur \mathbb{R} d'ordre 4 défini par $R_{ijkl} \equiv \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$ est le tenseur de rigidité. La densité d'énergie associée prend la forme $\check{W}(\mathbf{E}) = \frac{\lambda}{2}(Tr\mathbf{E})^2 + \mu Tr\mathbf{E}^2$; en fonction du tenseur de dilatation \mathbf{C} , \check{W} prend la forme :

$$\hat{W}(\mathbf{C}) = -\frac{3\lambda + 2\mu}{4}tr\mathbf{C} + \frac{\lambda + 2\mu}{8}tr\mathbf{C}^2 + \frac{\lambda}{4}trCof\mathbf{C} + \frac{6\mu + 9\lambda}{8} \quad (1.19)$$

et ne fait pas intervenir le troisième invariant $det\mathbf{C}$. La densité précédente, la plus simple rentrant dans le cadre du théorème de Rivlin-Ericksen, s'appelle la densité de *Saint Venant-Kirchhoff*. Par extension, nous conservons cette même appellation pour des matériaux non isotropes. Le tenseur \mathbb{R} vérifie alors les propriétés de symétrie $R_{ijkl} = R_{jikl} = R_{ijlk}$ ainsi que la propriété :

$$\exists C \in \mathbb{R}_*^+ \quad \text{tq} \quad R_{ijkl}t_{ij}t_{kl} \geq Ct_{ij}t_{ij} \quad \forall \mathbf{t} \in \mathbb{M}_3^s . \quad (1.20)$$

La loi de comportement associée (1.18) est une loi élastique non linéaire, reliant non linéairement le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ au tenseur $\nabla \mathbf{u}$. Rappelons maintenant la caractérisation pour cette loi des états d'équilibre, d'un usage constant par la suite. Les équations (1.7) deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\sigma_{ij} + \sigma_{kj}u_{i,k})_{,j} = 0 \quad \text{dans } \Omega , \\ \sigma_{ij} = R_{ijkl}E_{kl}(\mathbf{u}) \quad \text{dans } \Omega , \\ E_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j}) \quad \text{dans } \Omega^m , \\ (\sigma_{ij} + \sigma_{kj}u_{i,k})\nu_j = f_i \quad \text{sur } \Gamma_f , \\ \mathbf{u} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_u . \end{array} \right. \quad (1.21)$$

Le principe des travaux virtuels reste identique, $\boldsymbol{\sigma}$ étant donné par (1.21)₂. Enfin, l'énergie prend la forme :

$$I(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{u})) d\Omega - \int_{\Gamma_f} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} d\Gamma. \quad (1.22)$$

Afin que cette énergie soit finie, le champ de vecteurs \mathbf{u} et le tenseur $\boldsymbol{\sigma}$ sont cherchés dans les espaces fonctionnels suivants :

$$V(\Omega) = \{\mathbf{v} \in (W^{1,4}(\Omega))^3; \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_u\} \quad ; \quad \Sigma(\Omega) = (L^2_s(\Omega))^6. \quad (1.23)$$

et \mathbf{f} est supposé être dans l'espace $(L^2(\Gamma_f))^3$. Introduisons enfin la formulation variationnelle mixte dite de Hellinger-Reissner ^{1 3} suivante, qui consiste à écrire tant l'équation d'équilibre que la loi de comportement sous forme variationnelle :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \text{Tr}(\mathbb{S} : \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau}) d\Omega = \int_{\Omega} \text{Tr}(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{u})) d\Omega \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \Sigma(\Omega) , \\ \int_{\Omega} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \nabla \mathbf{v}) d\Omega = \int_{\Gamma_f} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\Gamma \quad \forall \mathbf{v} \in V(\Omega) . \end{array} \right. \quad (1.24)$$

Malgré sa simplicité de mise en œuvre numérique, le modèle associé aux matériaux de Saint Venant-Kirchhoff, parfois appelé modèle en *grands déplacements petites déformations* présente deux inconvénients majeurs : en premier lieu, aucun résultat général, n'assure à ce jour, l'existence d'au moins une solution $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) \in V(\Omega) \times \Sigma(\Omega)$ à la formulation (1.24) ; mentionnons toutefois le résultat d'existence et d'unicité de [CIARLET & DESTUYNDER (1979)] sur le problème en *déplacement pur* dans le cas où les chargements restent petits. En second lieu, rien n'assure dans le modèle que la condition de préservation de l'orientation est vérifiée. En toute rigueur, il conviendrait de rajouter cette condition dans l'espace fonctionnel $V(\Omega)$, ce qui compliquerait la résolution numérique. Dans la pratique, on vérifie *a posteriori* que cette condition est satisfaite. Dans la partie II, nous exhiberons un exemple où cette condition est violée. Cette lacune constitue un sérieux inconvénient du point de vue physique. Dans le paragraphe suivant, nous présentons une densité d'énergie qui comble ces deux lacunes.

REMARQUE(S) 1 Lorsque le tenseur symétrique des déformations \mathbf{E} est remplacé par le tenseur symétrique $\mathbf{e}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T)$, le modèle associé rentre dans le cadre des petits déplacements. Dans le cas isotrope, la relation de comportement est appelée loi de Hooke. Cependant, ce modèle n'est pas un modèle de l'élasticité tridimensionnelle car sa loi de comportement ne satisfait pas le principe de l'indifférence matérielle. ■

³par opposition à la formulation de Hellinger-Reissner 2 où $V(\Omega) = \{\mathbf{v} \in (L^2(\Omega))^3; \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_u\}$ et $\Sigma(\Omega) = \{\boldsymbol{\sigma} \in (L^2_s(\Omega))^6; \text{div}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^T) \in (L^2(\Omega))^3\}$.

DENSITÉ DE CIARLET-GEYMONAT

Afin d'étendre la densité précédente à des déformations plus importantes, il est possible de considérer la densité hyperélastique de Murnaghan ⁴ :

$$\check{W}(\mathbf{E}) = \frac{\lambda}{2}(\text{Tr } \mathbf{E})^2 + \mu \text{Tr } \mathbf{E}^2 + \alpha_1(\text{Tr } \mathbf{E})^3 + \alpha_2 \text{Tr } \mathbf{E} \text{Tr } \mathbf{E}^2 + \alpha_3 \text{Tr } \mathbf{E}^3 + o(\|\mathbf{E}\|^2). \quad (1.25)$$

d'un intérêt *limité*, tant sur le plan pratique que théorique [CIARLET (1988) p. 135]. Par ailleurs, l'*intuition mécanique* conduit aux hypothèses suivantes sur toute densité d'énergie valable pour des grandes déformations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{W}(\mathbf{F}) \rightarrow +\infty \text{ quand } \left(\|\mathbf{F}\| + \|\text{cof } \mathbf{F}\| + \det(\mathbf{F}) \right) \rightarrow +\infty, ; \mathbf{F} \in M_3^+, \\ \hat{W}(\mathbf{F}) \rightarrow +\infty \text{ quand } \det \mathbf{F} \rightarrow 0^+, \mathbf{F} \in M_3^+. \end{array} \right. \quad (1.26)$$

La première hypothèse est une condition de croissance de la densité d'énergie. Celle-ci est vérifiée par les matériaux de Saint Venant-Kirchhoff. La seconde impose qu'une contrainte infinie doit accompagner une déformation extrême. En particulier, réduire à zéro un volume quelconque nécessite une énergie infinie. Les matériaux de Saint Venant-Kirchhoff ne vérifient pas cette condition ni aucune de leurs extensions à un ordre supérieur fini en déformation. Pour ces raisons, nous utiliserons dans la partie II un élément particulier de la classe des matériaux d'Ogden [CIARLET & GEYMONAT (1982)] de densité d'énergie :

$$\hat{W}(\mathbf{F}) = a\|\mathbf{F}\|^2 + b\|\text{cof } \mathbf{F}\|^2 + \Gamma(\det \mathbf{F}) + e, \quad (1.27)$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}_*^+, e \in \mathbb{R}$ et Γ une fonction convexe, définie sur \mathbb{R}_*^+ telle que $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \Gamma(\delta) = +\infty$:

$$\Gamma(\delta) = c\delta^2 - d \log(\delta) \quad \delta > 0. \quad (1.28)$$

Cette densité d'énergie fait intervenir les trois invariants du tenseur de dilatation \mathbf{C} et est définie pour l'ensemble des déformations vérifiant $\det \mathbf{F} > 0$, ce qui n'est pas restrictif d'un point de vue mécanique, puisque cela correspond à la condition de préservation de l'orientation (1.1). Enfin, les coefficients a, b, c, d et e sont déterminés de façon à ce que la densité obtenue, appelée densité de Ciarlet-Geymonat, coïncide pour les petites déformations avec la densité de Saint Venant-Kirchhoff :

$$\boxed{\check{W}_{CG}(\mathbf{E}) = \check{W}_{SV}(\mathbf{E}) + o(\|\mathbf{E}\|)}. \quad (1.29)$$

De ce point de vue, la densité de Ciarlet-Geymonat est une extension de la densité de Saint Venant-Kirchhoff, et vérifiant les conditions (1.26). Après calculs, il vient :

$$\check{W}_{CG}(\mathbf{E}) = \left(\frac{\lambda}{2} + \mu\right) \text{Tr } \mathbf{E} + \frac{\lambda}{2} \left[(\text{Tr } \mathbf{E})^2 - \text{Tr } \mathbf{E}^2 \right] + 8c \det \mathbf{E} - \frac{\lambda + 2\mu}{4} \log \det(\mathbf{I}_3 + 2\mathbf{E}), \quad (1.30)$$

⁴le terme $\alpha_4 \mathbf{E}^2$ disparaît en raison de l'hypothèse d'hyperélasticité.

avec $\Gamma'(1) \in \left] -\frac{\lambda}{2} - \mu, -\mu \right]$ et $\Gamma''(1) \in \left] \frac{\lambda}{2} + \mu, \lambda + \mu \right]$ indiquant l'intervalle de \mathbb{R}_+^* des valeurs de la quantité $c = \frac{1}{4}(\Gamma'(1) + \Gamma''(1))$.

Finalement, la loi de comportement devient :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \check{W}(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} = & \gamma \mathbf{I}_3 + \lambda [\text{Tr} \mathbf{E} \mathbf{I}_3 - \mathbf{E}] + 4c \left[\left((\text{Tr} \mathbf{E})^2 - \text{Tr} \mathbf{E}^2 \right) \mathbf{I}_3 + 2 \left(\mathbf{E}^2 - \text{Tr} \mathbf{E} \mathbf{E} \right) \right] \\ & - \gamma \frac{\left[\mathbf{I}_3 + 2[\text{Tr} \mathbf{E} \mathbf{I}_3 - \mathbf{E}] + 2 \left[\left((\text{Tr} \mathbf{E})^2 - \text{Tr} \mathbf{E}^2 \right) \mathbf{I}_3 + 2 \left(\mathbf{E}^2 - \text{Tr} \mathbf{E} \mathbf{E} \right) \right] \right]}{\det(\mathbf{I}_3 + 2\mathbf{E})} \end{aligned} \quad (1.31)$$

en notant $\gamma \equiv \frac{\lambda}{2} + \mu$. L'énergie potentielle associée à cette densité est définie dans l'espace fonctionnel suivant :

$$V(\Omega) = \{ \mathbf{v} \in (W^{1,6}(\Omega))^3; \det(\mathbf{I}_3 + \nabla \mathbf{v}) > 0, \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_u \} . \quad (1.32)$$

Une mise en œuvre numérique de ce modèle est présentée dans ([LE TALLEC & VIDRASCU (1984)], [LIAO (1990)]), utilisant une technique de lagrangien augmenté. Enfin, signalons que les travaux de J. Ball [BALL (1977)] assurent l'existence d'au moins un minimum de l'énergie associée à la densité \hat{W}_{CG}^5 .

1.2 Dérivation sur un ouvert variable

1.2.1 La θ -méthode

Supposons maintenant que le solide S présente une discontinuité de matière représentée par une fissure. Supposons que le front de cette fissure noté γ_f reste, au cours de son éventuelle progression, dans un plan, de normale portée par le vecteur \mathbf{e}_3 . Supposons enfin que le front de fissure n'est pas chargé : $\gamma_f \cap \Gamma_f = \emptyset$. Dans la partie I, les états d'équilibre de la structure seront caractérisés par les extrema, non pas de la fonctionnelle I définie en (1.22), mais par ceux d'une fonctionnelle dépendant, en plus de la variable cinématique, de la variable position du front de fissure. Ces extrema seront déterminés par une méthode de tangente, nécessitant la connaissance des deux premières dérivées de cette fonctionnelle par rapport à la variable position du front de fissure. L'objet de cette partie est de rappeler le calcul de ces quantités. La méthode employée est la θ -méthode [DESTUYNDER & DJAOUA (1981)] exposée en détail dans [DJAOUA (1983)]. Nous raisonnons avec la densité d'énergie de Saint Venant-Kirchhoff.

Supposons la cinématique du front de fissure γ_f décrite par un champ de vecteurs plan $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, 0)$ de classe $(W^{1,\infty}(\bar{\Omega}))^3$ défini dans un petit voisinage S_θ de γ_f tel que $S_\theta \cap \Gamma_f = \emptyset$. Pour tout petit paramètre sans dimension $\eta > 0$, on associe au champ $\boldsymbol{\theta}$ la transformation :

$$\mathcal{F}^\eta : \mathbf{x} \in \Omega \rightarrow \mathbf{x}^\eta \in \Omega^\eta \quad ; \quad \mathbf{x}^\eta = \mathbf{x} + \eta \boldsymbol{\theta}(\mathbf{x}) . \quad (1.33)$$

Lorsque $\mathcal{F}^\eta(\Omega) \subset \Omega$ et η suffisamment est petit, la transformation \mathcal{F}^η est un difféomorphisme de Ω sur Ω^η , ce dernier représentant le volume occupé par le solide après une propagation virtuelle

⁵Signalons que la densité construite dans [CIARLET & GEYMONAT (1982)] ne concerne que le cas isotrope.

du front γ_f . Les deux premières dérivées de l'énergie potentielle I dans la direction $\boldsymbol{\theta}$ sont alors définies ⁶, par :

$$\frac{\partial I(\Omega)}{\partial \Omega} \cdot \boldsymbol{\theta} \equiv I^{(1)}(\boldsymbol{\theta}) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{I^\eta - I}{\eta}, \quad (1.34)$$

$$\frac{\partial^2 I(\Omega)}{\partial \Omega^2} \cdot \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta} \equiv I^{(2)}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{I^\eta - I - \eta I^{(1)}}{\eta^2}. \quad (1.35)$$

I^η représentant l'énergie potentielle du solide occupant le domaine Ω^η . Ces techniques de dérivation par rapport à un domaine ont été introduites par [MURAT & SIMON (1974)] et sont notamment employées en optimisation de forme ([BERNADOU (1994)], partie V). Pour obtenir les expressions analytiques souhaitées, la procédure est la suivante :

- les intégrales sur Ω^η dans I^η et dans la formulation (1.24), sont ramenées à Ω ; on utilise pour cela les relations :

$$d\mathbf{x}^\eta = \det(\mathbf{I}_3 + \eta \nabla \boldsymbol{\theta}) d\mathbf{x} = \left(1 + \eta \operatorname{div} \boldsymbol{\theta} + \eta^2 \det(\nabla \boldsymbol{\theta}) \right) d\mathbf{x}, \quad (1.36)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^\eta} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (\mathbf{I}_3 + \eta \nabla \boldsymbol{\theta})^{-1} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (\mathbf{I}_3 - \eta \nabla \boldsymbol{\theta} + \eta^2 \nabla \boldsymbol{\theta} \cdot \nabla \boldsymbol{\theta}) + o(\eta^2), \quad (1.37)$$

et on associe au couple solution $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ posé sur Ω^η le couple $(\mathbf{u}^\eta, \boldsymbol{\sigma}^\eta)$ défini sur Ω selon :

$$\mathbf{u}^\eta(\mathbf{x}) = (\mathbf{u} \circ \mathcal{F}^\eta)(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}^\eta) \quad ; \quad \boldsymbol{\sigma}^\eta(\mathbf{x}) = (\boldsymbol{\sigma} \circ \mathcal{F}^\eta)(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}^\eta); \quad (1.38)$$

- les réécritures précédentes font apparaître explicitement le paramètre η et ses puissances η^n , $n > 1$. η étant petit, on développe alors formellement le couple $(\mathbf{u}^\eta, \boldsymbol{\sigma}^\eta)$ selon :

$$(\mathbf{u}^\eta, \boldsymbol{\sigma}^\eta) = (\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) + \eta(\mathbf{u}^1, \boldsymbol{\sigma}^1) + \eta^2(\mathbf{u}^2, \boldsymbol{\sigma}^2) + o(\eta^2); \quad (1.39)$$

- les termes de même puissance en η sont identifiés.

La quantité $I^{(1)}$ est alors obtenue analytiquement, fonction de $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ et $(\mathbf{u}^1, \boldsymbol{\sigma}^1)$. De même, $I^{(2)}$ est fonction en plus du couple $(\mathbf{u}^2, \boldsymbol{\sigma}^2)$. En utilisant les formulations variationnelles vérifiées par les couples $(\mathbf{u}^i, \boldsymbol{\sigma}^i)$, $i = 1, 3$, $I^{(1)}$ s'exprime seulement en fonction de $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ et $I^{(2)}$ en fonction seulement de $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ et $(\mathbf{u}^1, \boldsymbol{\sigma}^1)$. Après calculs, il vient [OUSSET & MÜNCH (2001)] :

DÉRIVÉES LAGRANGIENNES $(\mathbf{u}^1, \boldsymbol{\sigma}^1)$

Les dérivées $(\mathbf{u}^1, \boldsymbol{\sigma}^1)$ nécessaires au calcul de la dérivée seconde vérifient la formulation suivante pour tout $\mathbf{v} \in V(\Omega)$ (1.23), et $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ un point d'équilibre :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma}^1 = \mathbb{R} : \mathbf{F}^T \cdot (\nabla \mathbf{u}^1 - \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\theta}) \quad \text{dans } \Omega; \quad (1.40) \\ \int_{\Omega} \operatorname{Tr} \left(\mathbb{R} : (\mathbf{F}^T \cdot \nabla \mathbf{u}^1) \cdot (\mathbf{F}^T \cdot \nabla \mathbf{v}) \right) d\Omega + \int_{\Omega} \operatorname{Tr} (\boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla \mathbf{u}^1)^T \cdot \nabla \mathbf{v}) d\Omega = \\ \int_{\Omega} \operatorname{Tr} \left(\mathbb{R} : (\mathbf{F}^T \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\theta}) \cdot (\mathbf{F}^T \cdot \nabla \mathbf{v}) \right) d\Omega + \int_{\Omega} \operatorname{Tr} (\boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla \boldsymbol{\theta})^T \cdot (\nabla \mathbf{u})^T \cdot \nabla \mathbf{v}) d\Omega + \\ \int_{\Omega} \operatorname{Tr} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\theta}) d\Omega - \int_{\Omega} \operatorname{Tr} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \nabla \mathbf{v}) \operatorname{div} \boldsymbol{\theta} d\Omega. \end{array} \right. \quad (1.41)$$

⁶[DJAOUA (1983)] montre que ces limites existent.

Remarquons que la formulation est linéaire en $(\mathbf{u}^1, \boldsymbol{\sigma}^1)$: si le couple $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ existe et est unique, et si l'opérateur (appelé opérateur de raideur tangente) qui apparaît dans le membre de gauche de (1.41) est elliptique, alors il en est de même pour $(\mathbf{u}^1, \boldsymbol{\sigma}^1)$.

DÉRIVÉE PREMIÈRE DE L'ÉNERGIE POTENTIELLE

L'application de la θ -méthode conduit à l'expression

$$\boxed{I^{(1)}(\boldsymbol{\theta}) = - \int_{\Omega} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\theta}) d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{u})) \text{div} \boldsymbol{\theta} d\Omega .} \quad (1.42)$$

A l'image du cas linéaire [DJAOUA (1983)], celle-ci s'exprime comme une intégrale curviligne le long du front de fissure γ_f . Profitons de la simplicité du cas pour l'écrire ; en raison de l'absence de régularité de la solution en fond de fissure, on ne peut appliquer directement la formule de Stokes sur les intégrales de $I^{(1)}$; on décompose alors Ω selon $\Omega = B_R \cup \Omega_R$, où B_R désigne un ouvert cylindrique de rayon R entourant γ_f et Ω_R son complémentaire soit :

$$\begin{aligned} I^{(1)}(\boldsymbol{\theta}) &= - \int_{B_R} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\theta}) d\Omega + \frac{1}{2} \int_{B_R} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{u})) \text{div} \boldsymbol{\theta} d\Omega \\ &\quad - \int_{\Omega_R} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\theta}) d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega_R} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{u})) \text{div} \boldsymbol{\theta} d\Omega , \end{aligned} \quad (1.43)$$

puis nous appliquons la formule de Stokes sur les intégrales en Ω_R soit :

$$\begin{aligned} I^{(1)}(\boldsymbol{\theta}) &= - \int_{B_R} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\theta}) d\Omega + \frac{1}{2} \int_{B_R} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{u})) \text{div} \boldsymbol{\theta} d\Omega \\ &\quad - \int_{\partial\Omega_R} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^T)_{ij} u_{j,k} \theta_k \nu_i d\Gamma + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_R} \sigma_{ij} \mathbf{E}_{ji}(\mathbf{u}) \theta_k \nu_k d\Gamma \\ &\quad + \int_{\Omega_R} [(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^T)_{ij} u_{j,k}]_{,i} \theta_k d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega_R} [\sigma_{ij} E_{ji}(\mathbf{u})]_{,k} \theta_k d\Omega . \end{aligned} \quad (1.44)$$

Montrons que les termes posés sur Ω_R s'éliminent ; ils valent :

$$[\sigma_{ij} + \sigma_{il} u_{j,l}]_{,i} u_{j,k} + (\sigma_{ij} + \sigma_{il} u_{j,l}) u_{j,ki} - \frac{1}{2} \sigma_{ij,k} E_{ji}(\mathbf{u}) - \frac{1}{2} \sigma_{ij} E_{ji,k}(\mathbf{u}) .$$

Le premier terme est nul en vertu de l'équation d'équilibre (1.21)₁, puis utilisant une première fois la symétrie du tenseur des contraintes et $E_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{m,i} u_{m,j})$ il reste :

$$\frac{1}{2} \sigma_{ij} u_{j,ki} - \frac{1}{2} \sigma_{ij,k} u_{i,j} + \sigma_{il} u_{j,l} u_{j,ki} - \frac{1}{4} u_{m,i} u_{m,j} \sigma_{ij} - \frac{1}{4} [u_{n,ik} u_{n,j} + u_{n,i} u_{n,jk}] \sigma_{ij} .$$

Enfin, en utilisant $\sigma_{ij} = \frac{1}{2} \mathbb{R}_{ijpq} [u_{p,q} + u_{q,p} + u_{\tau,p} u_{\tau,q}]$, ainsi que les propriétés de symétrie du tenseur \mathbb{R} , nous obtenons que la quantité ci-dessus est identiquement nulle de sorte que :

$$\begin{aligned} I^{(1)}(\boldsymbol{\theta}) &= - \int_{B_R} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\theta}) d\Omega + \frac{1}{2} \int_{B_R} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{u})) \text{div} \boldsymbol{\theta} d\Omega \\ &\quad - \int_{\partial\Omega_R} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^T)_{ij} u_{j,k} \theta_k \nu_i d\Gamma + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_R} \sigma_{ij} E_{ji}(\mathbf{u}) \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\nu} d\Gamma . \end{aligned} \quad (1.45)$$

Dans le cas où le champ $\boldsymbol{\theta}$ est choisi constant sur B_R , la dérivée première ne fait intervenir les grandeurs mécaniques $\boldsymbol{\sigma}$ et $\nabla \mathbf{u}$ en dehors du fond de fissure, où ces quantités sont les plus singulières et difficiles à évaluer. Dans le cas général, le rayon R étant arbitraire, on le fait tendre vers zéro. Puisque $\boldsymbol{\theta}$ est de classe $(W^{1,\infty}(\overline{\Omega}))^3$, les termes posés sur B_R sont dans $L^1(\Omega)$ et les intégrales associées convergent vers zéro. Il reste alors :

$$I^{(1)}(\boldsymbol{\theta}) = \lim_{\partial\Omega_R \rightarrow \gamma_f} \int_{\partial\Omega_R} \left(\frac{1}{2} \sigma_{ij} E_{ji}(\mathbf{u}) \theta_k - (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^T)_{kj} u_{j,i} \theta_i \right) \nu_k d\partial\Omega, \quad (1.46)$$

montrant que $I^{(1)}$ ne dépend que de la valeur de $\boldsymbol{\theta}$ le long de γ_f et non de son prolongement au voisinage de γ_f . A ce propos

DÉFINITION 1 (Taux de restitution de l'énergie) Lorsque $\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1$, l'expression $I^{(1)}$ coïncide avec l'intégrale de Rice et est égale, au signe près au taux de restitution de l'énergie g , défini comme la variation de l'énergie mécanique au cours d'une variation infinitésimale du front γ_f . Enfin, nous désignons par G , la force de délaminage, ou taux de restitution local, l'intégrand de g tel que $g(\boldsymbol{\theta}) = \int_{\gamma_f} G \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\nu} d\Gamma$ dont une expression est obtenue grâce à l'expression (1.46). ■

REMARQUE(S) 2 Numériquement, l'expression (1.42) posée sur Ω est plus stable que l'expression (1.46). Lorsque h désigne la finesse d'un maillage composé d'éléments triangulaires de degré 1 et $I_h^{(1)}$ l'approximation numérique de $I^{(1)}$, l'estimation théorique $|I^{(1)} - I_h^{(1)}| = O(h^{1-\epsilon})$, $\forall \epsilon > 0$ a lieu si l'expression (1.42) est utilisée [DJAOUA (1983), p.96]. ■

DÉRIVÉE SECONDE DE L'ÉNERGIE POTENTIELLE

Si $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ est un point d'équilibre et si $(\mathbf{u}^1, \boldsymbol{\sigma}^1)$ sont données par (1.40-1.41), alors la dérivée seconde de l'énergie potentielle est donnée par :

$$\begin{aligned} I^{(2)}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}) = & -\frac{1}{2} \int_{\Omega} Tr(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \nabla \mathbf{u}^1 \cdot \nabla \boldsymbol{\theta}) d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega} Tr(\boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla \mathbf{u}^1)^T \cdot (\nabla \mathbf{u})^T \cdot \nabla \boldsymbol{\theta}) d\Omega \\ & - \frac{1}{2} \int_{\Omega} Tr(\boldsymbol{\sigma}^1 \cdot \mathbf{F}^T \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\theta}) d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} Tr(\boldsymbol{\sigma}^1 \cdot \mathbf{E}(\mathbf{u})) div \boldsymbol{\theta} d\Omega \\ & + \int_{\Omega} Tr(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\theta} \cdot \nabla \boldsymbol{\theta}) d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} Tr(\boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla \boldsymbol{\theta})^T \cdot (\nabla \mathbf{u})^T \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\theta}) d\Omega \\ & - \frac{1}{2} \int_{\Omega} Tr(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\theta}) div \boldsymbol{\theta} d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} Tr(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{u})) det(\nabla \boldsymbol{\theta}) d\Omega. \quad (1.47) \end{aligned}$$

De la même façon que pour la dérivée première, en utilisant (1.21),(1.24), l'équation (1.40) et la formulation (1.41), la dérivée seconde s'exprime comme une intégrale curviligne le long de γ_f .

REMARQUE(S) 3 – Le développement (1.39) est formel. La convergence lorsque η tend vers zéro, du champ \mathbf{u}^η dans une norme appropriée, vers le champ \mathbf{u} , reste un problème ouvert. Ceci est lié à l'absence de résultat d'existence du problème d'équilibre (1.21). Dans le cadre des petits déplacements, la conclusion est différente.

- Dans le cas où le front de fissure est chargé, le support du champ $\boldsymbol{\theta}$ intersecte Γ_f . Il faut alors développer en η la force \mathbf{f} . Ce point est détaillé dans [DJAOUA (1983), p. 50].
- L'hypothèse de régularité faite sur le champ $\boldsymbol{\theta}$ interdit à la fissure de bifurquer. Il n'est donc pas possible d'étendre au cas du taux de restitution l'idée développée dans [LEBLOND

(1989)] avec les facteurs d'intensité (et étendu au cas tridimensionnel dans [LEBLOND (1999)]) : déduire un critère de branchement, en étudiant la différence (non nulle) entre le taux de restitution juste avant et juste après le branchement. Ceci est conforme au caractère global de cette quantité.

- Une version de cette méthode basée sur une formulation symétrique de Galerkin d'intégrale frontière a été proposée dans [BONNET (1999)]. ■

1.2.2 Prise en compte de la condition de non interpénétration

En raisonnant toujours avec la densité de Saint Venant-Kirchhoff, nous discutons à titre de conclusion de ce chapitre, la nécessaire prise en compte de la condition de non interpénétration des lèvres de la fissure. Dans le cas de glissement infinitésimal, l'espace des champs cinématiques $V(\Omega)$ (1.23) devient le convexe fermé :

$$K(\Omega) = V(\Omega) \cap \{ \mathbf{v} \text{ tq } g(\mathbf{v}) \leq 0 \} , \quad (1.48)$$

où g désigne la fonction différentiable des déplacements normaux relatifs $g(\mathbf{u}) = -[u_3] = u_3^I - u_3^S$ et l'équation d'équilibre se transforme en l'inéquation variationnelle :

$$\int_{\Omega} Tr(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^T \cdot (\nabla \mathbf{v} - \nabla \mathbf{u})) d\Omega \geq \int_{\Gamma_f} \mathbf{f} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) d\Gamma \quad \forall \mathbf{v} \in K(\Omega) . \quad (1.49)$$

A l'image du cas des petits déplacements [DESTUYNDER (1983)], l'expression des dérivées lagrangiennes reste identique pourvu que \mathbf{u} soit dans $K(\Omega)$. De façon un peu plus effective, notons $\langle x \rangle = \max(0, x)$, $x \in \mathbb{R}$ et introduisons l'application :

$$L_r(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, q) = I(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) + \frac{1}{\alpha r} \int_{\omega_c} \left[\langle q + r g(\mathbf{u}) \rangle^{\alpha} - q^{\alpha} \right] d\omega \quad \alpha > 2, r > 0 , \quad (1.50)$$

où ω_c représente la zone potentiellement en contact (*a priori* toute la zone fissurée) et q une fonction positive définie sur ω_c suffisamment régulière qui s'interprète comme la compression relative des deux lèvres de la fissure. Lorsque $q = 0$,

$$L_r(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, 0) = I(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) + \frac{r^{\alpha-1}}{\alpha} \int_{\omega_c} \langle g(\mathbf{u}) \rangle^{\alpha} d\omega \quad (1.51)$$

et la quantité rajoutée s'interprète comme une fonction de pénalité, r arbitrairement grand. A l'opposé, lorsque r tend vers zéro, q étant positive,

$$\lim_{r \rightarrow 0} L_r(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, q) = I(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) + \int_{\omega_c} q^{\alpha-1} g(\mathbf{u}) d\omega \quad (1.52)$$

s'interprète comme un lagrangien. La fonctionnelle L_r introduite dans [SIMO & LAURSEN (1992)] a pour but de combler à la fois les défauts des méthodes de pénalité et des méthodes de dualité. Le point selle de L_r vérifie les relations :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} Tr(\mathbb{S} : \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau}) d\Omega = \int_{\Omega} Tr(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{u})) d\Omega \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \Sigma(\Omega) , \\ \int_{\Omega} Tr\left(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}}\right) d\Omega + \int_{\omega_c} \langle q + r g(\mathbf{u}) \rangle^{\alpha-1} \nabla g(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} d\omega = \int_{\Gamma_f} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\Gamma \quad \forall \mathbf{v} \in V(\Omega) , \\ \int_{\omega_c} \left[\langle q + r g(\mathbf{u}) \rangle^{\alpha-1} - q^{\alpha-1} \right] p d\omega = 0 \quad \forall p \in \mathbb{R}^+ . \end{cases} \quad (1.53)$$

Les auteurs dans [SIMO & LAURSEN (1992)] résolvent ce problème de façon découplée. q fixé, ils déterminent \mathbf{u} , puis q selon :

$$q^{n+1} = \langle q^n + rg(\mathbf{u}^n) \rangle \quad (1.54)$$

Plus r est grand, meilleur est le résultat. Cependant, il apparaît qu'une faible valeur de r suffit pour obtenir un bon résultat. Enfin, plus α est proche de 2, meilleure est la convergence. Dans la pratique, la valeur interdite $\alpha = 2$ ne pose pas de problème pourvu que le vecteur initial (\mathbf{u}^0, q^0) ne vérifie pas $\langle q^0 + rg(\mathbf{u}^0) \rangle = 0$. Comme toute méthode de pénalisation, la méthode du lagrangien augmenté précédente admet une légère interpénétration. Il reste alors à évaluer l'influence de celle-ci sur la valeur des dérivées lagrangiennes. Pour simplifier, nous faisons le calcul avec $\alpha = 3^7$ dans le cas pénalité pure $(L_r(\mathbf{v}, 0))$. La dérivée première prend la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_r(\mathbf{u}, 0)}{\partial \Omega} = & - \int_{\Omega} Tr(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\theta}) d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} Tr(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{u})) div \boldsymbol{\theta} d\Omega \\ & - r^2 \int_{\omega_c} \left[\langle \frac{g(\mathbf{u})^3}{3} div \boldsymbol{\theta} + g(\mathbf{u})^2 g(\mathbf{u}^1) \rangle - \langle g(\mathbf{u})^2 \rangle g(\mathbf{u}^1) \right] d\omega, \end{aligned}$$

en supposant, au cours de l'avancée virtuelle de fissure, que $g(\mathbf{u}^n) = g(\mathbf{u}) + \eta g(\mathbf{u}^1) + o(\eta)$, η étant arbitrairement petit, conserve le signe de $g(\mathbf{u})$, et donc que $g(\mathbf{u}^1)$ possède le même signe que $g(\mathbf{u})$; il vient alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_r(\mathbf{u}, 0)}{\partial \Omega} = & - \int_{\Omega} Tr(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\theta}) d\Omega \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} Tr(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{u})) div \boldsymbol{\theta} d\Omega - r^2 \int_{\omega_c} \langle \frac{g(\mathbf{u})^3}{3} div \boldsymbol{\theta} \rangle d\omega. \end{aligned}$$

Le terme rajouté à $I^{(1)}$ est donc en $r^2 g(\mathbf{u})^3$, et tend vers zéro avec r^{-1} . Dans le cas $\alpha \in [2, 3[$ ou dans le cas du lagrangien augmenté, la convergence étant meilleure, la conclusion est à plus forte raison la même. Quantitativement, il en est de même pour $I^{(2)}$, mais la nature du spectre de son opérateur associé peut être modifiée. L'algorithme associé à la méthode du lagrangien augmenté est testé dans [OUSSET (1999c)]. Citons également [AYADI (1990)].

⁷Sinon, nous utilisons la relation $(a + \eta b + \eta^2 c)^\alpha = a^\alpha + \eta \alpha a^{\alpha-1} b + \eta^2 \left[\alpha c a^{\alpha-1} + \frac{1}{2} \alpha (\alpha - 1) b^2 a^{\alpha-2} \right] + O(\eta^3)$.

DÉLAMINAGE DANS LES STRUCTURES COURBES



Chapitre 2

Problématique

Les éléments structuraux en matériaux composites sont de plus en plus utilisés dans les structures aéronautiques, assurant à performances mécaniques équivalentes avec des matériaux plus traditionnels comme les matériaux métalliques, des gains de coûts et de masse importants. Parmi la famille des matériaux composites [BERTHELOT (1999)] figurent les matériaux stratifiés constitués d'une séquence d'empilement de couches (ou plis) imprégnés de résine (ou matrice), chaque pli étant orienté par les fibres le constituant. Ces éléments stratifiés sont utilisés dans la conception d'ailes d'avions, de pales d'hélicoptères, de coques de bateaux, etc. Cependant, l'hétérogénéité et l'anisotropie, qui leur assurent d'excellentes propriétés sont aussi les causes, par les effets de bords ou la présence de singularité, d'une grande sensibilité de ce type de matériaux aux défauts initiaux, présents à une échelle microscopique ou dus à un impact (chute d'un outil pendant l'assemblage). Au-delà des modes de rupture très complexes à l'échelle microscopique (rupture des fibres, rupture interface fibre-matrice), deux modes de rupture à l'échelle de la structure (macroscopique) se distinguent : en premier lieu, le *délaminage* qui désigne le processus de séparation de deux couches selon un plan donné, et en second lieu, la *fissuration transverse*, désignant la rupture des couches (matrice et fibres) dans le sens transverse ([BERTHELOT (1999)], chapitre 12). Ces défauts sont dits macroscopiques lorsque la taille des défauts excède plusieurs fois celle des constituants. L'éventuelle apparition puis la croissance de ces défauts, sous les sollicitations auxquelles est soumise la structure, peuvent entraîner la ruine de celle-ci. En présence de délaminage, il apparaît essentiel, afin d'améliorer la performance des structures comportant ce type de matériaux, de répondre aux questions suivantes : pour une sollicitation donnée, le délaminage progresse-t-il ? Si oui, la progression est-elle stable ? Et enfin, comment cette progression affecte-t-elle la résistance résiduelle de la structure ? Malgré une littérature considérable sur la modélisation du délaminage, force est de constater que quelques éléments de réponses restent à apporter, à commencer par la propagation proprement dite, et ce dans un cadre général. A cet effet, cette première partie décrit une modélisation théorique et une simulation numérique du délaminage, en insistant autant sur les aspects géométriques que matériaux. D'un point de vue conceptuel, le délaminage est vu comme une surface de discontinuité de matière, de sorte que sa description géométrique ne pose pas de difficulté. Cette surface de discontinuité est appelée *aire délaminée* ou *fissure* et sa frontière *front de fissure*.

Deux types d'approches sont couramment employés pour l'étude du délaminage ; en premier lieu, l'approche mécanique de l'endommagement liée à la notion d'interface endommageable. Le processus de délaminage a lieu lorsque la variable de dommage atteint une valeur maximale ([TVERGAARD (1990)], [LADEVEZE (1992)], [POINT & SACCO (1996)], [ALFANO & CRIS-

FIELD (2001)]); en second lieu, l'approche mécanique de la rupture, cadre dans lequel se place cette étude. Dans cette approche, le paramètre qui caractérise le processus de délaminage est le taux de restitution de l'énergie, encore le plus souvent calculé par la *Virtual crack closure technique* (VCCT) de [RYBICKI & KANNINEN (1977)], version discrète de la θ -méthode, rappelée au chapitre précédent.

2.1 Quelques travaux tridimensionnels

Si nous excluons les travaux bidimensionnels (cas d'une pointe de fissure), l'une des premières modélisations du délaminage semble due à T. Nevers [NEVERS (1986)]; la structure fissurée, supposée être une plaque, est modélisée par trois plaques saines raccordées en fond de fissure. L'auteur donne alors, dans le cadre de l'élasticité linéaire et suivant le modèle de plaque retenu, l'expression explicite du taux de restitution via la θ -méthode, détermine la limite de ce taux lorsque l'épaisseur des plaques tend vers zéro, puis calcule la force de délaminage le long du front sur quelques exemples de front ouvert. Cette méthode du calcul du taux de restitution a ensuite été reprise par [PRADEILLES-DUVAL (1992)] dans un cadre eulérien, étendue par ([STÖRAKERS & ANDERSSON (1988)], [COCHELIN & POTIER-FERRY (1991)]) dans le cas de la densité de Saint-Venant Kirchhoff pour l'étude de l'interaction flambage-délaminage, par ([DAVIDSON (1988)], [OUSSET & ROUDOLFF (1997)]) dans le cas de plaques multi-délaminées, avec une formulation mixte. Ces derniers auteurs comparent les résultats, sur une plaque DCB, et pour différents drapages, issus du modèle de Love-Kirchhoff et du modèle de Mindlin. La singularité du champ des contraintes mise en évidence par le modèle de Mindlin indique qu'il est préférable d'utiliser une formulation de Love-Kirchhoff, y compris dans le cas de plaques moyennement épaisses. Par ailleurs, les résultats numériques donnent l'influence de la séquence d'empilement sur l'évolution de la force de délaminage, plus faible le long des bords libres. Par un même procédé, [OUSSET (1993)] détermine l'expression de la limite de la dérivée seconde de l'énergie par rapport au front de fissure, lorsque l'épaisseur de la plaque tend vers zéro : cette expression permet d'étudier la stabilité de la position du front de fissure à l'équilibre, mais aucun résultat numérique n'est présenté.

Fort de la connaissance du taux de restitution, il devient théoriquement possible de construire un modèle de propagation : la force de délaminage notée G , appelée taux de restitution local, est comparée à une valeur critique G_c . Les points du front où $G > G_c$ sont déplacés selon la normale au front. La loi incrémentale est soit empirique et le processus est arrêté lorsque $G \leq G_c$ en tous les points du front ([DAVIDSON (1990)], [NILSSON (1993)], [FRIEDMAN & LIU (1996)]), soit dérivée de principes thermodynamiques [PRADEILLES-DUVAL (1992)]. Cependant, il existe des situations où ce type de modèle doit être abandonné. Par exemple, lorsque le front de fissure intersecte les bords d'une plaque, les points d'intersection doivent évoluer le long de ces bords, qui ne sont pas en général, normaux au front. Par ailleurs, ces points peuvent également exhiber des singularités de contrainte entraînant une singularité sur la quantité G [OUSSET & ROUDOLFF (1997)], et dans ce cas, il n'est pas possible de relier le déplacement de ces points à la valeur de G . Enfin, si le front de fissure est considéré comme une ligne matérielle de discontinuité, les points du front ne peuvent évoluer indépendamment les uns des autres, ce qu'implique pourtant la loi évoquée plus haut. A ces critères locaux type Griffith [GRIFFITH (1920)] s'opposent peu à peu des reformulations faibles, basées de façon simple et naturelle sur un principe énergétique : les états d'équilibre cherchés (variable cinématique et état de fissuration), réalisent, après éventuelle évolution du front, un minimum d'une énergie, somme de l'énergie potentielle de la structure et d'une énergie de dis-

sipation ou de rupture (selon le point de vue adopté). Un des premiers à avoir adopté ce point de vue semble être A. Ehlacher dans sa thèse d'état [EHLACHER (1985)], puis celui-ci a été utilisé, avec résultats numériques et propagations de fronts à l'appui, par [FEDELICH (1990)] dans le cas du laplacien. Des idées similaires ont ensuite été exploitées par [TZAFEROPOULOS, M.A. & PANAGIOTOPOULOS, P.D. (1993)], [FRANCFORT & MARIGO (1993)], [POINT & SACCO (1996)], puis enrichies et formalisées dans le cas de l'élasticité linéaire dans [FRANCFORT & MARIGO (1998)] avec développements numériques bidimensionnels dans [BOURDIN *et al.* (2000)]. Dans le cas tridimensionnel, ce principe a été utilisé dans [OUSSET (1999)] pour obtenir un modèle de propagation du délaminage dans les plaques multi-couches. Par ailleurs, lorsque l'énergie de rupture est d'expression simple, par exemple selon les idées initiales de Griffith, proportionnelle à l'aire fissurée (à la constante G_c près), la position du front cherchée $\gamma_f \in \Gamma$ est caractérisée par l'inéquation variationnelle :

$$\langle G(s) - G_c, \gamma_f - \gamma \rangle_{(\cdot)} \geq 0 \quad \forall \gamma \in \Gamma$$

lorsque Γ désigne l'ensemble des positions admissibles du front, s l'abscisse curviligne le long du front et (\cdot) un crochet de dualité. L'inégalité provient de la condition d'irréversibilité du front, soit en d'autres termes, que la fissure ne peut se refermer. Ce type d'équation apparaît comme une formulation faible du critère de Griffith local et assure un mouvement de chaque point non indépendant de son voisinage. Cette inéquation a été résolue, en utilisant une technique de pénalité, dans [BACH (2001)] sur l'exemple *penny-shape crack* soumis à un chargement de mode I.

Naturellement, il existe en parallèle à ces développements des versions *facteur intensité de contrainte*. Citons par exemple [KOLTON & NAZAROV (1992)] qui déterminent dans le cas du laplacien, une inéquation reliant la variation de la forme du front de fissure, due à une augmentation d'un chargement mode I, à l'accroissement du facteur d'intensité de contrainte. Le cas de l'élasticité linéaire est traité dans [LI & KEER (1992)]. Les auteurs utilisent une équation intégrale de frontière reliant les facteurs d'intensité de contrainte au déplacement d'ouverture dans un voisinage du front de fissure. Les quantités dans l'intégrale étant vues comme fonction de la longueur de la fissure, une dérivation de l'équation par rapport à un incrément de déplacement normal permet alors de relier la variation des facteurs d'intensité à l'évolution du front. Les auteurs présentent quelques applications numériques pour des chargements en mode I puis en mode de cisaillement. La question de stabilité n'est cependant pas évoquée. Enfin, des expressions explicites des facteurs d'intensité, valables pour des formes de front arbitraires, sont données dans [LEBLOND (1999)] étendant ainsi les travaux de [RICE (1985)]. Signalons également les travaux de [LAZARUS (1999)] déterminant numériquement le trajet de propagation d'une fissure plane de forme quelconque, chargée en mode I à l'infini. La théorie tridimensionnelle des fonctions de poids de Rice est utilisée et permet à nouveau le calcul des accroissements du facteur d'intensité des contraintes dus à des avancées infinitésimales du front. Seul le maillage du front initial est nécessaire, ce qui permet l'étude de la propagation sur une grande échelle. Les chargements considérés sont des chargements de fatigues.

Enfin, à plus forte raison, l'étude de la stabilité du front vis-à-vis du chargement mais aussi vis-à-vis de sa forme (source supplémentaire d'instabilité dans le cas tridimensionnelle) semble avoir été très peu abordée. Signalons les travaux de [BONNET (1999)], avec résultats numériques, dans le cas de domaine infini ainsi que [LEBLOND (1999)] et ses références. Le premier objectif de cette partie est de simuler numériquement la propagation de front tridimensionnel. Le calcul de la nouvelle position d'équilibre nécessitera la dérivée seconde de l'énergie par rapport à la position

du front. L'étude du spectre de cet opérateur permettra alors de distinguer l'instabilité du front vis-à-vis du chargement de l'instabilité du front par rapport à sa forme. Le second objectif est l'extension d'une partie des travaux précédents à des surfaces de délaminages non planes et l'étude de l'influence des paramètres géométriques de ces surfaces sur l'évolution du front.

2.2 Quelques travaux sur les fissures non planes

Peu de travaux abordent aujourd'hui encore l'étude de fissure évoluant sur un support non plan. Si la mécanique de la rupture a été abondamment enrichie par des aspects matériaux (loi de comportement, dynamique, ...) , il en va tout autrement des aspects géométriques. Ainsi, la majorité des résultats regroupés dans [BUI (1978)] concerne des fissures rectilignes. L'invariance de l'intégrale de Rice :

$$J_x = \int_{\Gamma} \left(\frac{1}{2} \sigma^{\alpha\beta} e_{\alpha\beta} dy - \sigma^{\alpha\beta} n_{\alpha} u_{\beta,1} ds \right) \quad (2.1)$$

(la fissure est portée par l'axe x) par rapport à Γ est obtenue en supposant de façon essentielle que la fissure est rectiligne. Il en est de même des expressions du paragraphe 1.2 obtenues avec un champ de vecteur θ plan. Ce constat est curieux, compte tenu du nombre important de pièces stratifiées cylindriques ou autres coques, certes généralement peu profondes (coque de bateau, ailes d'avion) mais non planes, présentes dans les structures industrielles [RANKIN *et al.* (1993)]. Ainsi, lorsque la fissure évolue le long d'une interface bi-matérielle courbe [EVANS & HUTCHINSON (1989)], une analyse spécifique est nécessaire. Enfin, des fissures courbes sont généralement observées dans les matériaux homogènes en présence de mode mixte. Ce fait est probablement dû en partie à la réelle complexité supplémentaire générée par les fissures courbes, à l'image de la richesse et de la diversité des modèles de coques par rapports aux modèles de plaques. Cette complexité explique que pendant une longue période, seuls des cas très particuliers de fissure, circulaire ([PERLMAN & SIH (1967)], [TOYA (1974)]), elliptique [KARIHALOO & KEER (1981)] ou légèrement courbée [COTTERELL & RICE (1980)] furent envisagés. L'un des premiers qui ait abordé cette thématique dans un cadre un peu plus général semble être D. Bergez dans sa thèse d'état [BERGEZ (1974)] (voir également [RUPTURE (1982)], p.35). Son travail porte sur la caractérisation des divers champs en fond de fissure présente au sein de la surface moyenne d'une coque mince d'épaisseur h . Bergez montre qu'il est nécessaire de rejeter le modèle de Kirchhoff où le mode III est perdu. En effet, l'hypothèse de conservation des normales implique qu'il n'y a pas de déformation de cisaillement dans l'épaisseur. Le mode III étant par essence lié aux efforts tranchants, le terme de l'énergie de déformation correspondant est nul ¹. En utilisant le modèle de Naghdi et en passant en coordonnées polaires (r, θ) le problème de l'équilibre local réécrit en coordonnées curvilignes $(\zeta_{\alpha}, \zeta_3)$ attachées à la fissure, Bergez montre que, dans le voisinage de la

¹En utilisant des éléments où cette hypothèse est formulée, Bergez met en évidence des cas de plaques fléchies où le facteur d'intensité numériquement calculé par la formule d'Irwin est environ 1.75 fois supérieur à la valeur théorique.

singularité, le champ des déplacements est connu à cinq constantes arbitraires près :

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1+\nu}{2E} \left(\frac{r}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left((K_s + \frac{2\zeta_3}{h} K_s^*) [(2k-1)\cos\frac{\theta}{2} - \cos\frac{3\theta}{2}] + (K_a + \frac{2\zeta_3}{h} K_a^*) [(2k+3)\sin\frac{\theta}{2} + \sin\frac{3\theta}{2}] \right) \\ u_2 &= \frac{1+\nu}{2E} \left(\frac{r}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left((K_s + \frac{2\zeta_3}{h} K_s^*) [(2k+1)\sin\frac{\theta}{2} - \sin\frac{3\theta}{2}] + (K_a + \frac{2\zeta_3}{h} K_a^*) [(3-2k)\cos\frac{\theta}{2} - \cos\frac{3\theta}{2}] \right) \\ u_3 &= \frac{16(1+\nu)}{5E} \left(\frac{r}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} K_a^{**} \sin\frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

Si dans le cas des plaques, il est possible de dissocier les efforts des forces de membranes de ceux de la flexion, dans une coque cinq paramètres interviennent simultanément. Deux de ces facteurs (K_s et K_a) sont dus aux efforts de membranes, deux (K_s^* et K_a^*) aux moments de flexion et le cinquième (K_a^{**}) aux efforts tranchants. L'auteur aborde alors le calcul de ces cinq paramètres. Rappelons que dans le cas des plaques, l'usage de la relation $J_x = \frac{1}{E}(K_I^2 + K_{II}^2)$ et de l'intégrale également indépendante du contour :

$$J_y = \int_{\Gamma} \left(-\frac{1}{2} \sigma^{\alpha\beta} e_{\alpha\beta} dx - \sigma^{\alpha\beta} n_{\alpha} u_{\beta,2} ds \right) + \int_L -\frac{1}{2} \sigma^{\alpha\beta} e_{\alpha\beta} dy \quad (2.2)$$

(L désigne les parties des lèvres de la fissure joignant la pointe à Γ) égale à $-\frac{2}{E} K_I K_{II}$ permet le calcul précis de K_I et de K_{II} . Lorsque, dans le plan, la fissure n'est pas rectiligne, les intégrales J_x et J_y ne sont pas indépendantes de Γ . Dans un tel cas, ces intégrales doivent être remplacées par les expressions :

$$J_{x^1} = \int_{\Gamma} \left(\frac{1}{2} \sigma^{\alpha\beta} e_{\alpha\beta} \sqrt{g} dx^2 - \sigma^{\alpha\beta} n_{\alpha} u_{\beta|1} ds \right) \quad (2.3)$$

$$J_{x^2} = \int_{\Gamma} \left(-\frac{1}{2} \sigma^{\alpha\beta} e_{\alpha\beta} \sqrt{g} dx^1 - \sigma^{\alpha\beta} n_{\alpha} u_{\beta|2} ds \right) - \int_L -\frac{1}{2} \sigma^{\alpha\beta} e_{\alpha\beta} \sqrt{g} dx^1 \quad (2.4)$$

lorsque \sqrt{g} désigne le déterminant de la métrique ($g_{\alpha\beta}$) de la coque et en supposant que dans le repère curviligne, la fissure est portée par l'axe x^2 . Ces intégrales sont indépendantes de Γ . Par ailleurs, ces intégrales sont également reliées aux taux de variations de l'énergie de déformation et :

$$J_{x^1} = \frac{h}{E} \left(K_s^2 + K_a^2 + \frac{1}{3} ((K_s^*)^2 + (K_a^*)^2) + \frac{8(1+\nu)}{15} (K_a^{**})^2 \right) \quad (2.5)$$

$$J_{x^2} = -\frac{2h}{E} \left(K_s K_a + \frac{1}{3} K_s^* K_a^* \right) \quad (2.6)$$

ce qui fournit deux équations pour cinq inconnues. L'auteur montre alors que si, et seulement si, l'énergie de déformation par unité d'aire de la surface moyenne $\bar{\Sigma} = -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{1}{2} \sigma^{ij} e_{ij} \sqrt{g} dx^3$ peut être mise sous la forme de trois formes bilinéaires, autrement dit s'il n'y a pas de terme de couplage entre les diverses déformations généralisées, alors il est possible de séparer chacune des intégrales J_{x^1} et J_{x^2} en trois intégrales indépendantes du contour, relatives aux efforts de membranes, aux moments de flexions et aux efforts tranchants ([BERGEZ (1974)], p.71). Dans le cas des coques peu profondes, les termes de couplage n'apparaissent pas dans $\bar{\Sigma}$ et le raisonnement est correct. Lorsque les rayons de courbure sont de même ordre de grandeur que les dimensions de la coque,

le couplage existe. Il convient alors de prendre des contours proches de la singularité où les effets de la courbure sont faibles devant les effets de la singularité. Malheureusement, cela génère des imprécisions numériques non satisfaisantes.

Naturellement, ce type de travaux, qui met en évidence la complexité supplémentaire induite par la courbure, a été enrichi par plusieurs auteurs. Pour le calcul des facteurs d'intensité, la méthode des équations intégrales (utilisée par [LI & KEER (1992)]) a été reprise dans le cas de fissure quelconque plongée dans un solide infini. La difficulté est d'évaluer les intégrales hyper-singulières le long du front de fissure. [SLÁDEK & SLÁDEK (1983)] étend à la dimension trois (cas d'un front circulaire le long d'une sphère soumise à un chargement surfacique) les travaux de [COTTERELL & RICE (1980)] en donnant l'évolution des facteurs K_I et K_{II} en fonction de la courbure. Le facteur K_I (resp. K_{II}) croît (resp. décroît) lorsque la courbure augmente. [NODA & ODA (1993)] montrent la difficulté d'évaluer les équations intégrales hypersingulières dans le cas de fissure quelconque, difficulté que lève [CHEN (1993)] en réécrivant le problème de l'élasticité dans un repère local. Au niveau du taux de restitution, citons [FERNLUND *et al.* (1994)] qui se placent en repère curviligne $(O, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ pour exprimer la variation de l'énergie potentielle en fonction de la variation d'un front rectiligne du plan (O, ζ_1, ζ_3) porté par l'axe ζ_3 :

$$J = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \int_{\Gamma} \left(W n_1 - T^i \frac{\partial u^i}{\partial x_1} \right) - \frac{1}{\sqrt{g_{11} g_{33}}} \int_A \frac{\partial}{\partial \zeta_3} (\sigma^{i3} \frac{\partial u^i}{\partial \zeta_i}) dA \quad (2.7)$$

$g_{\alpha\beta}$ désigne les composantes du tenseur de changement de métrique dont la définition est rappelée au chapitre 4. Il apparaît dans cette expression une aire de surface A parallèle au plan (O, ζ_1, ζ_2) . Cette expression généralise celle du cas plan donnée par [AMESTOY *et al.* (1981)] et l'intégrale de Rice J_x du cas bidimensionnel où $\sigma^{i3} = 0$. Cependant, dans la mesure où le front de fissure est supposé rester rectiligne, cette étude est davantage une étude bidimensionnelle. Un développement similaire conduit les auteurs dans [BEOM *et al.* (1994)] à proposer l'intégrale :

$$G = \int_{\Gamma \cup \Gamma_c^+ \cup \Gamma_c^-} e_{3jk} (W n_j - t_m u_{m,j}) \phi_{,k} + \int_A e_{3jk} \sigma_{lm} u_{m,j} \phi_{,kl} \quad (2.8)$$

lorsque e_{3jk} désigne le symbole de permutation, et ϕ une fonction deux fois différentiable dans un voisinage du fond de fissure F (voir figure 2.1). En utilisant la relation $e_{3jk} n_j \phi_{,k} = 0$ sur les lèvres de la fissure, la contribution des intégrales curvilignes sur Γ_c^+ et Γ_c^- disparaît, puis :

$$\boxed{G = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} e_{3jk} (W n_j - t_m u_{m,j}) \phi_{,k} ds} \quad (2.9)$$

lorsque Γ_ϵ désigne le cercle centré en F et de rayon ϵ arbitraire. Les auteurs montrent alors, que cette expression, indépendante de Γ et de A , qui coïncide avec l'intégrale de Rice lorsque $\phi(x_1, x_2) = x_2 = 0$, dérive de l'énergie potentielle associée à la structure. Signalons que l'expression précédente, où $\phi_{,k}$ apparaît comme le vecteur tangent à la fissure au point F , est valable pour ϕ continûment différentiable. Dans le cas tridimensionnel, la situation est un peu plus complexe. [ERIKSSON (2000)] étudie les cas où l'intégrale d'aire est identiquement nulle. Il montre qu'une condition nécessaire est que l'extension de la fissure ait lieu dans son plan, normalement au front et constante le long du front. En revanche, l'intégrale n'est pas nulle si la longueur d'une partie quelconque du front varie au cours de l'extension. Par exemple, lorsque la fissure est plane de front de fissure rectiligne, cette intégrale d'aire est nulle. L'auteur montre cependant que si la courbure (qui apparaît dans le terme $\phi_{,kl}$) en fond de fissure est suffisamment faible de façon à compenser la

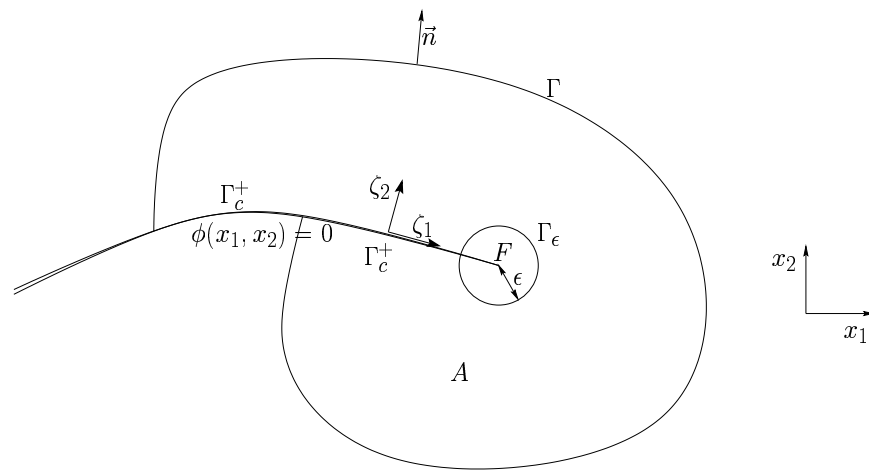


FIG. 2.1: Chemin d'intégration pour une fissure d'équation $\phi(x_1, x_2) = 0$ du plan.

singularité des autres termes, alors l'intégrale d'aire converge vers zéro, exprimant ainsi la quantité comme une intégrale curviligne le long du front de fissure.

En parallèle à ces travaux de généralisation de l'intégrale de Rice, figurent quelques études du comportement de structures fissurées, pour la plupart cylindriques. La structure bidimensionnelle la plus souvent étudiée est une couronne ou demi-couronne (ou arche) à l'image de la figure 2.2. Ecartant les développements concernant les fissures longitudinales dans les cylindres ([TROSHIN

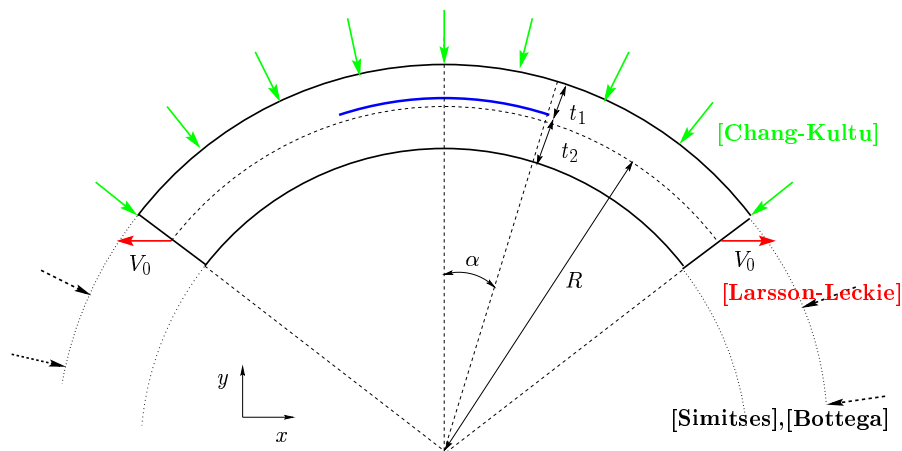


FIG. 2.2: Arche cylindrique fissurée

(1983)], [RANKIN *et al.* (1993)]), citons [CHANG & KUTLU (1989)] puis [LARSSON & LECKIE (1992)] qui fournissent une expression semi-analytique du taux de restitution de l'énergie, issue du modèle de Donnell dans le cas respectivement d'un chargement de compression radiale et d'un chargement de traction (déplacement imposé V_0 sur la figure 2.2). Les résultats, dans le second cas mettent en évidence, contrairement au cas plan, une évolution non monotone croissante du taux de restitution en fonction de la longueur de fissure. La décroissance du taux à partir d'une certaine valeur est un effet de la courbure qui stabilise la propagation et la réduit. Les résultats confirment également que la présence de la fissure au sein de la surface moyenne (correspondant à $t_1 = t_2$) est

la situation la plus dangereuse, à la fois en terme d'amorçage et de stabilité. [SIMITSES (1996)], à l'aide d'un calcul semi-analytique, détermine la charge critique de flambage de la couronne. Affinant les travaux précurseurs de [KACHANOV (1976)], il obtient que cette charge est très peu affectée par la présence d'une fissure de faible longueur. Enfin, [BOTTEGA (1994)] détermine le taux de restitution de l'énergie en fonction de la longueur de la fissure $2R\alpha$, lorsque la couronne est soumise à une force d'ouverture au point correspondant à $\alpha = 0$ (figure 2.2) entre les lèvres de la fissure (la signification mécanique de cette force n'est pas précisée). Les résultats semblent indiquer une évolution non monotone du taux en fonction de α . La propagation est tout d'abord instable pour de faible valeur de α , puis se stabilise (effet de la géométrie) puis dans certains cas, selon le rapport des rigidités des constituants supérieur et inférieur, redevient instable et catastrophique. Parmi les situations tridimensionnelles, citons les deux études récentes suivantes : d'une part, [STÖRAKERS & LARSSON (2000)] qui considèrent un cylindre soumis à un chargement de compression axial, et présente une fissure circulaire (en projection), située proche de la surface externe du cylindre ; les auteurs utilisent le modèle de Donnell-Mushtari-Vlasov et reprennent la méthode de [STÖRAKERS & ANDERSSON (1988)] développée pour les plaques, pour obtenir un taux de restitution le long du front. Le maximum de ce taux est atteint au point où la courbure normale au front est la plus importante : la propagation du front est alors circonférentielle (le front ne déplace pas selon l'axe du cylindre - propagation axiale - mais selon sa circonférence). Dans tous les cas, la propagation est instable. D'autre part, évoquons l'étude de [HUTCHINSON (2001)] sur le cloquage de films très minces sur des supports cylindriques (par exemple une étiquette sur une bouteille) soumis à un chargement de compression dans leur plan. La propagation du front résultant du cloquage dépend de la courbure, qui selon son signe peut, soit réduire, soit augmenter le processus. L'auteur utilise à nouveau le modèle de coque faiblement courbé non linéaire de Donnell-Mushtari-Vlasov pour évaluer un taux de restitution. L'auteur montre que la propagation circonférentielle est augmentée lorsque la courbure est positive (l'étiquette se situe à l'extérieur de la bouteille) et réduite lorsque la courbure est négative (l'étiquette se situe à l'intérieur de la bouteille). En revanche, l'auteur montre que le signe de la courbure influe très peu sur la propagation axiale.

Pour conclure ce rapide panorama, citons les travaux expérimentaux ([DAVIES & RANNOU (1995)], [OZDIL & CARLSSON (2000a)], [OZDIL & CARLSSON (2000b)], [DAVIES *et al.* (2000)]) cherchant à évaluer l'influence de la présence de défauts dans des tubes cylindriques formés de différents stratifiés.

Le reste de cette première partie se divise en quatre chapitres. Dans le chapitre 3, nous nous plaçons dans la situation d'un domaine bidimensionnel fissuré de faible épaisseur. Le calcul du taux de restitution est obtenu, en réécrivant au préalable le problème de l'élasticité dans un repère local. Nous montrons ensuite que la limite en l'épaisseur de ce taux converge vers un taux associé à un modèle simplifié. Quelques solutions analytiques sur l'arche cylindrique concluent le chapitre. Le chapitre 4 traite la situation tridimensionnelle : les dérivées lagrangiennes sont données dans le cas des coques minces puis épaisses. Forts de ces expressions, nous présentons et étudions dans le chapitre 5 un modèle de propagation de front de fissure selon une surface régulière. Le dernier chapitre présente quelques applications numériques.

Chapitre 3

Modèles de poutres délaminiées

Dans le cadre des petits déplacements, nous considérons un domaine bi-dimensionnel occupé par deux matériaux séparés par une interface curviligne. Nous supposons qu'une fissure se propage le long de cette interface. L'expression du taux de restitution de l'énergie est alors obtenue, à l'aide la θ -méthode rappelée au chapitre 1, puis réécrite en pointe de fissure uniquement. Nous étudions ensuite la limite, en l'épaisseur du domaine, de ce taux vers celui associé à une énergie potentielle simplifiée. Enfin, quelques solutions analytiques présentent l'influence de la courbure sur ce taux.

3.1 Problème à résoudre

3.1.1 Problème de l'élasticité en repère global

Soit $\omega = \omega_1 \cup \omega_2$ un domaine, courbe du plan (O, e_1, e_2) et d'épaisseur constante notée $2\epsilon h$ ¹. Le domaine est constitué de deux matériaux séparés par une interface γ , confondue sans perte de généralité, avec la ligne moyenne de ω et supposée régulière. Le domaine, supposé en état de *déformations planes*³ est encasté sur une partie de $d\omega$ -mesure non nulle de sa frontière $\Gamma_u \subset \partial\omega$ et chargé en flexion dans son plan, sur $\Gamma_f \subset \partial\omega$ disjoint de Γ_u (voir figure 3.1). Notons enfin γ_f la partie rompue de l'interface γ et F la pointe de fissure. L'hypothèse des déformations planes s'écrit $e_{j3} = 0, j = 1, 3$ soit $S_{3jkl}\sigma_{kl} = 0, j = 1, 3$. Il en résulte que les contraintes σ_{j3} s'expriment à l'aide des contraintes $\sigma_{\alpha\beta}$ selon :

$$2S_{j3\tau3}\sigma_{\tau3} + S_{j333}\sigma_{33} = -S_{j3\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} \quad ; \quad j = 1, 3, \quad (3.1)$$

et que la relation de comportement $e_{ij} = S_{ijkl}\sigma_{kl}$ devient $e_{\alpha\beta} = \tilde{S}_{\alpha\beta\tau\theta}\sigma_{\tau\theta}$, $\tilde{S}_{\alpha\beta\tau\theta}$ fonction de S_{ijkl} . Par symétrie du tenseur \mathbb{S} , le système linéaire (3.1) est symétrique et le tenseur $\tilde{\mathbb{S}}$ également. En vertu des résultats rappelés au chapitre 1, le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta=1,2}$ et le champ

¹en prenant h égale à 1 pour simplifier les notations.

²Malgré les développements asymptotiques en le paramètre ϵ du paragraphe 3.3, nous omettons volontairement, afin de simplifier les notations, les exposants et indices ϵ ; ω^ϵ est ainsi noté ω ...

³Rappelons la contradiction sérieuse dans les équations en contraintes planes. Nous savons que la "solution" en contrainte plane conduit à la singularité de $\sigma_{11} + \sigma_{22} \approx K_I r^{-1/2}$. Or l'expression $\sigma_{33} = 0$ se traduit par la déformation : $e_{33} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22})$ singulière comme $r^{-1/2}$. D'autre part, $e_{13} = e_{23} = 0$ et les conditions de compatibilité de la composante $e_{33}(x_1, x_2)$ sont $e_{33,11} = e_{33,22} = e_{33,12} = 0$ entraînant $e_{33} = a + bx_1 + cx_2$ en contradiction avec la singularité $r^{-1/2}$.

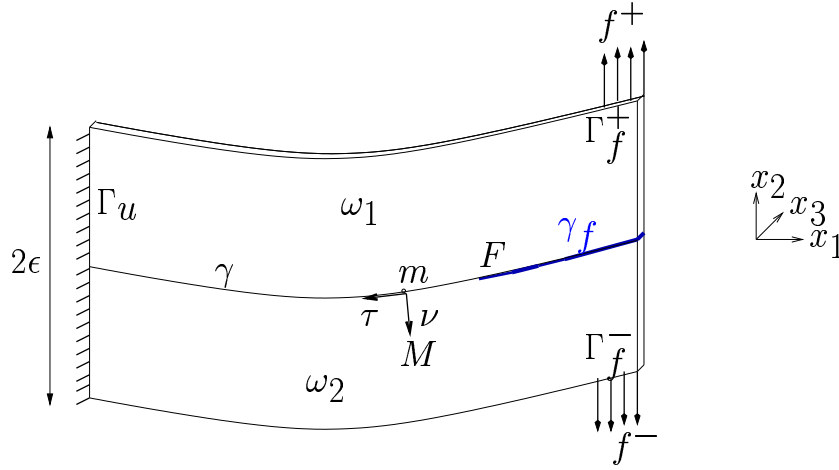


FIG. 3.1: Exemple de conditions aux limites : bande courbe fissurée, chargée dans son plan.

des déplacements $\mathbf{u} = (u_\alpha)_{\alpha=1,2}$ vérifient les équations d'équilibre locales suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = 0 & \text{dans } \omega, \\ \boldsymbol{\sigma} = \tilde{\mathbb{R}}^\alpha : \mathbf{e}(\mathbf{u}) & \text{dans } \omega_\alpha, \\ \mathbf{u} = 0 & \text{sur } \Gamma_u, \\ [\mathbf{u}] = [\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu}] = 0 & \text{sur } \gamma - \gamma_f, \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu} = \mathbf{f} & \text{sur } \Gamma_f, \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 & \text{sur } \partial\omega/\Gamma_f, \end{array} \right. \quad (3.2)$$

où $\boldsymbol{\nu}$ désigne la normale unitaire à γ et à $\partial\omega$ et $[p] = p_{\partial\omega_1 \cap \gamma} - p_{\partial\omega_2 \cap \gamma}$ le saut de la fonction p quelconque à travers l'interface γ ⁴. La formulation variationnelle du problème (3.2) s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \int_\omega \operatorname{Tr}(\mathbb{S} : \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau}) d\omega = \int_\omega \operatorname{Tr}(\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \mathbf{u}) d\omega & \forall \boldsymbol{\tau} \in \Sigma(\omega), \\ \int_\omega \operatorname{Tr}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{v}) d\omega = \int_{\gamma_f} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\Gamma \equiv l_f(\mathbf{v}) & \forall \mathbf{v} \in V(\omega), \end{array} \right. \quad (3.3)$$

avec $V(\omega) = \{\mathbf{u} \in (H^1(\omega))^2; \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_u\}$ et $\Sigma(\omega) = (L^2_s(\omega))^3$.

REMARQUE(S) 4 Malgré le manque de régularité de la frontière $\partial\omega$, l'inégalité de Korn appliquée à chacun des domaines ω_1 et ω_2 et les conditions de saut (3.2)₄ assurent l'existence d'un unique couple $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) \in V(\omega) \times \Sigma(\omega)$. ■

Enfin, l'énergie potentielle définie sur $V(\omega) \times \Sigma(\omega)$ et associée au solide occupant dans la configuration de référence le domaine ω est :

$$I(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} \int_\omega \operatorname{Tr}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{u}) d\omega - l_f(\mathbf{u}). \quad (3.4)$$

Pour mener à bien l'étude de la propagation, nous allons associer à l'interface γ une représentation paramétrique ; cela permettra alors de dériver l'énergie le long de cette interface. La description de cette représentation fait l'objet du paragraphe suivant.

⁴Les conditions de saut (3.2)₄ représentent des conditions d'interface parfaite. Nous rencontrerons dans la partie II, des interfaces différentes, dites interfaces faibles.

3.1.2 Problème de l'élasticité en repère local

REPRÉSENTATION DE L'INTERFACE

Supposons que l'interface γ est décrite par la carte régulière ⁵ :

$$\phi :]\zeta_1^I, \zeta_1^S[\rightarrow \gamma \quad ; \quad \mathbf{x} = \phi(\zeta_1) \quad (3.5)$$

associant à chaque coordonnée $\zeta_1 \in]\zeta_1^I, \zeta_1^S[$ le point \mathbf{m} de γ (voir figure 3.1). La quantité ζ_1 représente la coordonnée (abscisse) curviligne de γ . Les vecteurs tangent et normal unitaire définis par :

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\partial \phi}{\partial \zeta_1} \quad ; \quad \boldsymbol{\nu} = \frac{1}{\|\boldsymbol{\tau}\|} (-\tau_2, \tau_1)^T \quad (3.6)$$

sont linéairement indépendants et forment une base de \mathbb{R}^2 (base en \mathbf{m}) ; tout vecteur se décompose selon :

$$\mathbf{u}(\zeta_1) = u^1(\zeta_1)\boldsymbol{\tau} + u^2(\zeta_1)\boldsymbol{\nu} . \quad (3.7)$$

La base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = (\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu})$ est appelée la base contravariante et (u^1, u^2) les composantes contravariantes de \mathbf{u} . Cette base n'étant pas orthonormée, on introduit la base covariante (cobase en \mathbf{m}) $(\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2) = (\|\boldsymbol{\tau}\|^{-2}\boldsymbol{\tau}^T, \boldsymbol{\nu}^T)$; nous rappelons qu'elle est telle que $\mathbf{e}^\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta = \delta_{\alpha\beta}$ et nous exprimons un covecteur dans la base covariante à l'aide de ses composantes covariantes. Si f est une fonction définie sur γ , sa dérivée est un covecteur et vaut :

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{m}} = \frac{\partial f}{\partial \zeta_1} \frac{\partial \zeta_1}{\partial \mathbf{m}} = \|\boldsymbol{\tau}\|^{-2} \frac{\partial f}{\partial \zeta_1} \boldsymbol{\tau}^T . \quad (3.8)$$

Dans le prochain paragraphe, nous utiliserons la règle d'intégration suivante, pour toute fonction f $d\gamma$ -mesurable :

$$\int_\gamma f(\mathbf{m}) d\gamma = \int_{\zeta_1^I}^{\zeta_1^S} f(\phi(\zeta_1)) \|\boldsymbol{\tau}\| d\zeta_1 . \quad (3.9)$$

Enfin, la courbure de γ en \mathbf{m} notée C vaut :

$$C = \|\boldsymbol{\tau}\|^{-2} \boldsymbol{\nu}^T \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial \zeta_1} . \quad (3.10)$$

REPRÉSENTATION DU VOISINAGE DE L'INTERFACE

Un point \mathbf{M} de coordonnées globales $(x_1, x_2) \in \omega$ est repéré par ses coordonnées locales $(\zeta_1, \zeta_2) \in]\zeta_1^I, \zeta_1^S[\times]-\epsilon, \epsilon[\equiv \hat{\omega}$ selon la relation :

$$\mathbf{M} = \mathbf{m} + \zeta_2 \boldsymbol{\nu}(\zeta_1) \quad (3.11)$$

où \mathbf{m} est la projection du point \mathbf{M} sur γ . Explicitement, nous avons :

$$\begin{cases} x_1 = \phi_1(\zeta_1) - \frac{\zeta_2}{\|\boldsymbol{\tau}\|} \tau_2(\zeta_1) \equiv \varphi_1(\zeta_1, \zeta_2) , \\ x_2 = \phi_2(\zeta_1) + \frac{\zeta_2}{\|\boldsymbol{\tau}\|} \tau_1(\zeta_1) \equiv \varphi_2(\zeta_1, \zeta_2) . \end{cases} \quad (3.12)$$

⁵La régularité de ϕ est précisée à la remarque 6.

La base en un point \mathbf{M} est :

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \zeta_1}, \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \zeta_2} \right) = \left((1 - C\zeta_2)\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu} \right) \quad (3.13)$$

de cobase en \mathbf{M} , supposant $1 - C\zeta_2 \neq 0 \forall \zeta_2 \in [-\epsilon, \epsilon]$,

$$(\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2) = \left(\frac{\boldsymbol{\tau}^T}{(1 - C\zeta_2)\|\boldsymbol{\tau}\|^2}, \boldsymbol{\nu}^T \right). \quad (3.14)$$

Le tenseur métrique \mathbf{g} de la carte ϕ est défini par $g_{\alpha\beta} = (\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta) = \mathbf{e}_\alpha^T \cdot \mathbf{e}_\beta$:

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} (1 - C\zeta_2)^2 \|\boldsymbol{\tau}\|^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nous obtenons ⁶ :

$$d\omega \equiv dx_1 \wedge dx_2 = \sqrt{|g|} d\zeta_1 \wedge d\zeta_2 = (1 - C\zeta_2) \|\boldsymbol{\tau}\| d\zeta_1 \wedge d\zeta_2 \equiv (1 - C\zeta_2) \|\boldsymbol{\tau}\| d\hat{\omega},$$

($|g|$ désigne le déterminant (positif) du tenseur métrique \mathbf{g}) de sorte que pour toute fonction f $d\omega$ -mesurable, nous avons :

$$\int_{\omega} f(\mathbf{M}) d\omega = \int_{\hat{\omega}} f(\boldsymbol{\varphi}(\zeta_1, \zeta_2)) (1 - C\zeta_2) \|\boldsymbol{\tau}\| d\hat{\omega}.$$

Enfin, la dérivée de f (un covecteur) est :

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{M}} = \frac{\partial f}{\partial \zeta_1} \mathbf{e}^1 + \frac{\partial f}{\partial \zeta_2} \mathbf{e}^2.$$

Les quantités (ζ_1, ζ_2) (resp. (x_1, x_2)) sont les coordonnées curvilignes (resp. cartésiennes) de \mathbf{M} . Dans la base contravariante de \mathbf{M} , tout champ de vecteur $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = u_\alpha \mathbf{e}_\alpha$ s'écrit :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \hat{u}^1(\zeta_1, \zeta_2) \mathbf{e}_1 + \hat{u}^2(\zeta_1, \zeta_2) \mathbf{e}_2 = \hat{u}^1(\zeta_1, \zeta_2) (1 - C\zeta_2) \boldsymbol{\tau} + \hat{u}^2(\zeta_1, \zeta_2) \boldsymbol{\nu}$$

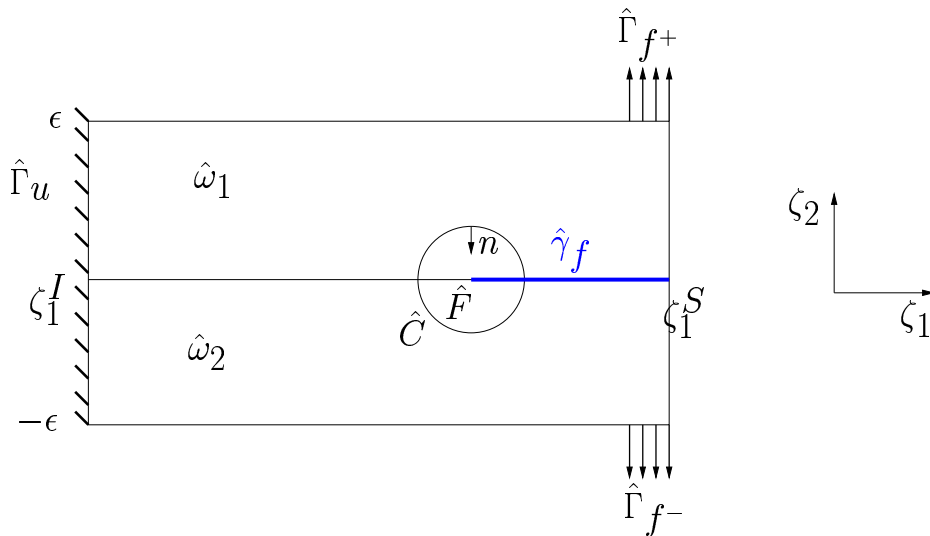
tandis que dans la base covariante :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \hat{u}_1(\zeta_1, \zeta_2) \mathbf{e}^1 + \hat{u}_2(\zeta_1, \zeta_2) \mathbf{e}^2 \equiv \hat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\zeta}).$$

Le couple (\hat{u}^1, \hat{u}^2) sont les composantes **contravariantes** de \mathbf{u} tandis que le couple (\hat{u}_1, \hat{u}_2) sont les composantes **covariantes** de \mathbf{u} . Dans le repère local (voir figure 3.2), $\hat{\Gamma}_u$ et $\hat{\Gamma}_{f^\pm}$ désignent la représentation de Γ_u et Γ_{f^\pm} tels que :

$$\hat{\Gamma}_u = \{\zeta_1^I\} \times [-\epsilon, \epsilon] \quad ; \quad \hat{\Gamma}_{f^\pm} = [\zeta_1^i, \zeta_1^S] \times \{\pm \epsilon\} \quad (\zeta_1^i > \zeta_1(\hat{F})).$$

⁶ \wedge désigne ici le produit vectoriel entre deux 1-forme différentielle.

FIG. 3.2: Représentation virtuelle $\hat{\omega}$ de la structure ω (voir figure 3.1).

REMARQUE(S) 5 – La correspondance $\mathbf{M} \rightarrow (\mathbf{m}, \zeta_2)$ est biunivoque si en \mathbf{m} nous avons :

$$\epsilon|C| < 1. \quad (3.15)$$

ce que nous supposerons désormais. C'est le cadre des poutres dites minces.

- La représentation locale permet de ramener l'ouvert courbe ω à un ouvert rectiligne $\hat{\omega}$ (3.2). En contrepartie, l'information géométrique définissant ω est reportée sur les inconnues du problème (les champs de déplacement \mathbf{u} et de contrainte $\boldsymbol{\sigma}$) via la courbure et le vecteur tangent. Ce faisant, on peut voir l'étude d'une structure courbe comme l'étude d'une structure rectiligne où les inconnues sont modifiées, prenant en compte les paramètres géométriques. Une difficulté d'ordre calculatoire vient du fait que ces paramètres dépendent des coordonnées (ζ_1, ζ_2) . ■

RÉÉCRITURE DE $Tr(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{u})$

Dans la suite, nous désignons par l'exposant ', l'opération de dérivation par rapport à la variable ζ_1 . Nous faisons le choix d'exprimer le champ de covecteur \mathbf{u} dans la cobase $(\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2)$ en \mathbf{m} selon $\mathbf{u} = \hat{u}_1 \mathbf{e}^1 + \hat{u}_2 \mathbf{e}^2$. Les rappels précédents permettent alors d'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{M}} &= \frac{1}{1 - C\zeta_2} \left(\frac{\partial \hat{u}_1}{\partial \zeta_1} - \mathbf{e}^1 \cdot \boldsymbol{\tau}' \hat{u}_1 - \|\boldsymbol{\tau}\|^2 C \hat{u}_2 \right) \mathbf{e}^1 \otimes \mathbf{e}^1 \\ &\quad + \frac{1}{1 - C\zeta_2} \left(\frac{\partial \hat{u}_2}{\partial \zeta_1} + C \hat{u}_1 \right) \mathbf{e}^1 \otimes \mathbf{e}^2 + \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial \zeta_2} \mathbf{e}^2 \otimes \mathbf{e}^1 + \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial \zeta_2} \mathbf{e}^2 \otimes \mathbf{e}^2. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Considérant le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \sigma_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta$ comme un tenseur deux fois contravariant, nous écrivons :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \hat{\sigma}^{11}(\zeta) \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \hat{\sigma}^{12}(\zeta) (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1) + \hat{\sigma}^{22}(\zeta) \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 \equiv \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\zeta). \quad (3.17)$$

La symétrie du tenseur des contraintes dans la base cartésienne entraîne $\hat{\sigma}^{12} = \hat{\sigma}^{21}$ et il vient :

$$\begin{aligned} Tr(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{u}) &= \frac{\hat{\sigma}^{11}}{1 - C\zeta_2} \left(\frac{\partial \hat{u}_1}{\partial \zeta_1} - \mathbf{e}^1 \cdot \boldsymbol{\tau}' \hat{u}_1 - \|\boldsymbol{\tau}\|^2 C \hat{u}_2 \right) + \hat{\sigma}^{12} \left(\frac{\partial \hat{u}_1}{\partial \zeta_2} + \frac{1}{1 - C\zeta_2} \left(\frac{\partial \hat{u}_2}{\partial \zeta_1} + C \hat{u}_1 \right) \right) \\ &+ \hat{\sigma}^{22} \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial \zeta_2} \equiv \hat{\sigma}^{11} \gamma_{11}(\hat{\mathbf{u}}) + 2\hat{\sigma}^{12} \gamma_{12}(\hat{\mathbf{u}}) + \hat{\sigma}^{22} \gamma_{22}(\hat{\mathbf{u}}) ; \end{aligned} \quad (3.18)$$

γ_{11} , γ_{12} et γ_{22} sont respectivement les déformations tangentielle, de cisaillement et normale.

RÉÉCRITURE DE LA LOI DE COMPORTEMENT

Utilisons ici les indices x et y pour désigner les quantités exprimées dans la base cartésienne et notons $[A]$ (resp. $[B]$) la matrice d'ordre 2 telle que $[A] = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$ (resp. $[B] = [(\mathbf{e}^1)^T, (\mathbf{e}^2)^T]$). Les contraintes exprimées dans la base en \mathbf{m} et celles exprimées dans la base cartésienne sont reliées par la relation :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{pmatrix}_{(\mathbf{x}, \mathbf{y})} = [A] \cdot \begin{pmatrix} \hat{\sigma}^{11} & \hat{\sigma}^{12} \\ \hat{\sigma}^{12} & \hat{\sigma}^{22} \end{pmatrix}_{(\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2)} \cdot [A]^T$$

ce qui se réarrange sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yy} \end{pmatrix}_{(\mathbf{x}, \mathbf{y})} = \begin{pmatrix} \tau_1^2 & 2\nu_1 \tau_1 & \nu_1^2 \\ \tau_1 \tau_2 & \nu_1 \tau_2 + \nu_2 \tau_1 & \nu_1 \nu_2 \\ \tau_2^2 & 2\nu_2 \tau_2 & \nu_2^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma^{11} \\ \sigma^{12} \\ \sigma^{22} \end{pmatrix}_{(\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2)} .$$

De la même façon, nous écrivons :

$$\begin{pmatrix} e_{xx} & e_{xy} \\ e_{xy} & e_{yy} \end{pmatrix}_{(\mathbf{x}, \mathbf{y})} = [B] \cdot \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} \end{pmatrix}_{(\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2)} \cdot [B]^T$$

puis

$$\begin{pmatrix} e_{xx} \\ e_{xy} \\ e_{yy} \end{pmatrix}_{(\mathbf{x}, \mathbf{y})} = \begin{pmatrix} \tau_1^2 & 2\nu_1 \tau_1 & \nu_1^2 \\ \tau_1 \tau_2 & \nu_1 \tau_2 + \nu_2 \tau_1 & \nu_1 \nu_2 \\ \tau_2^2 & 2\nu_2 \tau_2 & \nu_2^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \|\boldsymbol{\tau}\|^4 \gamma_{11} \\ \|\boldsymbol{\tau}\|^2 \gamma_{12} \\ \gamma_{22} \end{pmatrix}_{(\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2)} .$$

Ces relations permettent alors d'obtenir la loi de comportement dans le repère local. Par exemple, dans le cas isotrope et déformations planes, la matrice $\tilde{\mathbb{S}}_{ij}$ vaut dans le repère global :

$$\tilde{\mathbb{S}} = \frac{1 + \nu}{E} \begin{pmatrix} 1 - \nu & 0 & -\nu \\ 0 & 2 & 0 \\ -\nu & 0 & 1 - \nu \end{pmatrix}_{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}$$

et

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11} \\ 2\gamma_{12} \\ \gamma_{22} \end{pmatrix} = \frac{1 + \nu}{E} \begin{pmatrix} (1 - \nu)\|\boldsymbol{\tau}\|^4 & 0 & -\nu\|\boldsymbol{\tau}\|^2 \\ 0 & 2\|\boldsymbol{\tau}\|^2 & 0 \\ -\nu\|\boldsymbol{\tau}\|^2 & 0 & 1 - \nu \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{\sigma}^{11} \\ \hat{\sigma}^{12} \\ \hat{\sigma}^{22} \end{pmatrix} . \quad (3.19)$$

Nous notons $\hat{\mathbb{S}}$ le tenseur de souplesse ainsi défini.

RÉÉCRITURE DE LA FORMULATION VARIATIONNELLE

Finalement, en notant $\hat{\sigma} = (\hat{\sigma}^{\alpha\beta})_{\alpha,\beta=1,2}$, $\hat{\mathbf{u}} = (\hat{u}_\alpha)_{\alpha=1,2}$ exprimés dans le repère local, la formulation (3.3) devient ⁷ :

$$\begin{cases} \int_{\hat{\omega}} Tr(\hat{\mathbb{S}} : \hat{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau}) d\hat{\omega} = \int_{\hat{\omega}} Tr(\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\gamma}(\hat{\mathbf{u}})) d\hat{\omega} & \forall \boldsymbol{\tau} \in \Sigma(\hat{\omega}), \\ \int_{\hat{\omega}} Tr(\hat{\sigma} \cdot \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{v})) (1 - C\zeta_2) \|\boldsymbol{\tau}\| d\hat{\omega} = \int_{\zeta_1^{\pm}} \mathbf{f}^{\pm} \cdot \mathbf{v} (1 \mp C\epsilon) \|\boldsymbol{\tau}\| d\zeta_1 \equiv \hat{l}_f(\mathbf{v}) & \forall \mathbf{v} \in V(\hat{\omega}). \end{cases} \quad (3.20)$$

De plus, dans $\hat{\omega}$, les équations d'équilibre locales s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \zeta_1} \left(\frac{\hat{\sigma}^{11}}{1 - C\zeta_2} \right) + \hat{\sigma}^{11} \frac{\mathbf{e}^1 \cdot \boldsymbol{\tau}'}{1 - C\zeta_2} + \frac{1}{1 - C\zeta_2} \frac{\partial}{\partial \zeta_2} \left((1 - C\zeta_2) \hat{\sigma}^{12} \right) = 0, \\ \frac{C \|\boldsymbol{\tau}\|^2}{1 - C\zeta_2} \hat{\sigma}^{11} + \frac{\partial}{\partial \zeta_1} \left(\frac{\hat{\sigma}^{12}}{1 - C\zeta_2} \right) + \frac{\partial \hat{\sigma}^{22}}{\partial \zeta_2} = 0. \end{cases} \quad (3.21)$$

La première relation ne dépend pas de la contrainte normale $\hat{\sigma}^{22}$. En l'intégrant par rapport à ζ_2 , elle permet d'obtenir $\hat{\sigma}^{12}$ en fonction de $\hat{\sigma}^{11}$. La deuxième relation donne alors $\hat{\sigma}^{22}$. Enfin l'énergie mécanique est :

$$I(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} \int_{\hat{\omega}} Tr(\hat{\sigma} \cdot \boldsymbol{\gamma}(\hat{\mathbf{u}})) (1 - C\zeta_2) \|\boldsymbol{\tau}\| d\hat{\omega} - \hat{l}_f(\hat{\mathbf{u}}) \equiv \hat{I}(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}). \quad (3.22)$$

PRINCIPE DE LA DÉRIVATION SELON γ

Les développements précédents nous permettent de dériver cette énergie le long de γ . En effet, par application de la θ -méthode dans un voisinage de la pointe de fissure $\hat{\mathbf{F}}$ associée à \mathbf{F} , nous calculons la dérivée de l'énergie \hat{I} dans la direction $\boldsymbol{\theta}$ ⁸ :

$$\frac{\partial \hat{I}}{\partial \hat{\omega}} \cdot \boldsymbol{\theta} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\hat{I}_{\hat{\mathbf{F}}^\eta} - \hat{I}_{\hat{\mathbf{F}}}}{\eta} \quad (3.23)$$

avec $\hat{\mathbf{F}}^\eta = \mathcal{F}^\eta(\hat{\mathbf{F}}) = (\mathbf{I}_2 + \eta \boldsymbol{\theta})(\hat{\mathbf{F}})$. Par bijectivité de la carte φ , il existe un unique point \mathbf{F}^η de γ_f tel que $\varphi(\hat{\mathbf{F}}^\eta) = \mathbf{F}^\eta$. Si φ est inversible, le point \mathbf{F}^η est également l'image de la pointe de fissure \mathbf{F} par l'application $\varphi \circ \mathcal{F}^\eta \circ \varphi^{-1}$. Il en résulte selon $\hat{I}_{\hat{\mathbf{F}}} = I_{\mathbf{F}}$ et $\hat{I}_{\hat{\mathbf{F}}^\eta} = I_{\mathbf{F}^\eta}$ que la quantité (3.23) représente la variation de l'énergie mécanique I au cours d'une évolution virtuelle infinitésimale de la pointe de fissure \mathbf{F} le long de γ . Cette variation est, par définition, le taux de restitution associé à ω . Ce point essentiel est illustré sur la figure 3.3. Ce procédé, qui consiste à se placer dans un repère local, complexifie l'expression initiale de l'énergie mais requiert en revanche une transformation \mathcal{F}^η simple. Il est théoriquement possible de raisonner sur l'énergie initiale en écrivant :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^\eta &= \varphi(\hat{\mathbf{F}} + \eta \boldsymbol{\theta}(\hat{\mathbf{F}})) = \varphi(\hat{\mathbf{F}}) + \eta \frac{\partial \varphi(\hat{\mathbf{F}})}{\partial \hat{\mathbf{F}}} \cdot \boldsymbol{\theta}(\hat{\mathbf{F}}) + o(\eta) \\ &= \mathbf{F} + \eta \left(\frac{\partial \varphi^{-1}(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \right)^{-1} \cdot (\boldsymbol{\theta} \circ \varphi^{-1})(\mathbf{F}) + o(\eta) \end{aligned} \quad (3.24)$$

⁷Dans la relation de comportement, nous utilisons la relation $Tr(\alpha A.B) = \alpha Tr(A.B)$, α étant ici le jacobien $\|\boldsymbol{\tau}\|(1 - C\zeta_2)$.

⁸ $\hat{I}_{\hat{\mathbf{F}}}$ désigne l'énergie de la structure à l'équilibre lorsque la pointe de fissure est en $\hat{\mathbf{F}}$.

et en supposant que φ soit un difféomorphisme entre $\hat{\omega}$ et ω . D'un point de vue pratique, ce procédé nécessite la connaissance explicite de l'application φ^{-1} , ce qui n'est pas systématiquement le cas.

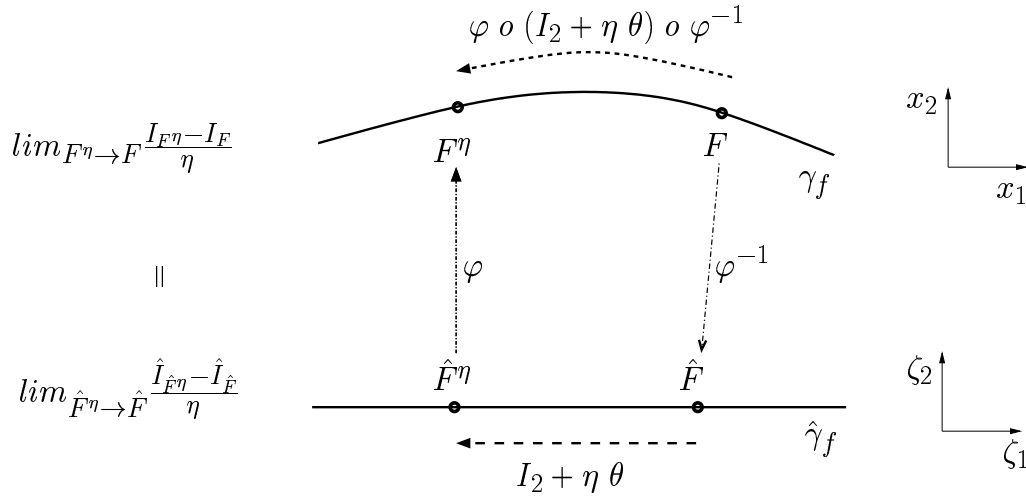


FIG. 3.3: Propagations réelle et virtuelle de la pointe de fissure F le long de γ_f .

3.2 Dérivée lagrangienne de l'énergie

Appliquons la θ -méthode rappelée dans le chapitre I avec $\theta = (\theta, 0)$ et $\theta \in W^{1,\infty}([\zeta_1^I, \zeta_1^S])$. La transformation $\mathcal{F}^\eta : \hat{\omega} \rightarrow \hat{\omega}^\eta$ est :

$$\begin{cases} \zeta_1^\eta = \zeta_1 + \eta\theta(\zeta_1, \zeta_2) \\ \zeta_2^\eta = \zeta_2 \end{cases}$$

ce qui implique les relations suivantes :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \zeta_1^\eta} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \zeta_1} \left(1 + \eta \frac{\partial \theta}{\partial \zeta_1}\right)^{-1} ; \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \zeta_2^\eta} = -\eta \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \zeta_1} \left(1 + \eta \frac{\partial \theta}{\partial \zeta_1}\right)^{-1} \frac{\partial \theta}{\partial \zeta_2} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \zeta_2} . \quad (3.25)$$

Contrairement au cas plan, il faut rajouter la dérivation de la métrique locale induite par la carte ϕ . Par exemple, nous associons à la courbure $C(\zeta_1^\eta)$ posée sur $\hat{\omega}^\eta$, la quantité $C^\eta(\zeta_1)$ posée sur le domaine réel telle que :

$$C^\eta(\zeta_1) = C(\zeta_1) + \eta \nabla C(\zeta_1) \cdot \theta + o(\eta) = C(\zeta_1) + \eta C'(\zeta_1) \theta + o(\eta) . \quad (3.26)$$

Le problème variationnel posé sur $\hat{\omega}^\eta$ redevient sur $\hat{\omega}$ ⁹ :

$$\begin{cases} \int_{\hat{\omega}} \text{Tr}(\hat{\mathbb{S}}^\eta : \sigma^\eta \cdot \tau) d\hat{\omega} = \int_{\hat{\omega}} \text{Tr}(\tau \cdot \gamma^\eta(\mathbf{u}^\eta)) d\hat{\omega} \quad \forall \tau \in \Sigma(\hat{\omega}) , \\ \int_{\hat{\omega}} \text{Tr}(\sigma^\eta \cdot \gamma^\eta(\mathbf{v})) (1 - C^\eta \zeta_2) \|\tau\| (1 + \eta \frac{\partial \theta}{\partial \zeta_1}) d\hat{\omega} = \hat{l}_f(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V(\hat{\omega}) , \end{cases} \quad (3.27)$$

en mettant à nouveau le jacobien $(1 + \eta \frac{\partial \theta}{\partial \zeta_1})$ de la transformation \mathcal{F}^η dans le tenseur τ .

⁹dans cette section et la suivante, nous omettons le symbole $\hat{\cdot}$ des champs \mathbf{u} et σ .

A titre d'exemple, détaillons les développements pour la relation de comportement. Le terme de gauche devient :

$$\int_{\hat{\omega}} Tr(\hat{\mathbb{S}}^\eta : \boldsymbol{\sigma}^\eta \cdot \boldsymbol{\tau}) d\hat{\omega} = \int_{\hat{\omega}} Tr(\hat{\mathbb{S}} : \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau}) d\hat{\omega} + \eta \int_{\hat{\omega}} \left(Tr(\hat{\mathbb{S}} : \boldsymbol{\sigma}^1 \cdot \boldsymbol{\tau}) + Tr(\nabla \hat{\mathbb{S}} \cdot \boldsymbol{\theta} : \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau}) \right) d\hat{\omega} + o(\eta) \quad (3.28)$$

où $\nabla \hat{\mathbb{S}} \cdot \boldsymbol{\theta}$ est compris composante par composante :

$$Tr(\nabla \hat{\mathbb{S}} \cdot \boldsymbol{\theta} : \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau}) = \frac{\partial \hat{S}_{ijkl}}{\partial \zeta} \cdot \boldsymbol{\theta} \sigma_{kl} \tau_{ij} = \hat{S}'_{ijkl} \theta \sigma_{kl} \tau_{ij} . \quad (3.29)$$

Posons $\alpha^{-1} = 1 - C\zeta_2$. Alors, selon les relations :

$$\begin{cases} \alpha^\eta = \alpha + \eta \alpha' \theta + o(\eta) , \\ (\mathbf{e}^1 \cdot \boldsymbol{\tau}')^\eta = \mathbf{e}^1 \cdot \boldsymbol{\tau}' + \eta (\mathbf{e}^1 \cdot \boldsymbol{\tau}')' \theta + o(\eta) , \\ \frac{\partial \mathbf{u}^\eta}{\partial \zeta_\alpha^\eta} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \zeta_\alpha} + \eta \left[\frac{\partial \mathbf{u}^1}{\partial \zeta_\alpha} - \frac{\partial \mathbf{u}^1}{\partial \zeta_1} \frac{\partial \theta}{\partial \zeta_\alpha} \right] + o(\eta) , \end{cases}$$

le terme de droite de la relation de comportement prend la forme :

$$\begin{aligned} Tr(\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\gamma}^\eta(\mathbf{u}^\eta)) &= Tr(\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u})) + \eta Tr(\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}^1)) \\ &+ \eta \tau^{11} \left(\alpha' \theta - \alpha \frac{\partial \theta}{\partial \zeta_1} \right) \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial \zeta_1} - \eta \tau^{11} \left([(\mathbf{e}^1 \cdot \boldsymbol{\tau}') \alpha]' \theta u_1 + (C \|\boldsymbol{\tau}\|^2 \alpha)' \theta u_2 \right) \\ &+ \eta \tau^{12} \left(-\frac{\partial u_1}{\partial \zeta_1} \frac{\partial \theta}{\partial \zeta_2} + \frac{\partial u_2}{\partial \zeta_1} (\alpha' \theta - \alpha \theta') + \theta u_1 (\alpha C)' \right) \\ &- \eta \tau^{22} \frac{\partial u_2}{\partial \zeta_1} \frac{\partial \theta}{\partial \zeta_2} + o(\eta) . \end{aligned} \quad (3.30)$$

En réitérant ce processus pour l'équation d'équilibre, puis identifiant les termes de même puissance en η , nous obtenons que les dérivées lagrangiennes $(\mathbf{u}^1, \boldsymbol{\sigma}^1)$ vérifient la loi de comportement suivante :

$$\begin{aligned} \int_{\hat{\omega}} \left(Tr(\hat{\mathbb{S}} : \boldsymbol{\sigma}^1 \cdot \boldsymbol{\tau}) + Tr(\nabla \hat{\mathbb{S}} \cdot \boldsymbol{\theta} : \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau}) \right) d\hat{\omega} &= \int_{\hat{\omega}} Tr(\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}^1)) d\hat{\omega} \\ &+ \int_{\hat{\omega}} \tau^{11} \left[\left(\alpha' \theta - \alpha \frac{\partial \theta}{\partial \zeta_1} \right) \frac{\partial u_1}{\partial \zeta_1} - [(\mathbf{e}^1 \cdot \boldsymbol{\tau}') \alpha]' \theta u_1 - (C \|\boldsymbol{\tau}\|^2 \alpha)' \theta u_2 \right] d\hat{\omega} \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \Sigma(\hat{\omega}) \\ &+ \int_{\hat{\omega}} \tau^{12} \left(-\frac{\partial u_1}{\partial \zeta_1} \frac{\partial \theta}{\partial \zeta_2} + \frac{\partial u_2}{\partial \zeta_1} (\alpha' \theta - \alpha \theta') + \theta u_1 (\alpha C)' \right) d\hat{\omega} - \int_{\hat{\omega}} \tau^{22} \frac{\partial u_2}{\partial \zeta_1} \frac{\partial \theta}{\partial \zeta_2} d\hat{\omega} \end{aligned} \quad (3.31)$$

et l'équation d'équilibre suivante :

$$\begin{aligned} \int_{\hat{\omega}} Tr(\boldsymbol{\sigma}^1 \cdot \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{v})) (1 - C\zeta_2) \|\boldsymbol{\tau}\| d\hat{\omega} &= \\ - \int_{\hat{\omega}} \sigma^{11} \left(\|\boldsymbol{\tau}\|' \theta \frac{\partial v_1}{\partial \zeta_1} - [\|\boldsymbol{\tau}\| (\mathbf{e}^1 \cdot \boldsymbol{\tau}') \theta]' v_1 - [\|\boldsymbol{\tau}\|^3 C \theta]' v_2 \right) d\hat{\omega} \\ - \int_{\hat{\omega}} \sigma^{12} \left(\frac{\partial v_1}{\partial \zeta_2} [(1 - C\zeta_2) \|\boldsymbol{\tau}\| \theta]' - \frac{\partial \theta}{\partial \zeta_2} \frac{\partial v_1}{\partial \zeta_1} \|\boldsymbol{\tau}\| (1 - C\zeta_2) + \|\boldsymbol{\tau}\|' \theta \frac{\partial v_2}{\partial \zeta_1} + [C \|\boldsymbol{\tau}\| \theta]' v_1 \right) d\hat{\omega} \\ - \int_{\hat{\omega}} \sigma^{22} \left([(1 - C\zeta_2) \|\boldsymbol{\tau}\| \theta]' \frac{\partial v_2}{\partial \zeta_2} - \frac{\partial \theta}{\partial \zeta_2} \frac{\partial v_2}{\partial \zeta_1} (1 - C\zeta_2) \|\boldsymbol{\tau}\| \right) d\hat{\omega} \quad \forall \mathbf{v} \in V(\hat{\omega}) . \end{aligned} \quad (3.32)$$

En utilisant la symétrie du tenseur $\hat{\mathbb{S}}$ pour écrire $Tr(\hat{\mathbb{S}} : \boldsymbol{\sigma}^1 \cdot \boldsymbol{\sigma}) = Tr(\hat{\mathbb{S}} : \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma}^1)$, le taux de restitution de l'énergie $-\frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{\omega}} \cdot \boldsymbol{\theta} \equiv \hat{g}(\boldsymbol{\theta})$, vaut ¹⁰ :

$$\begin{aligned}
2\hat{g}(\boldsymbol{\theta}) &= \int_{\hat{\omega}} Tr(\nabla \mathbb{S} \cdot \boldsymbol{\theta} : \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \|\boldsymbol{\tau}\| \alpha^{-1} d\hat{\omega} \\
&\quad - \int_{\hat{\omega}} \sigma^{11} \left(\alpha' \theta \frac{\partial u_1}{\partial \zeta_1} - [(\mathbf{e}^1 \cdot \boldsymbol{\tau}') \alpha]' \theta u_1 - (C \|\boldsymbol{\tau}\|^2 \alpha)' \theta u_2 \right) \|\boldsymbol{\tau}\| \alpha^{-1} d\hat{\omega} \\
&\quad - \int_{\hat{\omega}} \sigma^{12} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \zeta_1} \alpha' \theta + \theta u_1 (\alpha C)' \right) \|\boldsymbol{\tau}\| \alpha^{-1} d\hat{\omega} \\
&\quad - \int_{\hat{\omega}} \sigma^{11} \left(\|\boldsymbol{\tau}\|' \theta \frac{\partial u_1}{\partial \zeta_1} \right) d\hat{\omega} - \int_{\hat{\omega}} \sigma^{12} \left(\|\boldsymbol{\tau}\|' \theta \frac{\partial u_2}{\partial \zeta_1} \right) d\hat{\omega} \\
&\quad + \int_{\hat{\omega}} \sigma^{11} \frac{\partial \theta}{\partial \zeta_1} \frac{\partial u_1}{\partial \zeta_1} \|\boldsymbol{\tau}\| d\hat{\omega} + \int_{\hat{\omega}} \sigma^{12} \frac{\partial u_2}{\partial \zeta_1} \theta' \|\boldsymbol{\tau}\| d\hat{\omega} \\
&\quad + \int_{\hat{\omega}} \sigma^{11} \left([\|\boldsymbol{\tau}\| (\mathbf{e}^1 \cdot \boldsymbol{\tau}') \theta]' u_1 + [\|\boldsymbol{\tau}\|^3 C \theta]' u_2 \right) d\hat{\omega} \\
&\quad - \int_{\hat{\omega}} \sigma^{12} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \zeta_2} [\alpha^{-1} \|\boldsymbol{\tau}\| \theta]' - 2 \frac{\partial \theta}{\partial \zeta_2} \frac{\partial u_1}{\partial \zeta_1} \|\boldsymbol{\tau}\| \alpha^{-1} + [C \|\boldsymbol{\tau}\| \theta]' u_1 \right) d\hat{\omega} \\
&\quad + \int_{\hat{\omega}} \sigma^{22} \left(-[\alpha^{-1} \|\boldsymbol{\tau}\| \theta]' \frac{\partial u_2}{\partial \zeta_2} + 2 \frac{\partial \theta}{\partial \zeta_2} \frac{\partial u_2}{\partial \zeta_1} \alpha^{-1} \|\boldsymbol{\tau}\| \right) d\hat{\omega}. \tag{3.33}
\end{aligned}$$

Cette expression comporte deux types de termes : les termes habituels en $\frac{\partial \theta}{\partial \zeta_\alpha}$ présents dans le cas rectiligne et des termes en θ dus à la dérivation de la métrique locale. Nous remarquons que les termes en θ s'annulent pour les cartes conduisant à une métrique constante, soit $C(\zeta_1) = cste$ et $\|\boldsymbol{\tau}(\zeta_1)\| = cste$ (l'interface est une droite ou un cercle). Dans le cas contraire, le taux ne s'exprime pas hors d'un voisinage de la pointe de la fissure. Le taux de restitution s'exprime néanmoins en pointe de fissure $\hat{\mathbf{F}}$ uniquement. Nous procédons de façon habituelle : soit \hat{C} le cercle de centre $\hat{\mathbf{F}}$ et de rayon R et soit \mathbf{n} la normale unitaire dirigée vers le centre (voir figure 3.2). \hat{C} partitionne $\hat{\omega}$ en $\hat{\omega}_I$ intérieur à \hat{C} et $\hat{\omega}_E$ extérieur. Nous intégrons alors par partie les intégrales en $\frac{\partial \theta}{\partial \zeta_\alpha}$ posés sur $\hat{\omega}_E$. Il apparaît des termes en θ posés sur $\hat{\omega}_E$ et des termes en $\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n}$ posés sur \hat{C} . Puis, en utilisant les équations d'équilibre (3.21) et les relations de comportement (3.19), les termes en θ s'éliminent. Enfin, faisant tendre R vers zéro, les termes posés sur $\hat{\omega}_I$ tendent vers zéro et il reste :

THÉORÈME 1 (Expression du taux de restitution le long de \hat{C}) *La fonction \hat{g} est indépendante du vecteur $\boldsymbol{\theta}$ en dehors de la pointe de fissure où elle prend la forme :*

$$\begin{aligned}
2\hat{g}(\boldsymbol{\theta}) &= \theta(\hat{\mathbf{F}}) \|\boldsymbol{\tau}\|(\hat{\mathbf{F}}) \lim_{R \rightarrow 0} \\
&\quad \left\{ \int_{\hat{C}} \left(\left[u_1 \mathbf{e}^1 \cdot \boldsymbol{\tau}' + u_2 \|\boldsymbol{\tau}\|^2 C \right] \sigma^{11} - u_1 C \sigma^{12} \right) n_1 d\hat{C} \right. \\
&\quad + \int_{\hat{C}} 2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial \zeta_1} \sigma^{12} + \frac{\partial u_2}{\partial \zeta_1} \sigma^{22} \right) (1 - C \zeta_2) n_2 d\hat{C} + \\
&\quad \left. + \int_{\hat{C}} \left(\sigma^{12} \left[\frac{\partial u_2}{\partial \zeta_1} - \frac{\partial u_1}{\partial \zeta_2} (1 - C \zeta_2) \right] - \sigma^{22} \frac{\partial u_2}{\partial \zeta_2} (1 - C \zeta_2) + \frac{\partial u_1}{\partial \zeta_1} \sigma^{11} \right) n_1 d\hat{C} \right\}. \tag{3.34}
\end{aligned}$$

¹⁰Dans le cas linéaire, nous évitons le développement de l'énergie en utilisant la relation $\hat{I}(\mathbf{u}) = -\frac{1}{2} \hat{I}_f(\mathbf{u})$.

Enfin, nous prenons soin de vérifier que cette expression coïncide avec celle du cas rectiligne ($\boldsymbol{\tau}^T = (1, 0)$, $C = 0$) :

$$2g(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\theta}(\mathbf{F}) \lim_{R \rightarrow 0} \left\{ - \int_C \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \boldsymbol{\zeta}}) n_1 dC + 2 \int_C \sigma^{\alpha\beta} \frac{\partial u_\beta}{\partial \zeta_1} n_\alpha dC \right\}. \quad (3.35)$$

REMARQUE(S) 6 (Régularité de la carte φ) La présence de la quantité C dans l'expression (3.34) impose à la carte φ une régularité $C^3(\hat{\gamma})$, tandis que l'expression (3.33) requiert une régularité $C^4(\hat{\gamma})$. ■

3.3 Analyse asymptotique et convergence des énergies

Le but de ce paragraphe est de montrer que l'opérateur "passage à la limite en ϵ " commute avec l'opérateur de dérivation par rapport à un domaine. A cette fin, nous remplaçons le modèle de l'élasticité bidimensionnelle en déformations planes par des modèles simplifiés auxquels nous associerons un taux de restitution. Ces modèles peuvent être obtenus rigoureusement en utilisant une méthode asymptotique : concernant les poutres, nous renvoyons à [RIGOLOTT (1972)], tandis que pour les coques, nous renvoyons à [DESTUYNDER (1980), chapitre 7] pour des travaux précurseurs dans un cadre variationnel puis à [SANCHEZ-HUBERT & SANCHEZ-PALENCIA (1997)] et à [CIARLET (2000)]. Cette méthode permet sans hypothèse cinématique ou statique *a priori* de déterminer des modèles simplifiés, approchant d'autant "mieux" le modèle initial que l'épaisseur ϵh est petite. Un passage à la limite en ϵ est délicat dans la mesure où une fonction définie sur un ouvert de dimension deux n'a pas nécessairement de sens sur un ouvert de dimension un. L'analyse se fait alors en deux temps : on se ramène à un ouvert fixe, indépendant de ϵ : cela fait apparaître explicitement la dépendance de la formulation en ϵ , puis on développe, de façon formelle, les inconnues en une série de puissances de ϵ . L'identification des termes de même puissance de ϵ conduit enfin aux différents modèles limites cherchés.

3.3.1 Rappels sur la méthode asymptotique

Nous réécrivons la formulation variationnelle (3.20), définie sur $\hat{\omega} =]\zeta_1^I, \zeta_1^S[\times] - \epsilon, \epsilon[$, sur l'ouvert $\hat{\omega} =]\zeta_1^I, \zeta_1^S[\times] - 1, 1[$ par la transformation :

$$F^\epsilon : \boldsymbol{\zeta} = (\zeta_1, \zeta_2) \in \hat{\omega} \longrightarrow F^\epsilon(\boldsymbol{\zeta}) = \boldsymbol{\zeta}^\epsilon = (\zeta_1, \epsilon \zeta_2) \in \hat{\omega}^\epsilon \quad (3.36)$$

et nous associons à chaque fonction $p(\boldsymbol{\zeta}^\epsilon)$ la fonction $p^\epsilon(\boldsymbol{\zeta})$ telle que $p^\epsilon(\boldsymbol{\zeta}) = p \circ F^\epsilon(\boldsymbol{\zeta})$. Nous utilisons les changements d'inconnues suivants :

$$\begin{cases} \sigma_\epsilon^{11} = \sigma^{11} \circ F^\epsilon & ; & \sigma_\epsilon^{12} = \epsilon^{-1} \sigma^{12} \circ F^\epsilon & ; & \sigma_\epsilon^{22} = \epsilon^{-2} \sigma^{22} \circ F^\epsilon, \\ u_\epsilon^1 = u^1 \circ F^\epsilon & ; & u_\epsilon^2 = \epsilon u^2 \circ F^\epsilon, \\ f_\epsilon^{1\pm} = \epsilon^{-1} f^{1\pm} \circ F^\epsilon & ; & f_\epsilon^{2\pm} = \epsilon^{-2} f^{2\pm} \circ F^\epsilon, \end{cases} \quad (3.37)$$

qui permettent dans le cas rectiligne¹¹ d'assurer la conservation de l'énergie mécanique, au facteur ϵ près :

$$I(\mathbf{u}(\mathbf{x}^\epsilon), \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}^\epsilon)) = \epsilon I(\mathbf{u}^\epsilon(\mathbf{x}), \boldsymbol{\sigma}_\epsilon(\mathbf{x})). \quad (3.38)$$

¹¹et dans ce cas seulement. Dans le cas courbe, aucun choix n'assure la conservation telle que $\hat{I}(\mathbf{u}(\boldsymbol{\zeta}^\epsilon), \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\zeta}^\epsilon)) = \epsilon \hat{I}(\mathbf{u}^\epsilon(\boldsymbol{\zeta}), \boldsymbol{\sigma}_\epsilon(\boldsymbol{\zeta}))$

Rappelons que seul le triplet $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{f})$ a un sens physique. Le triplet $(\mathbf{u}^\epsilon, \boldsymbol{\sigma}_\epsilon, \mathbf{f}_\epsilon)$ n'est qu'un intermédiaire de calcul. Enfin, les coefficients d'élasticité sont constants dans l'épaisseur et nous posons :

$$\hat{S}_{\alpha\beta\tau\theta}^\epsilon(\zeta) = \hat{S}_{\alpha\beta\tau\theta} o F^\epsilon(\zeta) .$$

Le couple $(\mathbf{u}^\epsilon, \boldsymbol{\sigma}_\epsilon)$ vérifie alors la formulation variationnelle suivante :

$$\begin{cases} A_0^\epsilon(\boldsymbol{\sigma}_\epsilon, \boldsymbol{\tau}) + \epsilon^2 A_2^\epsilon(\boldsymbol{\sigma}_\epsilon, \boldsymbol{\tau}) + \epsilon^4 A_4^\epsilon(\boldsymbol{\sigma}_\epsilon, \boldsymbol{\tau}) = \epsilon^{-1} B_{-1}^\epsilon(\mathbf{u}^\epsilon, \boldsymbol{\tau}) + B_0^\epsilon(\mathbf{u}^\epsilon, \boldsymbol{\tau}) + \epsilon B_1^\epsilon(\mathbf{u}^\epsilon, \boldsymbol{\tau}) \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \Sigma(\hat{\omega}), \\ \epsilon^{-1} B_{-1}^\epsilon(\mathbf{v}, \boldsymbol{\sigma}_\epsilon) + B_0^\epsilon(\mathbf{v}, \boldsymbol{\sigma}_\epsilon) + \epsilon B_1^\epsilon(\mathbf{v}, \boldsymbol{\sigma}_\epsilon) = \hat{l}_{f^\epsilon}^\epsilon(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V(\hat{\omega}), \end{cases}$$

notant :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0^\epsilon(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) = \int_{\hat{\omega}} \hat{S}_{1111} \sigma^{11} \tau^{11} (1 - C^\epsilon \epsilon \zeta_2) \|\boldsymbol{\tau}\| d\hat{\omega}, \end{array} \right. \quad (3.39)$$

$$A_2^\epsilon(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) = \int_{\hat{\omega}} \left[\hat{S}_{1122} (\sigma^{11} \tau^{22} + \sigma^{22} \tau^{11}) + \hat{S}_{1212} \sigma^{12} \tau^{12} \right] (1 - C^\epsilon \epsilon \zeta_2) \|\boldsymbol{\tau}\| d\hat{\omega}, \quad (3.40)$$

$$A_4^\epsilon(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) = \int_{\hat{\omega}} \hat{S}_{2222} \sigma^{22} \tau^{22} (1 - C^\epsilon \epsilon \zeta_2) \|\boldsymbol{\tau}\| d\hat{\omega}, \quad (3.41)$$

$$B_{-1}^\epsilon(\mathbf{u}, \boldsymbol{\tau}) = - \int_{\hat{\omega}} \tau^{11} C^\epsilon \|\boldsymbol{\tau}\|^3 u_2 d\hat{\omega}, \quad (3.42)$$

$$B_0^\epsilon(\mathbf{u}, \boldsymbol{\tau}) = \int_{\hat{\omega}} \left[\tau^{11} \|\boldsymbol{\tau}\|^2 (\|\boldsymbol{\tau}\|^{-1} u_1)' + \tau^{12} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \zeta_1} + (1 - C^\epsilon \epsilon \zeta_2) \frac{\partial u_1}{\partial \zeta_2} \right) \|\boldsymbol{\tau}\| \right. \\ \left. + \tau^{22} \frac{\partial u_2}{\partial \zeta_2} (1 - C^\epsilon \epsilon \zeta_2) \|\boldsymbol{\tau}\| \right] d\hat{\omega}, \quad (3.43)$$

$$B_1^\epsilon(\mathbf{u}, \boldsymbol{\tau}) = \int_{\hat{\omega}} \tau^{12} C^\epsilon u_1 \|\boldsymbol{\tau}\| d\hat{\omega}, \quad (3.44)$$

et l'énergie mécanique est :

$$\boxed{\epsilon^{-1} \hat{I}^\epsilon(\mathbf{u}^\epsilon, \boldsymbol{\sigma}_\epsilon) = \frac{1}{2} \left(\epsilon^{-1} B_{-1}^\epsilon(\mathbf{u}^\epsilon, \boldsymbol{\sigma}_\epsilon) + B_0^\epsilon(\mathbf{u}^\epsilon, \boldsymbol{\sigma}_\epsilon) + \epsilon B_1^\epsilon(\mathbf{u}^\epsilon, \boldsymbol{\sigma}_\epsilon) \right) - \hat{l}_{f^\epsilon}^\epsilon(\mathbf{u}^\epsilon)}. \quad (3.45)}$$

Nous développons les champs statique et cinématique selon :

$$(\mathbf{u}^\epsilon, \boldsymbol{\sigma}_\epsilon) = (\mathbf{u}^0, \boldsymbol{\sigma}_0) + \epsilon(\mathbf{u}^1, \boldsymbol{\sigma}_1) + \epsilon^2(\mathbf{u}^2, \boldsymbol{\sigma}_2) + \dots \quad (3.46)$$

REMARQUE(S) 7 Cette décomposition ne signifie pas que les champs $(\mathbf{u}^1, \boldsymbol{\sigma}_1)$ sont ponctuellement négligeables devant $(\mathbf{u}^0, \boldsymbol{\sigma}_0)$. Nous savons en effet, que la théorie de la rupture fragile entraîne des singularités de contraintes en fond de fissure ; il convient de comprendre ce développement dans un sens énergétique : les énergies $\hat{I}^0(\mathbf{u}^0, \boldsymbol{\sigma}_0)$ et $\hat{I}^1(\mathbf{u}^1, \boldsymbol{\sigma}_1, \mathbf{u}^0, \boldsymbol{\sigma}_0)$ résultant du développement :

$$\epsilon^{-1} \hat{I}^\epsilon(\mathbf{u}^\epsilon, \boldsymbol{\sigma}_\epsilon) = \hat{I}^0(\mathbf{u}^0, \boldsymbol{\sigma}_0) + \epsilon \hat{I}^1(\mathbf{u}^1, \boldsymbol{\sigma}_1, \mathbf{u}^0, \boldsymbol{\sigma}_0) + \dots \quad (3.47)$$

sont finies de sorte que $\epsilon \hat{I}^1(\mathbf{u}^1, \boldsymbol{\sigma}_1, \mathbf{u}^0, \boldsymbol{\sigma}_0)$ est petite devant $\hat{I}^0(\mathbf{u}^0, \boldsymbol{\sigma}_0)$ de sorte que :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{-1} \hat{I}^\epsilon(\mathbf{u}^\epsilon, \boldsymbol{\sigma}_\epsilon) = \hat{I}^0(\mathbf{u}^0, \boldsymbol{\sigma}_0). \quad (3.48)$$

■

Pour mener à terme l'étude asymptotique, Ph. Destuynder introduit dans [DESTUYNDER (1980)] un petit paramètre supplémentaire reliant la norme du tenseur de courbure à l'épaisseur. Dans le cas bidimensionnel, nous introduisons simplement un paramètre α positif et le scalaire b tels que

$$C^\epsilon = b\epsilon^\alpha \quad (3.49)$$

L'approche précédente permet de déterminer différents modèles de poutres selon la valeur de α . Nous rappelons le cas faiblement courbé pour lequel le paramètre α est de l'ordre de 1 puis le cas général où α est quelconque. Dans le premier cas, l'interprétation de l'équation de comportement au premier ordre en ϵ entraîne que le couple $(\mathbf{u}^0, \boldsymbol{\sigma}_0)$ sur $\hat{\omega}$ vérifie les relations suivantes :

$$\begin{cases} \hat{S}_{1111}\sigma_0^{11} = \|\boldsymbol{\tau}\|(\|\boldsymbol{\tau}\|^{-1}u_1^0)' - b\|\boldsymbol{\tau}\|^2u_2^0, \\ u_2(\zeta_1, \zeta_2) = u_2(\zeta_1, 0), \\ u_1(\zeta_1, \zeta_2) = u_1(\zeta_1, 0) - \zeta_2 \frac{\partial u_2(\zeta_1, 0)}{\partial \zeta_1}. \end{cases} \quad (3.50)$$

Le déplacement normal u_2^0 est indépendant de la variable d'épaisseur ζ_2 et le déplacement tangentiel est linéaire selon ζ_2 . Enfin, au premier ordre, l'énergie vaut :

$$\hat{I}^0(\mathbf{u}^0, \boldsymbol{\sigma}_0) = \frac{1}{2} \int_{\hat{\omega}} \sigma_0^{11} \left(\|\boldsymbol{\tau}\|(\|\boldsymbol{\tau}\|^{-1}u_1^0)' - b\|\boldsymbol{\tau}\|^2u_2^0 \right) \|\boldsymbol{\tau}\| d\hat{\omega} - \hat{l}_f^0(\mathbf{u}^0). \quad (3.51)$$

REMARQUE(S) 8 *Pour notre propos, il n'est pas nécessaire d'explicitier l'équation d'équilibre ni de préciser le chargement dont ne dépendent pas explicitement les expressions des dérivées lagrangiennes. Bien entendu, les différents modèles de poutres dépendent fortement de la nature et de l'intensité du chargement [CIARLET (2000), p. 161].* ■

Dans le cas général, c'est-à-dire lorsque la courbure n'est pas reliée de façon académique à la valeur de ϵ , l'interprétation de l'équation de comportement s'écrit sur l'ouvert réel $\hat{\omega}^\epsilon$:

$$\begin{cases} \hat{S}_{1111}\sigma^{11}(1 - C^\epsilon\zeta_2^\epsilon) = \|\boldsymbol{\tau}\|(\|\boldsymbol{\tau}\|^{-1}u_1)' - \epsilon^{-2}C^\epsilon\eta C u_2\|\boldsymbol{\tau}\|^2, \\ \frac{\partial u_1}{\partial \zeta_2^\epsilon} + (1 - C^\epsilon\zeta_2^\epsilon)^{-1}C^\epsilon u_1 = -(1 - C^\epsilon\zeta_2^\epsilon)^{-1}\frac{\partial u_2}{\partial \zeta_1}, \\ \frac{\partial u_2}{\partial \zeta_2^\epsilon}(1 - C^\epsilon\zeta_2^\epsilon) = 0. \end{cases} \quad (3.52)$$

ce qui entraîne :

$$\begin{cases} \hat{S}_{1111}\sigma^{11} = \frac{1}{1-C\zeta_2} \left(\|\boldsymbol{\tau}\|(\|\boldsymbol{\tau}\|^{-1}u_1)' - C\|\boldsymbol{\tau}\|^2u_2 \right), \\ u_2(\zeta_1, \zeta_2) = u_2(\zeta_1, 0), \\ u_1(\zeta_1, \zeta_2) = (1 - C\zeta_2)u_1(\zeta_1, 0) - \zeta_2 \frac{\partial u_2(\zeta_1, 0)}{\partial \zeta_1} \end{cases} \quad (3.53)$$

de sorte que l'énergie au premier ordre est :

$$\hat{I}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} \int_{\hat{\omega}^\epsilon} \sigma^{11} \left(\|\boldsymbol{\tau}\|(\|\boldsymbol{\tau}\|^{-1}u_1)' - C^\epsilon\|\boldsymbol{\tau}\|^2u_2 \right) \|\boldsymbol{\tau}\| d\hat{\omega} - \hat{l}_f(\mathbf{u}). \quad (3.54)$$

Le modèle limite obtenu (lorsque ϵ est petit) est le modèle de Bernoulli-Euler-Navier¹² [DESTUYNDER (1980), p.345]. Dans le cas des petits déplacements, les développements asymptotiques formels (3.46) sont justifiés par les résultats de convergence suivants :

¹²l'équivalent du modèle de Koiter pour les structures tridimensionnelles.

THÉORÈME 2 *Le couple $(\sigma_\epsilon, \mathbf{u}^\epsilon)$ vérifie :*

$$\begin{cases} \mathbf{u}^\epsilon \rightarrow \mathbf{u}^0 & \text{dans } (H^1(\hat{\omega}))^2, \\ \sigma_\epsilon^{11} \rightarrow \sigma_0^{11} & \text{dans } L^2(\hat{\omega}), \\ \epsilon \sigma_\epsilon^{12} \rightarrow 0 & \text{dans } L^2(\hat{\omega}), \\ \epsilon^2 \sigma_\epsilon^{22} \rightarrow 0 & \text{dans } L^2(\hat{\omega}). \end{cases} \quad (3.55)$$

■

Preuve : [DESTUYNDER (1980),p.353]. ■

Ces convergences ont lieu dans l'espace $L^2(\hat{\omega})$, donc dans un sens énergétique et permettent de montrer (3.48). Les deux cas rappelés précédemment se traitent exactement de la même façon. L'énergie complète sur l'ouvert dilaté est :

$$\begin{aligned} \epsilon^{-1} \hat{I}^\epsilon(\mathbf{u}^\epsilon, \sigma_\epsilon) &= \frac{1}{2} \int_{\hat{\omega}} \sigma_\epsilon^{11} \left(\|\boldsymbol{\tau}\| (\|\boldsymbol{\tau}\|^{-1} u_1^\epsilon)' - b \|\boldsymbol{\tau}\|^2 u_2^\epsilon \right) \|\boldsymbol{\tau}\| d\hat{\omega} + \frac{1}{2} \int_{\hat{\omega}} \sigma_\epsilon^{22} \frac{\partial u_2^\epsilon}{\partial \zeta_2} (1 - \epsilon^2 b \zeta_2) \|\boldsymbol{\tau}\| d\hat{\omega} \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\hat{\omega}} \sigma_\epsilon^{12} \left((1 - \epsilon^2 b \zeta_2) \frac{\partial u_1^\epsilon}{\partial \zeta_2} + \frac{\partial u_2^\epsilon}{\partial \zeta_1} + \epsilon^2 b u_1^\epsilon \right) \|\boldsymbol{\tau}\| d\hat{\omega} - l_{f^\epsilon}(\mathbf{u}^\epsilon). \end{aligned} \quad (3.56)$$

La première intégrale ne pose pas de difficulté, et converge selon les arguments habituels vers :

$$\frac{1}{2} \int_{\hat{\omega}} \sigma_0^{11} \left(\|\boldsymbol{\tau}\| (\|\boldsymbol{\tau}\|^{-1} u_1^0)' - b \|\boldsymbol{\tau}\|^2 u_2^0 \right) \|\boldsymbol{\tau}\| d\hat{\omega}. \quad (3.57)$$

Enfin, selon l'équation de comportement,

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \int_{\hat{\omega}} \sigma_\epsilon^{22} \frac{\partial u_2^\epsilon}{\partial \zeta_2} (1 - b \epsilon^2 \zeta_2) \|\boldsymbol{\tau}\| d\hat{\omega} = \frac{1}{2} \int_{\hat{\omega}} \left(\hat{S}_{1122} \epsilon^2 \sigma_\epsilon^{22} \sigma_\epsilon^{11} + \hat{S}_{2222} (\epsilon^2 \sigma_\epsilon^{22})^2 \right) (1 - \epsilon^2 b \zeta_2) \|\boldsymbol{\tau}\| d\hat{\omega}, \\ \frac{1}{2} \int_{\hat{\omega}} \sigma_\epsilon^{12} \left((1 - \epsilon^2 b \zeta_2) \frac{\partial u_1^\epsilon}{\partial \zeta_2} + \frac{\partial u_2^\epsilon}{\partial \zeta_1} + \epsilon^2 b u_1^\epsilon \right) \|\boldsymbol{\tau}\| d\hat{\omega} = \int_{\hat{\omega}} 2 \hat{S}_{1212} (\epsilon \sigma_\epsilon^{12})^2 (1 - \epsilon^2 b \zeta_2) \|\boldsymbol{\tau}\| d\hat{\omega}, \end{cases}$$

termes qui convergent vers zéro ce qui permet de conclure. Le cas général se traite sans difficulté supplémentaire. Notons enfin que dans le cas de la présence d'une fissure, la vitesse de convergence reste un problème ouvert.

3.3.2 Convergence de la dérivée lagrangienne première de l'énergie

L'objet de ce paragraphe est de démontrer le résultat suivant :

THÉORÈME 3 *Les opérateurs "passage à la limite en ϵ " et "dérivation par rapport à un ouvert variable" commutent :*

$$\boxed{\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial \hat{I}^\epsilon}{\partial \hat{\omega}^\epsilon} = \frac{\partial}{\partial \hat{\omega}} \left(\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \hat{I}^\epsilon \right)}. \quad (3.58)$$

■

Preuve : Les résultats de convergence précédents montrent que la description de la propagation du front est indépendante de la coordonnée ζ_2 , ce qui s'écrit :

$$\frac{\partial \theta(\zeta_1, \zeta_2)}{\partial \zeta_2} = 0 \quad (3.59)$$

et le taux de restitution (3.33) se réduit à :

$$\begin{aligned}
2\hat{g}(\boldsymbol{\theta}) &= \int_{\hat{\omega}^\epsilon} \text{Tr}(\nabla \hat{\mathbf{S}} \cdot \boldsymbol{\theta} : \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \|\boldsymbol{\tau}\| \alpha^{-1} d\hat{\omega} \\
&- \int_{\hat{\omega}^\epsilon} \sigma^{11} \left[(\alpha' \boldsymbol{\theta} - \alpha \boldsymbol{\theta}') \frac{\partial u_1}{\partial \zeta_1} - [(\mathbf{e}^1 \cdot \boldsymbol{\tau}') \alpha]' \theta u_1 - (C \|\boldsymbol{\tau}\|^2 \alpha)' \theta u_2 \right] \|\boldsymbol{\tau}\| \alpha^{-1} d\hat{\omega} \\
&- \int_{\hat{\omega}^\epsilon} \sigma^{12} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \zeta_1} (\alpha' \boldsymbol{\theta} - \alpha \boldsymbol{\theta}') + \theta u_1 (\alpha C)' \right) \|\boldsymbol{\tau}\| \alpha^{-1} d\hat{\omega} \\
&- \int_{\hat{\omega}^\epsilon} \sigma^{11} \left(\|\boldsymbol{\tau}\|' \theta \frac{\partial u_1}{\partial \zeta_1} - [\|\boldsymbol{\tau}\| (\mathbf{e}^1 \cdot \boldsymbol{\tau}') \theta]' u_1 - [\|\boldsymbol{\tau}\|^3 C \theta]' u_2 \right) d\hat{\omega} \\
&- \int_{\hat{\omega}^\epsilon} \sigma^{12} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \zeta_2} [(1 - C \zeta_2) \|\boldsymbol{\tau}\| \theta]' + \|\boldsymbol{\tau}\|' \theta \frac{\partial u_2}{\partial \zeta_1} + [C \|\boldsymbol{\tau}\| \theta]' u_1 \right) d\hat{\omega} \\
&+ \int_{\hat{\omega}^\epsilon} \sigma^{22} \left(-[(1 - C \zeta_2) \|\boldsymbol{\tau}\| \theta]' \frac{\partial u_2}{\partial \zeta_2} \right) d\hat{\omega} . \tag{3.60}
\end{aligned}$$

Commençons par discuter le cas faiblement courbé. Le taux de restitution sur l'ouvert dilaté s'écrit :

$$\begin{aligned}
2\epsilon^{-1} \hat{g}^\epsilon(\boldsymbol{\theta}) &= \int_{\hat{\omega}} \left[(\hat{S}'_{1111} \sigma_\epsilon^{11} + \hat{S}'_{1122} \epsilon^2 \sigma_\epsilon^{22}) \sigma^{11} + 2\hat{S}'_{1212} (\epsilon \sigma^{12})^2 \right. \\
&\quad \left. + (\hat{S}'_{1122} \sigma_\epsilon^{11} + \hat{S}'_{2222} \epsilon^2 \sigma_\epsilon^{22}) \epsilon^2 \sigma_\epsilon^{22} \right] \theta \|\boldsymbol{\tau}\| \alpha_\epsilon^{-1} d\hat{\omega} \\
&- \int_{\hat{\omega}} \sigma_\epsilon^{11} \left[(\alpha'_\epsilon \boldsymbol{\theta} - \alpha_\epsilon \boldsymbol{\theta}') \frac{\partial u_1^\epsilon}{\partial \zeta_1} - [(\mathbf{e}^1 \cdot \boldsymbol{\tau}') \alpha_\epsilon]' \theta u_1^\epsilon - (b \|\boldsymbol{\tau}\|^2 \alpha_\epsilon)' \theta u_2^\epsilon \right] \|\boldsymbol{\tau}\| \alpha_\epsilon^{-1} d\hat{\omega} \\
&- \int_{\hat{\omega}} \epsilon \sigma_\epsilon^{12} \left(\epsilon^{-1} \frac{\partial u_2^\epsilon}{\partial \zeta_1} (\alpha'_\epsilon \boldsymbol{\theta} - \alpha_\epsilon \boldsymbol{\theta}') + \theta u_1^\epsilon (\alpha_\epsilon \epsilon b)' \right) \|\boldsymbol{\tau}\| \alpha_\epsilon^{-1} d\hat{\omega} \\
&- \int_{\hat{\omega}} \sigma_\epsilon^{11} \left(\|\boldsymbol{\tau}\|' \theta \frac{\partial u_1^\epsilon}{\partial \zeta_1} - [\|\boldsymbol{\tau}\| (\mathbf{e}^1 \cdot \boldsymbol{\tau}') \theta]' u_1^\epsilon - [\|\boldsymbol{\tau}\|^3 b \theta]' u_2^\epsilon \right) d\hat{\omega} \\
&- \int_{\hat{\omega}} \sigma_\epsilon^{12} \left(\frac{\partial u_1^\epsilon}{\partial \zeta_2} [\alpha_\epsilon^{-1} \|\boldsymbol{\tau}\| \theta]' + \|\boldsymbol{\tau}\|' \theta \frac{\partial u_2^\epsilon}{\partial \zeta_1} + [\epsilon b \|\boldsymbol{\tau}\| \theta]' u_1^\epsilon \right) d\hat{\omega} \\
&- \int_{\hat{\omega}} \sigma_\epsilon^{22} [\alpha_\epsilon^{-1} \|\boldsymbol{\tau}\| \theta]' \frac{\partial u_2^\epsilon}{\partial \zeta_2} d\hat{\omega} \tag{3.61}
\end{aligned}$$

avec $\alpha_\epsilon = \frac{1}{1 - C \epsilon \zeta_2} = \frac{1}{1 - b \epsilon^2 \zeta_2}$ et $\alpha'_\epsilon = C' \epsilon \zeta_2 \alpha_\epsilon^2 = b' \epsilon^2 \zeta_2 \alpha_\epsilon^2$. Utilisant les résultats de convergence (3.55), déterminons la limite de l'expression précédente. La dernière intégrale se traite de la même façon que l'énergie et converge vers zéro. Sans difficulté, la première intégrale converge vers $\int_{\hat{\omega}} \hat{S}'_{1111} \theta (\sigma_0^{11})^2 \|\boldsymbol{\tau}\| d\hat{\omega}$. La seconde intégrale converge vers :

$$- \int_{\hat{\omega}} \sigma_0^{11} \left[\frac{\partial \theta}{\partial \zeta_1} \frac{\partial u_1^0}{\partial \zeta_1} + [(\mathbf{e}^1 \cdot \boldsymbol{\tau}')]' \theta u_1^0 + (b \|\boldsymbol{\tau}\|^2)' \theta u_2^0 \right] \|\boldsymbol{\tau}\| d\hat{\omega} .$$

La quatrième intégrale ne pose pas de difficulté également. Les deux derniers termes de la troisième intégrale convergent vers zéro et il en est de même pour la dernière partie de la cinquième intégrale.

Le résultat intermédiaire est le suivant :

$$\begin{aligned}
2\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{-1} \hat{g}^\epsilon(\boldsymbol{\theta}) &= \int_{\hat{\omega}} T_1' \theta (\sigma_0^{11})^2 \|\boldsymbol{\tau}\| d\hat{\omega} \\
&+ \int_{\hat{\omega}} \sigma_0^{11} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \zeta_1} \frac{\partial u_1^0}{\partial \zeta_1} + [(\mathbf{e}^1 \cdot \boldsymbol{\tau}')]' \theta u_1^0 + (b \|\boldsymbol{\tau}\|^2)' \theta u_2^0 \right) \|\boldsymbol{\tau}\| d\hat{\omega} \\
&- \int_{\hat{\omega}} \sigma_0^{11} \left(\|\boldsymbol{\tau}\|' \theta \frac{\partial u_1^0}{\partial \zeta_1} - [\|\boldsymbol{\tau}\| (\mathbf{e}^1 \cdot \boldsymbol{\tau}') \theta]' u_1^0 - [\|\boldsymbol{\tau}\|^3 b \theta]' u_2^0 \right) d\hat{\omega} \\
&- \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\hat{\omega}} \sigma_\epsilon^{12} \frac{\partial u_2^\epsilon}{\partial \zeta_1} (\alpha'_\epsilon \alpha_\epsilon^{-1} \theta - \theta') \|\boldsymbol{\tau}\| d\hat{\omega} \\
&- \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\hat{\omega}} \sigma_\epsilon^{12} \left(\frac{\partial u_1^\epsilon}{\partial \zeta_2} [\alpha_\epsilon^{-1} \|\boldsymbol{\tau}\| \theta]' + \|\boldsymbol{\tau}\|' \theta \frac{\partial u_2^\epsilon}{\partial \zeta_1} \right) d\hat{\omega}. \tag{3.62}
\end{aligned}$$

Or $\alpha'_\epsilon \alpha_\epsilon^{-1} = b' \zeta_2 \epsilon^2 \alpha_\epsilon$ et l'intégrale associée converge vers zéro de sorte qu'il reste à étudier la limite suivante :

$$-\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\hat{\omega}} \sigma_\epsilon^{12} \left(\frac{\partial u_1^\epsilon}{\partial \zeta_2} [\alpha_\epsilon^{-1} \|\boldsymbol{\tau}\| \theta]' + (\|\boldsymbol{\tau}\|' \theta - \|\boldsymbol{\tau}\| \theta') \frac{\partial u_2^\epsilon}{\partial \zeta_1} \right) d\hat{\omega}. \tag{3.63}$$

Les passages à la limite restants sont délicats : la contrainte de cisaillement σ_ϵ^{12} subit une perte de régularité par passage à la limite et σ_0^{12} est une distribution, de sorte que le produit $\sigma_0^{12} \frac{\partial u_2^0}{\partial \zeta_1}$ n'a pas de sens, compte tenu de la régularité de chacun des termes. Pour résoudre ce problème, reprenons la technique du type compacité par compensation utilisée dans [NEVERS (1986), chapitre 3]. Le manque de régularité de la contrainte de cisaillement est compensé par le fait qu'elle vérifie les équations d'équilibre. Démontrons les résultats suivants :

LEMME 1 – Pour toute fonction $f : [\zeta_1^I, \zeta_1^S] \rightarrow \mathbb{R}$ régulière, nous avons :

$$\boxed{\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\hat{\omega}} \sigma_\epsilon^{12} \frac{\partial u_2^\epsilon}{\partial \zeta_1} f(\zeta_1) d\hat{\omega} = -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\hat{\omega}} \sigma_\epsilon^{12} \frac{\partial u_1^\epsilon}{\partial \zeta_2} \alpha_\epsilon^{-1} f(\zeta_1) d\hat{\omega}.} \tag{3.64}$$

– Pour toute fonction régulière $h : [\zeta_1^I, \zeta_1^S] \rightarrow \mathbb{R}$ identiquement nulle sur $[\zeta_1^I, \zeta_1^S] \cap \Gamma_f$, Γ_f -support des forces appliquées, nous avons :

$$\boxed{\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\hat{\omega}} \sigma_\epsilon^{12} \frac{\partial u_1^\epsilon}{\partial \zeta_2} h(\zeta_1) d\hat{\omega} = -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\hat{\omega}} \sigma_\epsilon^{11} \|\boldsymbol{\tau}\|^2 \frac{\partial}{\partial \zeta_1} \left(\frac{h(\zeta_1)}{\|\boldsymbol{\tau}\|^2} u_1^\epsilon \right) d\hat{\omega}.} \tag{3.65}$$

■

Preuve du lemme : Pour obtenir la première relation, nous utilisons l'égalité :

$$2\hat{S}_{1212} \sigma_\epsilon^{12} = \frac{\partial u_1^\epsilon}{\partial \zeta_2} + \alpha_\epsilon \left(C u_1^\epsilon + \frac{\partial u_2^\epsilon}{\partial \zeta_1} \right). \tag{3.66}$$

Après multiplication par la quantité $\alpha_\epsilon^{-1} f(\zeta_1) \sigma_\epsilon^{12}$, intégration sur l'ouvert $\hat{\omega}$ puis passage sur l'ouvert dilaté, il vient :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\hat{\omega}} \sigma_\epsilon^{12} \frac{\partial u_2^\epsilon}{\partial \zeta_1} f(\zeta_1) d\hat{\omega} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\hat{\omega}} \left[2\hat{S}_{1212} (\epsilon \sigma_\epsilon^{12})^2 \alpha_\epsilon^{-1} - \epsilon \sigma_\epsilon^{12} C u_1^\epsilon - \sigma_\epsilon^{12} \frac{\partial u_1^\epsilon}{\partial \zeta_2} \alpha_\epsilon^{-1} \right] f(\zeta_1) d\hat{\omega} \tag{3.67}$$

ce qui permet de conclure. Pour obtenir la seconde relation, soit dans l'équation d'équilibre (3.20)₂ une fonction $\mathbf{v} = (v_1, 0)$ dont le support n'intersecte pas Γ_f . La fonction v_1 vérifie alors :

$$\int_{\hat{\omega}} \left(\sigma_\epsilon^{11} \|\boldsymbol{\tau}\|^2 (v_1 \|\boldsymbol{\tau}\|^{-1})' + \sigma_\epsilon^{12} \|\boldsymbol{\tau}\| \left(\alpha_\epsilon^{-1} \frac{\partial v_1}{\partial \zeta_2} + C v_1 \right) \right) d\hat{\omega} = 0 \quad (3.68)$$

ce qui donne alors après passage sur l'ouvert dilaté et arguments habituels :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\hat{\omega}} \sigma_\epsilon^{12} \frac{\partial v_1}{\partial \zeta_2} \|\boldsymbol{\tau}\| d\hat{\omega} = -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\hat{\omega}} \sigma_\epsilon^{11} \|\boldsymbol{\tau}\|^2 \frac{\partial}{\partial \zeta_1} \left(\frac{1}{\|\boldsymbol{\tau}\|} v_1 \right) d\hat{\omega}. \quad (3.69)$$

Il suffit alors de prendre $v_1 = u_1^\epsilon h(\zeta_1) \|\boldsymbol{\tau}\|^{-1}$ qui n'intersecte pas Γ_f par hypothèse sur h et de se rappeler que la norme du vecteur tangent ne dépend pas de ζ_2 . ■

Utilisons maintenant la première relation dans (3.63) avec $f(\zeta_1) = \|\boldsymbol{\tau}\|' \theta - \|\boldsymbol{\tau}\| \theta'$, soit :

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\hat{\omega}} \sigma_\epsilon^{12} \left((\|\boldsymbol{\tau}\|' \theta - \|\boldsymbol{\tau}\| \theta') \alpha_\epsilon^{-1} - [\alpha_\epsilon^{-1} \|\boldsymbol{\tau}\| \theta]' \right) \frac{\partial u_1^\epsilon}{\partial \zeta_2} d\hat{\omega} \\ = -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\hat{\omega}} \sigma_\epsilon^{12} \left(2\alpha_\epsilon^{-1} \|\boldsymbol{\tau}\| \theta' - (\alpha_\epsilon^{-1})' \|\boldsymbol{\tau}\| \theta \right) \frac{\partial u_1^\epsilon}{\partial \zeta_2} d\hat{\omega} = -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\hat{\omega}} 2\sigma_\epsilon^{12} \|\boldsymbol{\tau}\| \theta' \frac{\partial u_1^\epsilon}{\partial \zeta_2} d\hat{\omega} \end{aligned} \quad (3.70)$$

Pour conclure, nous utilisons la seconde relation avec $h(\zeta_1) = \|\boldsymbol{\tau}\| \theta'$ qui convient ; en effet la pointe de fissure est supposée non chargée et θ est défini sur un voisinage arbitrairement petit de celle-ci. Cela entraîne :

$$-\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\hat{\omega}} 2\sigma_\epsilon^{12} \|\boldsymbol{\tau}\| \theta' \frac{\partial u_1^\epsilon}{\partial \zeta_2} d\hat{\omega} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\hat{\omega}} 2\sigma_\epsilon^{11} \frac{\partial}{\partial \zeta_1} \left(\|\boldsymbol{\tau}\|^{-1} \theta' u_1^\epsilon \right) \|\boldsymbol{\tau}\|^2 d\hat{\omega} \quad (3.71)$$

et finalement, la dernière limite ne posant plus de problème :

$$\begin{aligned} 2\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{-1} \hat{g}^\epsilon(\boldsymbol{\theta}) &= \int_{\hat{\omega}} \hat{S}'_{1111} \theta (\sigma_0^{11})^2 \|\boldsymbol{\tau}\| d\hat{\omega} + \int_{\hat{\omega}} 2\sigma_0^{11} \frac{\partial}{\partial \zeta_1} \left(\|\boldsymbol{\tau}\|^{-1} \theta' u_1^0 \right) \|\boldsymbol{\tau}\|^2 d\hat{\omega} \\ &+ \int_{\hat{\omega}} \sigma_0^{11} \left[\frac{\partial \theta}{\partial \zeta_1} \frac{\partial u_1^0}{\partial \zeta_1} + [(\mathbf{e}^1 \cdot \boldsymbol{\tau}')]' \theta u_1^0 + (b \|\boldsymbol{\tau}\|^2)' \theta u_2^0 \right] \|\boldsymbol{\tau}\| d\hat{\omega} \\ &- \int_{\hat{\omega}} \sigma_0^{11} \left(\|\boldsymbol{\tau}\|' \theta \frac{\partial u_1^0}{\partial \zeta_1} - [\|\boldsymbol{\tau}\| (\mathbf{e}^1 \cdot \boldsymbol{\tau}') \theta]' u_1^0 - [\|\boldsymbol{\tau}\|^3 b \theta]' u_2^0 \right) d\hat{\omega}. \end{aligned} \quad (3.72)$$

REMARQUE(S) 9 *A nouveau, nous prenons soin de vérifier que cette relation généralise celle du cas plan :*

$$2g(\boldsymbol{\theta}) = \int_{\omega} \sigma_0^{11} \frac{\partial u_1^0}{\partial \zeta_1} \frac{\partial \theta}{\partial \zeta_1} d\omega + 2 \int_{\omega} \sigma_0^{11} \frac{\partial}{\partial \zeta_1} \left(u_1^0 \frac{\partial \theta}{\partial \zeta_1} \right) d\omega. \quad (3.73)$$

■

Pour conclure, il reste à déterminer le taux de restitution associé au modèle simplifié, dans le cas faiblement courbé dont l'énergie est donnée par (3.51). Il est inutile de reprendre tous les calculs : pour obtenir l'expression souhaitée, il suffit de prendre dans l'expression générale (3.33), après

écriture sur l'ouvert dilaté, $\sigma_\epsilon^{\alpha 2} = 0$, $\sigma_\epsilon^{11} = \sigma_0^{11}$, $u_2^\epsilon = 0$ et $\alpha_\epsilon = 1$. L'expression obtenue diffère de (3.72) seulement par le terme $2 \int_{\hat{\omega}} \sigma_0^{11} \frac{\partial}{\partial \zeta_1} \left(\|\boldsymbol{\tau}\|^{-1} \theta' u_1^0 \right) \|\boldsymbol{\tau}\|^2 d\hat{\omega}$, terme qui est nul. Il suffit pour le voir de prendre $\boldsymbol{v} = (u_1^0 \theta', 0)$, dans l'équation d'équilibre du modèle limite :

$$\int_{\hat{\omega}} \sigma_0^{11} \left(\|\boldsymbol{\tau}\| (\|\boldsymbol{\tau}\|^{-1} v_1)' - b \|\boldsymbol{\tau}\|^2 v_2 \right) \|\boldsymbol{\tau}\| d\hat{\omega} = \hat{l}_{f_0}(\boldsymbol{v}) \quad \forall \boldsymbol{v} \in V(\hat{\omega}) \quad (3.74)$$

et le théorème 3 est démontré. ■

Ainsi, lorsque ϵ est petit, le taux de restitution associé au modèle limite est bien la quantité qu'il convient de prendre. Enfin, identifiant pour ϵ suffisamment petit u_1^0 et σ_0^{11} à u_1^ϵ et à σ_ϵ^{11} (dans un sens $L^2(\hat{\omega})$), puis en utilisant les relations inverses de (3.37), le taux de restitution simplifié est :

$$\begin{aligned} 2\hat{g}(\boldsymbol{\theta}) &= \int_{\hat{\omega}} \hat{S}'_{1111} \theta (\sigma^{11})^2 \|\boldsymbol{\tau}\| d\hat{\omega} \\ &+ \int_{\hat{\omega}} \sigma^{11} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \zeta_1} \frac{\partial u_1}{\partial \zeta_1} + [(\boldsymbol{e}^1 \cdot \boldsymbol{\tau}')]' \theta u_1 + (C \|\boldsymbol{\tau}\|^2)' \theta u_2 \right) \|\boldsymbol{\tau}\| d\hat{\omega} \\ &- \int_{\hat{\omega}} \sigma^{11} \left(\|\boldsymbol{\tau}\|' \theta \frac{\partial u_1}{\partial \zeta_1} - [\|\boldsymbol{\tau}\| (\boldsymbol{e}^1 \cdot \boldsymbol{\tau}') \theta]' u_1 - [\|\boldsymbol{\tau}\|^3 C \theta]' u_2 \right) d\hat{\omega}. \end{aligned} \quad (3.75)$$

3.4 Modèles limites

L'analyse asymptotique précédente met en évidence des modèles limites de poutres, suivant l'ordre de la courbure. Utilisons ces modèles pour construire des modèles de poutres fissurées. Dans cette section, le paramètre ϵ , représentant l'épaisseur de la structure est supposé petit devant l'unité. De façon classique [NEVERS (1986), COCHELIN & POTIER-FERRY (1991), PRADEILLES-DUVAL (1992)], la structure fissurée est modélisée à l'aide d'un assemblage de trois poutres raccordées en fond de fissure (voir figure 3.4). Nous commençons par reprendre le modèle de Bernoulli-Euler-Navier, puis le modèle de Timoshenko.

3.4.1 Modèle de Bernoulli-Euler-Navier

C'est le modèle limite retrouvé via l'analyse asymptotique du paragraphe précédent. Les déformations normale et de cisaillement sont annulées :

$$\gamma_{\alpha 2} \approx 0 \quad \alpha = 1, 2. \quad (3.76)$$

Dans chaque poutre $\hat{\omega}_i$, le champ cinématique est de la forme :

$$u_1^i(\zeta_1, \zeta_2) = (1 - C\zeta_2) \bar{u}_1^i(\zeta_1) - \zeta_2 \bar{u}_2^i(\zeta_1) \quad ; \quad u_2^i(\zeta_1, \zeta_2) = \bar{u}_2^i(\zeta_1) \quad (3.77)$$

et doit vérifier les conditions de raccords en pointe de fissure :

$$\begin{cases} \bar{u}_1^1(\zeta_1^F) = \bar{u}_1^2(\zeta_1^F) = \bar{u}_1^3(\zeta_1^F), \\ \bar{u}_2^1(\zeta_1^F) = \bar{u}_2^2(\zeta_1^F) = \bar{u}_2^3(\zeta_1^F), \\ (\bar{u}_2^1)'(\zeta_1^F) = (\bar{u}_2^2)'(\zeta_1^F) = (\bar{u}_2^3)'(\zeta_1^F). \end{cases} \quad (3.78)$$

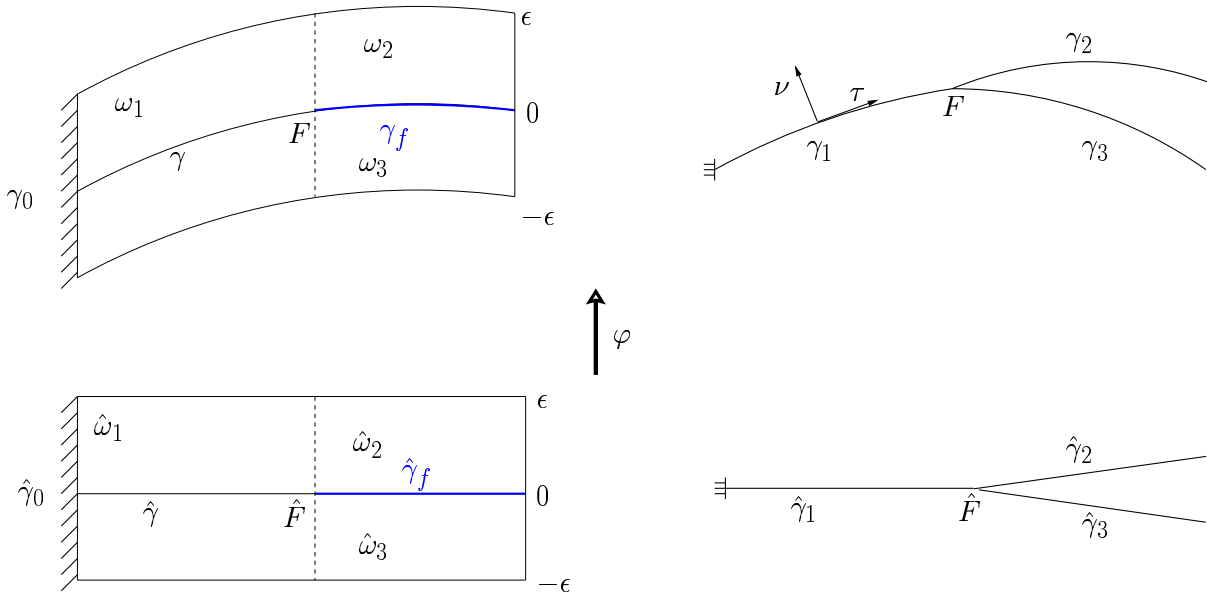


FIG. 3.4: Modélisation de la poutre ω fissurée par assemblage de trois poutres ω_i saines (gauche) et représentations limites (droite).

Dans le cas isotrope, cela entraîne $\sigma_{12} = 0$ puis :

$$\gamma_{11}(\mathbf{u}) = \left(\hat{S}_{1111} - \frac{\hat{S}_{1122}}{\hat{S}_{2222}} \right) \sigma^{11} = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E(1-\nu)} \|\boldsymbol{\tau}\|^4 \sigma^{11} \equiv T_1 \sigma^{11}. \quad (3.79)$$

La déformation tangentielle γ_{11} se transforme alors selon $\gamma_{11}(\mathbf{u}) = \frac{\gamma(\bar{\mathbf{u}})}{1-C\zeta_2} + \frac{\zeta_2}{1-C\zeta_2} \rho(\bar{\mathbf{u}})$ avec

$$\boxed{\gamma(\bar{\mathbf{u}}) = \|\boldsymbol{\tau}\| \left(\|\boldsymbol{\tau}\|^{-1} \bar{u}_1 \right)' - C \|\boldsymbol{\tau}\|^2 \bar{u}_2 \quad ; \quad \rho(\bar{\mathbf{u}}) = -\|\boldsymbol{\tau}\| \left(\|\boldsymbol{\tau}\|^{-1} (C \bar{u}_1 + \bar{u}_2) \right)'} \quad (3.80)$$

et la formulation variationnelle (3.20) se réduit à :

$$\begin{cases} \int_{\hat{\omega}} T_1 \sigma^{11} \tau^{11} d\hat{\omega} = \int_{\hat{\omega}} \gamma_{11}(\mathbf{u}) \tau^{11} d\hat{\omega} & \forall \tau^{11} \in L^2(\hat{\omega}), \\ \int_{\hat{\omega}} \frac{1}{1-C\zeta_2} \sigma^{11} (\gamma(\bar{\mathbf{v}}) + \zeta_2 \rho(\bar{\mathbf{v}})) (1-C\zeta_2) \|\boldsymbol{\tau}\| d\hat{\omega} = \hat{l}_f(\mathbf{v}) & \forall \mathbf{v} \in V(\hat{\omega}). \end{cases} \quad (3.81)$$

L'approximation choisie pour la quantité $(1-C\zeta_2)^{-1}$, selon la courbure de la structure, conduit à différents modèles. Notons que dans le cas simplifié bidimensionnel, ce terme ne pose pas de difficulté dans l'équation d'équilibre. Nous rappelons quelles sont les approximations utilisées usuellement puis donnons deux méthodes pour obtenir un modèle valable quelle que soit la valeur relative de la courbure vérifiant $1-C\zeta_2 > 0$. Par analogie avec le cas des coques [DESTUYNDER (1990)], nous introduisons respectivement l'effort résultant $n_i = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \sigma^{11} (1-C\zeta_2) d\zeta_2$ et le moment de flexion $m_i = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \sigma^{11} \zeta_2 (1-C\zeta_2) d\zeta_2$ associés à la poutre $\hat{\omega}_i$ soit ¹³, posant $(R_i^T, R_i^C, R_i^F) =$

¹³Il y a d'autres façons de procéder ; par exemple, en posant $(n_i, m_i) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \sigma^{11} (1, \zeta_2) d\zeta_2$ mais l'expression finale n'est pas plus simple.

$$\int_{h_i^-}^{h_i^+} T_1^{-1}(1, \zeta_2, \zeta_2^2) d\zeta_2 :$$

$$\begin{cases} n_i = R_i^T \gamma(\bar{\mathbf{u}}) + R_i^C \rho(\bar{\mathbf{u}}) , \\ m_i = R_i^C \gamma(\bar{\mathbf{u}}) + R_i^F \rho(\bar{\mathbf{u}}) , \end{cases} \quad (3.82)$$

h_i^- et h_i^+ désignent respectivement les cotes inférieure et supérieure suivant ζ_2 de la poutre $\hat{\omega}_i$.

MODÈLE D'ORDRE 1

Nous réalisons alors l'approximation d'ordre 1 suivante $(1 - C\zeta_2)^{-1} \approx 1 + C\zeta_2$ ce qui entraîne $\gamma_{11}(\mathbf{u}) \approx \gamma(\bar{\mathbf{u}}) + \zeta_2(C\gamma(\bar{\mathbf{u}}) + \rho(\bar{\mathbf{u}})) \equiv \gamma(\bar{\mathbf{u}}) + \zeta_2\hat{\rho}(\bar{\mathbf{u}})$ avec :

$$\boxed{\hat{\rho}(\bar{\mathbf{u}}) = -\|\boldsymbol{\tau}\|(\|\boldsymbol{\tau}\|^{-1}\bar{u}_2)' - C^2\|\boldsymbol{\tau}\|^2\bar{u}_2 - C'\bar{u}_1 ;} \quad (3.83)$$

γ est appelée la déformation axiale et $\hat{\rho}$ la déformation de courbure. L'équation d'équilibre prend alors la forme suivante :

$$\int_{\hat{\gamma}} \left[n\gamma(\bar{\mathbf{v}}) + m\hat{\rho}(\bar{\mathbf{v}}) \right] \|\boldsymbol{\tau}\| d\zeta_1 = \hat{l}_f(\bar{\mathbf{v}}) \quad \forall \bar{\mathbf{v}} \in V(\hat{\gamma}) , \quad (3.84)$$

tandis que l'équation de comportement prend la forme : ¹⁴

$$\int_{\hat{\gamma}} \left[(S^T n + S^C m)p + (S^C n + S^F m)q \right] d\zeta_1 = \int_{\hat{\gamma}} \left[p\gamma(\bar{\mathbf{u}}) + q\rho(\bar{\mathbf{u}}) \right] d\zeta_1 \quad \forall (p, q) \in L^2(\hat{\gamma}) \quad (3.86)$$

en notant :

$$\begin{pmatrix} S_i^T & S_i^C \\ S_i^C & S_i^F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_i^T & R_i^C \\ R_i^C & R_i^F \end{pmatrix}^{-1}, \quad \hat{\gamma} = \bigcup_{i=1}^3 \hat{\gamma}_i, \quad V(\hat{\gamma}) = V_1 \times V_2$$

et :

$$V_1 = \left\{ \bar{v}_1; \bar{v}_1|_{\hat{\gamma}_i} \in H^1(\hat{\gamma}_i); \bar{v}_1(\zeta_1^G) = 0 \text{ et } \bar{v}_1 \text{ continu en } \hat{F} \right\}$$

$$V_2 = \left\{ \bar{v}_2; \bar{v}_2|_{\hat{\gamma}_i} \in H^2(\hat{\gamma}_i); \bar{v}_2(\zeta_1^G) = \bar{v}_2'(\zeta_1^G) = 0 ; \quad \bar{v}_2 \text{ et } \bar{v}_2' \text{ continus en } \hat{F} \right\}.$$

La formulation variationnelle conduit aux équations d'équilibre locales sur $\hat{\gamma}_i$:

$$\begin{cases} (n_i \|\boldsymbol{\tau}\|^2)' + m_i C' \|\boldsymbol{\tau}\|^2 = 0 , \\ \left((m_i \|\boldsymbol{\tau}\|^2)' \|\boldsymbol{\tau}\|^{-1} \right)' + m_i C^2 \|\boldsymbol{\tau}\|^3 + n_i C \|\boldsymbol{\tau}\|^3 = 0 \end{cases} \quad (3.87)$$

¹⁴ou alors en jouant sur le pour tout p , pour tout q , et en vue d'une utilisation de la θ -méthode,

$$\int_{\hat{\gamma}} \left[(S^T n + S^C m)p + (\hat{S}^C n + \hat{S}^F m)q \right] d\zeta_1 = \int_{\hat{\gamma}} \left[p\gamma(\bar{\mathbf{u}}) + q\hat{\rho}(\bar{\mathbf{u}}) \right] d\zeta_1 \quad \forall (p, q) \in L^2(\hat{\gamma}) \quad (3.85)$$

notant $\hat{S}^C = S^C + CS^T$ et $\hat{S}^F = S^F + CS^C$.

et pour une interface régulière, aux conditions de raccord en \hat{F} :

$$[[n]] = [[m]] = [[m']] = 0 \quad ; \quad [[f]] = f_1 - f_2 - f_3, \quad f_i = f_{\hat{\gamma}_i}. \quad (3.88)$$

Le modèle précédent est un modèle d'ordre 1. [MÜNCH & OUSSET (2000)] présentent un modèle un peu plus pauvre où si $(1 - C\zeta_2)^{-1}$ reste approché par $1 + C\zeta_2$, le déterminant de la transformation $1 - C\zeta_2$ est approché quant à lui par 1.

MODÈLE D'ORDRE INFINI

Voici deux façons d'obtenir un modèle unidimensionnel de poutre valable pour une courbure arbitraire. Une première voie est d'écrire :

$$(1 - C\zeta_2)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (C\zeta_2)^j \quad (|C\zeta_2| < 1, \forall \zeta_2 \in [-\epsilon, \epsilon]) \quad (3.89)$$

puis

$$\frac{1}{1 - C\zeta_2} [\gamma(\bar{\mathbf{u}}) + \zeta_2 \rho(\bar{\mathbf{u}})] = \gamma(\bar{\mathbf{u}}) + \sum_{j=1}^{\infty} \zeta_2^j C^{j-1} \hat{\rho}(\bar{\mathbf{u}}). \quad (3.90)$$

Définissant alors $m^{(j)} = \int_{h^-}^{h^+} \sigma^{11} (1 - C\zeta_2) \zeta_2^j d\zeta_2$, il vient $m^{(j)} = \gamma(\bar{\mathbf{u}}) R^{(j)} + \rho(\bar{\mathbf{u}}) R^{(j+1)}$ avec $R^{(j)} = \int_{h^-}^{h^+} T_1^{-1} \zeta_2^j d\zeta_2$ et l'équation d'équilibre s'écrit :

$$\int_{\hat{\gamma}} \left(n\gamma(\bar{\mathbf{v}}) + \left[\sum_{j=1}^{\infty} m^{(j)} C^{j-1} \right] \hat{\rho}(\bar{\mathbf{v}}) \right) \|\boldsymbol{\tau}\| d\hat{\gamma} = \hat{l}_f(\bar{\mathbf{v}}) \quad \forall \bar{\mathbf{v}} \in V(\hat{\gamma}). \quad (3.91)$$

Il suffit donc pour obtenir un modèle d'ordre i de remplacer m par $\sum_{j=1}^i m^{(j)} C^{j-1}$ dans les équations d'équilibre. Une seconde voie plus simple (étendue au cas tridimensionnel dans [ANICIC & LÉGER (2000)]) consiste à placer le terme $(1 - C\zeta_2)^{-1}$ dans la définition des constantes R_i^T, R_i^C et R_i^F soit :

$$(R_i^T, R_i^C, R_i^F) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} [T_1(1 - C\zeta_2)]^{-1} (1, \zeta_2, \zeta_2^2) d\zeta_2 \quad (3.92)$$

et¹⁵ la formulation variationnelle s'écrit simplement :

$$\begin{cases} \int_{\hat{\gamma}} \left((S^T n + S^C m)p + (S^C n + S^F m)q \right) d\zeta_1 = \int_{\hat{\gamma}} \left(p\gamma(\bar{\mathbf{u}}) + q\rho(\bar{\mathbf{u}}) \right) d\zeta_1 & \forall (p, q) \in L^2(\hat{\gamma}), \\ \int_{\hat{\gamma}} \left(n\gamma(\bar{\mathbf{v}}) + m\rho(\bar{\mathbf{v}}) \right) \|\boldsymbol{\tau}\| d\zeta_1 = \hat{l}_f(\bar{\mathbf{v}}) & \forall \bar{\mathbf{v}} \in V(\hat{\gamma}) \end{cases} \quad (3.93)$$

avec $(n_i, m_i) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \sigma^{11} (1, \zeta_2) d\zeta_2$ et les équations d'équilibres sont :

$$\begin{cases} (n_i \|\boldsymbol{\tau}\|^2)' - (m_i \|\boldsymbol{\tau}\|^2)' C = 0, \\ n_i C \|\boldsymbol{\tau}\|^3 + \left((m_i \|\boldsymbol{\tau}\|^2)' \|\boldsymbol{\tau}\|^{-1} \right) = 0 \end{cases} \quad (3.94)$$

¹⁵Pour mémoire, $\int \frac{\zeta}{1-C\zeta} d\zeta = -\frac{\zeta}{C} - \frac{1}{C^2} \ln(1 - C\zeta)$ et $\int \frac{\zeta^2}{1-C\zeta} d\zeta = -\frac{\zeta^2}{2C} - \frac{\zeta}{C^2} - \frac{1}{C^3} \ln(1 - C\zeta)$, $0 < |C\zeta| < 1$

auxquelles nous rajoutons les conditions de raccord en \hat{F} :

$$[[n - mC]] = [[m]] = [[m']] = 0, \quad (3.95)$$

équivalentes à (3.88) dans le cas d'une interface régulière. Énonçons pour conclure le résultat suivant :

THÉORÈME 4 *Le taux de restitution associé à l'énergie limite s'exprime en pointe de fissure selon la forme :*

$$\hat{g}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2} \left([[n \frac{d\bar{u}_1}{d\zeta_1}]] + [[m \frac{d^2\bar{u}_2}{d\zeta_1^2}]] \right) \|\boldsymbol{\tau}\|(\hat{F})\boldsymbol{\theta}(\hat{F}). \quad (3.96)$$

■

Preuve : Bien que considérablement plus lourde que dans le cas rectiligne, la preuve est classique. Il faut commencer par exprimer ce taux dans un voisinage de la pointe de fissure, puis se ramener à \hat{F} en utilisant les relations de saut et d'équilibre. Dans le cas courbe, une difficulté apparaît en raison de la présence de la quantité $T'_1 = K(E, \nu)(\|\boldsymbol{\tau}\|^4)'$ (K désigne une fonction de E et ν). Par exemple, dans le cas isotrope, nous la réécrivons selon $T'_1 = 4\mathbf{e}^1 \cdot \boldsymbol{\tau}' T_1$ ce qui entraîne la relation (voir [MÜNCH & OUSSET (2000)]) :

$$n' \gamma(\mathbf{u}) + m' \rho(\mathbf{u}) = n\gamma'(\mathbf{u}) + m\rho'(\mathbf{u}) - 4\mathbf{e}^1 \cdot \boldsymbol{\tau}'(n\gamma(\mathbf{u}) + m\rho(\mathbf{u})). \quad (3.97)$$

L'expression (3.96) nous rappelle que le taux de restitution est une mesure de la discontinuité des différents champs cinématiques au passage de $\zeta_1 = \zeta_1^F$. ■

REMARQUE(S) 10 (Régularité de la carte ϕ) *L'expression (3.96) du taux en pointe de fissure \hat{F} impose à la carte ϕ une régularité $C^3(\hat{\gamma})$ tandis que l'expression de ce même taux exprimée sur $\hat{\gamma}$ [MÜNCH & OUSSET (2000), eq. (11)] impose une régularité $C^4(\hat{\gamma})$.* ■

3.4.2 Modèle de Timoshenko

Le modèle de Timoshenko relâche l'hypothèse sur la déformation de cisaillement mais conserve (arbitrairement) un déplacement tangentiel linéaire selon l'épaisseur :

$$u_1^i(\zeta_1, \zeta_2) = \bar{u}_1^i(\zeta_1, \zeta_2) + \zeta_2 \mu^i(\zeta_1) \quad ; \quad u_2^i(\zeta_1, \zeta_2) = \bar{u}_2^i(\zeta_1) \quad (3.98)$$

et les conditions de raccord en pointe de fissure \hat{F} deviennent :

$$\begin{cases} \bar{u}_\alpha^1(\zeta_1^F) = \bar{u}_\alpha^2(\zeta_1^F) = \bar{u}_\alpha^3(\zeta_1^F), \\ \mu^1(\zeta_1^F) = \mu^2(\zeta_1^F) = \mu^3(\zeta_1^F). \end{cases} \quad (3.99)$$

Il vient alors :

$$\begin{cases} \gamma_{11}(\mathbf{u}) = (1 - C\zeta_2)^{-1} \left(\gamma(\bar{\mathbf{u}}) + \zeta_2 \rho(\bar{\boldsymbol{\mu}}) \right), \\ 2\gamma_{12}(\mathbf{u}) = (1 - C\zeta_2)^{-1} \left(\boldsymbol{\mu} + \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_2}{\partial \zeta_1} + C\bar{\mathbf{u}}_1 \right) \equiv (1 - C\zeta_2)^{-1} \alpha(\bar{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\mu}). \end{cases} \quad (3.100)$$

$\gamma(\mathbf{u})$ est inchangé et $\rho(\mathbf{u})$ devient $\rho(\mu) = \mu' - \mathbf{e}^1 \cdot \boldsymbol{\tau}' \mu = \|\boldsymbol{\tau}\| \frac{d}{d\zeta_1} (\|\boldsymbol{\tau}\|^{-1} \mu)$ ¹⁶. Nous restons dans le cas isotrope et notons $T_4 = \frac{2(1+\nu)}{E} \|\boldsymbol{\tau}\|^2$. De la même façon que précédemment, soit $(R_i^M, R_i^{M_1}) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} T_4^{-1}(1, \zeta_2) d\zeta_2$ et $(t_i, \tilde{t}_i) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \sigma^{12}(1, \zeta_2)(1 - C\zeta_2) d\zeta_2$ ce qui entraîne $(t_i, \tilde{t}_i) = \alpha(\bar{\mathbf{u}}, \mu)(R_i^M, R_i^{M_1})$. Dans l'équation d'équilibre, il apparaît le terme supplémentaire $\int_{\hat{\omega}} 2\sigma^{12}\gamma_{12}(1 - C\zeta_2)\|\boldsymbol{\tau}\| d\hat{\omega}$ que nous approximations au premier ordre par :

$$\int_{\hat{\omega}} \sigma^{12}(\alpha(\bar{\mathbf{u}}) + C\zeta_2\alpha(\bar{\mathbf{u}}, \mu))(1 - C\zeta_2)\|\boldsymbol{\tau}\| d\hat{\omega} \approx \int_{\hat{\gamma}} [\alpha(\bar{\mathbf{u}}, \mu)t + C\alpha(\bar{\mathbf{u}}, \mu)\tilde{t}]\|\boldsymbol{\tau}\| d\hat{\gamma}. \quad (3.101)$$

A titre d'exemple, l'énergie de la structure associée à un tel modèle s'écrit :

$$\hat{I}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{\hat{\gamma}} \left[n_i \gamma(\bar{\mathbf{u}}) + m_i \hat{\rho}(\mu) + t_i \alpha(\bar{\mathbf{u}}) \bar{\Delta}_i \right] \|\boldsymbol{\tau}\| d\hat{\gamma} - \hat{l}_f(\bar{\mathbf{u}}) \quad (3.102)$$

avec $\bar{\Delta}_i = 1 + C \frac{R_i^{M_1}}{R_i^M}$. Le champ cinématique $\mathbf{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \mu)$ est cherché dans $V_1 \times V_1 \times V_1$. Les équations d'équilibre sur $\hat{\omega}_i$ s'écrivent :

$$\begin{cases} -(n_i \|\boldsymbol{\tau}\|^2)' - (m_i C \|\boldsymbol{\tau}\|^2)' + t_i \bar{\Delta}_i \|\boldsymbol{\tau}\|^2 C = 0, \\ C \|\boldsymbol{\tau}\|^3 n_i + C^2 \|\boldsymbol{\tau}\|^3 m_i + (t_i \|\boldsymbol{\tau}\| \bar{\Delta}_i)' = 0, \\ -(\|\boldsymbol{\tau}\|^2 m_i)' + t_i \|\boldsymbol{\tau}\|^2 \bar{\Delta}_i = 0 \end{cases} \quad (3.103)$$

et aussi, en éliminant l'effort tranchant :

$$\begin{cases} (n_i \|\boldsymbol{\tau}\|^2)' + m_i C' \|\boldsymbol{\tau}\|^2 = 0, \\ \left((m_i \|\boldsymbol{\tau}\|^2)' \|\boldsymbol{\tau}\|^{-1} \right)' + m_i C^2 \|\boldsymbol{\tau}\|^3 + n_i C \|\boldsymbol{\tau}\|^3 = 0, \\ t_i = (\bar{\Delta}_i \|\boldsymbol{\tau}\|^2)^{-1} (\|\boldsymbol{\tau}\|^2 m_i)' , \end{cases} \quad (3.104)$$

soit précisément le système obtenu pour le modèle de Bernoulli-Euler-Navier de même ordre, les inconnues ayant des définitions différentes. Les conditions de raccords entraînent :

$$[[n + mC]] = [[m]] = [[t\bar{\Delta}]] = 0 \quad (3.105)$$

soit, pour une interface régulière :

$$[[n]] = [[m]] = [[t\bar{\Delta}]] = 0. \quad (3.106)$$

Enfin, ces modèles peuvent être étendus à des ordres supérieurs.

Nous venons de déterminer des modèles de poutres fissurées. Les équations d'équilibre sont des équations différentielles ordinaires d'ordre deux à coefficients non constants dont la résolution analytique, dans le cas général, semble hors de portée. Dans la section suivante, nous déterminons des solutions analytiques dans le cas d'une carte ϕ particulière.

3.5 Solutions analytiques et influences de la courbure sur la rupture

Envisageons le cas d'une arche circulaire ω d'épaisseur constante 2ϵ et présentant une fissure au sein de sa surface moyenne γ . L'arche est encastrée sur le bord latéral d'une extrémité et soumise à un déplacement normal δ sur l'un des bras de l'extrémité opposée. La carte $(C^\infty(\hat{\gamma}))^2$ naturelle

¹⁶ $-\mathbf{e}^1 \cdot \boldsymbol{\tau}' = \|\boldsymbol{\tau}\| (\|\boldsymbol{\tau}\|^{-1})'$

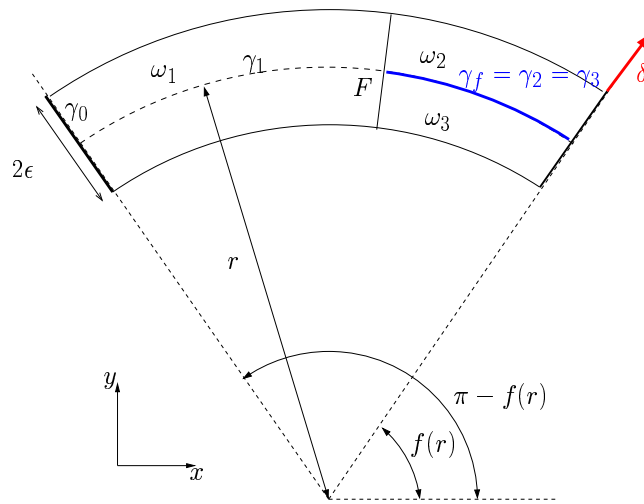


FIG. 3.5: Arche cylindrique délaminée.

pour décrire l'interface γ est :

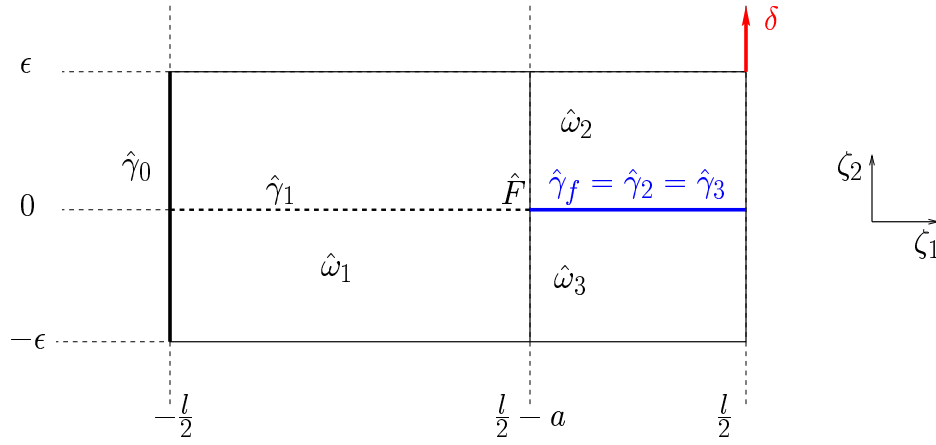
$$\gamma \ni (x, y) = \phi(\zeta_1) = \left(r \cos(\zeta_1), r \left[\sin(\zeta_1) - \sin(f(r)) \right] \right) ; \quad \zeta_1 \in]f(r), \pi - f(r)[= \hat{\gamma}, \quad (3.107)$$

en prenant $f(r) = \frac{1}{2}(\pi - \frac{l}{r})$ de façon à ce que la longueur de γ soit égale à l et indépendante de r . Cette carte conduit à $\|\tau\| = r$ et $C = r^{-1}$, r désignant le rayon de courbure de la structure. Nous lui préférons la carte $(C^\infty(\hat{\gamma}))^2$ ¹⁷ :

$$\gamma \ni (x, y) = \phi(\zeta_1) = \left(r \sin\left(\frac{\zeta_1}{r}\right), r \left[\cos\left(\frac{\zeta_1}{r}\right) - \cos\left(\frac{l}{2r}\right) \right] \right) ; \quad \zeta_1 \in]-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}[= \hat{\gamma}, \quad (3.108)$$

qui mène à $\|\tau\| = 1$ et $C = -r^{-1}$. Le couple (ζ_1, ζ_2) est alors en bijection avec le couple (x, y) si et seulement si $r > \max(\epsilon, \frac{l}{2\pi})$. La quantité δ étant indépendante de r , nous calculons analytiquement l'énergie potentielle associée à la structure en fonction de la longueur a de la fissure γ_f , ce qui conduira à l'expression du taux de restitution.

¹⁷pour des raisons qui vont apparaître dans le chapitre suivant.


 FIG. 3.6: Représentation $\hat{\omega}$ de l'arche ω .

3.5.1 Sans prise en compte de l'effort tranchant

CAS FAIBLEMENT COURBÉ

Dans le cas faiblement courbé, où la courbure est de l'ordre de ϵ , autrement dit pour des structures quasiment rectilignes, le système à résoudre est :

$$\begin{aligned}
 n'_i &= 0 && \text{sur } \hat{\gamma}_i, \\
 n_1 &= n_2 + n_3 && \text{en } \frac{l}{2} - a, \\
 n_2 &= n_3 = 0 && \text{en } \frac{l}{2}, \\
 -n_i r^{-1} + m''_i &= 0 && \text{sur } \hat{\gamma}_i, \\
 m_1 &= m_2 + m_3 && \text{en } \frac{l}{2} - a, \\
 m'_1 &= m'_2 + m'_3 && \text{en } \frac{l}{2} - a, \\
 m_2 &= m_3 = 0 && \text{en } \frac{l}{2}, \\
 m'_3 &= 0 && \text{en } \frac{l}{2}, \\
 \bar{u}_1^1 &= \bar{u}_2^1 = \frac{d\bar{u}_2^1}{d\zeta_1} = 0 && \text{en } -\frac{l}{2}, \\
 \langle \bar{u}_1 \rangle &= \langle \bar{u}_2 \rangle = \langle \frac{d\bar{u}_2}{d\zeta_1} \rangle = 0 && \text{en } \frac{l}{2} - a, \\
 \bar{u}_2^2 &= \delta && \text{en } \frac{l}{2}, \\
 n_i &= \gamma(\bar{\mathbf{u}}^i) R_i^T + \rho(\bar{\mathbf{u}}^i) R_i^C && \text{sur } \hat{\gamma}_i, \\
 m_i &= \gamma(\bar{\mathbf{u}}^i) R_i^C + \rho(\bar{\mathbf{u}}^i) R_i^F && \text{sur } \hat{\gamma}_i, \\
 \gamma(\mathbf{u}) &= u'_1 + r^{-1} u_2 && \text{sur } \hat{\gamma}, \\
 \rho(\mathbf{u}) &= -u''_2 && \text{sur } \hat{\gamma}, \\
 \hat{\rho}(\mathbf{u}) &= -(u''_2 + r^{-2} u_2) && \text{sur } \hat{\gamma}, \\
 (R_i^T, R_i^C, R_i^F) &= \int_{h_i^-}^{h_i^+} (1, \zeta_2, \zeta_2^2) T_1^{-1} d\zeta_2 && \text{sur } \hat{\gamma}_i, \\
 (n_i, m_i) &= \int_{h_i^-}^{h_i^+} (1, \zeta_2) (1 + r^{-1} \zeta_2) \sigma_i^{11} d\zeta_2 && \text{sur } \hat{\gamma}_i.
 \end{aligned}$$

La première équation conduit à n_i constant, puis la troisième $n_2 = n_3 \equiv 0$ et enfin la seconde $n_1 \equiv 0$. Il en est de même du moment de flexion m_3 de la troisième poutre. Les déplacements normaux dans les deux poutres supérieures sont alors des trinômes en ζ_1 . Après calculs, l'énergie

mécanique et le taux de restitution sont :

$$I(a) = \frac{E\epsilon^3}{l^3 + 7a^3}\delta^2 \quad ; \quad -\frac{\partial I(a)}{\partial a} = \frac{21E\epsilon^3 a^2}{(l^3 + 7a^3)^2}\delta^2 \quad (3.109)$$

soit précisément les expressions obtenues dans le cas rectiligne. En effet, l'approximation du cas faiblement courbé revient à approximer $\varphi_1(\zeta_1, \zeta_2) = \zeta_1 + \zeta_2 r^{-1} \zeta_1 + O(r^{-2})$ par ζ_1 et $\varphi_2(\zeta_1, \zeta_2) = \zeta_2 + r^{-1}(-\frac{1}{2}\zeta_1^2 + \frac{l}{8}) + O(r^{-2})$ par 0, soit φ par la carte identité.

MODÈLE D'ORDRE 1

Commençons par le modèle d'ordre 1, présenté dans la section précédente. Le système à résoudre est identique au précédent à l'exception de :

$$\begin{aligned} -n_i r^{-1} + m_i r^{-2} + m_i'' &= 0 & \text{sur } \hat{\gamma}_i, \\ \rho(\mathbf{u}) &= r^{-1}u_1' - u_2'' & \text{sur } \hat{\gamma}, \\ \hat{\rho}(\mathbf{u}) &= -(u_2'' + r^{-2}u_2) & \text{sur } \hat{\gamma}. \end{aligned}$$

De $n_i \equiv 0$, la première équation donne ¹⁸

$$m_i(\zeta_1) = C_1^i \cos\left(\frac{\zeta_1}{r}\right) + C_2^i \sin\left(\frac{\zeta_1}{r}\right) \quad (3.110)$$

ce qui entraîne alors que le moment de flexion m_3 est également identiquement nul. $n_i \equiv 0$ conduit également à :

$$r^{-1}(u_1^i)' = \frac{R_i^C (u_2^i)'' - R_i^T r^{-1} u_2^i}{R_i^C + r R_i^T} \quad ; \quad m_i = \left(R_i^F - \frac{(R_i^C)^2}{R_i^T} \right) \rho(\mathbf{u}^i) \quad i = 1, 2 \quad (3.111)$$

puis :

$$m_i = -\frac{R_i^F R_i^T - (R_i^C)^2}{r^{-1} R_i^C + R_i^T} \left((u_2^i)'' + r^{-2} u_2^i \right) \equiv -\Delta_i \left((u_2^i)'' + r^{-2} u_2^i \right) = \Delta_i \hat{\rho}(\mathbf{u}^i) \quad (3.112)$$

puis enfin :

$$\bar{u}_2^i(\zeta_1) = \cos\left(\frac{\zeta_1}{r}\right) \left[C_3^i + \frac{r}{2\Delta_i} \left(C_2^i \zeta_1 - r C_1^i \right) \right] + \sin\left(\frac{\zeta_1}{r}\right) \left[C_4^i - \frac{r}{2\Delta_i} C_1^i \zeta_1 \right]. \quad (3.113)$$

Les déplacements u_2^1 et u_2^2 ¹⁹ sont alors déterminés par les huit conditions aux limites non encore utilisées :

$$\begin{aligned} m_1 &= m_2 & \text{en } \frac{l}{2} - a, \\ m_1' &= m_2' & \text{en } \frac{l}{2} - a, \\ m_2 &= 0 & \text{en } \frac{l}{2}, \\ \bar{u}_2^1 &= \frac{d\bar{u}_2^1}{d\zeta_1} = 0 & \text{en } -\frac{l}{2}, \\ \langle \bar{u}_2 \rangle &= \langle \frac{d\bar{u}_2}{d\zeta_1} \rangle = 0 & \text{en } \frac{l}{2} - a, \\ \bar{u}_2^2 &= \delta & \text{en } \frac{l}{2}. \end{aligned}$$

¹⁸signalons le problème de perturbation singulière ; la solution obtenue ne converge pas lorsque r tend l'infini, vers $m_i(x_1) = C_1^i x_1 + C_2^i$, solution de l'équation $m_i'' = 0$, issue du cas plan.

¹⁹Le calcul des déplacements u_1^i est évité.

Enfin, l'énergie est :

$$\hat{I}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \int_{\hat{\gamma}_i} m_i \hat{\rho}_i(\mathbf{u}) d\hat{\gamma}_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \int_{\hat{\gamma}_i} \Delta_i^{-1} m_i^2 d\hat{\gamma}_i. \quad (3.114)$$

Dans le cas d'un matériau isotrope, nous obtenons :

$$\Delta_1 = \frac{2\epsilon^3 E}{3} \quad \text{et} \quad \Delta_2 = \frac{\epsilon^3 E}{6(2 + \epsilon r^{-1})}, \quad (3.115)$$

résultats à comparer avec $\Delta_1 = \frac{2\epsilon^3 E}{3}$ et $\Delta_2 = \frac{\epsilon^3 E}{12}$ du cas faiblement courbé.

MODÈLE D'ORDRE INFINI

Dans le cas d'une courbure quelconque, il suffit de remplacer Δ_1 et Δ_2 par :

$$\begin{cases} \Delta_1 = Er^3 \left[\ln \left(\frac{1+r^{-1}\epsilon}{1-r^{-1}\epsilon} \right) - 2r^{-1}\epsilon \right] = \frac{2}{3} E\epsilon^3 + \frac{2}{5} \frac{E\epsilon^5}{r^2} + \frac{2}{7} \frac{E\epsilon^7}{r^4} + O\left(\frac{1}{r^5}\right), \\ \Delta_2 = \frac{Er^3}{2+r^{-1}\epsilon} \left((2+r^{-1}\epsilon) \ln(1+r^{-1}\epsilon) - 2r^{-1}\epsilon \right) = \frac{1}{12} E\epsilon^3 - \frac{1}{8} \frac{E\epsilon^4}{r} + \frac{11}{80} \frac{E\epsilon^5}{r^2} + O\left(\frac{1}{r^3}\right). \end{cases} \quad (3.116)$$

²⁰ Nous posons en effet $M = \sum_{j=1}^{\infty} m^{(j)} C^{j-1}$ soit $M_i'' + r^{-2} M_i = 0$. Puis de $n_i = 0$, nous en déduisons les relations :

$$m^{(j)} = \rho(\mathbf{u}) \left(R^{(j+1)} - \frac{R^{(1)} R^{(j)}}{R^{(0)}} \right) \quad \text{et} \quad M = \left(\sum_{j=1}^{\infty} C^{j-1} \frac{R^{(j+1)} R^{(0)} - R^{(1)} R^{(j)}}{r^{-1} R^{(1)} + R^{(0)}} \right) \hat{\rho}(\mathbf{u}). \quad (3.117)$$

Le résultat en découle en évaluant le terme entre crochets. Dans la pratique, ϵ étant petit devant un, il suffit de se limiter à l'ordre 2 et de prendre $\Delta_2 = \frac{E\epsilon^3(1-\epsilon r^{-1})}{6(2+\epsilon r^{-1})}$, même pour une arche fortement courbée. Enfin, notons que la présence de terme en \ln n'est pas étonnante. Nous aurions obtenu des termes de même type en utilisant la seconde voie de calcul exact. Après quelques développements, l'énergie de la structure vaut :

$$\hat{I}(r, a) = \frac{E\epsilon^3 \delta^2}{l^3 + 7a^3} + \frac{12a^3 \epsilon^4 E \delta^2}{(l^3 + 7a^3)^2 r} + O\left(\frac{\epsilon^5}{r^2}\right). \quad (3.118)$$

Elle tend, lorsque r tend vers l'infini, vers l'énergie associée à la structure droite, et ce à la vitesse $\frac{1}{r}$. Par ailleurs, notons que l'énergie est décroissante avec le rayon de courbure. Le taux de restitution est alors :

$$\hat{G}(r, a) = \frac{21E\epsilon^3 a^2 \delta^2}{(l^3 + 7a^3)^2} + \frac{36a^2 \epsilon^4 E \delta^2 (7a^3 - l^3)}{(l^3 + 7a^3)^3} \frac{1}{r} + O\left(\frac{\epsilon^5}{r^2}\right). \quad (3.119)$$

La comparaison de ce taux par rapport à celui du cas rectiligne $G^d(a)$ dépend du signe de $7a^3 - l^3$. Si $7a^3 - l^3 < 0$ (cas le plus courant), soit $a < 0.522757l$, alors $G(r, a) < G^d(a)$ et la structure

²⁰Notons que [FERNLUND *et al.* (1994)] obtiennent la même expression pour Δ_1 .

résiste par sa forme. Dans le cas contraire, la courbure amplifie la propagation. Enfin, la dérivée seconde vaut :

$$\hat{I}^{(2)}(r, a) = \frac{42E\epsilon^3\delta^2a(14a^3 - l^3)}{(l^3 + 7a^3)^3} + \frac{\epsilon}{r} \frac{72a\epsilon^3E\delta^2(l^6 - 42a^3l^3 + 98a^6)}{(l^3 + 7a^3)^4} + O\left(\frac{\epsilon^5}{r^2}\right). \quad (3.120)$$

Le polynôme $p(a) \equiv 98a^6 + 42a^3l^3 + l^6$ prend des valeurs négatives dans l'intervalle $[\approx 0.29358l, \approx 0.738807l]$ et positives à l'extérieur. Il en résulte que la courbure modifie la stabilité de la pointe de fissure, suivant la longueur initiale a de la fissure. Lorsque a est dans l'intervalle cité plus haut, la stabilité est aggravée. A l'extérieur, elle est améliorée. Les figures 3.7 et 3.8 montrent l'évolution du taux de restitution et de la dérivée seconde de l'énergie en fonction de a ; les valeurs numériques sont : $E = 130000MPa$, $l = 100mm$, $\epsilon = 2.5mm$, $\delta = 6mm$.

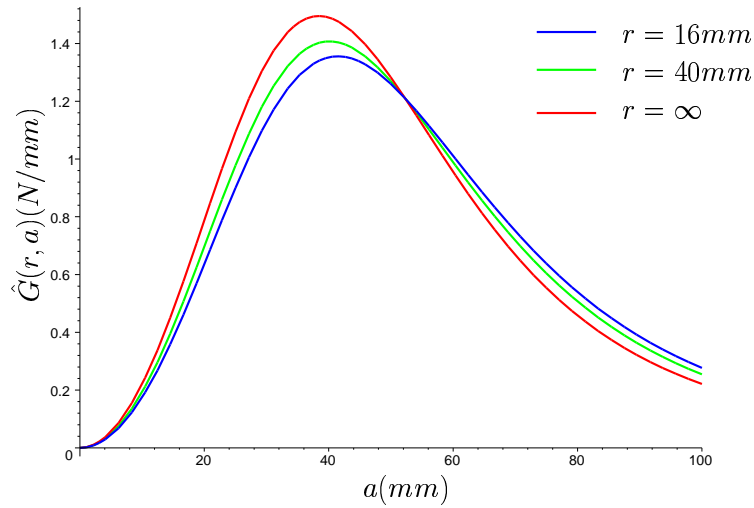


FIG. 3.7: $\hat{G}(r, a)$ en fonction de a .

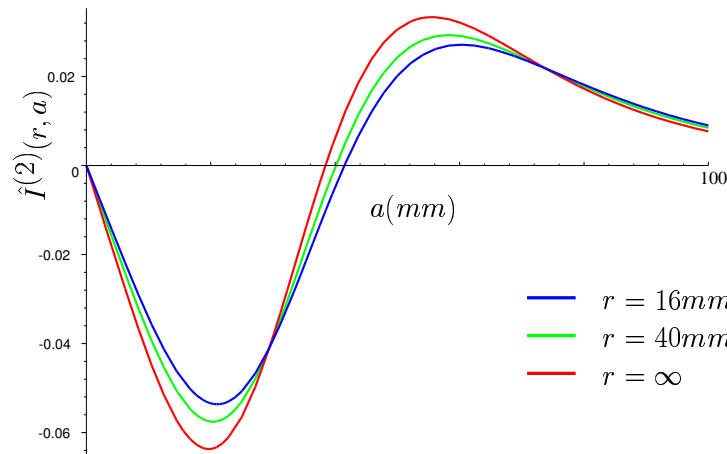


FIG. 3.8: $\hat{I}^{(2)}(r, a)$ en fonction de a .

Envisageons maintenant le cas où c'est le bras inférieur qui est chargé selon le même mode d'ouverture. δ est alors remplacé par $-\delta$ ce qui est sans conséquence, et Δ_2 est remplacé quant à

lui par Δ_3 valant dans le cas exact :

$$\Delta_3 = \frac{-2Er^3}{(2 - \epsilon r^{-1})} \left(\ln(1 - \epsilon r^{-1}) + \epsilon r^{-1} + \epsilon^2 r^{-2} - \frac{\epsilon r^{-1}}{2} \ln(1 + \epsilon r^{-1}) \right) = \frac{E\epsilon^3}{12} + \frac{11}{24} \frac{E\epsilon^4}{r} + O\left(\frac{\epsilon^5}{r^2}\right) \quad (3.121)$$

donnant :

$$\hat{I}(r, a) = I^d(a) - \frac{44a^3\epsilon^4 E\delta^2}{(l^3 + 7a^3)^2} \frac{1}{r} + O\left(\frac{\epsilon^5}{r^2}\right) \quad (3.122)$$

L'énergie mécanique $\hat{I}(r, a)$ est maintenant inférieure à celle associée au cas rectiligne qui est inchangée (compte tenu des conditions de symétrie). L'effet dû à la courbure est inversé par rapport au cas précédent : dans les cas les plus courants (a faible devant l), la courbure amplifie la propagation de la fissure. Lorsque les deux bras sont chargés simultanément en mode d'ouverture, l'énergie s'écrit :

$$\hat{I}(r, a) = \frac{1}{4} \frac{\epsilon^3 E\delta^2}{a^3} - \frac{1}{2} \frac{\epsilon^3 E\delta^2}{a^3} \frac{\epsilon}{r} + O\left(\frac{\epsilon^5}{r^2}\right) \quad (3.123)$$

et la courbure dans ce cas réduit la propagation. De façon symétrique, abordons le cas d'un chargement imposé normal $\mathbf{f} = f\mathbf{e}_3$. Lorsque l'extrémité du bras supérieur est chargée, la condition $\bar{u}_2(\frac{l}{2}) = \delta$ est remplacée par la condition $-m'_2(\frac{l}{2}) = (1 - C\epsilon)f = (1 + \frac{\epsilon}{r})f$ où f désigne la composante normale de la force imposée à l'extrémité de la structure. L'énergie mécanique obtenue est :

$$\hat{I}(r, a) = \frac{3}{4} \frac{f^2(l^3 + 7a^3)}{E\epsilon^3} - \frac{13}{2} \frac{f^2(l^3 + 13a^3)}{E\epsilon^3} \frac{\epsilon}{r} + O\left(\frac{1}{\epsilon r^2}\right) \quad (3.124)$$

indiquant que la courbure amplifie la propagation, tandis que lorsque le bras inférieur est soumis au chargement $-\mathbf{f}$, la condition devient $m'_3(\frac{l}{2}) = (1 - \frac{\epsilon}{r})f$ et nous obtenons :

$$\hat{I}(r, a) = \frac{3}{4} \frac{f^2(l^3 + 7a^3)}{E\epsilon^3} - \frac{1}{2} \frac{f^2(3l^3 + 87a^3)}{E\epsilon^2} \frac{\epsilon}{r} + O\left(\frac{1}{\epsilon r^2}\right) \quad (3.125)$$

indiquant que la courbure réduit la propagation. Enfin, pour le chargement simultané des deux bras, l'énergie associée obtenue, avec un chargement imposé vaut :

$$\hat{I}(a, r) = \frac{12f^2a^3}{\epsilon^3 E} - \frac{24f^2a^3}{\epsilon^3 E} \frac{\epsilon}{r} + O\left(\frac{1}{\epsilon r^2}\right) \quad (3.126)$$

entraînant une conclusion identique à celle du cas précédent. Ces développements montrent que l'influence de la courbure dépend du chargement et de sa nature. Les résultats sont regroupés dans les figures 3.9 et 3.10.

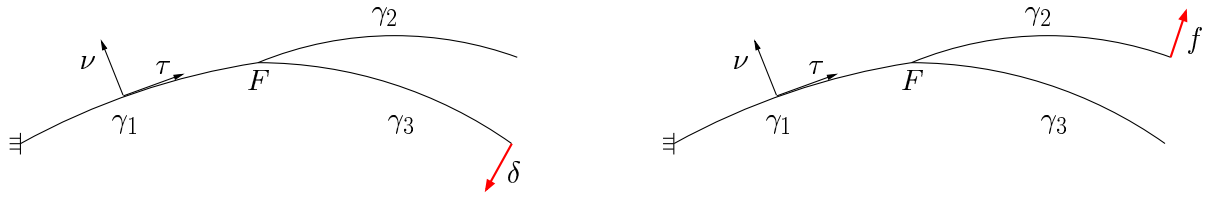


FIG. 3.9: Cas de chargement où la courbure amplifie la propagation : $\hat{G}(r, a) > G(a)$.

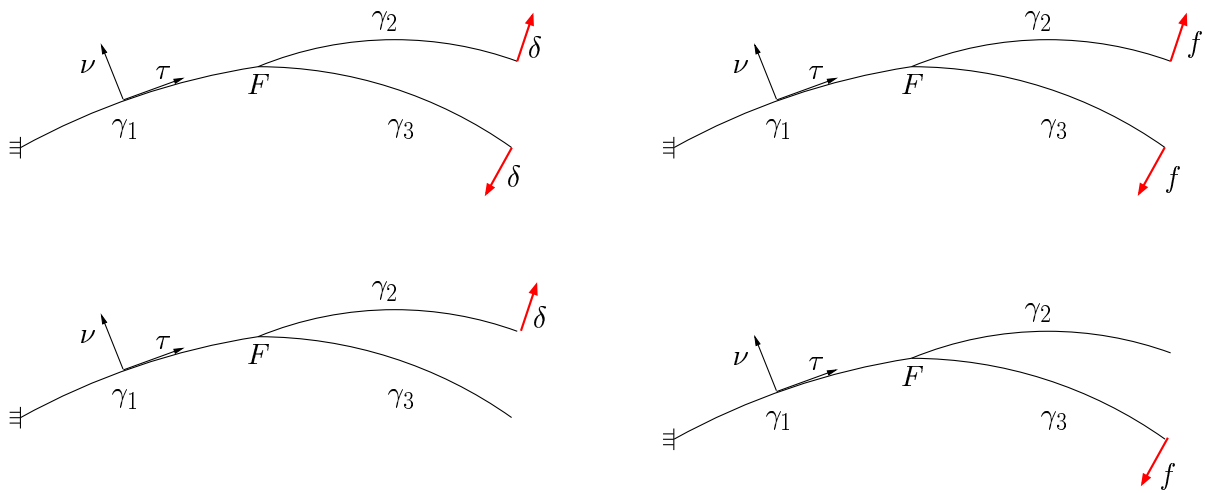


FIG. 3.10: Cas de chargement où la courbure réduit la propagation : $\hat{G}(r, a) < G(a)$.

Chapitre 4

Calculs des dérivées lagrangiennes

Nous reprenons dans ce chapitre la structure S du chapitre I occupant dans sa configuration de référence le volume Ω de l'espace euclidien \mathbb{R}^3 . Plus précisément, le volume Ω est supposé compris entre deux surfaces de distance petite devant les autres dimensions. L'appellation de coque est attribuée à S (ou par identification à Ω). Enfin, nous supposons l'existence d'un front de fissure au sein de la surface moyenne de la coque. Ce chapitre est entièrement dédié au calcul des dérivées lagrangiennes associées à ce front. Dans un premier temps, l'épaisseur de la coque est suffisamment faible pour adopter quelques simplifications cinématiques. Puis dans un second temps, les dérivées lagrangiennes sont données pour une épaisseur quelconque, pourvu que la surface moyenne de S puisse être mise en bijection avec un ouvert bidimensionnel. En d'autres termes, nous étendons de façon systématique les développements du chapitre 2 au cas tridimensionnel et les résultats de [OUSSET (1999)] au cas courbe. Cela nécessite au préalable quelques rappels de géométrie différentielle, permettant la réécriture de la formulation variationnelle dans un repère local attaché à la surface moyenne, puis de mettre en œuvre la θ -méthode. Le cadre mécanique est celui présenté au chapitre I et la densité de Saint Venant-Kirchhoff est retenue.

4.1 Rappels de géométrie différentielle et réécriture de la formulation variationnelle

Nous faisons quelques rappels élémentaires de géométrie différentielle nécessaires pour notre propos. Une description complète et rigoureuse est présentée par exemple dans [CHOQUET-BRUHAT & DEWITT-MORETTE (1982)]. Rappelons que l'espace euclidien \mathbb{R}^3 est muni d'une base orthogonale directe $B = (e_1, e_2, e_3)$ et de la norme euclidienne usuelle (notée $\|\cdot\|$) en faisant un espace vectoriel normé. Notons O l'origine de la base B , point de l'espace affine associé. Tout point x de cet espace affine est repéré par ses coordonnées (x_1, x_2, x_3) .

DESCRIPTION DE LA SURFACE MOYENNE

Soit ω la surface moyenne de la coque Ω , supposée l'image de l'adhérence d'un domaine $\hat{\omega}$ du plan \mathbb{R}^2 contenant l'origine O par l'application ϕ , régulière et injective :

$$\phi(\overline{\hat{\omega}}) = \omega \subset \mathbb{R}^3 \quad ; \quad \hat{\omega} \subset \mathbb{R}^2 . \quad (4.1)$$

A tout point \mathbf{m} de ω^1 repéré par ses coordonnées cartésiennes (x_1, x_2, x_3) , est associé un unique point de $\hat{\omega}$, repéré par ses coordonnées (ζ_1, ζ_2) , dites coordonnées curvilignes de \mathbf{m} pour la carte ϕ . Une représentation de la surface ω est alors la suivante :

$$\omega = \left\{ \mathbf{m} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / \mathbf{Om} = \phi(\zeta_1, \zeta_2), (\zeta_1, \zeta_2) \in \hat{\omega} \right\}. \quad (4.2)$$

On définit les vecteurs tangents à ω , supposés linéairement indépendants, par :

$$\mathbf{a}_\alpha = \frac{\partial \phi}{\partial \zeta_\alpha} \equiv \phi_{,\alpha} \quad (4.3)$$

et le vecteur unitaire normal à ω est défini par :

$$\mathbf{a}_3 = \frac{\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2}{\|\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2\|}. \quad (4.4)$$

Les vecteurs $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ définis sur ω forment une base directe orthogonale de l'espace euclidien \mathbb{R}^3 , dite base *contravariante* associée à la surface moyenne ω . Par analogie avec le cas 2D (voir chapitre 3), on introduit les vecteurs formant la base *covariante* $(\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3)$ définis par :

$$\mathbf{a}^\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta = \delta_\beta^\alpha \quad ; \quad \mathbf{a}^3 = \mathbf{a}_3. \quad (4.5)$$

Le théorème de Gauss-Bonnet ([CIARLET (2000)], page 130) assure que la surface moyenne ω est entièrement caractérisée², à l'orientation dans l'espace près, par deux tenseurs $(\mathbf{a}^{\alpha\beta})$ et $(\mathbf{b}_\alpha^\beta)$, appelés première et seconde formes fondamentales de la surface ω . La première forme fondamentale $(\mathbf{a}^{\alpha\beta})$, appelée *tenseur de changement de métrique* est l'inverse du tenseur symétrique défini positif $\mathbf{a}_{\alpha\beta} \equiv \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta$:

$$\mathbf{a}^{\alpha\lambda} \cdot \mathbf{a}_{\lambda\beta} = \delta_\beta^\alpha \quad ; \quad \mathbf{a}^{\alpha\beta} = \mathbf{a}^\alpha \cdot \mathbf{a}^\beta. \quad (4.6)$$

La seconde forme fondamentale $(\mathbf{b}_\alpha^\beta)$ appelée *tenseur de courbure, non symétrique*, apparaît comme le tenseur mixte du tenseur symétrique $\mathbf{b}_{\alpha\beta} \equiv \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_{\alpha,\beta} = -\mathbf{a}_{3,\beta} \cdot \mathbf{a}_\alpha$:

$$\mathbf{b}_\alpha^\beta = \mathbf{b}_{\alpha\lambda} \mathbf{a}^{\lambda\beta}. \quad (4.7)$$

Les valeurs propres de ce tenseur, notées $R_1^{-1}(\zeta_\alpha)$ et $R_2^{-1}(\zeta_\alpha)$ sont les courbures principales de ω en ζ_α . La demie-trace, notée H , est la courbure moyenne de la surface ω tandis que le déterminant, noté K , est la courbure totale (ou courbure gaussienne) :

$$\begin{cases} H(\zeta_\alpha) \equiv \frac{1}{2}(R_1^{-1}(\zeta_\alpha) + R_2^{-1}(\zeta_\alpha)) = \frac{1}{2}(b_1^1(\zeta_\alpha) + b_2^2(\zeta_\alpha)), \\ K(\zeta_\alpha) \equiv (R_1(\zeta_\alpha)R_2(\zeta_\alpha))^{-1} = b_1^1(\zeta_\alpha)b_2^2(\zeta_\alpha) - b_1^2(\zeta_\alpha)b_2^1(\zeta_\alpha). \end{cases} \quad (4.8)$$

Soit maintenant un vecteur \mathbf{v} défini sur ω , de composantes cartésiennes (v^i) dans B et exprimé dans la base covariante de ω selon :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = v^\beta(\mathbf{x})\mathbf{e}_\beta + v^3(\mathbf{x})\mathbf{e}_3 = \hat{v}_\beta(\zeta_\alpha)\mathbf{a}^\beta(\zeta_\alpha) + \hat{v}_3\mathbf{a}^3(\zeta_\alpha) \equiv \hat{\mathbf{v}}(\zeta), \quad (4.9)$$

¹pour simplifier, nous identifions l'espace affine avec son espace euclidien résultant.

²modulo quelques équations de compatibilité portant sur les symboles de Christoffel de première espèce.

(($\hat{v}_\alpha, \hat{v}_3$) désignent les composantes covariantes de \mathbf{v}). Pour tout point \mathbf{m} de ω , le covecteur $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{m}}$ est donné par la relation :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{m}} = (\hat{v}_{\beta|\alpha} - b_{\alpha\beta}\hat{v}_3)\mathbf{a}^\alpha \otimes \mathbf{a}^\beta + (\hat{v}_{3,\alpha} + b_\alpha^\beta \hat{v}_\beta)\mathbf{a}^\alpha \otimes \mathbf{a}^3 \quad (4.10)$$

en notant :

$$\hat{v}_{\alpha|\beta} = \hat{v}_{\alpha,\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \hat{v}_\gamma \quad ; \quad \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \mathbf{a}^\alpha \cdot \mathbf{a}_{\gamma,\beta} . \quad (4.11)$$

$\hat{v}_{\alpha|\beta}$ est la dérivée covariante de v_α . L'égalité $\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}^3$ entraîne $\hat{v}_{3|\alpha} = \hat{v}_{3,\alpha}$. Les fonctions réelles $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ sont les symboles de Christoffel de seconde espèce et vérifient $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma$.

DESCRIPTION DE LA COQUE

Les préliminaires précédents permettent une description de la structure complète. Sans aucune perte de généralité pour la suite, nous supposons que l'épaisseur, notée $2h$ de la coque Ω est uniformément constante. Ω est alors l'image de l'adhérence de $\hat{\Omega} \equiv \hat{\omega} \times]-h, h[$ par l'application φ , telle que :

$$\varphi : (\zeta_\alpha, \zeta_3) \in \hat{\Omega} \subset \mathbb{R}^3 = \varphi(\zeta_\alpha, \zeta_3) \equiv \phi(\zeta_\alpha) + \zeta_3 \mathbf{a}_3 \in \Omega \subset \mathbb{R}^3 . \quad (4.12)$$

Une représentation du volume Ω est alors :

$$\boxed{\Omega = \left\{ \mathbf{M} \in \mathbb{R}^3 / \mathbf{OM} = \phi(\zeta_1, \zeta_2) + \zeta_3 \mathbf{a}_3 \equiv \varphi(\boldsymbol{\zeta}), (\zeta_1, \zeta_2) \in \hat{\omega}, \zeta_3 \in]-h, h[\right\}} . \quad (4.13)$$

De façon analogue, la base contravariante associée au vecteur \mathbf{OM} , notée $(\mathbf{g}_\alpha, \mathbf{g}_3)$ est définie selon :

$$\mathbf{g}_\alpha = \mathbf{a}_\alpha + \zeta_3 \mathbf{a}_{3,\alpha} = (\delta_\alpha^\gamma - \zeta_3 b_\alpha^\gamma) \mathbf{a}_\gamma \quad ; \quad \mathbf{g}_3 = \mathbf{a}_3 \quad (4.14)$$

et le tenseur métrique associé est :

$$\begin{cases} \mathbf{g}_{\alpha\beta} = \mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_\beta = (\delta_\alpha^\gamma - \zeta_3 b_\alpha^\gamma)(\delta_\beta^\nu - \zeta_3 b_\beta^\nu) \mathbf{a}_\gamma \cdot \mathbf{a}_\nu \equiv \mathbf{a}_{\alpha\beta} - 2\mathbf{b}_{\alpha\beta}\zeta_3 + \mathbf{c}_{\alpha\beta}\zeta_3^2 , \\ g_{\alpha 3} = 0 \quad ; \quad g_{33} = a_{33} , \end{cases} \quad (4.15)$$

en vertu de la symétrie du tenseur $\mathbf{b}_{\alpha\beta}$ et par la notation $c_{\alpha\beta} \equiv b_\alpha^\gamma b_{\gamma\beta}$. Notons $|g| = \det(\mathbf{g}_{\alpha\beta})$ le déterminant du tenseur $\mathbf{g}_{\alpha\beta}$; il vient :

$$|g| = (\det(\boldsymbol{\delta}_\alpha^\beta - \zeta_3 \mathbf{b}_\alpha^\beta))^2 |a| = (1 - 2H\zeta_3 + K\zeta_3^2)^2 |a| . \quad (4.16)$$

3

REMARQUE(S) 11 *Supposons l'application ϕ bijective de $\hat{\omega}$ dans ω . Alors les coordonnées cartésiennes $(x_1, x_2, x_3) \in \Omega$ et curvilignes $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \in \hat{\Omega}$ sont en bijection si et seulement si,*

$$1 - 2H(\zeta_\alpha)\zeta_3 + K(\zeta_\alpha)\zeta_3^2 > 0 \quad \forall \boldsymbol{\zeta} \in \hat{\Omega}, \quad (4.17)$$

(le tenseur \mathbf{a} étant défini positif), ce que nous supposons désormais. ■

³Dans le cas 2D du chapitre précédent, nous avons $\sqrt{|g|} = (1 - C\zeta_3)|\boldsymbol{\tau}|$.

Dans la suite, nous utiliserons l'égalité suivante, pour toute fonction f $d\Omega$ -mesurable :

$$\int_{\Omega} f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{\hat{\Omega}} (f \circ \varphi)(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) (1 - 2H\zeta_3 + K\zeta_3^2) \sqrt{|a|} d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3. \quad (4.18)$$

Considérons maintenant à nouveau un vecteur exprimé dans la base covariante $(\mathbf{a}^\alpha, \mathbf{a}^3)$. Par un calcul analogue, nous obtenons pour tout point M de Ω :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial M} &= (\hat{v}_{\beta|\alpha} - b_{\alpha\beta} \hat{v}_3) \mathbf{g}^\alpha \otimes \mathbf{a}^\beta + (\hat{v}_{3,\alpha} + b_\alpha^\beta \hat{v}_\beta) \mathbf{g}^\alpha \otimes \mathbf{a}^3 + \hat{v}_{\alpha,3} \mathbf{g}^3 \otimes \mathbf{a}^\alpha + \hat{v}_{3,3} \mathbf{g}^3 \otimes \mathbf{a}^3 \\ &\equiv \epsilon_{\alpha\beta}(\hat{\mathbf{v}}) \mathbf{g}^\alpha \otimes \mathbf{a}^\beta + \epsilon_{\alpha 3}(\hat{\mathbf{v}}) \mathbf{g}^\alpha \otimes \mathbf{a}^3 + \epsilon_{3\alpha}(\hat{\mathbf{v}}) \mathbf{g}^3 \otimes \mathbf{a}^\alpha + \epsilon_{33}(\hat{\mathbf{v}}) \mathbf{g}^3 \otimes \mathbf{a}^3, \end{aligned} \quad (4.19)$$

puis nous choisissons d'exprimer le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \sigma^{ij}(\mathbf{x}) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ sous la forme :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \hat{\sigma}^{\alpha\beta}(\boldsymbol{\zeta}) \mathbf{a}_\alpha \otimes \mathbf{a}_\beta + \hat{\sigma}^{\alpha 3}(\boldsymbol{\zeta}) \mathbf{a}_\alpha \otimes \mathbf{a}_3 + \hat{\sigma}^{3\alpha}(\boldsymbol{\zeta}) \mathbf{a}_3 \otimes \mathbf{a}_\alpha + \hat{\sigma}^{33}(\boldsymbol{\zeta}) \mathbf{a}_3 \otimes \mathbf{a}_3 \equiv \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\zeta}), \quad (4.20)$$

$(\hat{\sigma}^{\alpha\beta})$ désignent les composantes contravariantes planes du tenseur des contraintes, $(\hat{\sigma}^{\alpha 3})$ celles des composantes de cisaillement transverse et $\hat{\sigma}^{33}$ la contrainte normale. Afin de déterminer la quantité $Tr(\boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial M})$, exprimons le vecteur \mathbf{g}^α en fonction du vecteur \mathbf{a}^α sachant que $\mathbf{g}^3 = \mathbf{a}^3$. La relation (4.14) entraîne :

$$\mathbf{g}^\alpha = \left[(\boldsymbol{\delta}_\alpha^\beta - \zeta_3 \mathbf{b}_\alpha^\beta) \right]^{-1} \mathbf{a}^\beta \equiv d_\beta^\alpha \mathbf{a}^\beta, \quad (4.21)$$

en définissant le tenseur non symétrique (d_β^α) défini sur $\hat{\omega}$ comme l'inverse du tenseur $(\boldsymbol{\delta}_\alpha^\beta - \zeta_3 \mathbf{b}_\alpha^\beta)$.

REMARQUE(S) 12 Retenons que la relation $2H = b_\alpha^\alpha$ entraîne l'égalité :

$$\boxed{\mathbf{g}^\alpha = d_\beta^\alpha \mathbf{a}^\beta = \frac{1}{\det(\mathbf{d}^{-1})} \left(\delta_\beta^\alpha + \zeta_3 \left[b_\beta^\alpha - 2H \delta_\beta^\alpha \right] \right) \mathbf{a}^\beta} \quad (4.22)$$

avec $\det(\mathbf{d}^{-1}) \equiv 1 - 2H\zeta_3 + K\zeta_3^2 > 0$. ■

Ainsi, il vient $\mathbf{g}^\alpha \otimes \mathbf{a}^\beta = d_\tau^\alpha \mathbf{a}^\tau \otimes \mathbf{a}^\beta$ puis :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial M} &= \epsilon_{\alpha\beta}(\hat{\mathbf{v}}) d_\tau^\alpha \mathbf{a}^\tau \otimes \mathbf{a}^\beta + \epsilon_{\alpha 3}(\hat{\mathbf{v}}) d_\tau^\alpha \mathbf{a}^\tau \otimes \mathbf{a}^3 + \epsilon_{3\alpha}(\hat{\mathbf{v}}) \mathbf{a}^3 \otimes \mathbf{a}^\alpha + \epsilon_{33}(\hat{\mathbf{v}}) \mathbf{a}^3 \otimes \mathbf{a}^3 \\ &= \epsilon_{\tau\beta}(\hat{\mathbf{v}}) d_\alpha^\tau \mathbf{a}^\alpha \otimes \mathbf{a}^\beta + \epsilon_{\tau 3}(\hat{\mathbf{v}}) d_\alpha^\tau \mathbf{a}^\alpha \otimes \mathbf{a}^3 + \epsilon_{3\alpha}(\hat{\mathbf{v}}) \mathbf{a}^3 \otimes \mathbf{a}^\alpha + \epsilon_{33}(\hat{\mathbf{v}}) \mathbf{a}^3 \otimes \mathbf{a}^3. \end{aligned}$$

Finalement, l'égalité cherchée est, en utilisant que la symétrie $\sigma^{\alpha 3}(\mathbf{x}) = \sigma^{3\alpha}(\mathbf{x})$ entraîne $\hat{\sigma}^{\alpha 3}(\boldsymbol{\zeta}) = \hat{\sigma}^{3\alpha}(\boldsymbol{\zeta})$,

$$Tr(\boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial M}) = \hat{\sigma}^{\alpha\beta} d_\beta^\tau \epsilon_{\tau\alpha}(\hat{\mathbf{v}}) + \hat{\sigma}^{3\alpha} \left(d_\alpha^\tau \epsilon_{\tau 3}(\hat{\mathbf{v}}) + \epsilon_{3\alpha}(\hat{\mathbf{v}}) \right) + \sigma^{33} \epsilon_{33}(\hat{\mathbf{v}}) \quad (4.23)$$

que nous notons sous la forme condensée :

$$Tr(\boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial M}) = \hat{\sigma}^{ij} d_j^k \epsilon_{ki}(\hat{\mathbf{v}}) \quad (4.24)$$

en prolongeant la définition du tenseur d_α^β telle que $d_\alpha^3 \equiv 0$ et $d_3^\alpha \equiv \delta_3^\alpha$ et rappelant que :

$$\epsilon_{\tau i}(\mathbf{v}) = \begin{cases} v_{\beta, \alpha} - \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma v_\gamma - b_{\alpha\beta} v_3 & (\tau, i) = (\alpha, \beta), \\ v_{3, \alpha} + b_\alpha^\gamma v_\gamma & (\tau, i) = (\alpha, 3), \\ v_{\alpha, 3} & (\tau, i) = (3, \alpha), \\ v_{3, 3} & (\tau, i) = (3, 3). \end{cases}$$

Un calcul analogue conduit à la relation :

$$Tr\left(\boldsymbol{\sigma} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{M}}\right)^T \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{M}}\right) = \hat{\sigma}^{ij} d_m^\tau \epsilon_{\tau i}(\hat{\mathbf{u}}) d_n^\gamma \epsilon_{\gamma j}(\hat{\mathbf{v}}) a^{mn} \quad (4.25)$$

où l'on notera la présence explicite du tenseur de changement de métrique (a^{mn}) de la surface ⁴. Dans notre quête d'une réécriture simplifiée de la formulation variationnelle, introduisons maintenant l'opérateur $p : (W^{1,4}(\hat{\Omega}))^3 \rightarrow \mathbb{M}_3(W^{1,4}(\hat{\Omega}))$ défini par :

$$p(\hat{\mathbf{v}}) = \begin{pmatrix} -\left(\Gamma_{11}^\gamma \hat{v}_\gamma + b_{11} \hat{v}_3\right) & -\left(\Gamma_{12}^\gamma \hat{v}_\gamma + b_{12} \hat{v}_3\right) & b_1^\gamma \hat{v}_\gamma \\ -\left(\Gamma_{21}^\gamma \hat{v}_\gamma + b_{21} \hat{v}_3\right) & -\left(\Gamma_{22}^\gamma \hat{v}_\gamma + b_{22} \hat{v}_3\right) & b_2^\gamma \hat{v}_\gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entraînant l'écriture de l'opérateur ϵ défini en (4.19) sous la forme condensée $\epsilon_{ij}(\hat{\mathbf{v}}) = \hat{v}_{j,i} + p_{ij}(\hat{\mathbf{v}})$. Puis, il vient :

$$Tr(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{F}^T(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \cdot \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x})) = Tr(\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\zeta) \cdot \hat{\mathbf{F}}(\hat{\mathbf{u}}(\zeta)) \cdot (\mathbf{d}(\zeta) \cdot \epsilon(\hat{\mathbf{v}}(\zeta)))^T) \quad (4.26)$$

avec $\hat{\mathbf{F}}(\hat{\mathbf{u}}) = \mathbf{I}_3 + \mathbf{d} \cdot \epsilon(\hat{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{a}$ ⁵. De la même façon, la quantité $Tr(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{u}(\mathbf{x})))$ présente dans l'équation de comportement mise sous forme variationnelle se transforme en la quantité :

$$Tr(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{u}(\mathbf{x}))) = Tr(\hat{\boldsymbol{\tau}}(\zeta) \cdot \hat{\mathbf{E}}(\hat{\mathbf{u}}(\zeta))) \quad (4.27)$$

avec $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{d} \cdot \epsilon(\mathbf{u}) + (\mathbf{d} \cdot \epsilon(\mathbf{u}))^T + \mathbf{d} \cdot \epsilon(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{a} \cdot (\mathbf{d} \cdot \epsilon(\mathbf{u}))^T \right)$.

Finalement, la formulation variationnelle prend, dans le repère local associé à la surface moyenne, la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\hat{\Omega}} Tr(\hat{\mathbf{S}} : \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}}) \sqrt{|g|} d\hat{\Omega} = \int_{\hat{\Omega}} Tr(\hat{\boldsymbol{\tau}} \cdot \hat{\mathbf{E}}(\hat{\mathbf{u}})) \sqrt{|g|} d\hat{\Omega} \quad \forall \hat{\boldsymbol{\tau}} \in \Sigma(\hat{\Omega}), \\ \int_{\hat{\Omega}} Tr(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{F}} \cdot (\mathbf{d} \cdot \epsilon(\hat{\mathbf{v}}))^T) \sqrt{|g|} d\hat{\Omega} = \int_{\hat{\Gamma}_f} \hat{\mathbf{f}} \cdot \hat{\mathbf{v}} \sqrt{|g|} d\Gamma \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in V(\hat{\Omega}), \end{array} \right. \quad (4.28)$$

avec

$$V(\hat{\Omega}) = \{\mathbf{v} \in (W^{1,4}(\hat{\Omega}))^3 / \mathbf{v}|_{\hat{\Gamma}_u} = 0\} \quad ; \quad \Sigma(\hat{\Omega}) = (L_s^2(\hat{\Omega}))^6 \quad (4.29)$$

⁴Si nous avons exprimé le champ dans la cobase associée non pas à la surface ω MAIS à Ω , nous aurions obtenu

$Tr\left(\boldsymbol{\sigma} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{M}}\right)^T \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{M}}\right) = \sigma^{ij} \epsilon_{mi}(\hat{\mathbf{u}}) \epsilon_{nj}(\hat{\mathbf{v}}) g^{mn}$ [CIARLET (2000), page 382].

⁵cela s'écrit composante par composante : $F_i^j = \delta_i^j + d_i^k \epsilon_{lk} a^{kj}$.

et $\hat{\mathbf{f}} = f^i \mathbf{a}_i$, f^i étant les composantes covariantes de \mathbf{f} . $\hat{\mathbb{S}}$ désigne le tenseur de souplesse de composantes covariantes $\hat{\mathbb{S}}_{ijkl}$ dans la base locale. Le tenseur inverse $\hat{\mathbb{R}}$ a pour composantes contravariantes dans le cas isotrope :

$$\hat{\mathbb{R}}^{ijkl}(\zeta_\alpha) = \lambda a^{ij}(\zeta_\alpha) a^{kl}(\zeta_\alpha) + \mu \left(a^{ik}(\zeta_\alpha) a^{jl}(\zeta_\alpha) + a^{il}(\zeta_\alpha) a^{jk}(\zeta_\alpha) \right). \quad (4.30)$$

dépendant des coordonnées ζ_1 et ζ_2 . L'énergie mécanique est enfin :

$$I(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} \int_{\hat{\Omega}} Tr(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{E}}(\hat{\mathbf{u}})) \sqrt{|g|} d\hat{\Omega} - \int_{\Gamma_f} \hat{\mathbf{f}} \cdot \hat{\mathbf{u}} \sqrt{|g|} d\Gamma \equiv \hat{I}(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}). \quad (4.31)$$

En vue du chapitre 5, insistons sur la

PROPRIÉTÉ 1 *Si le couple $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) \in V(\Omega) \times \Sigma(\Omega)$ réalise un minimum de la fonctionnelle I , alors le couple $(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}) \in V(\hat{\Omega}) \times \Sigma(\hat{\Omega})$ défini par les relations (4.9) et (4.20) réalise un minimum de la fonctionnelle \hat{I} .* ■

REMARQUE(S) 13 *La formulation (4.28) est valable pour une structure d'épaisseur $2h$ constante arbitraire pourvu qu'elle vérifie la condition (4.17). En particulier, si la structure est faiblement courbée ⁶, alors l'épaisseur peut être de l'ordre des autres longueurs, voire arbitraire.* ■

Nous sommes maintenant en mesure de déterminer les dérivées lagrangiennes de I , associées au front γ_f , évoluant le long de la surface moyenne de la structure S . L'objet du prochain paragraphe concerne le calcul de ces quantités dans le cadre des coques minces, lorsque l'épaisseur vérifiant (4.17) est supposée faible devant les autres dimensions. A l'image du cas bidimensionnel (voir paragraphe 3.4), des simplifications cinématique et statique conduisent à des expressions définies sur la surface moyenne.

4.2 Dérivées lagrangiennes pour des coques minces linéaires

4.2.1 Expressions du tenseur des déformations planes

Nous nous restreignons dans ce paragraphe au cas de l'élasticité linéaire. Compte tenu de (4.23), nous définissons le tenseur symétrique des déformations planes ε ,

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(d_\alpha^\tau \varepsilon_{\tau\beta} + d_\beta^\tau \varepsilon_{\tau\alpha} \right) \quad (4.32)$$

ainsi que les déformations de cisaillement transverse et normale par :

$$\varepsilon_{\alpha 3} = \frac{1}{2} \left(d_\alpha^\tau \varepsilon_{\tau 3} + \varepsilon_{3\alpha} \right) \quad ; \quad \varepsilon_{33} = \varepsilon_{33} \quad (4.33)$$

de sorte que $Tr(\boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{M}}) = \hat{\sigma}^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}(\hat{\mathbf{v}}) + 2\hat{\sigma}^{\alpha 3} \varepsilon_{\alpha 3}(\hat{\mathbf{v}}) + \hat{\sigma}^{33} \varepsilon_{33}(\hat{\mathbf{v}})$. Supposant l'épaisseur de la structure faible devant les autres dimensions, nous cherchons l'ensemble V des déplacements $\mathbf{v} =$

⁶dans le sens où les courbures principales, valeurs propres de la seconde forme fondamentale, sont petites devant 1.

(v_α, v_3) qui annulent les déformations hors plan : $V = \{\mathbf{v} = (v_\alpha, v_3), \mathbf{v} \in (H^1(\hat{\Omega}))^3, \varepsilon_{\alpha 3}(\mathbf{v}) = \varepsilon_{33}(\mathbf{v}) = 0, v_{|\hat{\Gamma}_u} = 0\}$. Les éléments de V vérifient les relations :

$$v_\beta b_\tau^\beta d_\alpha^\tau + v_{\alpha,3} = -v_{3,\gamma} d_\alpha^\gamma \quad ; \quad v_{3,\alpha} = 0 \quad \alpha = 1, 2 \quad (4.34)$$

et l'on obtient la caractérisation suivante de l'ensemble V , appelé l'ensemble des champs de Kirchhoff-Love (noté V_{KL}) :

$$V_{KL} = \left\{ \mathbf{v} = (v_\alpha, v_3); \mathbf{v} \in (H^1(\hat{\Omega}))^3; v_\alpha(\zeta) = (\delta_\alpha^\lambda - \zeta_3 b_\alpha^\lambda) \bar{v}_\lambda(\zeta_\nu) - \zeta_3 \bar{v}_{3,\alpha}(\zeta_\nu); v_3(\zeta) = \bar{v}_3(\zeta_\nu) \right\} \quad (4.35)$$

avec $(\delta_\alpha^\lambda - \zeta_3 b_\alpha^\lambda) = (\mathbf{d}_\lambda^\alpha)^{-1}$. A nouveau, les différents modèles de coque vont dépendre de l'approximation faite sur le tenseur d_λ^α . Dans le cas faiblement courbé où les valeurs propres du tenseur $b_{\alpha\beta}$ sont faibles devant l'unité, les quantités $1 - \zeta_3 R_\beta^{-1}(\zeta_\alpha)$, $\zeta_3 \in]-h, h[$, sont voisines de 1 : le tenseur d_α^β est approché par δ_α^β et le scalaire $\det(\mathbf{d}^{-1}) = \det((\mathbf{d}_\beta^\alpha)^{-1})$ par 1. Cela conduit au modèle de Budiansky-Sanders. Dans le cas général, on écrit :

$$d_\alpha^\beta = \delta_\alpha^\beta + \zeta_3 b_\alpha^\beta - \zeta_3^2 \dots \quad (4.36)$$

de sorte que, pour tout champ de Kirchhoff-Love, le tenseur des déformations planes prend la forme suivante :

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) = \gamma_{\alpha\beta}^{KL}(\bar{\mathbf{v}}) - \zeta_3 \rho_{\alpha\beta}^{KL}(\bar{\mathbf{v}}) + \zeta_3^2 \dots \quad \forall \mathbf{v} \in V_{KL} \quad (4.37)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{\alpha\beta}^{KL}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \left(v_{\alpha|\beta} + v_{\beta|\alpha} \right) - b_{\alpha\beta} v_3, \\ \rho_{\alpha\beta}^{KL}(\mathbf{v}) = v_{3|\alpha\beta} + b_{\alpha|\beta}^\lambda v_\lambda + c_{\alpha\beta} v_3 + \frac{1}{2} b_\beta^\lambda \left(v_{\lambda|\alpha} - v_{\alpha|\lambda} \right) + \frac{1}{2} b_\alpha^\lambda \left(v_{\lambda|\beta} - v_{\beta|\lambda} \right), \end{array} \right.$$

en notant :

$$v_{3|\alpha\beta} = (v_{3,\alpha})_{|\beta} \quad ; \quad b_{\alpha|\beta}^\lambda = b_{\alpha,\beta}^\lambda + \Gamma_{\beta\sigma}^\lambda b_\alpha^\sigma - \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma b_\sigma^\lambda. \quad (4.38)$$

REMARQUE(S) 14 – La quantité $b_{\alpha|\beta}^\lambda$ est définie de telle manière que $(b_\alpha^\lambda v_\lambda)_{|\beta} = b_{\alpha|\beta}^\lambda v_\lambda + b_\alpha^\lambda v_{\lambda|\beta}$

– Le tenseur $\gamma_{\alpha\beta}^{KL}$ coïncide avec le tenseur $\delta(a_{\alpha\beta})$ représentant la variation linéaire du tenseur de changement de métrique notée $\gamma_{\alpha\beta}$. **En revanche** $\rho_{\alpha\beta}^{KL} \neq \delta(b_{\alpha\beta}) \equiv \rho_{\alpha\beta}$. On montre que :

$$\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) = v_{3|\alpha\beta} - c_{\alpha\beta} v_3 + b_\alpha^\sigma v_{\sigma|\beta} + b_\beta^\sigma v_{\sigma|\alpha} + b_{\alpha|\beta}^\sigma v_\sigma \quad (4.39)$$

puis on remarque la relation :

$$\boxed{\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) = \rho_{\alpha\beta}^{KL}(\mathbf{v}) + \frac{1}{2} \left(b_\alpha^\sigma \gamma_{\sigma\beta}^{KL}(\mathbf{v}) + b_\beta^\sigma \gamma_{\sigma\alpha}^{KL}(\mathbf{v}) \right)} \quad (4.40)$$

- Si nous prenons un champ \mathbf{v} de la forme $\mathbf{v} = v_i \mathbf{g}^i$, le tenseur des déformations est $\epsilon_{ij}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i} - \Gamma_{ij}^p v_p)$ avec $\Gamma_{ij}^p = \mathbf{g}^p \cdot \mathbf{g}_{j,i}$ et alors, pour tout champ de Kirchhoff-Love, nous avons maintenant :

$$\epsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) = \gamma_{\alpha\beta}(\bar{\mathbf{v}}) - \zeta_3 \rho_{\alpha\beta}(\bar{\mathbf{v}}) + \zeta_3^2 \tau_{\alpha\beta}(\bar{\mathbf{v}}) \quad ; \quad \epsilon_{i3}(\mathbf{v}) \equiv 0 \quad (4.41)$$

- En utilisant la relation (4.22), nous obtenons que le tenseur des déformations planes s'exprime selon, $\forall \mathbf{v} \in V_{KL}$:

$$\epsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) = \frac{1}{\det(\mathbf{d}^{-1})} \left(\gamma_{\alpha\beta}^{KL}(\bar{\mathbf{v}}) - \zeta_3 \rho_{\alpha\beta}^1(\bar{\mathbf{v}}) + \zeta_3^2 \tau_{\alpha\beta}^1(\bar{\mathbf{v}}) \right) \quad (4.42)$$

avec notamment :

$$\rho_{\alpha\beta}^1(\mathbf{v}) = v_{3|\alpha\beta} + c_{\alpha\beta} v_3 + b_{\sigma}^{\sigma} \gamma_{\alpha\beta}^{KL}(\mathbf{v}) + b_{\beta|\alpha}^{\sigma} v_{\sigma} . \quad (4.43)$$

Ce tenseur est symétrique en raison de l'égalité $b_{\beta|\alpha}^{\sigma} = b_{\alpha|\beta}^{\sigma}$. Cette expression permet de déterminer des modèles de coques valables pour des **courbures arbitraires**. Le terme $\det(\mathbf{d}^{-1})$ présent au dénominateur se simplifie en effet avec ce même terme présent dans le déterminant $\sqrt{|g|}$ de la matrice jacobienne. ■

4.2.2 Modèles de coque mince

Nous rappelons rapidement le modèle de Koiter puis proposons, à l'image de ce qui a été fait dans le chapitre 2 deux modèles plus riches, valables pour des courbures d'ordre unité.

MODÈLE DE KOITER

Compte tenu des hypothèses précédentes, la formulation (4.28) devient

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\hat{\Omega}} \hat{S}_{\alpha\beta\lambda\mu} \sigma^{\lambda\mu} \tau^{\alpha\beta} \det(\mathbf{d}^{-1}) \sqrt{|a|} d\zeta = \int_{\hat{\Omega}} \tau^{\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) \sqrt{|a|} d\zeta \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \Sigma(\hat{\Omega}) , \\ \int_{\hat{\Omega}} \sigma^{\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) \sqrt{|a|} d\zeta = l(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V_{KL} , \end{array} \right. \quad (4.44)$$

en négligeant les contraintes hors plan⁷. Le modèle de Koiter est obtenu en faisant les approximations $d_{\alpha}^{\beta} \approx \delta_{\alpha}^{\beta} + \zeta_3 b_{\alpha}^{\beta}$ et $\det(\mathbf{d}^{-1}) = 1 - 2H\zeta_3 + K\zeta_3^2 \approx 1$. Soient les efforts résultants ($\mathbf{n}^{\alpha\beta}$) et les moments de flexion ($\mathbf{m}^{\alpha\beta}$) de la surface moyenne :

$$(\mathbf{n}^{\alpha\beta}, \mathbf{m}^{\alpha\beta}) = \sqrt{|a|} \int_{-h}^h (1, -\zeta_3) \hat{\sigma}^{\alpha\beta} d\zeta_3 \quad ; \quad (R_M^{\alpha\beta\lambda\mu}, R_C^{\alpha\beta\lambda\mu}, R_F^{\alpha\beta\lambda\mu}) = \sqrt{|a|} \int_{-h}^h (1, \zeta_3, \zeta_3^2) \hat{R}^{\alpha\beta\lambda\mu} d\zeta_3 . \quad (4.45)$$

⁷sinon le tenseur \hat{S} est à modifier.

Avec la relation de comportement $\hat{\sigma}^{\alpha\beta} \approx \hat{R}^{\alpha\beta\lambda\mu} \left(\gamma_{\lambda\mu}^{KL}(\bar{\mathbf{v}}) - \zeta_3 \rho_{\lambda\mu}^{KL}(\bar{\mathbf{v}}) \right)$ et en intégrant en ζ_3 , le problème variationnel (4.44) est approché par le problème suivant, $\forall \bar{\mathbf{u}} \in V^k, \forall \mathbf{n}, \mathbf{m} \in \Sigma^k$:

$$\begin{cases} \int_{\hat{\omega}} \left[\left(S_{\alpha\beta\lambda\mu}^M n^{\lambda\mu} + S_{\alpha\beta\lambda\mu}^C m^{\lambda\mu} \right) p^{\alpha\beta} + \left(S_{\alpha\beta\lambda\mu}^C n^{\lambda\mu} + S_{\alpha\beta\lambda\mu}^F m^{\lambda\mu} \right) q^{\alpha\beta} \right] d\hat{\omega} = \\ \int_{\hat{\omega}} \left[p^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta}^{KL}(\bar{\mathbf{u}}) + q^{\alpha\beta} \rho_{\alpha\beta}^{KL}(\bar{\mathbf{u}}) \right] d\hat{\omega} & \forall \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \Sigma^k, \\ \int_{\hat{\omega}} \left[n^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta}^{KL}(\bar{\mathbf{v}}) + m^{\alpha\beta} \rho_{\alpha\beta}^{KL}(\bar{\mathbf{v}}) \right] d\hat{\omega} = \hat{l}(\bar{\mathbf{v}}) & \forall \bar{\mathbf{v}} \in V^k, \end{cases} \quad (4.46)$$

en notant :

$$\begin{pmatrix} S_{\alpha\beta\lambda\mu}^M & S_{\alpha\beta\lambda\mu}^C \\ S_{\alpha\beta\lambda\mu}^C & S_{\alpha\beta\lambda\mu}^F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_M^{\alpha\beta\lambda\mu} & -R_C^{\alpha\beta\lambda\mu} \\ -R_C^{\alpha\beta\lambda\mu} & R_F^{\alpha\beta\lambda\mu} \end{pmatrix}^{-1}$$

et :

$$\begin{cases} V^k = \left\{ \mathbf{v} = (v_\alpha, v_3), v_\alpha \in H^1(\hat{\omega}), v_3 \in H^2(\hat{\omega}), (v_\alpha)_{|\hat{\Gamma}_u} = 0, (v_3)_{|\hat{\Gamma}_u} = 0, (v_{3,\nu})_{|\hat{\Gamma}_u} = 0 \right\}, \\ \Sigma^k = (L_s^2(\hat{\omega}))^3. \end{cases} \quad (4.47)$$

Enfin, l'énergie mécanique est, pour tout $\bar{\mathbf{u}} \in V^k$, pour tout $\mathbf{n}, \mathbf{m} \in \Sigma^k$:

$$I(\mathbf{n}, \mathbf{m}, \bar{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2} \int_{\hat{\omega}} \left[n^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta}^{KL}(\bar{\mathbf{u}}) + m^{\alpha\beta} \rho_{\alpha\beta}^{KL}(\bar{\mathbf{u}}) \right] d\hat{\omega} - \hat{l}(\bar{\mathbf{u}}) \quad (4.48)$$

REMARQUE(S) 15 *La littérature diffère sur l'appellation du modèle de Koiter. Certains nomment le modèle de Koiter celui obtenu précédemment en remplaçant ρ^{KL} par ρ . En fait, l'énergie de déformation est perturbée de manière négligeable lorsque ρ^{KL} est remplacé par ρ [KOITER (1970)].* ■

VERS LE MODÈLE DE KIRCHHOFF-LOVE

Afin d'augmenter l'ordre du modèle précédent d'une unité, il suffit d'approcher le déterminant par $1 - 2H\zeta_3$, ce qui correspond à une approximation du même ordre que le tenseur $(\mathbf{d}_\alpha^\beta)$. Nous écrivons :

$$\sqrt{|a|} \det(\mathbf{d}^{-1}) \hat{\sigma}^{\alpha\beta} = \bar{R}^{\alpha\beta\lambda\mu} \left(\gamma_{\lambda\mu}^{KL}(\bar{\mathbf{v}}) - \zeta_3 \rho_{\lambda\mu}^{KL}(\bar{\mathbf{v}}) \right) \quad (4.49)$$

avec $\bar{R}^{\alpha\beta\lambda\mu} = \sqrt{|a|} \det(\mathbf{d}^{-1}) \hat{R}^{\alpha\beta\lambda\mu}$. Puis nous définissons :

$$(\bar{n}^{\alpha\beta}, \bar{m}^{\alpha\beta}) = \sqrt{|a|} \int_{-h}^h (1, -\zeta_3) \hat{\sigma}^{\alpha\beta} \det(\mathbf{d}^{-1}) d\zeta_3 \quad ; \quad (\bar{R}_M^{\alpha\beta\lambda\mu}, \bar{R}_C^{\alpha\beta\lambda\mu}, \bar{R}_F^{\alpha\beta\lambda\mu}) = \int_{-h}^h (1, \zeta_3, \zeta_3^2) \bar{R}^{\alpha\beta\lambda\mu} d\zeta_3.$$

La formulation (4.44) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\hat{\omega}} \left[\left(\overline{S}_{\alpha\beta\lambda\mu}^M \overline{n}^{\lambda\mu} + \overline{S}_{\alpha\beta\lambda\mu}^C \overline{m}^{\lambda\mu} \right) p^{\alpha\beta} + \left(\overline{S}_{\alpha\beta\lambda\mu}^C \overline{n}^{\lambda\mu} + \overline{S}_{\alpha\beta\lambda\mu}^F \overline{m}^{\lambda\mu} \right) q^{\alpha\beta} \right] d\hat{\omega} = \\ \int_{\hat{\omega}} \left[p^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta}^{KL}(\overline{\mathbf{u}}) + q^{\alpha\beta} \rho_{\alpha\beta}^{KL}(\overline{\mathbf{u}}) \right] d\hat{\omega} \quad \forall \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \Sigma^k, \\ \int_{\hat{\omega}} \left[\overline{n}^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta}^{KL}(\overline{\mathbf{v}}) + \overline{m}^{\alpha\beta} \rho_{\alpha\beta}^{KL}(\overline{\mathbf{v}}) \right] d\hat{\omega} = \hat{l}(\overline{\mathbf{v}}) \quad \forall \overline{\mathbf{v}} \in V^k. \end{array} \right. \quad (4.50)$$

Enfin, reprenant (4.42), il vient :

$$\hat{\sigma}^{\alpha\beta} = \underline{R}^{\alpha\beta\lambda\mu} \left(\gamma_{\lambda\mu}^{KL}(\overline{\mathbf{v}}) - \zeta_3 \rho_{\lambda\mu}^1(\overline{\mathbf{v}}) \right) \quad (4.51)$$

avec $\underline{R}^{\alpha\beta\lambda\mu} = \det(\mathbf{d}^{-1})^{-1} \hat{R}^{\alpha\beta\lambda\mu}$. Nous définissons cette fois :

$$(\underline{n}^{\alpha\beta}, \underline{m}^{\alpha\beta}) = \sqrt{|a|} \int_{-h}^h (1, -\zeta_3) \hat{\sigma}^{\alpha\beta} d\zeta_3 \quad (\underline{R}_M^{\alpha\beta\lambda\mu}, \underline{R}_C^{\alpha\beta\lambda\mu}, \underline{R}_F^{\alpha\beta\lambda\mu}) = \sqrt{|a|} \int_{-h}^h (1, \zeta_3, \zeta_3^2) \underline{R}^{\alpha\beta\lambda\mu} d\zeta_3$$

puis la formulation variationnelle prend la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\hat{\gamma}} \left[\left(\underline{S}_{\alpha\beta\lambda\mu}^M \underline{n}^{\lambda\mu} + \underline{S}_{\alpha\beta\lambda\mu}^C \underline{m}^{\lambda\mu} \right) p^{\alpha\beta} + \left(\underline{S}_{\alpha\beta\lambda\mu}^C \underline{n}^{\lambda\mu} + \underline{S}_{\alpha\beta\lambda\mu}^F \underline{m}^{\lambda\mu} \right) q^{\alpha\beta} \right] d\hat{\omega} = \\ \int_{\hat{\omega}} \left[p^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta}^1(\overline{\mathbf{u}}) + q^{\alpha\beta} \rho_{\alpha\beta}^1(\overline{\mathbf{u}}) \right] d\hat{\omega} \quad \forall \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \Sigma^k, \\ \int_{\hat{\omega}} \left[\underline{n}^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta}^1(\overline{\mathbf{v}}) + \underline{m}^{\alpha\beta} \rho_{\alpha\beta}^1(\overline{\mathbf{v}}) \right] d\hat{\omega} = \hat{l}(\overline{\mathbf{v}}) \quad \forall \overline{\mathbf{v}} \in V^k. \end{array} \right. \quad (4.52)$$

Il suffit alors de calculer correctement les quantités $\int_{-h}^h \hat{R}^{\alpha\beta\lambda\mu} \det(\mathbf{d}^{-1})^{-1} d\zeta_3$. L'approximation faite sur le tenseur $(\epsilon_{\alpha\beta})$ entraîne que le modèle obtenu reste d'ordre 1. Toutefois, on remarque que le tenseur ρ^1 est plus simple que ρ^{KL} .

REMARQUE(S) 16 – *Les trois modèles précédents admettent, sous réserve de conditions aux limites cohérentes, une solution unique. Cela repose sur l'ellipticité de l'énergie de déformation, soit une inégalité de Korn. Celle-ci est obtenue par l'absurde à partir du lemme du mouvement rigide, montrant que si les tenseurs γ et ρ sont identiquement nuls, et si le champ de déplacement est fixé à zéro sur une partie de mesure non nulle de la frontière, alors le champ est en fait identiquement nul. Usuellement, ce lemme est montré pour les tenseurs γ et ρ . La propriété en résulte pour les autres modèles, en remarquant au premier ordre, que dans $(L^2(\Omega))^3$:*

$$\left(\gamma^{KL} = \rho^{KL} = 0 \right) \iff \left(\gamma = \rho = 0 \right) \iff \left(\gamma^{KL} = \rho^1 = 0 \right). \quad (4.53)$$

– Dans le cas où d_α^β est approché par δ_α^β , plusieurs modèles apparaissent. Le premier est le modèle de Budiansky-Sanders où $\rho_{\alpha\beta}^{KL}(\mathbf{v})$ devient $v_{3|\alpha\beta} + b_{\alpha|\beta}^\sigma v_\sigma + \frac{1}{2} \left(b_\alpha^\lambda v_{\lambda|\beta} + b_\beta^\lambda v_{\lambda|\alpha} \right)$.

Le second est le modèle de Novozhilov-Donnel, où de façon cohérente⁸ avec l'hypothèse précédente, nous écrivons $v_\alpha \approx \bar{v}_\alpha - \zeta_3 \bar{v}_{3,\alpha}$ et $\rho_{\alpha\beta}^{KL}(\mathbf{v})$ devient $\rho_{\alpha\beta}^{KL}(\mathbf{v}) \approx \bar{v}_{3|\alpha\beta}$. Ce modèle ne vérifie pas le lemme du mouvement rigide mais admet néanmoins une solution unique. La démonstration repose sur le fait qu'une coque peu profonde peut être considérée comme une certaine perturbation d'une plaque pour laquelle nous avons le résultat [BERNADOU et al. (1994)]. ■

4.2.3 Modèle de coque peu profonde délaminée

Avant de déterminer les dérivées lagrangiennes, écrivons le modèle de coque délaminée, en supposant la structure endommagée $\hat{\Omega} = \bigcup_{i=1}^3 \hat{\Omega}_i$ formée de trois coques saines $\hat{\Omega}_i$ raccordées le long du front de fissure γ_f . Pour simplifier les écritures, nous supposons que les trois coques saines sont peu profondes, et utilisons le modèle de Novozhilov. La structure est encadrée sur une partie $\hat{\Gamma}_u \subset \partial\hat{\omega}_1$ de $d\hat{\omega}$ -mesure non nulle et soumise au chargement de flexion $\int_{l_2} f_+^3 v_3 \sqrt{|a|} dl + \int_{l_3} f_-^3 v_3 \sqrt{|a|} dl$ avec $l_2 \subset \partial\hat{\omega}_2$ et $l_3 \subset \partial\hat{\omega}_3$. Le modèle est écrit sur la surface moyenne $\hat{\omega}$ de la structure. Soient $\pi(\hat{\omega}_i)$ la projection de $\hat{\omega}_i$ sur $\hat{\omega}$ et h_i^+, h_i^- les cotes inférieure et supérieure, dans le repère local de la surface moyenne ω et les efforts résultants ($\mathbf{n}_i^{\alpha\beta}$) et moments de flexions ($\mathbf{m}_i^{\alpha\beta}$) tels que $(n_i^{\alpha\beta}, m_i^{\alpha\beta}) = \sqrt{|a|} \int_{h_i^-}^{h_i^+} (1, -\zeta_3) \hat{\sigma}^{\alpha\beta} d\zeta_3$. La formulation variationnelle est (4.46) où V^k est remplacé par l'espace V^n suivant :

$$V^n = \left\{ \mathbf{v} = (v_\alpha, v_3), (v_\alpha)_{|\pi(\hat{\omega}_i)} \in H^1(\pi(\hat{\omega}_i)), (v_3)_{|\pi(\hat{\omega}_i)} \in H^2(\pi(\hat{\omega}_i)), (v_\alpha)_{|\hat{\gamma}_0} = 0, \right. \quad (4.54)$$

$$\left. (v_3)_{|\hat{\Gamma}_u} = 0, (v_{3,\nu})_{|\hat{\Gamma}_u} = 0, v_\alpha, v_3 \text{ et } v_{3,\nu} \text{ continus le long de } \pi(\hat{\gamma}_f) \right\}. \quad (4.55)$$

Les équations d'équilibre sont dans chaque sous-domaine :

$$\left\{ \begin{array}{ll} (n_i^{\alpha\beta})_{,\beta} + n_i^{\gamma\beta} \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha = 0 & \pi(\hat{\omega}_i), \\ (m_i^{\alpha\beta})_{,\alpha\beta} + (m_i^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma)_\gamma - n_i^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} = 0 & \pi(\hat{\omega}_i). \end{array} \right. \quad (4.56)$$

Désignons par ν le vecteur unitaire porté par $\hat{\omega}$, normal à la ligne $\hat{\gamma}_f$ et dirigé vers la partie délaminée, soit vers $\pi(\hat{\omega}_2) = \pi(\hat{\omega}_3)$ et $[[T^{\alpha\beta}]] = \left(T_1^{\alpha\beta} - T_2^{\alpha\beta} - T_3^{\alpha\beta} \right)_{|\hat{\gamma}_f}$. Les conditions de raccord cinématique et d'équilibre statique le long de $\hat{\gamma}_f$ s'écrivent alors :

– Continuité de \hat{v}_α :

$$[[n^{\alpha\beta}]] \nu_\beta = 0 \quad \text{en } \hat{\gamma}_f \quad (\alpha = 1, 2). \quad (4.57)$$

– Continuité de $\hat{v}_{3,\nu}$:

$$[[m^{\alpha\beta}]] \nu_\alpha \nu_\beta = 0 \quad \text{en } \hat{\gamma}_f. \quad (4.58)$$

⁸Pour cette raison, il est possible de retrouver ce modèle via une analyse asymptotique, contrairement au modèle de Budiansky-Sanders, où l'hypothèse $d_\alpha^\beta \approx \delta_\alpha^\beta$ n'est que partiellement utilisée.

– Continuité de \hat{v}_3

$$[[m_{,\beta}^{\alpha\beta}]]\nu_\alpha + [[m^{\alpha\beta}\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma]]\nu_\gamma + \frac{\partial}{\partial s} \left([[m^{\alpha\beta}]]\tau_\alpha\nu_\beta \right) = 0 \quad \text{en } \hat{\gamma}_f, \quad (4.59)$$

obtenu en décomposant $\frac{\partial \hat{v}_3}{\partial \zeta} = \frac{\partial \hat{v}_3}{\partial s}\boldsymbol{\tau} + \frac{\partial \hat{v}_3}{\partial \nu}\boldsymbol{\nu}$ (s désigne l'abscisse curviligne et $\boldsymbol{\tau}$ le vecteur tangent à $\hat{\gamma}_f$ tel que $(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu})$ soit un repère direct).

Les conditions de chargement s'écrivent sur $\pi(l_i)$, $i = 2, 3$:

$$\begin{cases} n_i^{\alpha\beta}\nu_\beta = m_i^{\alpha\beta}\nu_\alpha\nu_\beta = 0, \\ (m_2^{\alpha\beta})_{,\beta}\nu_\alpha + \frac{\partial}{\partial s}(m_2^{\alpha\beta}\tau_\alpha\nu_\beta) + m_2^{\alpha\beta}\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma\nu_\gamma = -f_3^+, \\ (m_3^{\alpha\beta})_{,\beta}\nu_\alpha + \frac{\partial}{\partial s}(m_3^{\alpha\beta}\tau_\alpha\nu_\beta) + m_3^{\alpha\beta}\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma\nu_\gamma = f_3^-. \end{cases} \quad (4.60)$$

Sur les bords libres, les relations sont les précédentes avec $f_3^+ = f_3^- = 0$. Enfin, la condition d'encastrement sur $\hat{\gamma}_0$ s'écrit simplement $\hat{v}_i = \hat{v}_{3,\nu} = 0$ et l'énergie mécanique associée est :

$$I(\bar{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \int_{\pi(\hat{\omega}_i)} (n_i^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta}^{KL}(\bar{\mathbf{u}}) + m_i^{\alpha\beta}\rho_{\alpha\beta}^{KL}(\bar{\mathbf{u}})) d\hat{\omega} - \int_{\pi(l_2)} f_3^+ \bar{u}_3 \sqrt{|a|} dl - \int_{\pi(l_3)} f_3^- \bar{u}_3 \sqrt{|a|} dl \quad (4.61)$$

que nous allons maintenant dériver par rapport à γ_f .

4.2.4 Mise en œuvre de la θ -méthode

La cinématique du front est décrite par le champ de vecteurs plans $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1(\zeta_\alpha), \theta_2(\zeta_\alpha), 0) \in (W^{2,\infty}(\hat{\omega}))^3$ réguliers et de support un voisinage du front de fissure inclus dans $\hat{\omega} = \cup_{i=1}^3 \pi(\hat{\omega}_i)$, surface moyenne de la structure endommagée $\hat{\Omega}$. La transformation d'avancée virtuelle du front est $\mathcal{F}^\eta : \hat{\omega} \rightarrow \hat{\omega}^\eta; \boldsymbol{\zeta} \rightarrow \boldsymbol{\zeta}^\eta = \boldsymbol{\zeta} + \eta\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\zeta})$. Le jacobien de cette transformation est alors $(\mathbf{I}_2 + \eta\frac{\partial\boldsymbol{\theta}}{\partial\boldsymbol{\zeta}})$, ce qui entraîne :

$$\begin{cases} d\boldsymbol{\zeta}^\eta = \det(\mathbf{I}_2 + \eta\frac{\partial\boldsymbol{\theta}}{\partial\boldsymbol{\zeta}}) d\boldsymbol{\zeta} = \left(1 + \eta \operatorname{div}\boldsymbol{\theta} + \eta^2 \det(\frac{\partial\boldsymbol{\theta}}{\partial\boldsymbol{\zeta}}) \right) d\boldsymbol{\zeta}, \\ \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\zeta}^\eta} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\zeta}} \cdot (\mathbf{I}_2 + \eta\frac{\partial\boldsymbol{\theta}}{\partial\boldsymbol{\zeta}})^{-1} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\zeta}} - \eta \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\zeta}} \cdot \frac{\partial\boldsymbol{\theta}}{\partial\boldsymbol{\zeta}} + \eta^2 \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\zeta}} \cdot \frac{\partial\boldsymbol{\theta}}{\partial\boldsymbol{\zeta}} \cdot \frac{\partial\boldsymbol{\theta}}{\partial\boldsymbol{\zeta}} + o(\eta^2). \end{cases} \quad (4.62)$$

Nous utiliserons cette dernière équation pour l'équation de comportement tandis que pour l'équation d'équilibre⁹, nous utiliserons la relation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\zeta}^\eta} = \det(\mathbf{I}_2 + \eta\frac{\partial\boldsymbol{\theta}}{\partial\boldsymbol{\zeta}})^{-1} \left[\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\zeta}} + \eta \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\zeta}} \operatorname{Tr}(\frac{\partial\boldsymbol{\theta}}{\partial\boldsymbol{\zeta}}) - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\zeta}} \cdot \frac{\partial\boldsymbol{\theta}}{\partial\boldsymbol{\zeta}} \right) \right]. \quad (4.63)$$

Parmi les formules utiles, citons :

$$\begin{aligned} \nabla(\nabla v_3)^\eta &= \nabla(\nabla v_3) - \eta \left[\nabla(\nabla v_3 \cdot \frac{\partial\boldsymbol{\theta}}{\partial\boldsymbol{\zeta}}) + \nabla(\nabla v_3) \cdot \frac{\partial\boldsymbol{\theta}}{\partial\boldsymbol{\zeta}} \right] \\ &\quad + \eta^2 \left[\nabla(\nabla v_3 \cdot (\frac{\partial\boldsymbol{\theta}}{\partial\boldsymbol{\zeta}})^2) + \nabla(\nabla v_3 \cdot \frac{\partial\boldsymbol{\theta}}{\partial\boldsymbol{\zeta}}) \cdot \frac{\partial\boldsymbol{\theta}}{\partial\boldsymbol{\zeta}} + \nabla(\nabla v_3) \cdot (\frac{\partial\boldsymbol{\theta}}{\partial\boldsymbol{\zeta}})^2 \right] + o(\eta^2). \end{aligned}$$

⁹où $\det(\mathbf{I}_2 + \eta\frac{\partial\boldsymbol{\theta}}{\partial\boldsymbol{\zeta}})$ apparaît

Enfin, pour tout tenseur \mathbf{f} de composantes de classe $C^2(\hat{\omega})$, la dérivation par rapport à la métrique locale s'écrit :

$$\mathbf{f}^\eta = \mathbf{f} + \eta \nabla \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\theta} + \frac{1}{2} \eta^2 \nabla^2 \mathbf{f} \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\theta} + o(\eta^2), \quad (4.64)$$

cette relation étant à considérer composante par composante. Afin de rendre possible le calcul des dérivées lagrangiennes et d'utiliser les relations précédentes, il convient au préalable, de réécrire la formulation (4.46) sous forme matricielle. Notant $\mathbf{v}_t = (v_1, v_2)$, il vient :

$$p^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta}^{KL}(\mathbf{v}_t, v_3) = Tr(p \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_t}{\partial \zeta}) - Tr(p \cdot \Gamma) \cdot \mathbf{v}_t - Tr(p \cdot \mathbf{b}) v_3 \quad (4.65)$$

et ¹⁰ :

$$\begin{aligned} q^{\alpha\beta} \rho_{\alpha\beta}^{KL}(\mathbf{v}_t, v_3) = & Tr(\mathbf{q} \cdot \nabla^2 v_3) - Tr(\mathbf{q} \cdot \Gamma) \cdot \nabla v_3 + Tr(\mathbf{q} \cdot \mathbf{c}) v_3 + Tr(\mathbf{q} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{v}_t \\ & + q^{\alpha\beta} \frac{1}{2} b_\beta^\lambda \left(v_{\lambda|\alpha} - v_{\alpha|\lambda} \right) + q^{\alpha\beta} \frac{1}{2} b_\alpha^\lambda \left(v_{\lambda|\beta} - v_{\beta|\lambda} \right). \end{aligned}$$

Le traitement des deux derniers termes est plus délicat. Leur somme vaut $\frac{1}{2} q^{\alpha\beta} (b_\beta^\beta - b_\alpha^\alpha) (1 - \delta_\alpha^\beta) (v_{\beta,\alpha} - v_{\alpha,\beta})$ - le dernier facteur est appelé le tenseur tourbillon plan - puis finalement $q^{12} (b_1^1 - b_2^2) (v_{1,2} - v_{2,1})$, selon $q^{12} = q^{21}$. Nous la réécrivons ainsi :

$$q^{12} (b_1^1 - b_2^2) (v_{1,2} - v_{2,1}) = \frac{b_1^1 - b_2^2}{2} Tr(\mathbf{q} \cdot A) \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_t}{\partial \zeta} - \left(\frac{\partial \mathbf{v}_t}{\partial \zeta} \right)^T \equiv s Tr(\mathbf{q} \cdot A) \cdot (\nabla \mathbf{v}_t)^* \quad (4.66)$$

en définissant,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\nabla \mathbf{v}_t)^* = \frac{\nabla \mathbf{v}_t - (\nabla \mathbf{v}_t)^T}{2} \quad \text{et} \quad s = b_1^1 - b_2^2.$$

Finalement, la formulation variationnelle prend la forme suivante (nous omettons $d\hat{\omega}$) :

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_{\hat{\omega}} Tr(S^M : \mathbf{n} + S^C : \mathbf{m}) \cdot \mathbf{p} + Tr(S^C : \mathbf{n} + S^F : \mathbf{m}) \cdot \mathbf{q} = \\ & \quad + \int_{\hat{\omega}} Tr(\mathbf{p} \cdot \nabla \mathbf{u}_t) - Tr(\mathbf{p} \cdot \Gamma) \cdot \mathbf{u}_t - Tr(\mathbf{p} \cdot \mathbf{b}) v_3 + \int_{\hat{\omega}} s Tr(\mathbf{q} \cdot A) \cdot \nabla \mathbf{u}_t^* \\ & \quad + \int_{\hat{\omega}} Tr(\mathbf{q} \cdot \nabla^2 v_3) - Tr(\mathbf{q} \cdot \Gamma) \cdot \nabla v_3 + Tr(\mathbf{q} \cdot \mathbf{c}) v_3 + Tr(\mathbf{q} \cdot \bar{\mathbf{b}}) \cdot \mathbf{u}_t \quad \forall \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \Sigma^k, \\ & \int_{\hat{\omega}} Tr(\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{v}_t) - Tr(\mathbf{m} \cdot \Gamma) \cdot \mathbf{v}_t - Tr(\mathbf{m} \cdot \mathbf{b}) v_3 + \int_{\hat{\omega}} s Tr(\mathbf{m} \cdot A) \cdot \nabla \mathbf{v}_t^* \\ & \quad + \int_{\hat{\omega}} Tr(\mathbf{m} \cdot \nabla^2 v_3) - Tr(\mathbf{m} \cdot \bar{\Gamma}) \cdot \nabla v_3 + Tr(\mathbf{m} \cdot \mathbf{c}) v_3 + Tr(\mathbf{m} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{u}_t = \hat{l}(\bar{\mathbf{v}}) \quad \forall \bar{\mathbf{v}} \in V^n. \end{aligned} \right.$$

Il ne reste plus qu'à écrire cette formulation sur l'ouvert virtuel $\hat{\Omega}^\eta = \hat{\omega}^\eta \times]-h, h[$, à se ramener sur $\hat{\Omega}$ selon les relations précédentes puis à développer :

$$(\mathbf{u}_t^\eta, u_3^\eta, \mathbf{n}^\eta, \mathbf{m}^\eta) = (\mathbf{u}_t, u_3, \mathbf{n}, \mathbf{m}) + \eta (\mathbf{u}_t^1, u_3^1, \mathbf{n}^1, \mathbf{m}^1) + \eta^2 (\mathbf{u}_t^2, u_3^2, \mathbf{n}^2, \mathbf{m}^2) + o(\eta^2), \quad (4.67)$$

¹⁰ par exemple, $Tr(\mathbf{p} \cdot \Gamma) \cdot \mathbf{v}_t = p^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda v_\lambda$.

et enfin à identifier les termes de même ordre en le paramètre η . A titre d'exemple, nous avons :

$$\begin{aligned} \int_{\hat{\omega}^\eta} Tr(\mathbf{p}.\Gamma^\eta).\mathbf{u}_t^\eta d\hat{\omega}^\eta &= \int_{\hat{\omega}} Tr(\mathbf{p}.\Gamma).\mathbf{u}_t d\hat{\omega} + \eta \left[\int_{\hat{\omega}} \left(Tr(\mathbf{p}.\Gamma).\mathbf{u}_t^1 + Tr(\mathbf{p}.\nabla\Gamma.\boldsymbol{\theta}).\mathbf{u}_t \right) d\hat{\omega} \right] \\ &+ \eta^2 \left[\int_{\hat{\omega}} \left(Tr(\mathbf{p}.\Gamma).\mathbf{u}_t^2 + Tr(\mathbf{p}.\nabla\Gamma.\boldsymbol{\theta}).\mathbf{u}_t^1 + \frac{1}{2}Tr(\mathbf{p}.\nabla^2\Gamma\boldsymbol{\theta}.\boldsymbol{\theta}).\mathbf{u}_t \right) d\hat{\omega} \right] + o(\eta^2). \end{aligned}$$

Dans le paragraphe suivant, nous donnons les résultats du calcul, dans le cas du modèle de Novozhilov pour lequel la formulation est simplement :

$$\left\{ \begin{aligned} &\int_{\hat{\omega}} Tr(S^M : \mathbf{n} + S^C : \mathbf{m}).\mathbf{p} + Tr(S^C : \mathbf{n} + S^F : \mathbf{m}).\mathbf{q} = \\ &\int_{\hat{\omega}} Tr(\mathbf{p}.\nabla\mathbf{u}_t) - Tr(\mathbf{p}.\Gamma).\mathbf{u}_t - Tr(\mathbf{p}.\mathbf{b})u_3 + Tr(\mathbf{q}.\nabla^2u_3) - Tr(\mathbf{q}.\Gamma).\nabla u_3 \quad \forall \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \Sigma^k, \\ &\int_{\hat{\omega}} \underbrace{Tr(\mathbf{n}.\nabla\mathbf{v}_t) - Tr(\mathbf{m}.\Gamma).\mathbf{v}_t - Tr(\mathbf{m}.\mathbf{b})v_3 + Tr(\mathbf{m}.\nabla^2v_3) - Tr(\mathbf{m}.\Gamma).\nabla v_3}_{\equiv F(\mathbf{n}, \mathbf{m}, \mathbf{v}_t, v_3)} = \hat{l}(\bar{\mathbf{v}}) \quad \forall \bar{\mathbf{v}} \in V^n. \end{aligned} \right.$$

4.2.5 Dérivées première et seconde dans le cas coque peu profonde

Après développements et simplifications, le taux de restitution se réduit à :

$$\begin{aligned} \hat{g}(\boldsymbol{\theta}) &= \int_{\hat{\omega}} Tr(\mathbf{n}.\nabla\mathbf{u}_t.\nabla\boldsymbol{\theta}) + \int_{\hat{\omega}} Tr(\mathbf{m}.\nabla\Gamma.\boldsymbol{\theta}).\nabla u_3 + \int_{\hat{\omega}} Tr(\mathbf{m}.\nabla^2u_3.\nabla\boldsymbol{\theta}) \\ &- \int_{\hat{\omega}} Tr(\mathbf{m}.\Gamma).\nabla u_3.\nabla\boldsymbol{\theta} + \int_{\hat{\omega}} Tr(\mathbf{n}.\nabla\Gamma.\boldsymbol{\theta}).\mathbf{u}_t + \int_{\hat{\omega}} Tr(\mathbf{n}.\nabla\mathbf{b}.\boldsymbol{\theta})u_3 \\ &+ \int_{\hat{\omega}} Tr(\mathbf{m}.\nabla(\nabla u_3.\nabla\boldsymbol{\theta})).\mathbf{u}_t - \frac{1}{2} \int_{\hat{\omega}} Tr(\mathbf{n}.\nabla\mathbf{u}_t)div\boldsymbol{\theta} + \frac{1}{2} \int_{\hat{\omega}} Tr(\mathbf{n}.\Gamma).\mathbf{u}_tdiv\boldsymbol{\theta} \\ &- \frac{1}{2} \int_{\hat{\omega}} Tr(\mathbf{m}.\nabla^2u_3)div\boldsymbol{\theta} + \frac{1}{2} \int_{\hat{\omega}} Tr(\mathbf{m}.\Gamma).\nabla u_3div\boldsymbol{\theta} + \frac{1}{2} \int_{\hat{\omega}} Tr(\mathbf{n}.\mathbf{b})u_3div\boldsymbol{\theta} \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\hat{\omega}} Tr(\nabla S^M.\boldsymbol{\theta} : \mathbf{n} + \nabla S^C.\boldsymbol{\theta} : \mathbf{m}).\mathbf{n} + Tr(\nabla S^C.\boldsymbol{\theta} : \mathbf{n} + \nabla S^F.\boldsymbol{\theta} : \mathbf{m}).\mathbf{m}. \end{aligned}$$

Les dérivées lagrangiennes $\mathbf{n}^1, \mathbf{m}^1 \in \Sigma^k$ et $\mathbf{u}^1 = (u_t^1, u_3^1) \in V^n$ vérifient la formulation :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\hat{\omega}} Tr(S^M : \mathbf{n}^1 + S^C : \mathbf{m}^1) \cdot \mathbf{p} + Tr(S^C : \mathbf{n}^1 + S^F : \mathbf{m}^1) \cdot \mathbf{q} - \int_{\hat{\omega}} F(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{u}_t^1, u_3^1) = \\ \quad - \int_{\hat{\omega}} Tr(\nabla S^M \cdot \boldsymbol{\theta} : \mathbf{n} + \nabla S^C \cdot \boldsymbol{\theta} : \mathbf{m}) \cdot \mathbf{n} + Tr(\nabla S^C \cdot \boldsymbol{\theta} : \mathbf{n} + \nabla S^F \cdot \boldsymbol{\theta} : \mathbf{m}) \cdot \mathbf{m} \\ \quad - \int_{\hat{\omega}} Tr(\mathbf{p} \cdot \nabla \mathbf{u}_t \cdot \nabla \boldsymbol{\theta}) + Tr(\mathbf{p} \cdot \nabla \Gamma \cdot \boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{u}_t + Tr(\mathbf{p} \cdot \nabla \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\theta}) \mathbf{u}_3 + Tr(\mathbf{q} \cdot \nabla (\nabla u_3 \cdot \nabla \boldsymbol{\theta})) \\ \quad - \int_{\hat{\omega}} Tr(\mathbf{q} \cdot \nabla (\nabla u_3) \cdot \nabla \boldsymbol{\theta}) + Tr(\mathbf{q} \cdot \nabla \Gamma \cdot \boldsymbol{\theta}) \cdot \nabla u_3 - Tr(\mathbf{q} \cdot \Gamma) \cdot \nabla u_3 \cdot \nabla \boldsymbol{\theta} \quad \forall \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \Sigma^k, \\ \int_{\hat{\omega}} F(\mathbf{n}^1, \mathbf{m}^1, \mathbf{v}_t, v_3) = \int_{\hat{\omega}} -Tr(\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{v}_t) div \boldsymbol{\theta} + Tr(\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{v}_t \cdot \nabla \boldsymbol{\theta}) + Tr(\mathbf{n} \cdot \Gamma) \cdot \mathbf{v}_t div \boldsymbol{\theta} \\ \quad + \int_{\hat{\omega}} Tr(\mathbf{n} \cdot \nabla \Gamma \cdot \boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{v}_t + Tr(\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}) v_3 div \boldsymbol{\theta} + Tr(\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\theta}) v_3 \\ \quad + \int_{\hat{\omega}} -Tr(\mathbf{m} \cdot \nabla^2 v_3) div \boldsymbol{\theta} + Tr(\mathbf{m} \cdot \nabla (\nabla v_3 \cdot \nabla \boldsymbol{\theta})) + Tr(\mathbf{m} \cdot \nabla^2 v_3 \cdot \nabla \boldsymbol{\theta}) \\ \quad + \int_{\hat{\omega}} Tr(\mathbf{m} \cdot \nabla \Gamma \cdot \boldsymbol{\theta}) \cdot \nabla u_3 + Tr(\mathbf{m} \cdot \Gamma) \cdot (\nabla v_3 div \boldsymbol{\theta} - \nabla v_3 \cdot \nabla \boldsymbol{\theta}) \quad \forall \mathbf{v} \in V^n, \end{array} \right.$$

tandis que la dérivée seconde se réduit à :

$$\begin{aligned} 2\hat{I}^{(2)}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}) = & - \int_{\hat{\omega}} Tr(\mathbf{n}^1 \cdot \nabla \mathbf{u}_t \cdot \nabla \boldsymbol{\theta}) + \int_{\hat{\omega}} Tr(\mathbf{n}^1 \cdot \nabla \mathbf{u}_t) div \boldsymbol{\theta} - \int_{\hat{\omega}} Tr(\mathbf{n}^1 \cdot \Gamma) \cdot \mathbf{u}_t div \boldsymbol{\theta} \\ & - \int_{\hat{\omega}} Tr(\mathbf{n}^1 \cdot \nabla \Gamma \cdot \boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{u}_t - \int_{\hat{\omega}} Tr(\mathbf{n}^1 \cdot \mathbf{b}) u_3 div \boldsymbol{\theta} - \int_{\hat{\omega}} Tr(\mathbf{n}^1 \cdot \nabla \boldsymbol{\theta}) v_3 \\ & - \int_{\hat{\omega}} Tr(\mathbf{m}^1 \cdot \nabla (\nabla u_3 \cdot \nabla \boldsymbol{\theta})) - \int_{\hat{\omega}} Tr(\mathbf{m}^1 \cdot \nabla \Gamma \cdot \boldsymbol{\theta}) \cdot \nabla u_3 + \frac{1}{2} \int_{\hat{\omega}} Tr(\mathbf{m} \cdot \Gamma) \cdot \nabla u_3^1 \cdot \nabla \boldsymbol{\theta} \\ & - \int_{\hat{\omega}} Tr(\mathbf{m}^1 \cdot \nabla^2 u_3 \cdot \nabla \boldsymbol{\theta}) \cdot \nabla u_3 + \int_{\hat{\omega}} Tr(\mathbf{m}^1 \cdot \nabla^2 u_3) div \boldsymbol{\theta} - \int_{\hat{\omega}} Tr(\mathbf{m}^1 \cdot \Gamma) (\nabla u_3 div \boldsymbol{\theta} - \nabla u_3 \cdot \nabla \boldsymbol{\theta}) \\ & - \int_{\hat{\omega}} Tr(\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u}_t^1 \cdot \nabla \boldsymbol{\theta}) - \int_{\hat{\omega}} Tr(\mathbf{n} \cdot \nabla \Gamma \cdot \boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{u}_t^1 - \int_{\hat{\omega}} Tr(\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\theta}) u_3^1 \\ & - \int_{\hat{\omega}} Tr(\mathbf{m} \cdot \nabla (\nabla u_3^1 \cdot \nabla \boldsymbol{\theta})) - \int_{\hat{\omega}} Tr(\mathbf{m} \cdot \nabla^2 u_3^1 \cdot \nabla \boldsymbol{\theta}) - \int_{\hat{\omega}} Tr(\mathbf{m} \cdot \nabla \Gamma \cdot \nabla \boldsymbol{\theta}) \cdot \nabla u_3^1 \\ & - \int_{\hat{\omega}} Tr(\mathbf{n} \cdot \Gamma) \cdot \mathbf{u}_t det(\nabla \boldsymbol{\theta}) + 2 \int_{\hat{\omega}} Tr(\mathbf{m} \cdot \nabla (\nabla u_3 \cdot (\nabla \boldsymbol{\theta})^2)) + 2 \int_{\hat{\omega}} Tr(\mathbf{m} \cdot \nabla \Gamma) \cdot \nabla u_3 \cdot \nabla \boldsymbol{\theta} \\ & - \int_{\hat{\omega}} Tr(\mathbf{n} \cdot \nabla \Gamma \cdot \boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{u}_t div \boldsymbol{\theta} - \int_{\hat{\omega}} Tr(\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}) u_3 det(\nabla \boldsymbol{\theta}) - \int_{\hat{\omega}} Tr(\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\theta}) u_3 div \boldsymbol{\theta} \\ & + 2 \int_{\hat{\omega}} Tr(\mathbf{m} \cdot \nabla (\nabla u_3 \cdot \nabla \boldsymbol{\theta}) \cdot \nabla \boldsymbol{\theta}) - \int_{\hat{\omega}} Tr(\mathbf{m} \cdot \nabla (\nabla u_3 \cdot \nabla \boldsymbol{\theta})) div \boldsymbol{\theta} - \int_{\hat{\omega}} Tr(\mathbf{m} \cdot \nabla \Gamma \cdot \boldsymbol{\theta}) \cdot \nabla u_3 div \boldsymbol{\theta} \\ & + \int_{\hat{\omega}} Tr(\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u}_t \cdot (\nabla \boldsymbol{\theta})^2) - \int_{\hat{\omega}} Tr(\mathbf{n} \cdot \nabla^2 \Gamma \cdot \boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{u}_t - \int_{\hat{\omega}} Tr(\mathbf{n} \cdot \nabla^2 \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\theta}) u_3 \end{aligned} \tag{4.68}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\hat{\omega}} Tr(\mathbf{m} \cdot \nabla^2 u_3 \cdot (\nabla \boldsymbol{\theta})^2) - \int_{\hat{\omega}} Tr(\mathbf{m} \cdot \nabla^2 \Gamma \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}) \cdot \nabla u_3 - \frac{1}{2} \int_{\hat{\omega}} Tr(\mathbf{m} \cdot \Gamma) \cdot \nabla u_3 \cdot (\nabla \boldsymbol{\theta})^2 \\
& - \int_{\hat{\omega}} Tr(\nabla S^M \cdot \boldsymbol{\theta} : \mathbf{n}^1 + \nabla S^C \cdot \boldsymbol{\theta} : \mathbf{m}^1) \cdot \mathbf{n} + Tr(\nabla S^C \cdot \boldsymbol{\theta} : \mathbf{n}^1 + \nabla S^F \cdot \boldsymbol{\theta} : \mathbf{m}^1) \cdot \mathbf{m} \\
& - \frac{1}{2} \int_{\hat{\omega}} Tr(\nabla^2 S^M \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta} : \mathbf{n} + \nabla^2 S^C \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta} : \mathbf{m}) \cdot \mathbf{n} + Tr(\nabla^2 S^C \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta} : \mathbf{n}^1 + \nabla^2 S^F \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta} : \mathbf{m}) \cdot \mathbf{m} ,
\end{aligned}$$

comportant une quarantaine de termes ¹¹, nombre à comparer avec les quatorze du cas droit [OUSSET (1999)] pour lequel nous vérifions que les expressions obtenues coïncident. Le calcul permettant d'exprimer ces dérivées sous forme d'intégrales curvilignes semble hors de portée ici. Compte tenu de la complexité de ces expressions, nous choisissons de ne pas faire d'hypothèse cinématique et d'obtenir les expressions à partir d'une formulation coque épaisse. Ceci fait l'objet du paragraphe suivant.

4.3 Dérivées lagrangiennes pour des coques épaisses

Afin de simplifier la mise en œuvre de la θ -méthode, posons $\underline{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{\boldsymbol{\sigma}} \sqrt{|g|}$, $\underline{\mathbb{S}} = \hat{\mathbb{S}} \sqrt{|g|}^{-1}$, $\underline{\mathbf{F}} = \hat{\mathbf{F}}$, $\underline{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{u}}$. La formulation (4.28) devient simplement alors :

$$\begin{cases} \int_{\hat{\Omega}} Tr(\underline{\mathbb{S}} : \underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\tau}) d\hat{\Omega} = \int_{\hat{\Omega}} Tr(\boldsymbol{\tau} \cdot \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{u}})) d\hat{\Omega} & \forall \boldsymbol{\tau} \in \Sigma(\hat{\Omega}) , \\ \int_{\hat{\Omega}} Tr(\underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{\mathbf{F}} \cdot (\underline{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{e}(\mathbf{v}))^T) d\hat{\Omega} = \int_{\hat{\Gamma}_f} \hat{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{v} \sqrt{|g|} d\Gamma & \forall \mathbf{v} \in V(\hat{\Omega}) , \end{cases} \quad (4.69)$$

tandis que l'énergie mécanique définie sur $V(\hat{\Omega}) \times \Sigma(\hat{\Omega})$ s'écrit :

$$I(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} \int_{\hat{\Omega}} Tr(\underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{u}})) d\hat{\Omega} - \int_{\hat{\Gamma}_f} \hat{\mathbf{f}} \cdot \underline{\mathbf{u}} \sqrt{|g|} d\Gamma . \quad (4.70)$$

4.3.1 Elasticité linéaire

Commençons par le faire dans le cas des petits déplacements, pour lequel la formulation (4.69) se réduit à ¹² :

$$\begin{cases} \int_{\hat{\Omega}} Tr(\underline{\mathbb{S}} : \underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\tau}) d\hat{\Omega} = \int_{\hat{\Omega}} Tr(\boldsymbol{\tau} \cdot \underline{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{e}(\underline{\mathbf{u}})) d\hat{\Omega} & \forall \boldsymbol{\tau} \in \Sigma(\hat{\Omega}) , \\ \int_{\hat{\Omega}} Tr(\underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{e}(\mathbf{v})) d\hat{\Omega} = \hat{l}(\mathbf{v}) & \forall \mathbf{v} \in \tilde{V}(\hat{\Omega}) , \end{cases} \quad (4.71)$$

pour $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) \in \tilde{V}(\hat{\Omega}) \times \Sigma(\hat{\Omega})$ et $\tilde{V}(\hat{\Omega}) = \{\mathbf{v} \in (H^1(\hat{\Omega}))^3, \mathbf{v}|_{\hat{\Gamma}_u} = 0\}$. Puis après des calculs similaires à ceux effectués jusqu'à présent, le couple des dérivées lagrangiennes $(\mathbf{u}^1, \boldsymbol{\sigma}^1) \in$

¹¹Plus de soixante dans le cas général.

¹²Dans ce paragraphe, toutes les quantités ne sont pas soulignées : $\boldsymbol{\sigma}$ désigne $\underline{\boldsymbol{\sigma}}$...

$\tilde{V}(\hat{\Omega}) \times \Sigma(\hat{\Omega})$ vérifie la formulation suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\hat{\Omega}} Tr(\mathbb{S} : \boldsymbol{\sigma}^1 \cdot \boldsymbol{\tau}) d\hat{\Omega} + \int_{\hat{\Omega}} Tr(\nabla \mathbb{S} \cdot \boldsymbol{\theta} : \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau}) d\hat{\Omega} = \int_{\hat{\Omega}} Tr(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{e}(\mathbf{u}^1)) d\hat{\Omega} \\ \quad + \int_{\hat{\Omega}} Tr\left(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{d} \cdot [\nabla p(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\theta} - (\nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\theta})^T]\right) d\hat{\Omega} + \int_{\hat{\Omega}} Tr(\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{e}(\mathbf{u})) d\hat{\Omega} \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \Sigma(\hat{\Omega}), \\ \int_{\hat{\Omega}} Tr(\boldsymbol{\sigma}^1 \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{e}(\mathbf{v})) d\hat{\Omega} = - \int_{\hat{\Omega}} Tr(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{e}(\mathbf{v})) div \boldsymbol{\theta} d\hat{\Omega} - \int_{\hat{\Omega}} Tr(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{e}(\mathbf{u})) d\hat{\Omega} \\ \quad - \int_{\hat{\Omega}} Tr\left(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{d} \cdot [\nabla p(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\theta} - (\nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\theta})^T]\right) d\hat{\Omega} \quad \forall \mathbf{v} \in \tilde{V}(\hat{\Omega}), \end{array} \right. \quad (4.73)$$

et la loi de comportement locale (4.73) s'écrit, dans $\hat{\Omega}$:

$$\boldsymbol{\sigma}^1 = \mathbb{R} : \mathbf{d} \cdot \mathbf{e}(\mathbf{u}^1) + \mathbb{R} : \mathbf{d} \cdot [\nabla p(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\theta} - (\nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\theta})^T] + \mathbb{R} : \nabla \mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{e}(\mathbf{u}) - \mathbb{R} : \nabla \mathbb{S} \cdot \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (4.75)$$

avec $\boldsymbol{\sigma} = \hat{\mathbb{R}} : \mathbf{d} \cdot \mathbf{e}(\mathbf{u})$, qu'il convient ensuite d'injecter dans (4.74) pour obtenir une formulation en déplacements. Puis, par des arguments classiques, la dérivée première de l'énergie est obtenue sous la forme :

$$\begin{aligned} \hat{I}^{(1)}(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{1}{2} \int_{\hat{\Omega}} Tr(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{e}(\mathbf{u})) div \boldsymbol{\theta} d\hat{\Omega} + \int_{\hat{\Omega}} Tr(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{e}(\mathbf{u})) d\hat{\Omega} \\ &\quad + \int_{\hat{\Omega}} Tr\left(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{d} \cdot [\nabla p(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\theta} - (\nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\theta})^T]\right) d\hat{\Omega} - \frac{1}{2} \int_{\hat{\Omega}} Tr(\nabla \mathbb{S} \cdot \boldsymbol{\theta} : \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma}) d\hat{\Omega}, \end{aligned} \quad (4.76)$$

en utilisant les propriétés de symétrie de $\hat{\mathbb{S}}$ et de $\nabla \hat{\mathbb{S}} \cdot \boldsymbol{\theta}$. Enfin, la dérivée seconde est :

$$\begin{aligned} \hat{I}^{(2)}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}) &= \frac{1}{2} \int_{\hat{\Omega}} Tr(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{e}(\mathbf{u})) det(\nabla \boldsymbol{\theta}) d\hat{\Omega} + \frac{1}{2} \int_{\hat{\Omega}} Tr(\boldsymbol{\sigma}^1 \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{e}(\mathbf{u})) div \boldsymbol{\theta} d\hat{\Omega} \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\hat{\Omega}} Tr(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{e}(\mathbf{u}^1)) div \boldsymbol{\theta} + \frac{1}{2} \int_{\hat{\Omega}} Tr(\boldsymbol{\sigma} \cdot B_1(\mathbf{u})) div \boldsymbol{\theta} d\hat{\Omega} \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\hat{\Omega}} Tr(\boldsymbol{\sigma}^1 \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{e}(\mathbf{u}^1)) d\hat{\Omega} + \frac{1}{2} \int_{\hat{\Omega}} Tr(\boldsymbol{\sigma}^1 \cdot B_1(\mathbf{u}^1)) d\hat{\Omega} + \frac{1}{2} \int_{\hat{\Omega}} Tr(\boldsymbol{\sigma} \cdot B_2(\mathbf{u}^1, \mathbf{u})) d\hat{\Omega} \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\hat{\Omega}} Tr\left(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{d} \cdot [\nabla p(\mathbf{u}^1) \cdot \boldsymbol{\theta} - (\nabla \mathbf{u}^1 \cdot \nabla \boldsymbol{\theta})^T + (\nabla \mathbf{u} \cdot (\nabla \boldsymbol{\theta})^2)^T]\right) d\hat{\Omega} \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\hat{\Omega}} Tr(\nabla \mathbb{S} \cdot \boldsymbol{\theta} : \boldsymbol{\sigma}^1 \cdot \boldsymbol{\sigma}) d\hat{\Omega} - \frac{1}{2} \int_{\hat{\Omega}} Tr(\nabla^2 \mathbb{S} \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta} : \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma}) d\hat{\Omega}, \end{aligned} \quad (4.77)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} B_1(\mathbf{u}) = \mathbf{d} \cdot A_1(\mathbf{u}) + \nabla \mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{e}(\mathbf{u}), \\ B_2(\mathbf{u}^1, \mathbf{u}) = \mathbf{d} \cdot A_2(\mathbf{u}^1, \mathbf{u}) + \nabla \mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\theta} \cdot \left(\mathbf{e}(\mathbf{u}^1) + A_1(\mathbf{u})\right) + \frac{1}{2} \nabla^2 \mathbf{d} \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{e}(\mathbf{u}), \\ A_1(\mathbf{u}) = \nabla p(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\theta} - (\nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\theta})^T, \\ A_2(\mathbf{u}^1, \mathbf{u}) = \nabla p(\mathbf{u}^1) \cdot \boldsymbol{\theta} - (\nabla \mathbf{u}^1 \cdot \nabla \boldsymbol{\theta})^T + (\nabla \mathbf{u} \cdot (\nabla \boldsymbol{\theta})^2)^T + \frac{1}{2} \nabla^2 p(\mathbf{u}) \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}. \end{array} \right.$$

4.3.2 Grands déplacements

Nous obtenons, en utilisant la symétrie du tenseur $(\mathbf{a}^{\alpha\beta})$, que le couple $(\boldsymbol{\sigma}^1, \mathbf{u}^1) \in \Sigma(\hat{\Omega}) \times V(\hat{\Omega})$ vérifie la formulation suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma}^1 = \mathbb{R} : \mathbf{F} \cdot \left([\mathbf{d} \cdot \mathbf{e}(\mathbf{u}^1)]^T + [\mathbf{d} \cdot (\nabla p(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\theta} - (\nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\theta})^T)]^T + [\nabla \mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{e}(\mathbf{u})]^T \right) \\ \quad - \mathbb{R} : \nabla \mathbb{S} \cdot \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{2} \mathbb{R} : \mathbf{d} \cdot \mathbf{e}(\mathbf{u}) \cdot \nabla \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\theta} \cdot [\mathbf{d} \cdot \mathbf{e}(\mathbf{u})]^T \quad \text{dans } \hat{\Omega} \\ \int_{\hat{\Omega}} Tr(\boldsymbol{\sigma}^1 \cdot \mathbf{F} \cdot [\mathbf{d} \cdot \mathbf{e}(\mathbf{v})]^T) d\hat{\Omega} + \int_{\hat{\Omega}} Tr(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{e}(\mathbf{u}^1) \cdot \mathbf{a} \cdot [\mathbf{d} \cdot \mathbf{e}(\mathbf{v})]^T) d\hat{\Omega} = \\ \quad - \int_{\hat{\Omega}} Tr(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F} \cdot [\mathbf{d} \cdot \mathbf{e}(\mathbf{v})]^T) div \boldsymbol{\theta} d\hat{\Omega} - \int_{\hat{\Omega}} Tr(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F} \cdot [\nabla \mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{e}(\mathbf{v})]^T) d\hat{\Omega} \\ \quad - \int_{\hat{\Omega}} Tr \left(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F} \cdot [\mathbf{d} \cdot (\nabla p(\mathbf{v}) \cdot \boldsymbol{\theta} - (\nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\theta})^T)]^T \right) d\hat{\Omega} \\ \quad - \int_{\hat{\Omega}} Tr(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{e}(\mathbf{u}) \cdot \nabla \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\theta} \cdot [\mathbf{d} \cdot \mathbf{e}(\mathbf{v})]^T) d\hat{\Omega} \\ \quad - \int_{\hat{\Omega}} Tr(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{e}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{a} \cdot [\mathbf{d} \cdot \mathbf{e}(\mathbf{v})]^T) d\hat{\Omega} \\ \quad - \int_{\hat{\Omega}} Tr \left(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{d} \cdot [\nabla p(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\theta} - (\nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\theta})^T] \cdot \mathbf{a} \cdot [\mathbf{d} \cdot \mathbf{e}(\mathbf{v})]^T \right) d\hat{\Omega} \quad \forall \mathbf{v} \in V(\hat{\Omega}) . \end{array} \right. \quad (4.78)$$

Le taux de restitution de l'énergie s'écrit alors :

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{1}{2} \int_{\hat{\Omega}} Tr(\nabla \mathbb{S} : \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma}) d\hat{\Omega} + \int_{\hat{\Omega}} Tr \left(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F} \cdot [\mathbf{d} \cdot ((\nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\theta})^T - \nabla p(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\theta})]^T \right) d\hat{\Omega} \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\hat{\Omega}} Tr(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{u})) div \boldsymbol{\theta} d\hat{\Omega} - \int_{\hat{\Omega}} Tr(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F} \cdot [\nabla \mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{e}(\mathbf{u})]^T) d\hat{\Omega} \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\hat{\Omega}} Tr(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{e}(\mathbf{u}) \cdot \nabla \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\theta} \cdot [\mathbf{d} \cdot \mathbf{e}(\mathbf{u})]^T) d\hat{\Omega} \end{aligned} \quad (4.79)$$

tandis que la dérivée seconde (donnée ici dans le cas simplifié où la métrique est constante entraînant $\nabla \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\theta} \equiv 0$, $\nabla \mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\theta} \equiv 0$, $\nabla p(\cdot) \cdot \boldsymbol{\theta} = 0$ ainsi que $\nabla \mathbb{S} \cdot \boldsymbol{\theta} \equiv 0$) :

$$\begin{aligned} 2I^{(2)}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}) &= \int_{\hat{\Omega}} Tr(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{u})) det(\nabla \boldsymbol{\theta}) d\hat{\Omega} + \int_{\hat{\Omega}} Tr(\boldsymbol{\sigma}^1 \cdot \mathbf{E}(\mathbf{u})) div \boldsymbol{\theta} d\hat{\Omega} \\ &\quad + 2 \int_{\hat{\Omega}} Tr \left(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F} \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot (\nabla \boldsymbol{\theta})^2 \cdot \mathbf{d}^T \right) d\hat{\Omega} - \int_{\hat{\Omega}} Tr(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F} \cdot \nabla \mathbf{u}^1 \cdot \nabla \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{d}^T) d\hat{\Omega} \\ &\quad - \int_{\hat{\Omega}} Tr \left(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F} \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{d}^T \right) div \boldsymbol{\theta} d\hat{\Omega} - \int_{\hat{\Omega}} Tr \left(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{d} \cdot (\nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\theta})^T \cdot \mathbf{a} \cdot [\mathbf{d} \cdot \mathbf{e}(\mathbf{u}^1)]^T \right) d\hat{\Omega} \\ &\quad + \int_{\hat{\Omega}} Tr \left(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{d} \cdot (\nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\theta})^T \cdot \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{d}^T \right) d\hat{\Omega} - \int_{\hat{\Omega}} Tr(\boldsymbol{\sigma}^1 \cdot \mathbf{F} \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{d}^T) d\hat{\Omega} . \end{aligned} \quad (4.80)$$

Bien entendu, nous prenons soin de vérifier que ces expressions coïncident avec celles du cas plan lorsque $\mathbf{a} = \mathbf{I}_3$, $\mathbf{d} = \mathbf{I}_3$ et $p \equiv 0$.

4.4 Exemples de cartes

Nous explicitons les termes présents dans les dérivées précédentes associés à deux cartes de natures différentes. Nous traitons tout d'abord le cas d'une arche cylindrique menant à des expressions simplifiées des dérivées, puis le cas du parabolôïde hyperbolique [BERNADOU (1994), page 10].

4.4.1 L'arche cylindrique

Soit une arche cylindrique, d'épaisseur constante représentée dans le repère (e_1, e_2, e_3) sur la figure (4.1).

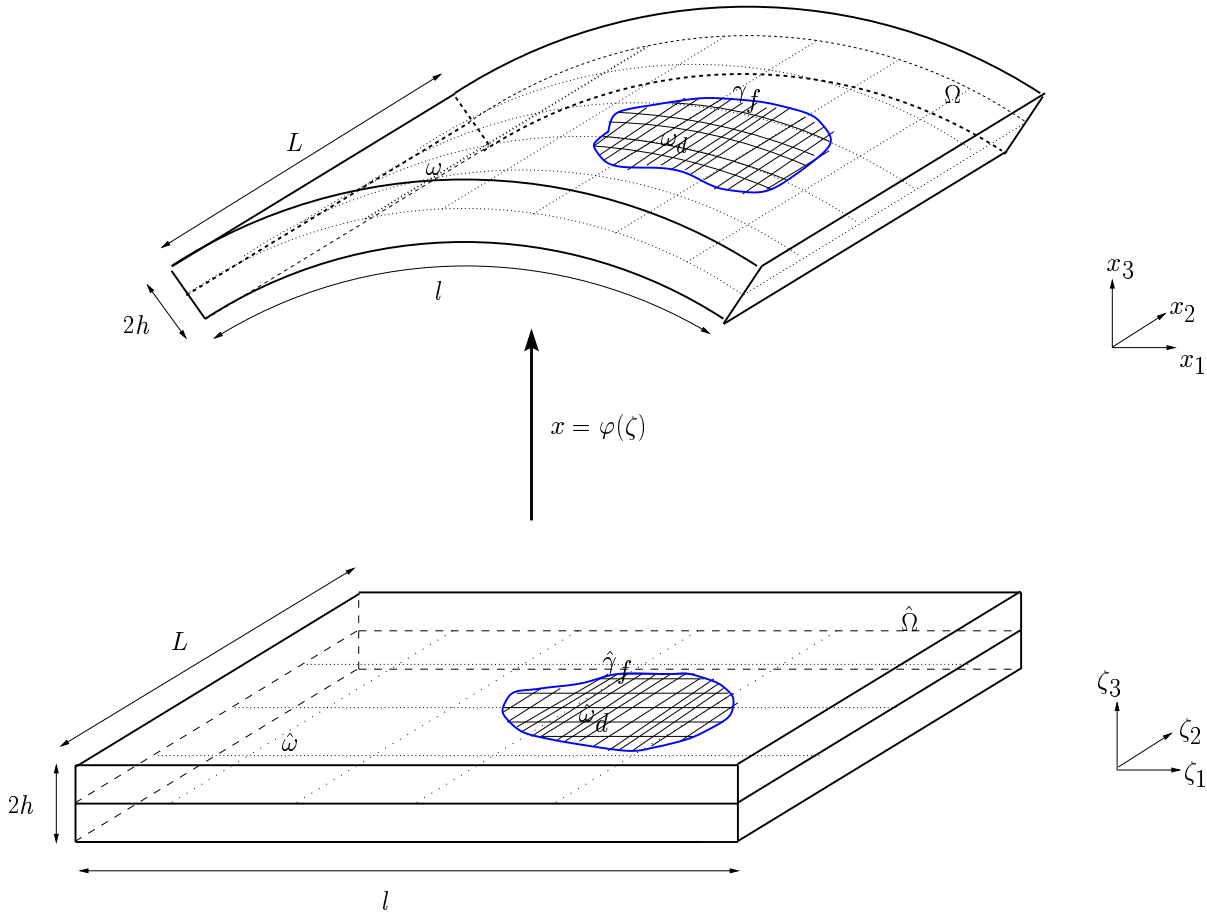


FIG. 4.1: Arche cylindrique Ω image par l'application φ du domaine $\hat{\Omega}$ et présentant une fissure interne, au sens de sa surface moyenne ω , délimitée par le front γ_f .

La carte naturelle φ pour décrire la surface moyenne de l'arche cylindrique est :

$$\omega \ni \mathbf{x} = (x, y, z) = \varphi(\zeta_1, \zeta_2) = \left(r \cos(\zeta_1), \zeta_2, r[\sin(\zeta_1) - \sin(f(r))] \right) \quad (\zeta_1, \zeta_2) \in \hat{\omega}, \quad (4.81)$$

définie sur $\hat{\omega} =]f(r), \pi - f(r)[\times]0, L[$. La fonction f est définie égale à $f(r) = \frac{1}{2}(\pi - \frac{l}{r})$ de façon à ce que la longueur selon e_1 de la structure soit constante égale à l pour tout r . Enfin, cette

carte est bijective si et seulement si $f(r) > -\frac{\pi}{2}$ entraînant la condition $r > \frac{l}{2\pi}$. D'un point de vue numérique, cette carte n'est pas satisfaisante. En effet, lorsque r est arbitrairement grand, la surface virtuelle $\hat{\omega}$ se réduit à une bande mince centrée autour de la ligne $\{\frac{\pi}{2}\} \times]0, L[$ et générant, après maillage des éléments finis très aplatis. Comme dans le chapitre 3, nous nous ramenons alors à un domaine $\hat{\omega}$ indépendant de r en mettant en bijection $\zeta_1 \in]\pi - f(r), f(r)[$ et $\bar{\zeta}_1 \in]-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}[$ selon la relation $\zeta_1 = (2f(r) - \pi)\bar{\zeta}_1 + \frac{\pi}{2}$. La carte φ devient alors :

$$\omega \ni \mathbf{x} = (x, y, z) = \varphi(\bar{\zeta}_1, \zeta_2) = \left(r \sin\left(\frac{\bar{\zeta}_1}{r}\right), \zeta_2, r \cos\frac{\bar{\zeta}_1}{r} - r \cos\frac{l}{2r} \right) \quad (\zeta_1, \zeta_2) \in \hat{\omega} \quad (4.82)$$

définie sur $\hat{\omega} =]-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}[\times]0, L[$. La structure, d'épaisseur $2h$ admet alors la représentation :

$$\Omega \ni \mathbf{x} = (x, y, z) = \varphi(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = \left((r + \zeta_3) \sin\left(\frac{\zeta_1}{r}\right), \zeta_2, (r + \zeta_3) \cos\frac{\zeta_1}{r} - r \cos\frac{l}{2r} \right), \quad \zeta \in \hat{\Omega} \quad (4.83)$$

avec $\hat{\Omega} =]-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}[\times]0, L[\times]-\epsilon, \epsilon[$. La base contravariante associée à ω est alors :

$$\mathbf{a}_1 = \left(\cos\frac{\zeta_1}{r}, 0, -\sin\frac{\zeta_1}{r} \right) ; \quad \mathbf{a}_2 = (0, 1, 0) ; \quad \mathbf{a}_3 = \left(\sin\frac{\zeta_1}{r}, 0, \cos\frac{\zeta_1}{r} \right), \quad (4.84)$$

menant à $(\mathbf{a}_{\alpha\beta}) = (\mathbf{a}^{\alpha\beta}) = \delta_{\alpha\beta}$, $\mathbf{a}^\alpha = \mathbf{a}_\alpha$, $b_{12} = b_{22} = b_1^2 = b_2^1 = b_2^2 = 0$, $b_{11} = b_1^1 = -r^{-1}$, $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = 0$. La courbure moyenne est égale à $2H = -r^{-1}$ et la courbure de Gauss K est nulle¹³. De plus, le jacobien égal à $\sqrt{|g|} = 1 + \zeta_3 r^{-1}$ entraîne la condition supplémentaire sur r : $r > \epsilon$. Enfin, nous obtenons :

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1 + \zeta_3 r^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} ; \quad p(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} -r^{-1}v_3 & 0 & -r^{-1}v_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs, la composante du champ θ selon la normale étant nulle, et les opérateurs \mathbf{a} , $\underline{\mathbb{S}}$, \mathbf{d} et p étant indépendants des variables ζ_α , il vient $(\nabla \mathbf{d} \cdot \theta)_{ij} = 0$, $(\nabla p \cdot \theta)_{ij} = 0$ et $(\nabla \mathbf{a} \cdot \theta)_{ij} = 0$, ce qui simplifie très notablement les expressions des dérivées lagrangiennes. Enfin, la relation $a^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta}$, entraîne, dans le cas isotrope, que le tenseur de souplesse $\hat{\mathbb{S}}$ est indépendant des coordonnées curvilignes et égal à \mathbb{S} . Il en résulte simplement $\underline{\mathbb{S}} = \mathbb{S}(1 + \zeta_3 r^{-1})^{-1}$ et $(\nabla \underline{\mathbb{S}} \cdot \theta)_{ij} = 0$. De plus, nous avons, en notant $c = \cos(\frac{\zeta_1}{r})$ et $s = \sin(\frac{\zeta_1}{r})$ les relations :

$$\begin{cases} u_x(x, y, z) = \hat{u}_1(\zeta_i)c + \hat{u}_3(\zeta_i)s, \\ u_y(x, y, z) = \hat{u}_2(\zeta_i), \\ u_z(x, y, z) = -\hat{u}_1(\zeta_i)s + \hat{u}_3(\zeta_i)c, \end{cases}$$

et :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^2 & 0 & s^2 & 0 & 2cs & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s^2 & 0 & c^2 & 0 & -2cs & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & -s \\ -cs & 0 & cs & 0 & c^2 - s^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^{11} \\ \sigma^{22} \\ \sigma^{33} \\ \sigma^{23} \\ \sigma^{13} \\ \sigma^{12} \end{pmatrix} \quad (4.85)$$

¹³en tout point ; la surface ω est dite, d'une part *uniformément parabolique*, et d'autre part, *développable*, pouvant être obtenue à partir d'une surface plane.

entre les champs exprimés dans la base locale et ceux exprimés dans la base globale. La relation concernant les déformations est identique (en vertu de $\hat{\mathbb{S}} = \mathbb{S}$). Ces relations permettent d'obtenir les champs associés de la structure réelle Ω obtenus à partir de ceux calculés sur la structure virtuelle $\hat{\Omega}$, exactement maillée (cf. Chapitre 5).

REMARQUE(S) 17 *Il est fondamentale de remarquer que cette carte, ainsi que la suivante, laissent invariante la nature géométrique du front de fissure : elles transforment un front de fissure $\hat{\gamma}_f \in \hat{\omega}$ fermé (resp. ouvert) en un front de fissure $\gamma_f \in \omega$ fermé (resp. ouvert).* ■

4.4.2 Le paraboloïde hyperbolique

Un paraboloïde hyperbolique ¹⁴ est paramétré comme suit :

$$\omega \ni \mathbf{x} = (x, y, z) = \boldsymbol{\varphi}(\zeta_1, \zeta_2) = \left(\zeta_1, \zeta_2, \frac{g}{2}(\zeta_2^2 - \zeta_1^2) \right) ; (\zeta_1, \zeta_2) \in \hat{\omega} , \quad (4.86)$$

avec $g = \frac{c}{b^2} \neq 0$ et $\hat{\omega} =]-b, b[\times]-c, c[$. Contrairement à l'exemple précédent, cette surface moyenne présente des courbures principales non constantes. La base contravariante associée à ω est :

$$\mathbf{a}_1 = (1, 0, -g\zeta_1) \quad ; \quad \mathbf{a}_2 = (0, 1, g\zeta_2) \quad ; \quad \mathbf{a}_3 = \frac{1}{\sqrt{a_d}}(g\zeta_1, -g\zeta_2, 1) , \quad (4.87)$$

avec $a_d = 1 + g^2(\zeta_1^2 + \zeta_2^2)$. Cela entraîne :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11} = 1 + g^2\zeta_1^2 \quad ; \quad a_{12} = -g^2\zeta_1\zeta_2 \quad ; \quad a_{22} = 1 + g^2\zeta_2^2 , \\ a^{11} = \frac{1}{a_d}(1 + g^2\zeta_2^2) \quad ; \quad a^{12} = \frac{g^2}{a_d}\zeta_1\zeta_2 \quad ; \quad a^{22} = \frac{1}{a_d}(1 + g^2\zeta_1^2) , \\ a^1 = \frac{1}{a_d}(1 + g^2\zeta_2^2, g^2\zeta_1\zeta_2, -g\zeta_1) \quad ; \quad a^2 = \frac{1}{a_d}(g^2\zeta_1\zeta_2, 1 + g^2\zeta_1, g\zeta_2) , \\ b_{11} = -\frac{g}{\sqrt{a_d}} \quad ; \quad b_{12} = 0 \quad ; \quad b_{22} = \frac{g}{\sqrt{a_d}} , \\ b_1^1 = -\frac{g}{a_d^{3/2}}(1 + g^2y^2) \quad ; \quad b_1^2 = -b_2^1 = \frac{g^3}{a_d^{3/2}}xy \quad ; \quad b_2^2 = \frac{g}{a_d^{3/2}}(1 + g^2x^2) , \\ \Gamma_{11}^1 = -\Gamma_{22}^1 = \frac{g^2}{a_d}x \quad ; \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{12}^2 = 0 \quad ; \quad \Gamma_{11}^2 = -\Gamma_{22}^2 = -\frac{g^2}{a_d}y , \\ 2H = \frac{g^3}{a_d^{3/2}}(x^2 - y^2) \quad ; \quad K = -\frac{g^2}{a_d^3}(1 + g^2x^2 + g^2y^2) . \end{array} \right. \quad (4.88)$$

¹⁵ Nous obtenons alors :

$$\mathbf{d}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 1 + \zeta_3 \frac{g}{a_d^{3/2}}(1 + g^2y^2) & \zeta_3 \frac{g^3}{a_d^{3/2}}xy & 0 \\ -\zeta_3 \frac{g^3}{a_d^{3/2}}xy & 1 - \zeta_3 \frac{g}{a_d^{3/2}}(1 + g^2x^2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

et

$$p(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \frac{g^2}{a_d}(-xv_1 + yv_2) + \frac{g}{\sqrt{a_d}}v_3 & 0 & -\frac{g}{a_d^{3/2}}((1 + g^2y^2)v_1 + g^2xyv_2) \\ 0 & \frac{g^2}{a_d}(xv_1 - yv_2) - \frac{g}{\sqrt{a_d}}v_3 & \frac{g}{a_d^{3/2}}(g^2xyv_1 + (1 + g^2x^2)v_2) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

¹⁴une selle de cheval est un exemple

¹⁵La courbure de Gauss est négative strictement. La surface est dite *hyperbolique*.

Forts de ces calculs, nous obtenons le tenseur de rigidité dans la base locale en utilisant, dans le cas isotrope, la relation (4.30). Sans donner les résultats ici, notons seulement, que ce tenseur conserve sa symétrie mais pas sa forme. Par exemple, \hat{R}^{1112} est égal à $(\lambda + 2\mu)a^{11}a^{12}$ et est non nul. Il reste ensuite à déterminer les gradients de ces opérateurs. Par exemple, déterminer $\nabla \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\theta}$ revient, selon les conventions adoptées à déterminer $\nabla a^{ij} \cdot \boldsymbol{\theta} = \frac{\partial a^{ij}}{\partial \zeta_\alpha} \theta_\alpha$ pour tout i, j dans $\{1, 2, 3\}$ ¹⁶.

¹⁶Ces calculs se traitent rapidement grâce au logiciel de calcul formel MAPLE.

Chapitre 5

Modèle de propagation et mise en œuvre

Dans ce chapitre, nous présentons le modèle de propagation d'un front de fissure γ_f évoluant sur une surface régulière donnée de l'espace euclidien \mathbb{R}^3 . Le modèle repose sur un principe de moindre énergie des états d'équilibre admissibles. La stabilité de ces états, caractérisés par les points critiques d'une fonctionnelle non linéaire, est discutée. Cette notion fait intervenir les dérivées lagrangiennes première et seconde, par rapport à la position du front, formellement obtenues au chapitre précédent. Puis, identifiant la position du front cherché au vecteur déplacement du front initial, un algorithme découplé incrémental, basé sur une méthode de type Newton, est proposé. Enfin, quelques points de sa mise en œuvre sont détaillés en fin de chapitre.

5.1 Modèle de propagation

5.1.1 Position du problème et rappels sur le critère de Griffith

Reprenons la structure S des chapitres II et IV, occupant, dans sa configuration de référence, le volume Ω . S présente au sein de sa surface moyenne régulière une unique fissure délimitée par le front γ_f . Le front γ_f sépare la surface en deux parties connexes : une zone saine et une zone délaminée. Enfin, la structure est soumise à une distribution surfacique de force, d'intensité (ou facteur de charge) $\lambda \in \mathbb{R}^+$ et encastrée sur deux parties disjointes (de mesure non nulle) de sa frontière. Nous abordons les questions suivantes :

- Pour quelle **intensité** $\lambda_c > 0$ du chargement le front γ_f évolue-t-il ?
- Pour cette intensité, quelle est sa **forme** du front après propagation ?
- Quelle est la **nature** de la propagation ?

Naturellement, les réponses à ces questions dépendent de la caractérisation adoptée des états d'équilibre de la structure. Certains éléments de réponse peuvent être atteints en utilisant le critère de type seuil proposé par A.A. Griffith dès 1920 [GRIFFITH (1920)]. Ce critère repose sur un bilan d'énergie, reliant l'énergie dissipée au cours de la propagation du front à l'aire de surface nouvellement créée. A.A. Griffith stipule que **la variation d'énergie élastique au cours d'un mouvement virtuel de la fissure représente l'énergie nécessaire pour fracturer le matériau dans le même mouvement**. Si cette variation compense, voire excède l'énergie dissipée, alors le front de fissure progresse. Au contraire, si cette restitution d'énergie élastique n'est pas suffisante,

le chargement imposé n'est pas suffisant et la fissure ne progresse pas. Le critère est généralement utilisé sous une forme locale, en chaque point de γ_f représenté par son abscisse curviligne s :

$$\begin{cases} G(s) < G_c(s) & \dot{\gamma}_f(s) = 0 & \text{[pas de propagation]} , \\ G(s) = G_c(s) & \dot{\gamma}_f(s) \geq 0 & \text{[propagation possible]} , \\ G(s) > G_c(s) & \dot{\gamma}_f(s) > 0 & \text{[propagation]} . \end{cases} \quad (5.1)$$

$G(s)$ désigne la valeur du taux de restitution au point d'abscisse s et $\dot{\gamma}_f$ la vitesse normale du front en ce même point. G_c apparaît ici comme la densité d'énergie dissipée et est selon A.A. Griffith une quantité intrinsèque au matériau. Parfois appelée ténacité, elle caractérise l'**énergie de décohesion**. Enfin, rappelons que cette loi d'évolution de type seuil, s'inscrit dans le cadre des lois obéissant au principe de dissipation maximale de Hill [NGUYEN (1984)], la position du front γ_f étant considérée comme une variable interne. Soit C le cône des forces admissibles :

$$C = \{G; G(s) \leq G_c(s)\} , \quad (5.2)$$

selon le critère de Griffith, le paramètre d'état γ_f évolue si et seulement si la force généralisée G atteint la frontière de C . Le critère prend la forme :

$$(G - G^*) \cdot \dot{\gamma}_f \geq 0 \quad \forall G^* \in C \quad (5.3)$$

où (\cdot) définit un crochet de dualité. L'inégalité (5.3) est le principe de dissipation maximale.

REMARQUE(S) 18 *Le critère de Griffith écrit sous la forme (5.1) est local. Chaque point évolue de façon indépendante par rapport à son voisinage.* ■

Le critère de Griffith requiert, à travers l'existence de la fonction G une régularité minimale de l'évolution de la fissure. Une telle régularité n'a pas lieu dans des cas pathologiques que sont le branchement de la fissure ou son amorçage, auxquels cas le critère (5.1) est inopérant. Pour reprendre [FRANCFORT & MARIGO (1998)] où ces lacunes sont clairement exposées, "*le critère ne laisse pas assez de libertés spatio-temporelles à la fissure de se développer*". Suivant [EHLACHER (1985)], [FEDELICH (1990)] puis [FRANCFORT & MARIGO (1993)], [FRANCFORT & MARIGO (1998)] et [OUSSET (1999)], nous l'abandonnons au profit d'un principe de minimum d'énergie, assez naturel, dont les idées sont déjà présentes dans les travaux précurseurs de A.A. Griffith.

5.1.2 Le postulat du principe du minimum de l'énergie

STABILITÉ DES PROCESSUS RÉVERSIBLES(Rappels)

Le front de fissure étant donné, considérons dans cette section des intensités de chargement λ inférieures strictement à l'intensité de chargement critique λ_c , de sorte que le front n'évolue pas. Alors, dans le cadre élastique fragile dans lequel nous nous sommes placés, le second principe de la thermodynamique assure que l'équilibre caractérisé par le champ cinématique $\mathbf{u}(\lambda)$ associé à un minimum de l'énergie potentielle est un état d'équilibre stable. Dans le cas des évolutions réversibles, la notion de stabilité au sens de Lyapounov possède une interprétation énergétique équivalente :

DÉFINITION 2 (Stabilité au sens de Hill) *Un état d'équilibre est stable au sens de Hill, si et seulement si, pour toute perturbation admissible du système, hors de l'équilibre, le travail des efforts de perturbation est strictement positif.* ■

Soit $I(\mathbf{u}(\lambda), \gamma(\lambda))$ l'énergie potentielle associée à la structure en équilibre caractérisée par le champ cinématiquement admissible $\mathbf{u}(\lambda)$, le front de fissure $\gamma(\lambda)$ étant fixé égal à $\gamma(0)$. Une perturbation positive $\Delta\lambda$ arbitrairement petite telle que $\lambda + \Delta\lambda < \lambda_c$ du système entraîne une perturbation du champ cinématique en $\mathbf{u}(\lambda + \Delta\lambda) \equiv \mathbf{u}(\lambda) + \Delta\mathbf{u}(\lambda)$ et le travail des efforts de perturbation est simplement :

$$\Delta T_p(\Delta\mathbf{u}) = I(\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}, \gamma) - I(\mathbf{u}, \gamma) . \quad (5.4)$$

Si la fonctionnelle I est deux fois différentiable dans la direction $\Delta\mathbf{u}$, alors ce travail devient :

$$\Delta T_p(\Delta\mathbf{u}) = I_{,\mathbf{u}}(\mathbf{u}, \gamma) \cdot \Delta\mathbf{u} + \frac{1}{2} \Delta\mathbf{u} \cdot I_{,uu}(\mathbf{u}, \gamma) \cdot \Delta\mathbf{u} + o(\|\Delta\mathbf{u}\|^2) \quad \forall \Delta\mathbf{u} \text{ admissible} . \quad (5.5)$$

La structure étant à l'équilibre, \mathbf{u} réalise un extremum de l'énergie potentielle entraînant $I_{,\mathbf{u}}(\mathbf{u}, \gamma) \cdot \Delta\mathbf{u} = 0$ pour toute direction $\Delta\mathbf{u}$ admissible. L'état d'équilibre est alors stable au sens de Hill, au second ordre, si et seulement si, l'opérateur associé à la dérivée seconde de l'énergie potentielle est défini positif :

$$\Delta\mathbf{u} \cdot I_{,uu}(\mathbf{u}, \gamma) \cdot \Delta\mathbf{u} > 0 \quad \forall \Delta\mathbf{u} \text{ admissible} , \quad (5.6)$$

auxquel cas l'extremum est bien un minimum, relatif de I .

STABILITÉ DES PROCESSUS IRRÉVERSIBLES

Plaçons-nous à l'équilibre de la structure, atteint pour l'intensité critique ou seuil λ_c tel que toute augmentation $\lambda_c + \Delta\lambda_c$ fasse évoluer le front de fissure. Il s'agit alors de déterminer et donc de caractériser $\gamma(\lambda_c + \Delta\lambda_c)$, pour tout $\Delta\lambda_c \in \mathbb{R}_+^*$ arbitrairement petit. Par analogie avec le cas réversible, il est tentant de caractériser l'état d'équilibre résultant $(\mathbf{u}(\lambda_c + \Delta\lambda_c), \gamma(\lambda_c + \Delta\lambda_c))$ en terme énergétique. Il est intuitif de penser qu'un système mécanique dissipant de l'énergie et abandonné à lui-même passera par un état d'équilibre stable tel que toute évolution ultérieure sera impossible sans une nouvelle modification des conditions extérieures. Dans le cas des systèmes dissipatifs, il est bien connu que la condition de minimum de l'énergie potentielle associée n'est qu'une condition suffisante de stabilité. Un contre-exemple est en effet donné par l'exemple du pavé pesant et frottant en équilibre [NGUYEN (1984)] : le pavé peut se trouver dans une position d'équilibre stable sur la pente qui ne correspond pas à un minimum de l'énergie potentielle : c'est le cas lorsque le critère de glissement n'est pas atteint. Cela est dû au fait que l'énergie dissipée par friction, qui constitue un coût supplémentaire pour faire glisser le pavé, n'est pas incluse dans l'énergie potentielle. En tenant ainsi compte de l'énergie dissipée, on peut espérer se rapprocher d'une condition de stabilité plus faible, à la fois nécessaire et suffisante. A cette fin et suivant [EHLACHER (1985)], nous associons à un état d'équilibre de la structure une énergie dite totale notée E :

DÉFINITION 3 (Energie totale) *L'énergie totale de la structure dans un état d'équilibre (\mathbf{u}, γ) est la somme de l'énergie mécanique I et d'une énergie de rupture D :*

$$E(\mathbf{u}, \gamma) = I(\mathbf{u}, \gamma) + D(\gamma), \quad (5.7)$$

et est définie sur $V_u \times V_\gamma$, espace des déplacements admissibles de la structure et des positions admissibles du front γ_f . ■

DÉFINITION 4 *L'énergie de rupture est ici uniquement fonction de la variable position du front de fissure est définie sur V_γ selon :*

$$D(\gamma) = \int_{\omega_d} G_c dS, \quad (5.8)$$

et est proportionnelle, lorsque G_c est constant, à l'aire de la zone délaminée ω_d . ■

¹ Une caractérisation des états d'équilibre à chaque instant λ est alors obtenu en utilisant le

POSTULAT 1 (Caractérisation des états d'équilibre) *L'état d'équilibre $(\mathbf{u}(\lambda), \gamma_f(\lambda))$ de la structure associé à l'intensité de chargement $\lambda > \lambda_c$ réalise formellement un minimum local de l'énergie totale E parmi tous les déplacements admissibles de la structure et tous les états admissible du front :*

$$(\mathcal{P}) \quad E(\mathbf{u}, \gamma_f) = \min E(\mathbf{v}, \gamma) \quad \forall \mathbf{v} \in V_u, \forall \gamma \in V_\gamma. \quad (5.9)$$

■

REMARQUE(S) 19 *L'espace V_γ est plus petit que celui considéré dans FRANCFORT & MARIGO (1998) comprenant tous les états de fissuration possibles.* ■

Par analogie avec ce qui précède, étudions la condition de stabilité au sens de Hill d'un des états vérifiant (\mathcal{P}) . Le travail des efforts de perturbation est maintenant, lorsque E est deux fois différentiable dans la direction admissible $(\Delta \mathbf{u}, \Delta \gamma)$:

$$\begin{aligned} \Delta T_p(\Delta \mathbf{u}, \Delta \gamma) &= E(\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}, \gamma + \Delta \gamma) - E(\mathbf{u}, \gamma) \\ &= E_{,u}(\mathbf{u}, \gamma) \cdot \Delta \mathbf{u} + E_{,\gamma}(\mathbf{u}, \gamma) \cdot \Delta \gamma \\ &\quad + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \gamma \end{bmatrix}^T \begin{pmatrix} E_{,uu}(\mathbf{u}, \gamma) & E_{,u\gamma}(\mathbf{u}, \gamma) \\ E_{,\gamma u}(\mathbf{u}, \gamma) & E_{,\gamma\gamma}(\mathbf{u}, \gamma) \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \gamma \end{bmatrix} + o(\|\Delta \mathbf{u}\|^2 + \|\Delta \gamma\|^2). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Le terme de premier ordre est positif ou nul : cela traduit le fait que (\mathbf{u}, γ) réalise un extremum de E . La stabilité au sens de Hill se résume alors à la définie positivité de l'opérateur :

$$\begin{pmatrix} E_{,uu}(\mathbf{u}, \gamma) & E_{,u\gamma}(\mathbf{u}, \gamma) \\ E_{,\gamma u}(\mathbf{u}, \gamma) & E_{,\gamma\gamma}(\mathbf{u}, \gamma) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{,uu}(\mathbf{u}, \gamma) & I_{,u\gamma}(\mathbf{u}, \gamma) \\ I_{,\gamma u}(\mathbf{u}, \gamma) & I_{,\gamma\gamma}(\mathbf{u}, \gamma) + D_{,\gamma\gamma}(\gamma) \end{pmatrix}.$$

Dans le cas où l'état d'équilibre est un état stable vis-à-vis de la variable cinématique², la relation (5.6) a lieu et une condition suffisante de définie positivité de l'opérateur précédent est la définie positivité du complément de Schur $E_{,\gamma\gamma}^r$ associé :

$$E_{,\gamma\gamma}^r = E_{,\gamma\gamma} - E_{,\gamma u} E_{,uu}^{-1} E_{,u\gamma}. \quad (5.11)$$

¹Dans [EHLACHER (1985)], les problèmes d'équilibre sont écrits en vitesse, et la notion d'énergie de dissipation est introduite. Nous préférons utiliser pour D ici l'appellation d'énergie de rupture (mais l'idée initiale demeure la même).

²On parle de stabilité géométrique, toujours réalisée par exemple pour un chargement de traction associé à la densité \dot{W}_{SV} .

Suivant [NGUYEN (1984)], soit $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\gamma, \lambda)$ le champ cinématique réalisant l'équilibre cinématique : $E_{,u}(\mathbf{u}, \gamma) \cdot \Delta \mathbf{u} = 0, \forall \Delta \mathbf{u} \in V_u$ et soit :

$$F(\gamma, \lambda) \equiv E(\mathbf{u}(\gamma, \lambda), \gamma, \lambda) \leq E(\mathbf{v}, \gamma, \lambda) \quad \forall \mathbf{v} \in V_u . \quad (5.12)$$

Il vient alors :

$$F_{,\gamma}(\gamma, \lambda) = E_{,\gamma}(\mathbf{u}(\gamma, \lambda), \gamma, \lambda) + E_{,u}(\mathbf{u}(\gamma, \lambda), \gamma, \lambda) \cdot \mathbf{u}_{,\gamma}(\gamma, \lambda) = E_{,\gamma}(\mathbf{u}(\gamma, \lambda), \gamma, \lambda) \quad (5.13)$$

puis :

$$F_{,\gamma\gamma}(\gamma, \lambda) = E_{,\gamma\gamma}(\mathbf{u}(\gamma, \lambda), \gamma, \lambda) + E_{,\gamma u}(\mathbf{u}(\gamma, \lambda), \gamma, \lambda) \cdot \mathbf{u}_{,\gamma}(\gamma, \lambda) . \quad (5.14)$$

Or la fonction \mathbf{u} définie implicitement par $E_{,u}(\mathbf{u}, \gamma, \lambda) \cdot \Delta \mathbf{u} = 0$ pour tout $\Delta \mathbf{u} \in V_u$ vérifie nécessairement $E_{,u\gamma} + E_{,uu} \cdot \mathbf{u}_{,\gamma} = 0$. L'opérateur $E_{,uu}(\mathbf{u}, \lambda, \gamma)$ étant inversible, il vient alors :

$$F_{,\gamma\gamma}(\gamma, \lambda) = E_{,\gamma\gamma}(\mathbf{u}(\lambda, \gamma), \lambda, \gamma) - E_{,\gamma u}(\mathbf{u}(\lambda, \gamma), \lambda, \gamma) \cdot E_{,uu}^{-1}(\mathbf{u}, \lambda, \gamma) E_{,u\gamma}(\mathbf{u}, \lambda, \gamma) . \quad (5.15)$$

Selon (5.11), une condition suffisante de stabilité au sens de Hill, par rapport à la variable position du front de fissure γ , est alors :

$$\boxed{\Delta \gamma \cdot F_{,\gamma\gamma}(\gamma, \lambda) \cdot \Delta \gamma > 0 \quad \forall \Delta \gamma \text{ admissible .}} \quad (5.16)$$

A titre de résumé, le problème de la propagation quasi-statique du front est ramené à la minimisation locale d'une fonctionnelle de deux variables, parmi tous les états du front et états cinématiques admissibles. Remarquons que La condition précédente de convexité de l'opérateur dérivée seconde assure l'existence d'au moins un tel état. Dans le prochain paragraphe, nous détaillons le calcul de la nouvelle position d'équilibre. De façon à pouvoir caractériser l'espace admissible V_γ , nous utilisons au préalable un repère local attaché à la surface moyenne de la structure. Nous associons alors à V_u et V_γ les ensembles \hat{V}_u et \hat{V}_γ des états admissibles dans le repère local. Compte tenu des conditions imposées à la carte ϕ dans le chapitre précédent, il est géométriquement équivalent d'étudier la propagation de γ_f dans ω et la propagation de sa représentation $\hat{\gamma}_f \in \hat{\omega}$. L'énergie de rupture D devient $D(\gamma) = \int_{\hat{\omega}_d} G_c \sqrt{|g|} d\zeta_\alpha \equiv \hat{D}(\hat{\gamma})$.³ De façon similaire à la propriété 1, rappelons le point **essentiel** suivant :

PROPRIÉTÉ 2 *Si le couple $(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\gamma}_f)$ réalise sur $\hat{V}_u \times \hat{V}_\gamma$ un minimum de la fonctionnelle $\hat{E} \equiv \hat{I} + \hat{D}$, alors le couple (\mathbf{u}, γ_f) , \mathbf{u} défini à partir de $\hat{\mathbf{u}}$ selon (4.9) et $\gamma_f \in \omega$ image de $\hat{\gamma}_f \in \hat{\omega}$ par l'application ϕ définie en (4.1) réalise sur $V_u \times V_\theta$ un minimum de la fonctionnelle $E = I + D$. ■*

5.1.3 Calcul de la nouvelle position d'équilibre

Dans ce paragraphe, nous nous plaçons sur un état d'équilibre stable $(\mathbf{u}(\lambda_c), \gamma(\lambda_c))$. Déterminer la nouvelle position du front $\hat{\gamma}_f$ revient à déterminer le champ Θ tel que :

$$\boxed{\hat{\gamma}_f(\zeta_\alpha) - \hat{\gamma}(\zeta_\alpha) = \Theta(\zeta_\alpha) ,} \quad (5.17)$$

lorsque $\hat{\gamma}$ désigne l'ancienne position du front et Θ défini sur $\hat{\gamma}$, le déplacement du front. **Nous identifions alors le déplacement Θ du front $\hat{\gamma}$ pour atteindre le front $\hat{\gamma}_f$ avec $\hat{\gamma}_f$ et l'espace \hat{V}_γ avec l'ensemble \hat{V}_θ des déplacements admissibles du front.**

³D'une façon générale (mais non exclusivement), les quantités rehaussées du symbole $\hat{\cdot}$ désignent dans la suite, des quantités exprimées dans le repère local.

CONDITIONS SUR LE CHAMP $\boldsymbol{\theta}$

Réintroduisons le champ $\boldsymbol{\theta}$ de déplacement virtuel du front, de support un voisinage S_θ de $\hat{\gamma}$. Le champ $\boldsymbol{\theta}$ doit vérifier les conditions suivantes :

- La fissure ne peut pas se refermer impliquant que le champ $\boldsymbol{\theta}$ doit vérifier le long du front la condition :

$$\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{e}_2 \geq 0 \quad \text{sur } \hat{\gamma}_f, \quad (5.18)$$

où \mathbf{e}_2 désigne le vecteur unité dans le sens transverse orienté dans la direction de l'évolution du front. \mathbf{e}_2 est pris parallèle aux côtés latéraux⁴ dans le cas d'une structure présentant un front ouvert (Figure 5.1, partie gauche) et égale au vecteur normal $\boldsymbol{\nu}$ dans le cas d'un front fermé (Figure 5.1, partie droite). Cette condition traduit l'irréversibilité du processus.

- Si le front intersecte les bords latéraux de $\hat{\omega}$, alors le champ $\boldsymbol{\theta}$ doit vérifier la condition :

$$\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \quad \text{sur } S_\theta \cap \partial \hat{\omega}. \quad (5.19)$$

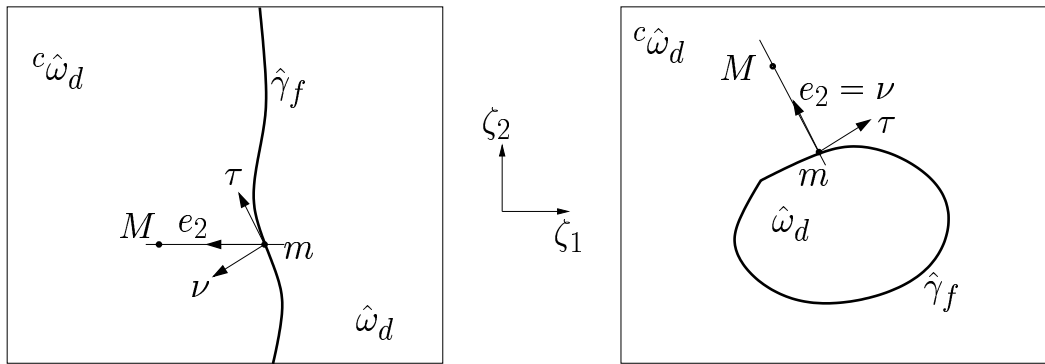


FIG. 5.1: Définition de la projection sur $\hat{\gamma}_f$: front traversant la largeur de la structure ($\hat{\gamma}_f \cap \partial \hat{\omega} \neq \emptyset$) et front interne ($\hat{\gamma}_f \cap \partial \hat{\omega} = \emptyset$).

- Enfin, la transformation \mathcal{F}^η associée au champ $\boldsymbol{\theta}$ doit définir un **accroissement positif de mesure**. Cela se traduit par la condition suivante, $\forall \eta > 0$:

$$\begin{aligned} \int_{c\hat{\omega}_d} d\hat{\omega} - \int_{c\hat{\omega}_d^\eta} d\hat{\omega}^\eta &= -\eta \int_{c\hat{\omega}_d} \text{div}(\sqrt{|g|}\boldsymbol{\theta}) d\hat{\omega} \\ &\quad - \eta^2 \int_{c\hat{\omega}_d} \left(\sqrt{|g|} \det(\nabla \boldsymbol{\theta}) + \nabla \sqrt{|g|} \cdot \boldsymbol{\theta} \text{div} \boldsymbol{\theta} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \cdot \nabla^2 \sqrt{|g|} \cdot \boldsymbol{\theta} \right) d\hat{\omega} + o(\eta^2) \geq 0. \end{aligned}$$

Une condition suffisante est alors, négligeant les termes en $o(\eta^2)$ ⁵ :

$$\begin{cases} - \int_{c\hat{\omega}_d} \text{div}(\sqrt{|g|}\boldsymbol{\theta}) d\hat{\omega} \geq 0, \\ - \int_{c\hat{\omega}_d} \left(\sqrt{|g|} \det(\nabla \boldsymbol{\theta}) + \nabla \sqrt{|g|} \cdot \boldsymbol{\theta} \text{div} \boldsymbol{\theta} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \cdot \nabla^2 \sqrt{|g|} \cdot \boldsymbol{\theta} \right) d\hat{\omega} \geq 0. \end{cases} \quad (5.20)$$

⁴Ce choix n'est pas nécessaire, mais est justifié par le fait que les séquences d'empilement dans les stratifiés génèrent des directions privilégiées de front.

⁵Dans le cas d'une carte de métrique constante, les termes en $o(\eta^2)$ n'apparaissent pas.

DÉRIVÉES LAGRANGIENNES DE L'ÉNERGIE DE RUPTURE

Compte tenu des rappels du chapitre précédent, l'obtention des dérivées lagrangiennes ne pose pas de difficultés. Supposant G_c constant, nous obtenons :

$$\begin{cases} \hat{D}^{(1)}(\boldsymbol{\theta}) = -G_c \int_{c\hat{\omega}_a} \left(\sqrt{|g|} \operatorname{div} \boldsymbol{\theta} + \nabla \sqrt{|g|} \cdot \boldsymbol{\theta} \right) d\hat{\omega} , \\ \hat{D}^{(2)}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}) = -G_c \int_{c\hat{\omega}_a} \left(\sqrt{|g|} \det(\nabla \boldsymbol{\theta}) + \nabla \sqrt{|g|} \cdot \boldsymbol{\theta} \operatorname{div} \boldsymbol{\theta} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \cdot \nabla^2 \sqrt{|g|} \cdot \boldsymbol{\theta} \right) d\hat{\omega} . \end{cases} \quad (5.21)$$

De plus, selon l'égalité :

$$\operatorname{div}(\sqrt{|g|} \boldsymbol{\theta}) = \sqrt{|g|} \operatorname{div} \boldsymbol{\theta} + \nabla \sqrt{|g|} \cdot \boldsymbol{\theta} \quad (5.22)$$

et la formule de Green, ces dérivées s'expriment comme des intégrales curvilignes le long du front $\hat{\gamma}_f$:

$$\begin{cases} \hat{D}^{(1)}(\boldsymbol{\theta}) = G_c \int_{\hat{\gamma}_f} \sqrt{|g|} \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\nu} d\Gamma , \\ \hat{D}^{(2)}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2} G_c \int_{\hat{\gamma}_f} \left(\operatorname{div}(\sqrt{|g|} \boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\nu} - \sqrt{|g|} \boldsymbol{\nu} \cdot \nabla \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta} \right) d\Gamma . \end{cases} \quad (5.23)$$

REMARQUE(S) 20 Dans le cas où G_c n'est pas constant mais néanmoins deux fois différentiable selon $\boldsymbol{\theta}$, il apparaît $G_c(\boldsymbol{\zeta}^\eta) = G_c(\boldsymbol{\zeta}) + \eta \nabla G_c(\boldsymbol{\zeta}) \cdot \boldsymbol{\theta} + \frac{1}{2} \eta^2 \boldsymbol{\theta} \cdot \nabla^2 G_c(\boldsymbol{\zeta}) \cdot \boldsymbol{\theta} + o(\eta^2)$ et les dérivées de l'énergie de rupture sont obtenues en remplaçant $\sqrt{|g|}$ par $\sqrt{|g|} G_c$. Cependant, nous considérons que la détermination expérimentale d'un taux de restitution critique constant est suffisamment complexe pour espérer obtenir une expression fiable d'un taux non constant le long du front. ■

Compte tenu de ce qui précède, les conditions suffisantes (5.20) sont équivalentes à :

$$D^{(1)}(\boldsymbol{\theta}) \geq 0 \quad ; \quad D^{(2)}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}) \geq 0 . \quad (5.24)$$

Selon l'écriture (5.23₁), la première condition est vérifiée si la condition (5.18) l'est. Il en résulte que l'ensemble des déplacements admissibles du front, contenant l'élément $\mathbf{0}$ est :

$$\hat{V}_\theta = \left\{ \boldsymbol{\theta} \in (H^1(S_\theta))^2, \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{e}_2 \geq 0 \text{ sur } \gamma_f, \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \text{ sur } S_\theta \cap \partial \hat{\omega}, D^{(2)}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}) \geq 0 \right\}. \quad (5.25)$$

⁶ Dans le cas, par exemple, où la métrique est constante, nous avons en effet le résultat suivant :

THÉORÈME 5 Si la carte ϕ admet une métrique constante alors le spectre de l'opérateur $D^{(2)}$ admet des éléments positifs. ■

Preuve : Pour simplifier, notons $k \equiv \sqrt{|g|}$ le déterminant associé au changement de métrique. Soit $s \in [0, l]$ l'abscisse curviligne d'un point du front $\hat{\gamma}_f$ et ρ sa coordonnée locale transverse. Le vecteur $\boldsymbol{\theta}$ s'exprime alors le long du front selon :

$$\boldsymbol{\theta} = \theta_1 \mathbf{a}^1 + \theta_2 \mathbf{a}^2 = \theta_\tau \boldsymbol{\tau}^T + \theta_\nu \boldsymbol{\nu}^T. \quad (5.26)$$

⁶La condition sur l'opérateur $D^{(2)}$ peut paraître "exotique". Les applications présentées au chapitre suivant devraient suffire à convaincre le lecteur de la nécessité de prendre en compte cette condition.

Alors, grâce aux relations $\frac{\partial k}{\partial x}|_{\hat{\gamma}_f} = k_{,s}\boldsymbol{\tau}^T + k_{,\rho}\boldsymbol{\nu}^T$ et

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\nu} \cdot \nabla \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta} = \frac{\partial \theta_1}{\partial s} \theta_2 - \frac{\partial \theta_2}{\partial s} \theta_1, \quad (5.27)$$

la relation (5.23)₂ devient :

$$D^{(2)}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2} G_c \int_{\hat{\gamma}_f} k \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial s} \theta_2 - \frac{\partial \theta_2}{\partial s} \theta_1 \right) ds + \frac{1}{2} G_c \int_{\hat{\gamma}_f} \left(k_{,s} \theta_\tau + k_{,\rho} \theta_\nu \right) \theta_\nu ds. \quad (5.28)$$

Puis, l'opérateur $D^{(2)}$ étant une forme bilinéaire symétrique, l'usage de la relation :

$$D^{(2)}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\psi}) = \frac{1}{4} \left(D^{(2)}(\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\psi}) - D^{(2)}(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\psi}) \right)$$

fournit la relation :

$$\begin{aligned} D^{(2)}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\psi}) = & \frac{1}{2} G_c \int_{\hat{\gamma}_f} k \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial s} \psi_2 - \frac{\partial \theta_2}{\partial s} \psi_1 \right) ds + \frac{1}{2} G_c \int_{\hat{\gamma}_f} \left(k_{,s} \theta_\tau + k_{,\rho} \theta_\nu \right) \psi_\nu ds \\ & + \frac{1}{4} G_c \left[k(\theta_\nu \psi_\tau - \theta_\tau \psi_\nu) \right]_{|\partial \hat{\gamma}_f}. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Le dernier terme est identiquement nul. En effet, si $\hat{\gamma}_f$ est un front ouvert (figure 5.1 gauche), cela est dû à la condition (5.19) tandis que si $\hat{\gamma}_f$ est interne (figure 5.1 droit), cela est dû au fait que $\boldsymbol{\theta}(s=0,0) = \boldsymbol{\theta}(s=l,0)$. De ce fait, les éléments λ du spectre de $D^{(2)}$, caractérisés par la relation :

$$D^{(2)}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\psi}) = \lambda(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\psi}) \equiv \lambda \int_{\hat{\gamma}_f} \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\psi} ds \quad (5.30)$$

sont solutions du système d'équations différentielles paraboliques suivant :

$$\begin{pmatrix} 0 & -k \\ k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \theta_1}{\partial s} \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial s} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_{,\zeta_1} \nu_1 - \Lambda & k_{,\zeta_2} \nu_1 \\ k_{,\zeta_1} \nu_2 & k_{,\zeta_2} \nu_2 - \Lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.31)$$

en notant $\Lambda = 2G_c^{-1}\lambda$. Le polynôme caractéristique p est alors obtenu en posant $\boldsymbol{\theta} = e^{\beta s} \tilde{\boldsymbol{\theta}}$, $\beta \in \mathbb{C}$ et nous remarquons que la condition $\boldsymbol{\theta}(s=0,0) = \boldsymbol{\theta}(s=l,0)$ implique $\beta = i\omega$; $\omega = \frac{2n\pi}{l} \in \mathbb{R}$. Il vient alors :

$$\begin{pmatrix} k_{,\zeta_1} \nu_1 - \Lambda & k_{,\zeta_2} \nu_1 - k\beta \\ k_{,\zeta_1} \nu_2 + k\beta & k_{,\zeta_2} \nu_2 - \Lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\theta}_1 e^{\beta s} \\ \tilde{\theta}_2 e^{\beta s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.32)$$

et finalement :

$$p(\Lambda) = \Lambda^2 - \frac{\partial k}{\partial \rho} \Lambda + k \frac{\partial k}{\partial s} \beta + k^2 \beta^2 = 0. \quad (5.33)$$

Si k est constant (cela se produit par exemple, pour l'arche cylindrique), le polynôme p se réduit à $p(\Lambda) = \Lambda^2 + k^2 \beta^2 = \Lambda^2 - k^2 \omega^2$ et les valeurs propres de $D^{(2)}$ sont :

$$\lambda_n = \pm G_c k \frac{\pi n}{l} \quad n \in \mathbb{N}. \quad (5.34)$$

Nous concluons que le spectre associé à l'opérateur est alors symétrique par rapport à zéro et contient de ce fait des éléments positifs. ■

Calcul du déplacement du front Θ

Ayant identifié le front $\hat{\gamma}_f$ avec le déplacement Θ , le problème (\mathcal{P}) devient :

$$(\mathcal{P}) \quad (\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}) = \arg \left(\min_{\hat{V}_u \times \hat{V}_\theta} \hat{E}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}), \mathbf{v} \in \hat{V}_u, \boldsymbol{\psi} \in \hat{V}_\theta \right)$$

et l'ensemble \hat{V}_θ est donné par (5.25). L'identification nous permet de confondre les notations $\hat{E}_{,\gamma}, \hat{E}_{,\gamma\gamma}$ avec $\hat{E}^{(1)}(\boldsymbol{\theta}), \hat{E}^{(2)}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta})$. Rappelons que nous nous sommes placés, dans ce paragraphe, dans le cas où l'état d'équilibre initial (avant propagation) est stable au sens de Hill par rapport à la variable cinématique (pas d'instabilité géométrique) et par rapport au déplacement du front (pas d'instabilité matérielle).

REMARQUE(S) 21 – Oubliant un instant les contraintes-inégalités dans l'ensemble \hat{V}_θ , il est tentant de résoudre le problème non linéaire (\mathcal{P}) par une méthode de type Newton : soit $(\mathbf{u}^0, \boldsymbol{\theta}^0)$ l'état d'équilibre initial. Un état d'équilibre final est obtenu itérativement selon par la procédure :

$$\begin{pmatrix} \hat{E}_{,uu}(\mathbf{u}^n, \boldsymbol{\theta}^n) & (\hat{E}_{,u})^{(1)}(\mathbf{u}^n, \boldsymbol{\theta}^n) \\ (\hat{E}^{(1)})_{,u}(\mathbf{u}^n, \boldsymbol{\theta}^n) & \hat{E}^{(2)}(\mathbf{u}^n, \boldsymbol{\theta}^n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n \\ \boldsymbol{\theta}^{n+1} - \boldsymbol{\theta}^n \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \hat{E}_{,u}(\mathbf{u}^n, \boldsymbol{\theta}^n) \\ \hat{E}^{(1)}(\mathbf{u}^n, \boldsymbol{\theta}^n) \end{pmatrix} \quad (5.35)$$

jusqu'à ce que $\max(\|\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n\|_1, \|\boldsymbol{\theta}^{n+1} - \boldsymbol{\theta}^n\|_2)$ soit arbitrairement petit. Cette résolution simultanée est conceptuellement difficile à imaginer, d'autant que la signification des termes extra-diagonaux n'est pas claire. Cela est dû au fait que le champ \mathbf{u} dépend en réalité de la position du front $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\hat{\gamma})$! Dans d'autres approches - par exemple les approches "modèles d'interphase" - la résolution simultanée est possible grâce au fait que la fonction $\hat{\gamma}(\hat{\mathbf{u}})$ est connue explicitement. Nous reviendrons sur ce point dans la partie II. ■

A l'image de ([POINT & SACCO (1996)], [FRANCFORT & MARIGO (1998)], [BOURDIN *et al.* (2000)]), la résolution de (\mathcal{P}) est remplacée par la résolution découplée des problèmes suivants ⁷ :

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}_1) \quad \mathbf{u} &= \arg(\min_{\hat{V}_u} \hat{E}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}), \mathbf{v} \in \hat{V}_u, \boldsymbol{\psi} \in \hat{V}_\theta) ; \\ (\mathcal{P}_2) \quad \boldsymbol{\theta} &= \arg(\min_{\hat{V}_\theta} \hat{E}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}), \mathbf{v} \in V_u, \boldsymbol{\psi} \in \hat{V}_\theta) . \end{aligned}$$

Le problème (\mathcal{P}_1) ne pose pas de difficultés nouvelles : en l'absence de contact, il correspond à un calcul de structure classique avec $\hat{V}_u = \{\mathbf{v} \in (W^{1,4}(\hat{\Omega}))^3, \mathbf{v}|_{\hat{\Gamma}_u} = 0\}$. Explicitons la résolution du problème (\mathcal{P}_2) . La condition suffisante de stabilité (5.16) en $\boldsymbol{\theta}$ s'écrit ici :

$$\hat{E}^{(2)}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}) = \hat{I}^{(2)}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}) + \hat{D}^{(2)}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}) > 0 \quad \forall \boldsymbol{\theta} \in \hat{V}_\theta \quad (5.37)$$

pour tout champ admissible de l'ensemble \hat{V}_θ . Il en résulte, que selon la relation (5.23₁), le minimum est caractérisé par l'inéquation variationnelle :

$$\boxed{\hat{E}^{(1)}(\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\theta}) = \int_{\hat{\gamma}_f} (G_c - \hat{G})(\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\theta}) \cdot \boldsymbol{\nu} \sqrt{|g|} d\Gamma \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{\psi} \in \hat{V}_\theta} \quad (5.38)$$

⁷Par comparaison, (5.35) devient

$$\left\{ \begin{aligned} \hat{E}_{,uu}(\mathbf{u}^n, \boldsymbol{\theta}^n)(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n) &= -\hat{E}_{,u}(\mathbf{u}^n, \boldsymbol{\theta}^n) ; \\ \hat{E}^{(2)}(\mathbf{u}^{n+1}, \boldsymbol{\theta}^n)(\boldsymbol{\theta}^{n+1} - \boldsymbol{\theta}^n) &= -\hat{E}^{(1)}(\mathbf{u}^{n+1}, \boldsymbol{\theta}^n) . \end{aligned} \right. \quad (5.36)$$

le vecteur initial $(\mathbf{u}^0, \boldsymbol{\theta}^0)$ étant identique.

lorsque G désigne le taux de restitution local tel que $\hat{I}^{(1)}(\boldsymbol{\theta}) = - \int_{\hat{\gamma}_f} \hat{G} \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\nu} \sqrt{|g|} d\Gamma$. Cette inéquation non linéaire, qui est à rapprocher de (5.3)⁸, peut être résolue en introduisant le lagrangien $L(\boldsymbol{\theta}, \mu) = E^{(1)}(\boldsymbol{\theta}) + (\mu, g(\boldsymbol{\theta}))$ avec $g(\boldsymbol{\theta}) = -\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\nu}$, μ la fonction duale de g et en utilisant, par exemple la technique de point fixe intérieur développée dans [HERSKOVITS (1992)]. En réalité, cela n'est pas nécessaire. Lorsque l'état est stable au sens de Hill, l'événement $\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\nu} < 0$ n'a jamais lieu en les points du front où $\hat{G} > G_c$. Le déplacement $\boldsymbol{\theta}$ cherché est alors obtenu en résolvant la formulation variationnelle :

$$\boxed{\hat{E}^{(2)}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\psi}) = -E^{(1)}(\boldsymbol{\psi}) = \int_{\hat{\gamma}_f} (\hat{G} - G_c)(\boldsymbol{\psi}) \cdot \boldsymbol{\nu} \sqrt{|g|} d\Gamma \quad \forall \boldsymbol{\psi} \in \hat{V}_\theta .} \quad (5.39)$$

Quelques remarques s'imposent

REMARQUE(S) 22 – *Insistons sur le fait que l'opérateur $\hat{E}^{(2)}$ est non local. Il en résulte que les points du front ne vont pas évoluer indépendamment les uns des autres : le déplacement du front en l'abscisse curviligne $s \in [0, L]$ va dépendre de la différence $(\hat{G} - G_c)(s)$ mais aussi de $(\hat{G} - G_c)(\tau)$, $\forall \tau \in [0, L]$. Nous constaterons dans les applications que le déplacement θ sera de l'ordre de $\|\hat{G} - G_c\|_{L^\alpha}$ avec α de l'ordre de 2 (et donc différent de ∞ pour une loi purement locale). Dans le cas d'évolution stable, la relation (5.39) n'est rien d'autre qu'une formulation variationnelle faible du critère de Griffith usuel.*

- *Si le taux de restitution calculé excède en tout point du front la valeur G_c , (5.39) fournit selon, la propriété (5.37), un déplacement normal strictement positif de tous les points du front. Dans le cas inverse $(\hat{G}(s) < G_c, \forall s \in [0, L])$, le déplacement est négatif traduisant la non évolution du front. Bien entendu, les cas mixtes peuvent se produire.*
- *Si l'intensité du chargement λ reste voisine de λ_c ($\lambda > \lambda_c$), il se peut que le déplacement du front ne réalise qu'un minimum local de l'énergie totale. Le front obtenu est le plus "proche" du front initial parmi tous ceux réalisant un minimum de l'énergie, au sens où l'aire nouvellement créée est minimale.*
- *Insistons également sur le fait que la condition de stabilité du front porte sur l'opérateur $\hat{E}^{(2)}$ et non sur l'opérateur $\hat{I}^{(2)}$, et donc dépend de G_c . Il se peut en effet que $\hat{I}^{(2)}$ ne soit pas défini positif mais que l'on ait $G < G_c$ en tout point du front. Dans [FRANCFORT & MARIGO (1998)], les auteurs discutent de la stabilité (au sens de Hill) de l'état d'équilibre vis-à-vis de la fissuration en étudiant la convexité de l'énergie potentielle I , vue comme une fonction de l'énergie de rupture où intervient la quantité G_c . ■*

5.1.4 Cas des évolutions spontanées

Envisageons le cas d'un équilibre initial $(\mathbf{u}(\lambda_c), \gamma(\lambda_c))$ instable vis-à-vis de la propagation. D'une position initiale instable, la fissure va évoluer vers une position d'équilibre stable, en supposant qu'une telle position existe. Cela exclut le cas de la rupture instantanée de toute la zone non délaminée. Dans ce paragraphe, nous allons traiter une situation privilégiée d'instabilité : le processus d'**amorçage** de la fissure. Dans le cas d'un matériau homogène, ce processus est toujours instable : cela est du au fait que le taux de restitution (sans signification physique en l'absence de fissure) est identiquement nul en l'absence de fissure et strictement positif dans le cas contraire. Il

⁸en écrivant que $\dot{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nu} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\boldsymbol{\theta}(\zeta + t\boldsymbol{\nu}) - \boldsymbol{\theta}(\zeta)}{t}$, $\zeta \in \hat{\gamma}_f$.

s'agit de déterminer la première position de $\hat{\gamma}_f$ à l'équilibre ainsi que le facteur de charge critique. La relation (5.39), utilisée dans le cas stable, s'écrit :

$$\hat{E}^{(2)}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\psi}) = - \int_{\hat{\gamma}_f} G_c \boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\nu} \sqrt{|g|} d\Gamma \quad \forall \boldsymbol{\psi} \in \hat{V}_\theta . \quad (5.40)$$

Cependant, rien n'assure que le déplacement du front ainsi calculé appartient à V_θ , malgré le fait que l'opérateur $\hat{E}^{(2)}$ n'est pas défini positif. Pour résoudre néanmoins ce problème, rappelons le résultat suivant, utilisé dans [HASHIN (1996)] pour la fissuration transverse puis dans [FRANCFORT & MARIGO (1998)] dans le cadre de l'élasticité linéaire bidimensionnelle :

PROPRIÉTÉ 3 (Fissuration brutale) *Si l'évolution de la fissuration est discontinue à l'instant λ_c , alors :*

$$\lim_{\Delta\lambda_c \rightarrow 0} \left(\hat{E}(\mathbf{u}(\lambda_c - \Delta\lambda_c), \gamma(\lambda_c - \Delta\lambda_c)) - \hat{E}(\mathbf{u}(\lambda_c + \Delta\lambda_c), \gamma(\lambda_c + \Delta\lambda_c)) \right) = 0 \quad \Delta\lambda_c \in \mathbb{R}^+ \quad (5.41)$$

stipulant que l'énergie totale est conservée au cours d'une évolution spontanée. ■

Ce résultat, totalement naturel, n'est en fait rien d'autre qu'une conséquence de l'instabilité assurant que le travail de perturbation pour faire évoluer une fissure d'un état d'équilibre instable vers un autre état est arbitrairement petit. Le problème (\mathcal{P}) est alors transformé en le problème (\mathcal{A}) suivant :

$$(\mathcal{A}) : (\mathbf{u}(\lambda_c), \gamma_f(\lambda_c), \lambda_c) \in V_u \times V_\gamma \times \mathbb{R}^+ \quad \text{tq} \quad \begin{cases} (\mathcal{P}) & + \\ E(\mathbf{u}(\lambda_c), \emptyset) = E(\mathbf{u}(\lambda_c), \gamma_f(\lambda_c)) \end{cases}$$

$(\mathbf{u}(\lambda_c), \emptyset)$ (resp. $(\mathbf{u}(\lambda_c), \gamma_f(\lambda_c))$) désigne l'état d'équilibre de la structure saine soumise au chargement λ_c avant (resp. après) amorçage. (\mathcal{A}) apparaît comme un problème de minimisation contenant une *contrainte-égalité* supplémentaire.

ILLUSTRATION : SOLUTION ANALYTIQUE DANS LE CAS D'UNE POUTRE LINÉAIRE

Résolvons le problème (\mathcal{A}) dans le cas de la poutre saine rectiligne, encastree à une extrémité et soumise à un déplacement normal δ en un point de l'autre extrémité (voir chapitre 2 figure 3.6). Se plaçant en un équilibre cinématique u , le déplacement critique δ_c et la première extension de fissure a_c cherchés vérifient le système :

$$H(a_c, \delta_c) = H(0, \delta_c) \quad ; \quad H_{,a}(a_c, \delta_c) = 0 \quad \text{avec} \quad H(a, \delta) \equiv \frac{E\epsilon^3 \delta^2}{7a^3 + l^3} + G_c a = \text{Min}_u E(u, a, \delta)$$

en supposant que a_c n'est pas de l'ordre de l'épaisseur ϵ afin que la solution poutre soit cinématiquement correcte. La solution unique est :

$$(a_c, \delta_c) = \left(bl, \frac{l^2 \sqrt{6E\epsilon G_c b}}{2E\epsilon^2} \right) \quad ; \quad b = \frac{98^{1/3}}{7} \approx 0.6586 .$$

Nous vérifions que l'extremum est un minimum en calculant $H_{,aa}(a_c, \delta_c) = \frac{G_c 98^{2/3}}{7l} > 0$ (Fig. 5.2) et que la quantité δ_c est monotone croissante avec G_c . Par ailleurs, notons que la longueur de

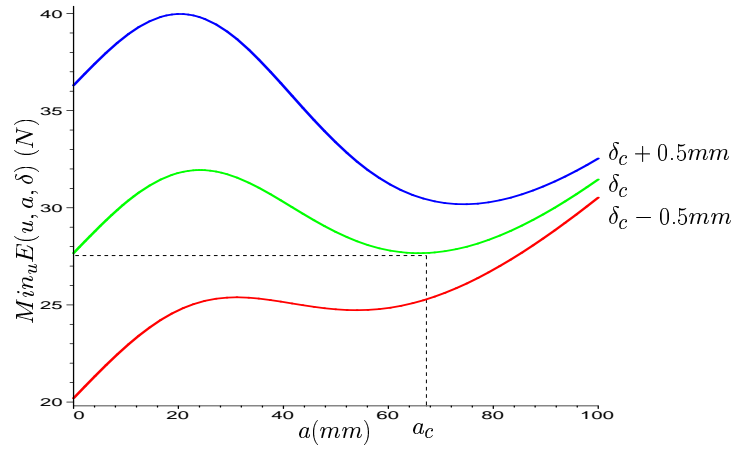


FIG. 5.2: $H(a, \delta) = \text{Min}_u E(u(\delta), a, \delta)$ vs. a pour $\delta = \delta_c + (-0.5, 0, 0.5)mm$.

première extension a_c est indépendante du taux de restitution G_c . Ce résultat est conforme avec [BILTERYST (2000), prop. 16 page 114].

A.N. : $(E, l, G_c, \epsilon) = (150GPa, 100mm, 0.28N/mm, 2.5mm) \implies (a_c, \delta_c) \approx (65.86, 3.43)mm$.

La figure 5.3 représente l'évolution de l'énergie totale H à l'équilibre cinématique et des énergies mécanique et de rupture en fonction du déplacement imposé.

$$H(a, \delta) = \begin{cases} I(0, \delta) & \delta \leq \delta_c, \\ I(a, \delta) + D(a, \delta) & \delta \geq \delta_c. \end{cases} \quad (5.42)$$

Lorsque $\delta > \delta_c$, la propagation est stable, et à tout instant, a est lié à δ par $H(a, \delta)_{,a} = 0$, fournissant $a = O(\sqrt{\delta})$. L'amorçage a lieu lorsque l'énergie associée à la structure saine (courbe rouge) devient supérieure à l'énergie associée à la structure fissurée (courbe bleue). L'énergie mécanique décroît alors brusquement (vers la courbe verte), décroissance exactement compensée par la création de l'énergie de surface (courbe jaune).

Dans le cas d'une éprouvette D.C.B., un tel calcul poutre n'est pas valide. Il conduit à une énergie infinie pour fissurer la structure, approximation évidemment incorrecte due à l'approximation du déplacement normal. Il devient alors nécessaire d'affiner le calcul par la prise en compte de la couche limite, conduisant à une première extension de fissure de l'ordre de $\sqrt{\epsilon}$. (voir [BILTERYST (2000), chapitre 5] dans un cadre bidimensionnel). ■

RÉSOLUTION DU PROBLÈME (\mathcal{A}) PAR ENCADREMENT

L'évolution la plus fréquente de l'énergie $\text{Min}_u \hat{E}(\mathbf{u}(\lambda_c), \gamma(\lambda_c))$ en fonction de l'aire de la fissure, $\hat{D}(\hat{\gamma})$, à la constante G_c près, est décrite sur la figure (5.4). En zéro, l'énergie est concave et croissante, sinon le premier minimum de l'énergie serait inférieur strictement à $\hat{E}(\mathbf{u}(\lambda_c), \emptyset)$ contredisant la propriété 3. L'énergie atteint un maximum en $\hat{D}(\gamma_e)$ et change de concavité en $\hat{D}(\gamma_I)$ compris entre $\hat{D}(\gamma_e)$ et l'aire cherchée $\hat{D}(\gamma_s)$. Il en résulte que tout front virtuel de fissure γ tel que $\hat{D}(\gamma) < \hat{D}(\gamma_I)$ est dans une position instable. L'intensité de chargement critique λ_c et la première position du front de fissure à l'équilibre sont déterminées de façon simultanée. Soit $\hat{E}(\mathbf{u}(\lambda), \hat{\gamma}(\lambda))$, $\hat{\gamma}(\lambda) \neq \emptyset$ la valeur de l'énergie totale correspondant à l'équilibre $(\mathbf{u}(\lambda), \hat{\gamma}(\lambda))$

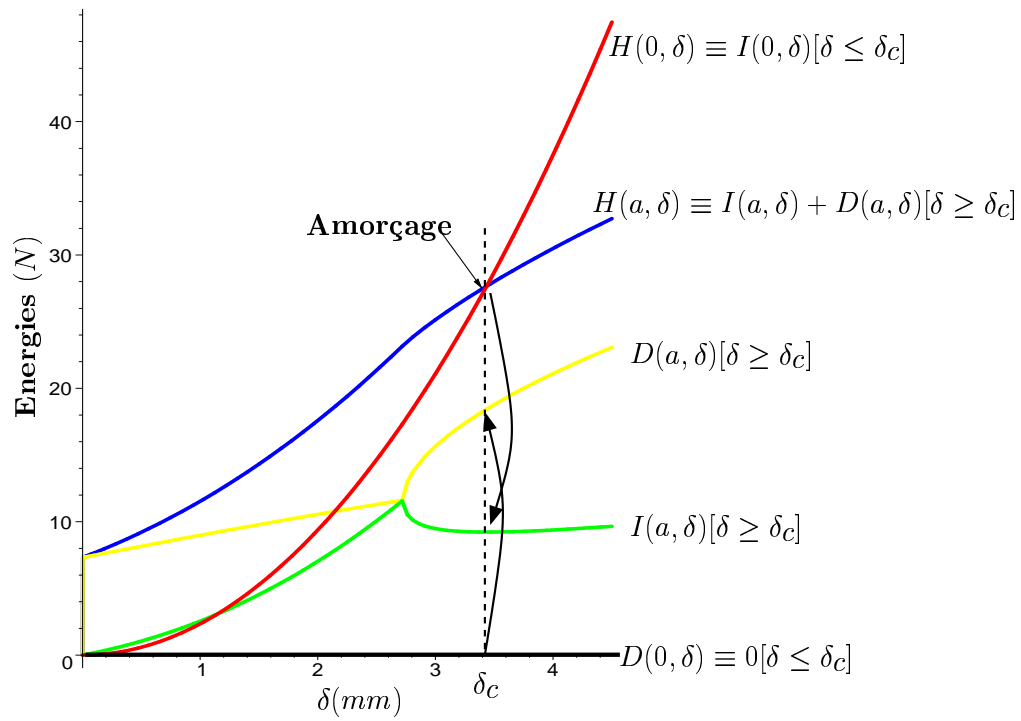


FIG. 5.3: Evolution des énergies en fonction de δ .

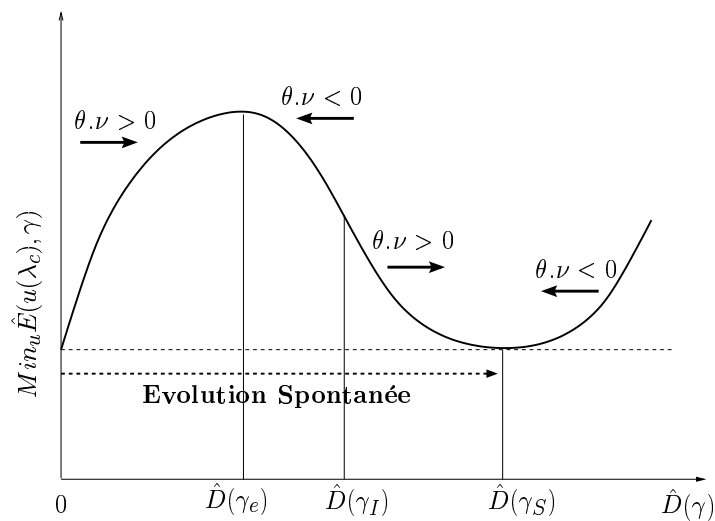


FIG. 5.4: Une évolution possible de l'énergie totale à l'équilibre cinématique en fonction de l'aire délaminée.

associé au chargement λ . Alors selon le postulat adopté, la propriété précédente se décompose en les deux inégalités suivantes :

$$\begin{cases} \hat{E}(\mathbf{u}(\lambda), \gamma(\lambda)) \geq \hat{E}(\mathbf{u}(\lambda), \emptyset) \iff \lambda \leq \lambda_c ; \\ \hat{E}(\mathbf{u}(\lambda), \gamma(\lambda)) \leq \hat{E}(\mathbf{u}(\lambda), \emptyset) \iff \lambda \geq \lambda_c . \end{cases} \quad (5.43)$$

Si le chargement λ est inférieur à λ_c , l'énergie totale est minimale pour la structure saine. Dans le cas contraire, il existe une position de front où l'énergie est inférieure à celle associée à la structure saine. Selon le postulat, la structure se fissure pour atteindre la position d'équilibre $(\mathbf{u}(\lambda), \hat{\gamma}(\lambda))$ impliquant une énergie totale plus faible, que de rester dans une position où l'énergie y est supérieure. Compte tenu de ces propriétés (la figure 5.2 en donne une illustration), la démarche est la suivante : on se donne une position de fissure arbitraire telle que $\hat{D}(\hat{\gamma})$ reste faible puis un chargement quelconque λ ; ce chargement est alors localisé par rapport à λ_c , suivant la valeur $\hat{E}(\mathbf{u}(\lambda), \hat{\gamma}(\lambda))$, correspondant à un équilibre en les deux variables, par rapport à $\hat{E}(\mathbf{u}(\lambda), \emptyset)$; cela fournit ainsi un encadrement simultané de λ_c et de $\hat{\gamma}(\lambda_c)$, encadrement que l'on affine en itérant le processus.

REMARQUE(S) 23 – *Dans le cas général tridimensionnel, le choix de la première position de fissure γ peut être délicat. Lorsque $D(\gamma) < D(\gamma_I)$, l'usage de la relation (5.39) peut conduire à une fermeture de la fissure et un algorithme convergeant vers la position associée à $\hat{D}(\gamma_e)$. Cette position correspond à un maximum de l'énergie totale. Numériquement, cela est détecté en étudiant le spectre de l'opérateur $\hat{E}^{(2)}$. L'algorithme peut aussi conduire à une fermeture complète de la fissure. L'idéal est de partir d'un front γ tel que $D(\gamma) \in [\hat{D}(\gamma_I), \hat{D}(\gamma_S)]$ auquel cas l'usage de la relation (5.39) fournit un déplacement positif. Nous utiliserons des techniques numériques dans les applications pour lever ces difficultés (voir paragraphe 6.1).*

- *Rien n'assure que le minimum associé à $\hat{D}(\gamma_S)$ et déterminé par la méthode précédente est global. L'énergie peut admettre un second point critique où l'énergie totale est plus faible. Ce point critique est associé à $\hat{D}(\gamma_{S_1})$ sur la figure 5.5, correspondant au chargement critique λ_{c_1} . Puisque $\text{Min}_{\mathbf{u}} \hat{E}(\mathbf{u}(\lambda_{c_1}), \emptyset) > \text{Min}_{\mathbf{u}} \hat{E}(\mathbf{u}(\lambda_{c_1}), \gamma_{S_1})$, il résulte des raisonnements précédents que la structure aurait dû se fissurer pour un chargement critique λ_{c_2} inférieur strictement à λ_{c_1} tel que $\text{Min}_{\mathbf{u}} \hat{E}(\mathbf{u}(\lambda_{c_2}), \emptyset) = \text{Min}_{\mathbf{u}} \hat{E}(\mathbf{u}(\lambda_{c_2}), \gamma_{S_2})$. Dans la pratique l'obtention du couple $(\lambda_{c_1}, \gamma_{S_1})$ plutôt que le couple $(\lambda_{c_2}, \gamma_{S_2})$ dépend fortement de la première position du front initialement choisie. Signalons que nos tests numériques n'ont pas permis d'exhiber d'exemple où l'énergie présente deux minima intérieurs.*
- *Dans le cas d'une propagation instable (par exemple une D.C.B. soumise à une force imposée), le taux de restitution $G(s)$ devient supérieur à $G_c \forall s$ et le reste. L'énergie reste strictement concave et n'admet pas de minimum intérieur. Le front de fissure parcourt brutalement toute la surface moyenne de la structure, support supposé du front. La conservation de l'énergie s'écrit : $\hat{I}(\mathbf{u}(\lambda_c), \emptyset) = G_c \text{Aire}(\hat{\omega}) + \hat{I}(\mathbf{u}(\lambda_c), \gamma(\lambda_c))$, $\gamma(\lambda_c) \subset \partial \hat{\omega}$. Cependant, pour une telle évolution, le fait de négliger les effets d'inertie est sujet à caution et une inégalité inférieure stricte paraît plus correcte. ■*

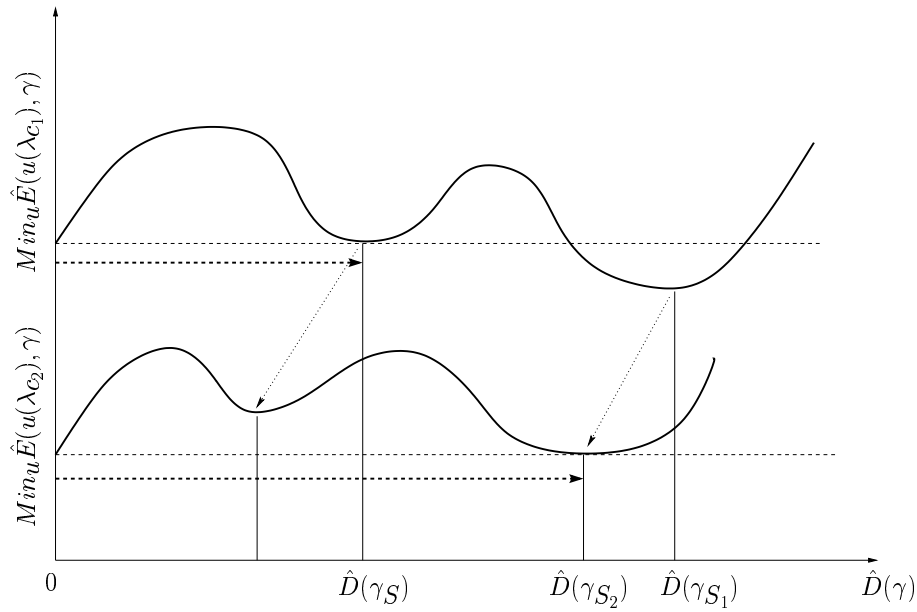


FIG. 5.5: Cas où $\text{Min}_{\mathbf{u}} E(\mathbf{u}, \gamma)$ admet plusieurs minima intérieurs.

5.2 Mise en œuvre

Dans cette section, nous explicitons la discrétisation numérique retenue pour les champs \mathbf{u} et θ puis la mise en œuvre de l'algorithme de propagation.

5.2.1 Description du front et définition de θ

Le front $\hat{\gamma}_f$ est approximé par des fonctions splines cubiques. Cela permet de déconnecter la description du front de celle du maillage élément fini discrétisant la structure $\hat{\Omega}$. Considérons un élément spline de référence ($-1 \leq s \leq 1$), les quatre fonctions de forme sont :

$$\begin{cases} p_1(s) = \frac{1}{48}(1-s)^3, \\ p_2(s) = \frac{1}{48}(3s^3 - 3s^2 - 15s + 23), \\ p_3(s) = \frac{1}{48}(-3s^3 - 3s^2 + 15s + 23), \\ p_4(s) = \frac{1}{48}(1+s)^3. \end{cases} \quad (5.44)$$

Le front $\hat{\gamma}_f$ est alors décrit par les nœuds \mathbf{x}^i . La partie du front située entre deux nœuds splines constitue un élément spline. L'équation paramétrique du $k^{\text{ième}}$ élément est :

$$\mathbf{x}(s) = \sum_{i=1}^4 p_i(s) \phi_{\mathbf{x}}^{i+k-1}. \quad (5.45)$$

Les coordonnées splines géométriques $\phi_{\mathbf{x}}^i$ sont obtenues en assurant l'égalité $\mathbf{x} = \mathbf{x}^i$ à chaque nœud spline et en prescrivant les tangentes à $\hat{\gamma}_f$ aux extrémités dans le cas d'un front ouvert, ou bien en écrivant la continuité des tangente et courbure dans le cas d'un front fermé. Dans le

voisinage de l'élément spline k , le champ $\boldsymbol{\theta}$ est alors défini selon :

$$\boldsymbol{\theta}(s, \rho) = q(\rho) \sum_{i=1}^4 p_i(s) \phi_{\boldsymbol{\theta}}^{i+k-1} \quad (5.46)$$

où q est une fonction en cloche contrôlant le support de $\boldsymbol{\theta}$ dans la direction transverse \mathbf{e}_2 :

$$q(r) = \begin{cases} 1 & 0 \leq r \leq r_i, \\ \frac{(r-r_e)^2}{(r_e-r_i)^3} [2(r-r_e) + 3(r_e-r_i)] & r_i \leq r \leq r_e, \\ 0 & r \geq r_e, \end{cases} \quad (5.47)$$

r_e et r_i sont des paramètres positifs, r_i pouvant être nul. La coordonnée locale transverse ρ vérifie la relation $\mathbf{OM} = \mathbf{Om} + \rho \mathbf{e}_2$ pour tout point \mathbf{M} dans un voisinage du front et \mathbf{m} sa projection sur le front, selon \mathbf{e}_2 défini dans le paragraphe précédent, suivant que le front est ouvert ou fermé. Les intégrales qui apparaissent dans les expressions des dérivées lagrangiennes sont évaluées en utilisant une formule d'intégration de Gauss. Cela nécessite de connaître la valeur des fonctions de forme en chaque point de Gauss \mathbf{M} et, pour cela, de localiser la projection de \mathbf{M} sur $\hat{\gamma}_f$ (élément spline concerné) et d'en déduire les coordonnées locales (s, ρ) de \mathbf{M} . Les degrés de liberté du champ $\boldsymbol{\theta}$ sont les coordonnées splines $\phi_{\boldsymbol{\theta}}$. Leur nombre est plus faible que le nombre de coordonnées de tous les nœuds du maillage élément fini situés sur le front, réduisant ainsi la taille du problème.

Calcul de la force de délaminage

L'approximation adoptée précédemment nous permet d'écrire le taux de restitution sous la forme :

$$\hat{g}_h(\boldsymbol{\theta}) = \{\boldsymbol{\theta}\}^t \cdot \{\hat{g}\}, \quad (5.48)$$

en notant $\{\boldsymbol{\theta}\}$ le vecteur des degrés de liberté de $\boldsymbol{\theta}$, et $\{\hat{g}\}$ son vecteur associé, sans signification physique. Sous la forme d'une intégrale curviligne, le taux s'écrit $\hat{g}(\boldsymbol{\theta}) = \int_{\hat{\gamma}_f} \hat{G} \sqrt{|g|} \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\nu} d\Gamma$ faisant apparaître la force de délaminage \hat{G} . Pour obtenir $\{\hat{G}\}$, l'intégrale est calculée en prenant la même approximation pour \hat{G} et $\boldsymbol{\theta}$, entraînant :

$$\hat{g}_h(\boldsymbol{\theta}) = \{\boldsymbol{\theta}\}^T \cdot [M] \cdot \{\hat{G}\}, \quad (5.49)$$

avec $[M]$ une matrice symétrique définie positive (voir [NEVERS (1986)], page 4.21). La force nodale de \hat{G} est obtenue en résolvant finalement le système $[M] \cdot \{\hat{G}\} = \{\hat{g}\}$.

Calculs des dérivées secondes

Le calcul des dérivées secondes nécessite au préalable le calcul des dérivées lagrangiennes \mathbf{u}^1 . Le problème variationnel (4.78) s'écrit sous forme discrète selon :

$$\{\mathbf{v}\}^T \cdot [K] \cdot [\mathbf{u}^1] = \{\mathbf{v}\}^T \cdot [F] \cdot \{\boldsymbol{\theta}\} \quad \forall \{\mathbf{v}\} \text{ c.a. } \quad (5.50)$$

$[\mathbf{u}^1]$ et $[F]$ sont des matrices dont le nombre de lignes est le nombre de degrés de liberté en \mathbf{u} et le nombre de colonnes est le nombre de degrés de liberté en $\boldsymbol{\theta}$. $[F]$ s'obtient en discrétisant le terme

de droite de (4.78). Notons que les dérivées lagrangiennes ne sont à calculer que sur le support de $\boldsymbol{\theta}$. La discrétisation de la relation (4.80) s'écrit $\{\boldsymbol{\theta}\}^T \cdot [\hat{I}^{(2)}] \cdot \{\boldsymbol{\theta}\}$ tandis que celle de (5.21)₁ donne $\{\boldsymbol{\theta}\}^T \cdot [\hat{D}^{(2)}] \cdot \{\boldsymbol{\theta}\}$, les deux matrices étant symétriques. De plus, comme conséquence de (5.50), la matrice $[\hat{I}^{(2)}]$ est pleine. Enfin, il vient simplement :

$$[\hat{E}^{(2)}] = [\hat{I}^{(2)}] + [\hat{D}^{(2)}] . \quad (5.51)$$

5.2.2 Description de l'élément fini

La surface plane (réelle ou virtuelle) contenant le front de délaminage est tout d'abord maillée à l'aide de quadrangles Q8 à 8 nœuds (le nœud milieu est éliminé)⁹. L'interface, support du front, est composée de zones délaminées (dont une zone arrière du front support de $\boldsymbol{\theta}$) sur lesquelles tous les nœuds sont dédoublés, et de zones non délaminées (dont une zone en avant du front support de $\boldsymbol{\theta}$). La structure tridimensionnelle est alors générée par translation inférieure et supérieure de ces nœuds selon l'axe \mathbf{e}_3 . Les éléments dans l'épaisseur ne contiennent pas de nœuds milieu. En conclusion, la structure est représentée à l'aide d'éléments finis $C^0(\hat{\Omega})$ à 16 nœuds (voir l'élément de référence figure 5.6) : les fonctions de forme, notées N_k , $k = 1, 8$ sont quadratiques dans les plans parallèles à la surface moyenne (engendrés par les vecteurs $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$) et linéaires dans l'épaisseur selon la normale \mathbf{e}_3 . Sur l'élément de référence, toute fonction f réelle se représente :

$$f(\eta, \xi, \zeta) = \sum_{k=1}^8 N_k(\eta, \xi) \left[\frac{1+\zeta}{2} f^{kS} + \frac{1-\zeta}{2} f^{kI} \right] \quad ; \quad (\eta, \xi, \zeta) \in [-1, 1]^3 , \quad (5.52)$$

lorsque f_k^S (resp. f_k^I) désigne la valeur de f au nœud k de la face supérieure (resp. inférieure). Les fonctions de forme selon $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ sont données dans le tableau 5.1. Enfin, compte tenu de la

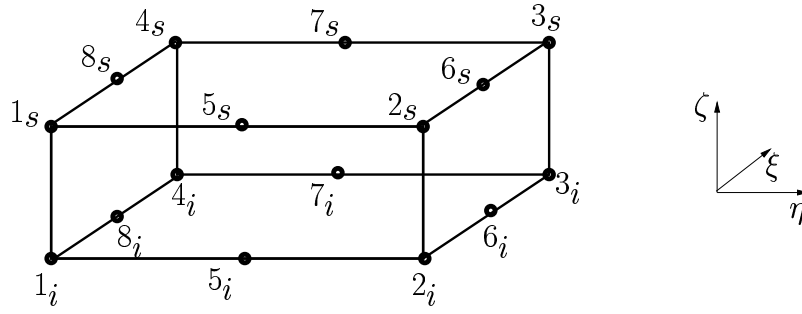
Nœud k	N_k
1	$N_1(\eta, \xi) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)(-\eta - \xi - 1)$
2	$N_2(\eta, \xi) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)(-\eta + \xi - 1)$
3	$N_3(\eta, \xi) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)(\eta + \xi - 1)$
4	$N_4(\eta, \xi) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)(+\eta - \xi - 1)$
5	$N_5(\eta, \xi) = \frac{1}{2}(1 - \eta)(1 - \xi^2)$
6	$N_6(\eta, \xi) = \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(1 + \xi)$
7	$N_7(\eta, \xi) = \frac{1}{2}(1 + \eta)(1 - \xi^2)$
8	$N_8(\eta, \xi) = \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(1 - \xi)$

TAB. 5.1: Fonctions de forme selon $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$.

séparation entre les variables (η, ξ) et ζ , l'intégration numérique de Gauss est découplée : elle est choisie réduite selon $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ (2×2 points de Gauss) et complète selon \mathbf{e}_3 (1×2 point de Gauss) conduisant à 8 points de Gauss par élément.

Les développements précédents nous permettent de décrire un algorithme de propagation de front de fissure.

⁹Les triangles, plus rigides, ne sont utilisés qu'en cas de nécessité.

FIG. 5.6: Element fini C^0 à 16 nœuds conforme.

5.2.3 Algorithme

Pour un chargement donné, la recherche d'un minimum de l'énergie totale se fait de façon découplée. Après avoir obtenu l'équilibre cinématique, nous réalisons une itération de la méthode de Newton (5.39). Ce processus est répété jusqu'à ce que le front ne progresse plus. Le déplacement Θ du front cherché est alors la somme de tous les déplacements obtenus après (5.39).

Les principales données initiales sont :

- $\hat{\gamma}_f$, le front admissible de départ décrit par des courbes spline ;
- λ (ou u_d), une intensité de chargement (ou de déplacement imposé) ;
- G_c , le taux de restitution critique constant .

Les étapes sont alors les suivantes :

1. Calcul du minimum $\{\mathbf{u}\}$ de l'énergie $E(\mathbf{u}, \gamma)$, γ fixé ;
2. Calcul de $\{\mathbf{g}_c\}$ et $\{\mathbf{g}\}$ discrétisant (5.21)₁ et (4.79) ;
3. Calcul de $[F]$ discrétisant (4.78), puis calcul de $\{\mathbf{u}^1\}$ résolvant (5.50) ;
4. Calcul de la matrice $[E^{(2)}]$;
5. Calcul de $\{\boldsymbol{\theta}\}$ résolvant le système

$$([Q]^T \cdot [E^{(2)}] \cdot [Q]) \cdot \{\boldsymbol{\Phi}\} = [Q]^T \cdot (\{\mathbf{g}\} - \{\mathbf{g}_c\}) \quad ; \quad \{\boldsymbol{\theta}\} = [Q] \cdot \{\boldsymbol{\Phi}\} \quad ; \quad (5.53)$$

6. – Si $\|\{\boldsymbol{\theta}\}\|_\infty \leq \epsilon_\theta$, alors $\lambda = \lambda + \Delta\lambda$ puis étape 1 ;
- Si $\|\{\boldsymbol{\theta}\}\|_\infty \geq \epsilon_\theta$, alors $\hat{\gamma}_f : \{\mathbf{x}\} = \{\mathbf{x}\} + \epsilon_S \{\boldsymbol{\theta}\}$ puis étape 1 ;

Cette procédure peut être répétée jusqu'à la rupture de la structure ($\hat{\gamma}_f \subset \partial\hat{\omega}$). Cet algorithme requiert quelques explications supplémentaires :

Commentaires

1. Le calcul de la force de délaminage $\{\mathbf{G}\}$ n'est pas nécessaire. Cependant, dans le cas où $\{G\}_i < G_c, \forall i$, son évaluation à l'étape 2 permet d'éviter les étapes ultérieures.
2. La matrice $[Q]$ présente dans (5.53) est composée des vecteurs propres associées aux valeurs propres non négatives de la matrice $[D^{(2)}]$. Cela assure que le champ $\boldsymbol{\theta}$ vérifie $D^{(2)}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}) \geq 0$.

3. Le premier événement de l'étape 6 signifie que le chargement n'est pas suffisant pour faire évoluer la fissure. L'énergie est alors en un point de minimum local par rapport à ses deux arguments. Il convient alors d'incrémenter le chargement. Dans le cas contraire, l'énergie est seulement en un point de minimum local pour \mathbf{u} mais pas encore pour γ . Le front évolue d'un déplacement $\boldsymbol{\theta}$. Il convient alors de réactualiser la géométrie, puis de retourner à l'étape 1, sans incrémenter l'intensité du chargement. Sur la géométrie réactualisée, l'énergie n'est *a priori* minimale ni en \mathbf{u} ni en γ .
4. Plusieurs méthodes sont envisageables afin d'évaluer la nouvelle position d'équilibre cinématique après déplacement du front. Une méthode consiste à repartir de la solution d'équilibre précédente. Cependant, si le déplacement du front précédent est trop important, l'algorithme de Newton peut diverger. Pour éviter cela, on prescrit un déplacement maximal en norme du front Θ_{max} . Une autre méthode consiste à partir du champ cinématique, obtenu en interpolant aux nouveaux nœuds, le déplacement des anciens nœuds correspondants. Ce choix réduit sensiblement le nombre d'itérations de la méthode de Newton dans les cas de convergence, sans toutefois préserver de la divergence. Par ailleurs, elle nécessite la localisation des nouveaux nœuds dans un des éléments finis de l'ancien maillage. Dans le cas où les éléments finis ne sont plus des éléments droits ¹⁰, cette localisation conduit à la résolution d'un système non linéaire sur chaque élément et donc coûteux. Enfin, une troisième voie consiste à réeffectuer toute la montée en charge. C'est la plus coûteuse mais elle permet des incréments de déplacement du front plus grands.
5. ϵ_θ et Θ_{max} sont pris égaux à des fractions d'une longueur caractéristique de la structure. Puis, $\epsilon_S = \min(1, \frac{\Theta_{max}}{\|\{\Theta\}\|_{L^\infty}})$.

Dans le cas d'un état instable, le processus peut conduire à un déplacement $\boldsymbol{\theta}$ intermédiaire tel que $\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\nu} < 0$. Illustrons-le dans le cas de l'amorçage en prenant, selon la méthode indiquée plus haut pour déterminer le premier état d'équilibre, un front de fissure γ_0 tel que $D(\gamma_0) \in]D_{\gamma_I}, D_{\gamma_S}[$ (Fig. 5.7). Sur le schéma, la seconde itération de Newton conduit à un déplacement normal négatif. Cependant, le déplacement réel du front Θ est bien dans \hat{V}_Θ . Dans la pratique, une telle éventualité conduit à un déplacement trop important. Le paramètre ϵ_S est alors plus petit que l'unité et permet de ne pas faire le test sur $\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\nu}$. En général, lorsque le premier déplacement vérifie $\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\nu} > 0$, il en est de même pour Θ .

Terminons ce paragraphe en évoquant la représentation géométrique du nouveau front, illustrée par la figure 5.8. Le déplacement $\boldsymbol{\theta}$ du front représenté par des fonctions splines, est déterminé aux nœuds splines (nœuds $\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^{i+3}, \mathbf{x}^{i+6}, \mathbf{x}^{i+9} \dots$ sur la figure 5.8). La position des nouveaux nœuds splines est alors calculée, définissant de nouvelles fonctions splines et un nouveau front $\hat{\gamma}_f + \{\boldsymbol{\theta}\}$. Sur ce nouveau front, les nœuds splines sont ensuite répartis uniformément ¹¹ assurant une description future du front homogène. Enfin, les nœuds éléments finis de l'ancien front sont répartis uniformément sur les courbes splines définissant le nouveau front. Le procédé utilisé pour mailler la structure délaminée assure un coût de remaillage, après chaque nouvelle évolution du front, négligeable devant celui du calcul de la nouvelle position d'équilibre. Ce fait peut être différent dans le cas de structures complexes, ou bien lorsque la surface de délaminage est inconnue. Certaines

¹⁰c'est le cas après le premier remaillage

¹¹La longueur de chaque segment reliant deux nœuds splines est identique

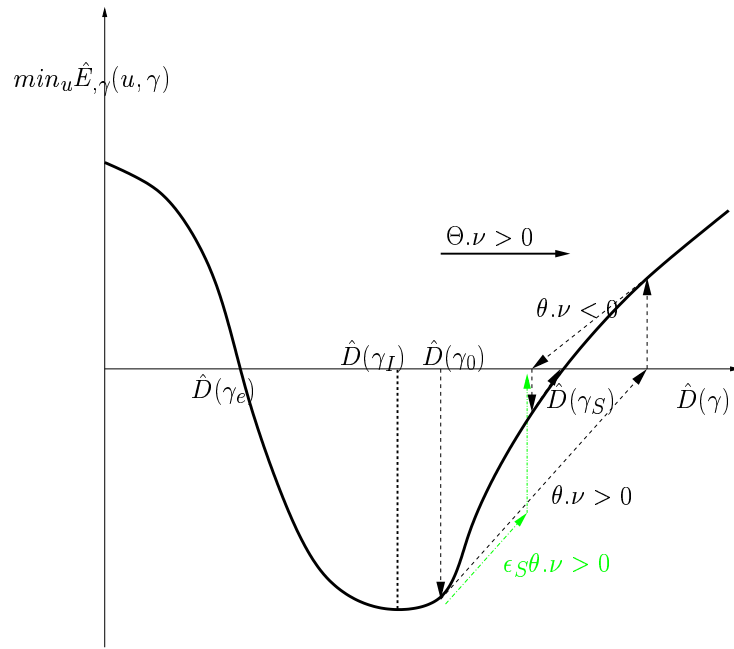


FIG. 5.7: $\text{Min}_u \hat{E}_{\gamma}(\mathbf{u}(\lambda), \lambda, \gamma(\lambda))$ vs. $\hat{D}(\gamma)$.

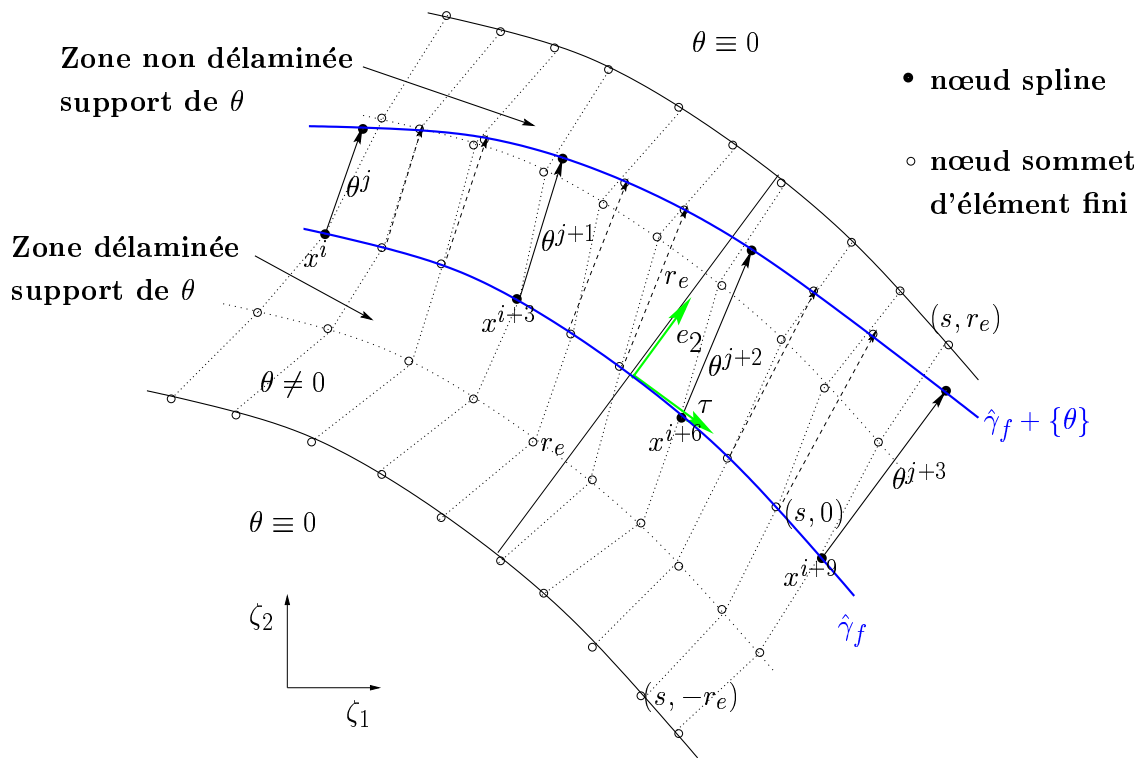


FIG. 5.8: Ancien front $\hat{\gamma}_f$ et nouveau front $\hat{\gamma}_f + \{\theta\}$.

méthodes où la description du front est indépendante du maillage ont été récemment proposées ([MÖES *et al.* (1999)], [WELLS & SLUYS (2001)]).

REMARQUE(S) 24 *L'énergie de rupture choisie est indépendante de la variable cinématique. [CHARLOTTE (2001)], suivant les idées développées par G.I. Barenblatt [BARENBLATT (1962)], propose de modifier cette énergie de façon à prendre en compte les interactions des lèvres de fissure au voisinage du front de fissure. La fonction constante G_c est alors remplacée par une fonction différentiable, nulle sur le front et proche de G_c loin du front lorsque les lèvres n'interagissent pas. La fonction $f_t([\mathbf{u}]) = G_c(1 - \exp(-t[\mathbf{u}]))$ convient, pour $t > 0$, $[\mathbf{u}]$ désignant l'écart entre les lèvres, selon une projection donnée. L'énergie de rupture vaut ainsi (dans le cas rectiligne) :*

$$D(\gamma, [\mathbf{u}]) = \int_{\omega_d} f_t([\mathbf{u}]) d\omega \quad (5.54)$$

et les équilibres de l'énergie totale associée sont caractérisés par les relations :

$$E_{,u}(\mathbf{u}, \gamma) = 0 = \int_{\Omega} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \nabla \mathbf{v}) d\Omega + \int_{\omega_d} \nabla f_t([\mathbf{u}]) \cdot [\mathbf{v}] d\omega = l_f(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V(\Omega) \quad (5.55)$$

et

$$E^{(1)}(\boldsymbol{\theta}) = 0 = - \int_{\Omega} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\theta}) d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{u})) \text{div} \boldsymbol{\theta} d\Omega + \int_{\omega_d} f_t([\mathbf{u}]) \text{div} \boldsymbol{\theta} d\omega \quad (5.56)$$

après élimination dans $E^{(1)}$ des dérivées lagrangiennes premières. Dans la partie II, nous résoudrons numériquement un problème très similaire. Pour des valeurs non petites de t , les résultats obtenus pour les deux énergies de ruptures sont quantitativement proches. Plus t est faible, plus la réponse est assouplie : la fissure se propage "plus tôt" et "plus loin". Des différences qualitatives sont étudiées dans [CHARLOTTE (2001)], partie III. ■

Chapitre 6

Applications

Ce chapitre présente quelques applications académiques très simples, visant à montrer la faisabilité de la méthode exposée dans le chapitre précédent. Le premier exemple étudie l'amorçage et la propagation dans le cas de la DCB rectiligne. Le second exemple concerne un front elliptique ayant pour but de mettre en évidence la notion de stabilité ainsi que la nécessité de la condition (5.24-(ii)). Puis les exemples suivants concernent des surfaces non planes et ont pour objectif l'étude des paramètres géométriques sur la propagation.

6.1 Double cantilever beam (DCB) - Surface plane

Ce premier exemple est consacré à l'amorçage et à la propagation d'une fissure évoluant au sein de la surface moyenne d'une DCB représentée sur la figure 6.1

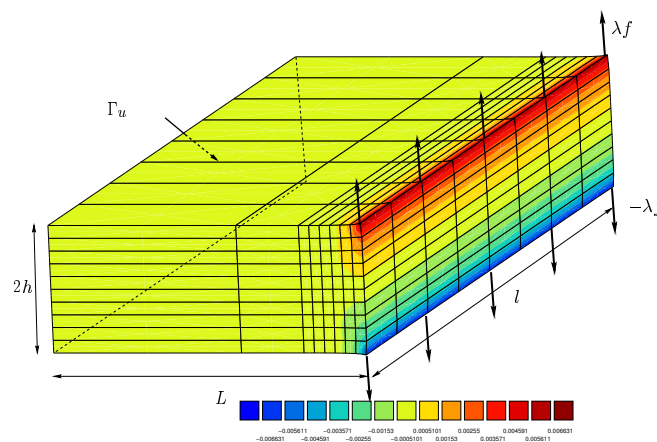


FIG. 6.1: Structure saine avant amorçage

et dont les caractéristiques géométriques et matériau sont données dans le tableau (6.1). La structure, initialement saine, est soumise à un chargement¹ de mode I sur les arêtes inférieure et supé-

¹Tous les chargements considérés dans les applications sont des chargements de traction n'engendrant pas de contact entre les lèvres de la fissure. L'exemple d'un panneau raidi soumis à un chargement de compression est présenté dans [OUSSET & MÜNCH (2001)].

E	ν	L	l	h	G_c
150000MPa	0.3	80mm	30mm	2mm	0.3398N/mm

TAB. 6.1: Caractéristiques géométriques et matériau.

rière de l'une des extrémités de la structure. L'algorithme de Newton est piloté en déplacement normal de sorte qu'il s'agit de déterminer la valeur de pilotage critique notée u_{dc} .

Relation entre les paramètres critiques d'amorçage

Appliquons la procédure d'encadrement introduite au cours du chapitre précédent. La figure 6.2 représente l'évolution des énergies mécanique et totale en fonction de l'aire délaminee, le déplacement imposé étant constant égal respectivement à $0.006mm$ et $0.0065mm^2$. La partie gauche de la figure 6.2 donne $E(0) \approx 25.25N.mm$ inférieure à l'énergie obtenue à l'équilibre $E(39) \approx 26.73N.mm$. Il en résulte que le déplacement imposé est inférieur au déplacement critique cherché et que la surface délaminee correspondante est supérieure à $39mm^2$.

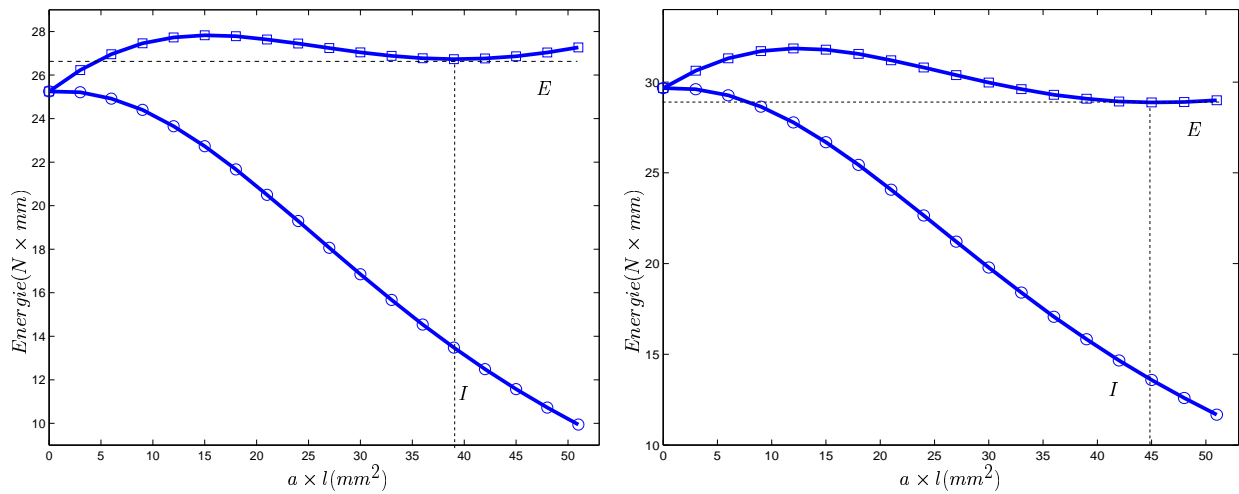


FIG. 6.2: Evolution des énergies en fonction de l'aire ($a \times l$) de la zone délaminee : $u_d = 0.006mm$ et $u_d = 0.0065mm$.

A l'inverse, la partie droite de la figure 6.2 permet de conclure que le déplacement critique cherché est inférieur à $0.0065mm$ et l'aire délaminee est inférieure à $45mm^2$. En affinant ce premier encadrement, nous obtenons $u_{dc} \approx 0.00634mm$. Naturellement, il est possible de concevoir le problème inverse ; celui de déterminer la quantité G_c à partir d'une valeur critique d'amorçage u_{dc} donnée : $u_{dc} = 0.006mm$ est par exemple associé à la valeur $G_c = 0.304N/mm$ (figure 6.3)

Le tableau 6.2 regroupe quelques valeurs assurant la stricte conservation de l'énergie totale et montre deux points, en parfait accord avec [BILTERYST (2000)]. D'une part, le déplacement critique est proportionnel à la racine carrée du taux de restitution critique :

$$u_{dc} \approx 0.010872 (G_c)^{0.4993} \quad (6.1)$$

²Tous les calculs numériques présentés sont effectués sur une station de travail Sun ULTRA 5, en double précision.

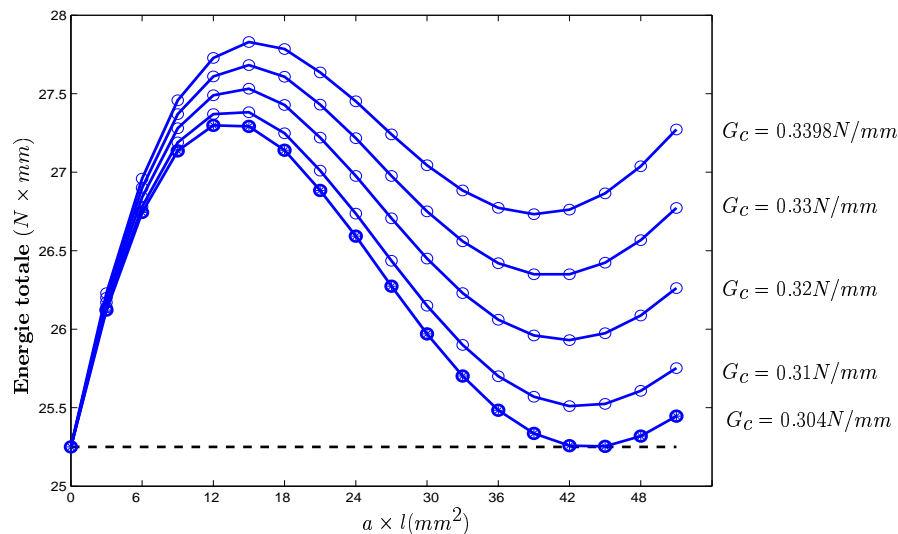


FIG. 6.3: Résolution inverse : détermination du G_c pour $u_{dc} = 0.006mm$.

et d'autre part, l'aire nécessaire pour restituer l'énergie mécanique accumulée est **indépendante** du taux de restitution critique G_c . Ce point, illustré par la figure 6.4, réduit la quantité G_c au rôle de paramètre critique d'amorçage. Il est alors tentant de relier cette quantité à la contrainte prédominante (ici σ_{33}) associée à u_{dc} le long de l'arête juste avant amorçage ; nous obtenons :

$$\sigma_{33c} \approx 365.23 (G_c)^{0.5023} . \quad (6.2)$$

La dépendance en $\sqrt{G_c}$ de la contrainte critique est également en bon accord avec [LEGUILLON (2002)]. Dans la partie II, nous obtiendrons, par une procédure différente, ce même résultat.

$u_d(mm)$	E_{33}	$\sigma_{33c}(MPa)$	$I(N.mm)$	$G_c(N/mm)$	$a_c(mm)$
$4.0E-3$	$8.209E-04$	$1.342E+02$	11.396	0.135	1.488
$4.5E-3$	$9.240E-04$	$1.511E+02$	14.429	0.171	
$5.0E-3$	$1.027E-03$	$1.680E+02$	17.821	0.211	1.490
$5.5E-3$	$1.131E-03$	$1.849E+02$	21.573	0.255	
$6.0E-3$	$1.234E-03$	$2.018E+02$	25.684	0.304	1.482
$6.5E-3$	$1.338E-03$	$2.187E+02$	30.155	0.357	1.491
$7.0E-3$	$1.441E-03$	$2.357E+02$	34.988	0.414	1.487

TAB. 6.2: Constantes critiques.

L'évolution de la force de délaminage illustre également l'instabilité du processus d'amorçage sur une longueur plus faible que la première extension de fissure, entre lesquelles l'évolution redevient stable (et le reste) mais où toute l'énergie élastique emmagasinée n'a pas encore été restituée (le point critique de la force de délaminage correspond à celui de la dérivée première de l'énergie totale).

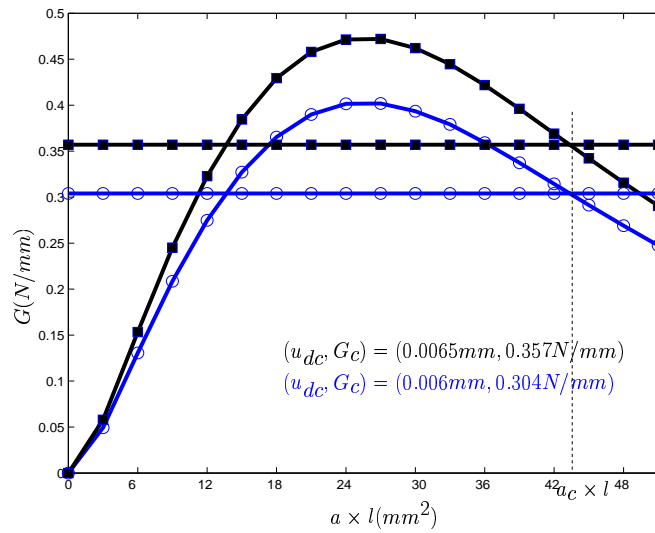


FIG. 6.4: Evolution de la force de délaminage en fonction de l'aire ($a \times l$) de la zone délaminée : Instabilité à l'amorçage et invariance de la première extension de fissure.

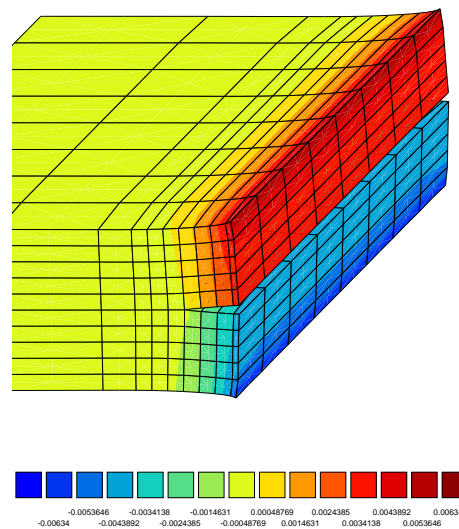


FIG. 6.5: DCB à l'équilibre après amorçage.

Simulation de l'amorçage et étude de l'instabilité

Après ces premiers calculs grossiers supposant le front de fissure rectiligne, décrivons plus finement les processus d'amorçage et de propagation. Fixons u_{dc} à $0.00634mm$ et G_c à $0.3398N/mm$ puis déterminons la forme du premier front de fissure associée. Nous utilisons dans ce but la méthode exposée dans le chapitre précédent. La première extension de fissure étant en moyenne d'aire environ $(1.48 \times l)mm$, prenons arbitrairement un premier front tel que l'aire soit égale à $(1.2 \times l)mm^2$ et appliquons l'algorithme du chapitre 5. Le tableau 6.3 résume les résultats obtenus après une itération.

$x_1(mm)$	$x_2(mm)$	$f_t(N/mm)$	$f_n(N/mm)$
$0.78800E + 02$	$0.00000E + 00$	$0.52042E - 17$	$0.27956E + 00$
$0.78800E + 02$	$0.37500E + 01$	$0.56990E - 02$	$0.40822E + 00$
$0.78800E + 02$	$0.75000E + 01$	$-0.32034E - 02$	$0.40483E + 00$
$0.78800E + 02$	$0.11250E + 02$	$0.13271E - 02$	$0.40406E + 00$
$0.78800E + 02$	$0.15000E + 02$	$0.36570E - 07$	$0.40572E + 00$
$0.78800E + 02$	$0.18750E + 02$	$-0.13271E - 02$	$0.40406E + 00$
$0.78800E + 02$	$0.22500E + 02$	$0.32034E - 02$	$0.40483E + 00$
$0.78800E + 02$	$0.26250E + 02$	$-0.56988E - 02$	$0.40822E + 00$
$0.78800E + 02$	$0.30000E + 02$	$0.34694E - 17$	$0.27956E + 00$

TAB. 6.3: Force de délaminage $\mathbf{G} = (f_t, f_n)$ au point $\mathbf{x} = (x_1, x_2, 0)$ après la première itération.

La force de délaminage moyenne (rapport du taux de translation par unité de longueur sur la longueur du front) vaut alors $0.40156N/mm$ signifiant qu'il reste encore de l'énergie à restituer. Le spectre de la matrice $E^{(2)}$, reporté dans le tableau 6.4 comporte **un élément négatif à mettre en rapport avec le caractère instable du front (lié ici au caractère instable de l'initiation)**. L'application directe de la méthode de Newton fournit alors un déplacement du front tel que $\theta \cdot \nu < 0$ (la fissure à tendance à se refermer). Nous remédions à ce problème, en remplaçant $E^{(2)}$ par $-E^{(2)}$, quitte à réduire le déplacement du front (selon la figure 5.8), ou bien en remplaçant $E^{(2)}$ ³ par l'opérateur identité, conduisant à un déplacement proportionnel (au sens faible) à $G - Gc$. Le tableau 6.5 présente les résultats obtenus.

$1.251526884124332E - 3$	-0.4725738895802094	0.05868251387420853
0.06799098255182001	0.3494612816773789	0.15546950269850545
0.3886078831305334	0.21621972586240756	0.2738879952036577
0.10821141086399022	$1.2906457765826662E - 3$	

TAB. 6.4: Valeurs propres de la matrice $E^{(2)} \equiv I^{(2)}$.

Après remaillage et calcul du nouvel équilibre cinématique, la seconde itération fournit les résultats du tableau 6.6.

³Dans le cas d'un front ouvert, l'espace des déplacements du front est choisi tel que $\theta_1 \equiv 0$, la poutre étant portée dans sa longueur par l'axe e_2 ; il résulte de ce choix que $D^{(2)} \equiv 0$.

$x_1(mm)$	$x_2(mm)$	$\theta_t(mm)$	$\theta_n(mm)$
$0.78800E + 02$	$0.00000E + 00$	$0.00000E + 00$	$0.10363E + 00$
$0.78800E + 02$	$0.37500E + 01$	$0.41624E - 15$	$0.21968E + 00$
$0.78800E + 02$	$0.75000E + 01$	$-0.47920E - 15$	$0.25290E + 00$
$0.78800E + 02$	$0.11250E + 02$	$0.00000E + 00$	$0.25669E + 00$
$0.78800E + 02$	$0.15000E + 02$	$-0.97535E - 15$	$0.25738E + 00$
$0.78800E + 02$	$0.18750E + 02$	$0.00000E + 00$	$0.25669E + 00$
$0.78800E + 02$	$0.22500E + 02$	$0.14376E - 14$	$0.25291E + 00$
$0.78800E + 02$	$0.26250E + 02$	$-0.41624E - 15$	$0.21968E + 00$
$0.78800E + 02$	$0.30000E + 02$	$0.00000E + 00$	$0.10363E + 00$

TAB. 6.5: Déplacement du front $\theta = (\theta_t, \theta_n, 0)$ au point $\mathbf{x} = (x_1, x_2, 0)$ après la première itération.

$x_1(mm)$	$x_2(mm)$	$f_n(N/mm)$	$\theta_n(mm)$
$0.78696E + 02$	$-0.11102E - 15$	$0.26445E + 00$	$0.23567E - 01$
$0.78579E + 02$	$0.37500E + 01$	$0.34963E + 00$	$0.30964E - 01$
$0.78546E + 02$	$0.75000E + 01$	$0.33838E + 00$	$0.48509E - 02$
$0.78542E + 02$	$0.11250E + 02$	$0.33727E + 00$	$-0.27012E - 02$
$0.78541E + 02$	$0.15000E + 02$	$0.33968E + 00$	$-0.23206E - 02$
$0.78542E + 02$	$0.18750E + 02$	$0.33727E + 00$	$-0.27012E - 02$
$0.78546E + 02$	$0.22500E + 02$	$0.33838E + 00$	$0.48509E - 02$
$0.78579E + 02$	$0.26250E + 02$	$0.34963E + 00$	$0.30964E - 01$
$0.78696E + 02$	$0.30000E + 02$	$0.26445E + 00$	$0.23567E - 01$

TAB. 6.6: Force et déplacement normal après la seconde itération.

La valeur propre négative chute à environ -0.3051 . L'abscisse moyen du front, légèrement courbé aux extrémités, est de $78.5713mm$ et la longueur du front est de $30.004mm$. Le taux de restitution moyen vaut $0.34298N/mm$, soit une valeur légèrement supérieure au taux de restitution critique. Remarquons que les nœuds splines aux extrémités du front possèdent un déplacement normal encore positif, malgré une force de délaminage, en ces nœuds, inférieure à G_c . Une dernière itération fournit les résultats du tableau 6.7.

$x_1(mm)$	$x_2(mm)$	$f_n(N/mm)$	$\theta_n(mm)$
$0.78672E + 02$	$-0.11102E - 15$	$0.26962E + 00$	$0.79900E - 02$
$0.78548E + 02$	$0.37500E + 01$	$0.34236E + 00$	$0.13233E - 01$
$0.78541E + 02$	$0.75000E + 01$	$0.34019E + 00$	$0.31687E - 02$
$0.78542E + 02$	$0.11250E + 02$	$0.33897E + 00$	$0.27379E - 02$
$0.78541E + 02$	$0.15000E + 02$	$0.34109E + 00$	$0.35431E - 02$
$0.78542E + 02$	$0.18750E + 02$	$0.33897E + 00$	$0.27379E - 02$
$0.78541E + 02$	$0.22500E + 02$	$0.34019E + 00$	$0.31687E - 02$
$0.78548E + 02$	$0.26250E + 02$	$0.34236E + 00$	$0.13233E - 01$
$0.78672E + 02$	$0.30000E + 02$	$0.26962E + 00$	$0.79900E - 02$

TAB. 6.7: Force et déplacement normal après la troisième itération.

L'abscisse moyenne des nœuds est égale à $78.5594mm$, le taux de translation est égal à $0.34098mm \approx G_c$ et la longueur de front est égale à $30.005mm$. Le déplacement normal du front étant négligeable devant la longueur totale de la structure, la convergence est décrétée⁴. La valeur propre négative vaut -0.2978 . Enfin, nous retrouvons une première extension du front de l'ordre de **1.45mm** en moyenne. Les quatre figures suivantes illustrent la propagation de la fissure. La première (figure 6.6) décrit l'évolution des énergies mécanique et de rupture en fonction du déplacement imposé. Les évolutions sont analogues à celles données par la figure 5.3. Lorsque le déplacement critique est atteint, les variations des deux énergies se compensent ; cela se traduit par une brutale chute du facteur de charge (figure 6.7). **La propagation est ensuite stable**. Les points de même abscisse sur la figure 6.7, représentant les états d'équilibre cinématique, illustrent les itérations en θ . Seuls les points inférieurs sont associés à des états minimisant l'énergie par rapport à ses deux variables. La figure montre également l'invariance de la courbe par rapport à l'incrément de déplacement imposé δu_d . Un incrément important permet une propagation plus rapide du front, mais requiert plus d'itérations en θ .

Enfin, les deux dernières figures décrivent respectivement la distance de deux points du front au côté chargé, et quelques positions du front à l'équilibre, montrant une légère courbure du front à ses extrémités⁵.

⁴Une quatrième itération fournit un taux de restitution égal à $0.3395N/mm < G_c$, une abscisse moyenne de $78.553mm$, et une valeur propre -0.2941

⁵L'obtention de 62 positions de front à l'équilibre, soit 320 calculs de positions d'équilibre nécessite environ 20 heures de calculs, le maillage comportant 3637 nœuds.

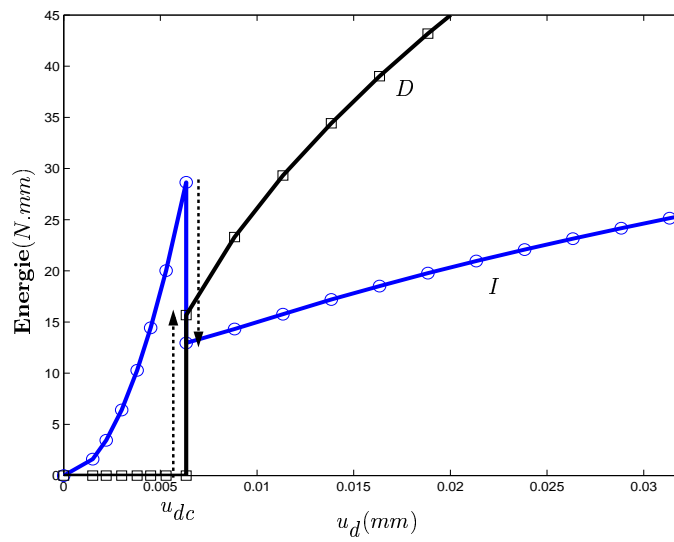


FIG. 6.6: Evolution des énergies mécanique I et de rupture D en fonction de u_d .

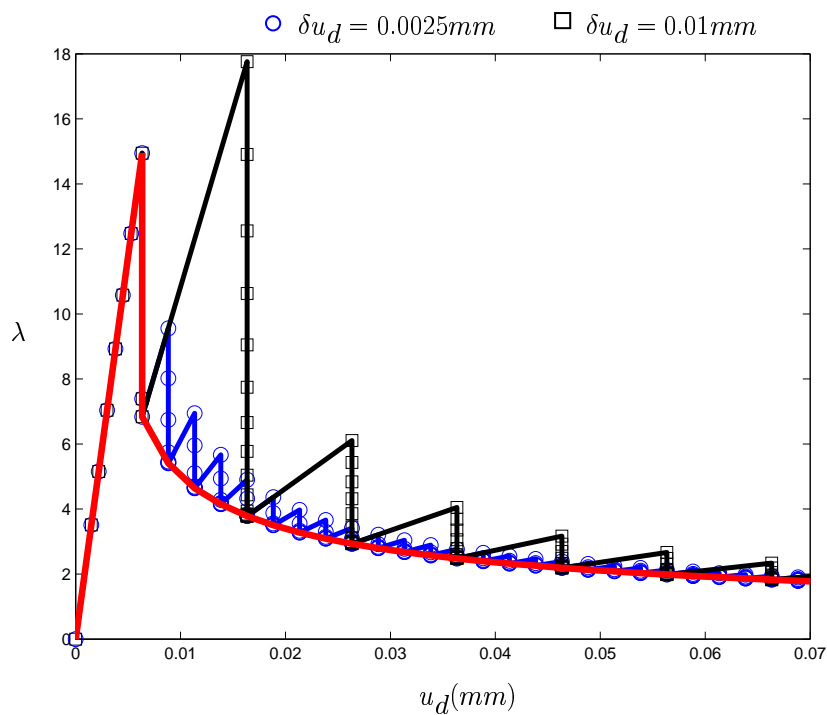


FIG. 6.7: Evolution (tracé rouge) du facteur de charge en fonction de u_d , indépendante de l'incrément δu_d .

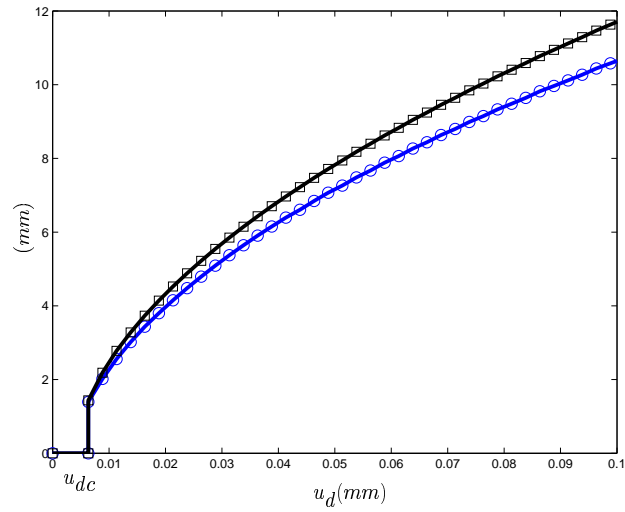


FIG. 6.8: Distance du point central (\square) et du point extrême (\circ) du front à la face chargée.

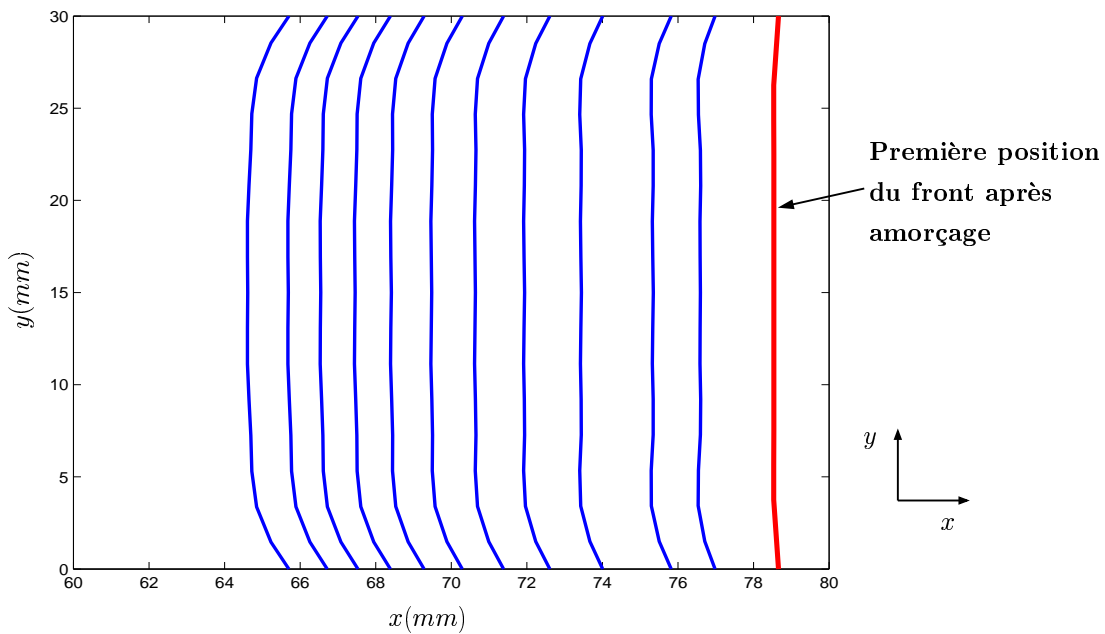


FIG. 6.9: Quelques positions du front à l'équilibre : $u_d = .00634, .01384, .02134, .03634, .05134, .06634, .08134, .09634, .11134, .12634, .14134, .16134$ (mm).

6.2 Front fermé - Cas plan

6.2.1 Cas isotrope

Nous considérons dans ce paragraphe le cas d'une structure circulaire plane $\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3), x_1^2 + x_2^2 < R, x_3 \in]-h, h[\}$, présentant selon sa surface moyenne un délaminage $\omega_d = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \frac{x_1^2}{r_b^2} + \frac{x_2^2}{r_a^2} < 1\}$ de frontière $\gamma_f = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \frac{x_1^2}{r_b^2} + \frac{x_2^2}{r_a^2} = 1\}$ elliptique centré à l'origine, avec $0 < r_a \leq r_b < R$. La surface est soumise au chargement de traction ponctuel suivant $\mathbf{f} = \lambda(0, 0, f_3^\pm)$ en $(0, 0, \pm h)$. A nouveau, l'algorithme est piloté en déplacement. La matériau est isotrope : $E = 126000MPa$ et $\nu = 0.3$.

PROJECTION SUR $D^2(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}) > 0$

Le premier calcul illustre la nécessaire prise en compte de la condition $D^{(2)}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}) > 0$ dans l'espace des déplacements admissibles du front \hat{V}_θ . Prenons $R = 120mm, r_b = 40mm, r_a = 25mm, h = 1mm$ et $u_d = 1.2mm$. Le tableau 6.8 donne la composante normale f_n de la force de délaminage et du vecteur déplacement θ_n aux 13 nœuds splines du front, de coordonnées x_1, x_2 . Ce même tableau regroupe également le déplacement normal $\hat{\theta}_n$ lorsque la projection sur le sous-espace $D^2(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}) > 0$ n'est pas effectuée.

$x_1(mm)$	$x_2(mm)$	$f_n(N/mm)$	$\theta_n(mm)$	$\hat{\theta}_n(mm)$
$-0.4440E - 15$	$0.2500E + 02$	$0.1132E + 01$	$0.1123E + 02$	$0.1772E + 01$
$0.1702E + 02$	$0.2262E + 02$	$0.5302E + 00$	$0.1613E + 01$	$0.5181E + 01$
$0.3224E + 02$	$0.1479E + 02$	$0.8702E - 01$	$-0.1346E + 02$	$-0.1354E + 02$
$0.4000E + 02$	$-0.4440E - 15$	$0.2988E - 01$	$-0.1795E + 02$	$0.3787E + 02$
$0.3224E + 02$	$-0.1479E + 02$	$0.8702E - 01$	$-0.1346E + 02$	$-0.1354E + 02$
$0.1702E + 02$	$-0.2262E + 02$	$0.5302E + 00$	$0.1613E + 01$	$0.5181E + 01$
$-0.4440E - 15$	$-0.2500E + 02$	$0.1132E + 01$	$0.1123E + 02$	$0.1772E + 01$
$-0.1702E + 02$	$-0.2262E + 02$	$0.5302E + 00$	$0.1613E + 01$	$0.5181E + 01$
$-0.3224E + 02$	$-0.1479E + 02$	$0.8702E - 01$	$-0.1346E + 02$	$-0.1354E + 02$
$-0.4000E + 02$	$0.0000E + 00$	$0.2988E - 01$	$-0.1795E + 02$	$0.3787E + 02$
$-0.3224E + 02$	$0.1479E + 02$	$0.8702E - 01$	$-0.1346E + 02$	$-0.1354E + 02$
$-0.1702E + 02$	$0.2262E + 02$	$0.5302E + 00$	$0.1613E + 01$	$0.5181E + 01$
$-0.4440E - 15$	$0.2500E + 02$	$0.1132E + 01$	$0.1123E + 02$	$0.1772E + 01$

TAB. 6.8: Déplacement normal (θ_n et $\hat{\theta}_n$) du front selon que la projection sur $D^2(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}) > 0$ est ou n'est pas effectuée .

La force de délaminage est décroissante avec la distance à l'origine de l'ellipse, laissant prévoir une propagation plus importante du petit axe de l'ellipse, et ainsi une *circularisation* de γ_f . La valeur du déplacement θ_n confirme ce point. Par ailleurs, les nœuds où ce déplacement est négatif appartiennent à la zone où la force de délaminage est inférieure à G_c . A l'inverse, le déplacement $\hat{\theta}_n$ prévoit un aplatissement de l'ellipse, ce qui est non cohérent avec les valeurs de f_n et montre ainsi la nécessité de la restriction $D^2(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}) > 0$ dans l'espace des déplacements admissibles du front.

Nous vérifions, numériquement sur cet exemple, que le spectre de cet opérateur est symétrique par rapport à l'origine ⁶ comme annoncé dans le théorème 5.

STABILITÉ DU FRONT VIS À VIS DE SA FORME

La seconde série de calculs est consacrée à la propagation proprement dite du front. Au préalable, étudions l'influence de la forme du front sur le spectre des opérateurs de dérivée seconde mis en jeu dans l'algorithme. Prenons $u_d = 1.2mm$, $R = 130mm$, $r_b = 40mm$. La figure 6.10 décrit l'évolution du facteur de charge et de la force de délaminage moyenne lorsque r_a varie de $22mm$ à r_b , montrant que **la propagation est stable**. Pour cette variation, la figure 6.11 décrit l'évolution de la plus faible valeur propre de $E^{(2)}$ et celle des deux plus faibles valeurs de $I^{(2)}$, illustrant le fait que la condition de définie positivité de l'opérateur $E^{(2)}$ ⁷ n'est qu'une **condition suffisante** de stabilité. Tandis que $I^{(2)}$ possède au moins une valeur propre négative, $E^{(2)}$ a, à partir d'une certaine valeur de r_a , toutes ses valeurs propres positives. La solution du problème étant un front de délaminage circulaire, nous pouvons attribuer la valeur propre négative de $E^{(2)}$ à une forme trop éloignée de la solution. Un même phénomène a lieu lorsque le déplacement imposé conduit à une force de délaminage G trop importante par rapport à G_c : le déplacement du front est alors trop important, ce qui n'est pas conforme à l'hypothèse quasi-statique. Dans les conditions normales (continues) de chargement, de tels déplacements sont exclus, la propagation ayant lieu avant. Pour des valeurs inférieures ou dans un voisinage du chargement critique, le spectre de $E^{(2)}$ n'admet que des éléments positifs. **Ces résultats mettent en évidence la notion de forme naturelle d'un front associée à un chargement. La nature de ces éléments négatifs est différente de celle rencontrée dans l'exemple de la D.C.B., pour de faibles valeurs d'aires délaminées, où les éléments négatifs sont liés à l'instabilité à l'amorçage.**

Prenons maintenant $R = 120mm$, $r_a = 24mm$, $r_b = 40mm$ et $G_c = 0.28N/mm$, $h = 1mm$. Le maillage initial de la structure correspondante est donné figure 6.12. Compte tenu de l'éclatement de la plaque circulaire, un unique élément fini est utilisé par demi-épaisseur ⁸. Le déplacement imposé initial est de $0.5mm$. L'incrément de ce déplacement est $\delta u_d = 0.04mm$. La figure 6.13 représente la position du front de fissure en fonction de la valeur (croissante) du déplacement imposé. Comme attendu, la forme elliptique converge vers le cercle. Le déplacement critique de début de propagation est $u_d \approx 0.8mm$. Au départ, seul le nœud spline de coordonnées $(0, r_a)$ progresse ; la zone d'évolution s'étend ensuite progressivement à tous les nœuds du front. La figure 6.16 représente la distance des points situés sur les axes en fonction de la variable de pilotage, montrant que les nœuds du front situés sur l'axe des abscisses, n'évoluent que lorsque le front a

⁶Spectre de D^2 : -0.10119904128021591 , -0.10119904128021594 , 0.10119904128021577 , 0.10119904128021563 , 0.09471375928193386 , 0.09471375928193389 , -0.09471375928193407 , -0.09471375928193407 , -0.06351579574870171 , -0.06677509450718104 , 0.02909185653142711 , 0.029091856531427137 , 0.06677509450718082 , 0.0635157957487016 , -0.06351579574870178 , -0.06677509450718097 , -0.029091856531427137 , -0.02909185653142707 , 0.0667750945071809 , 0.06351579574870166 , $-8.844249638206847E - 10$, $-8.844248527983822E - 10$, $8.844248389205944E - 10$, $8.844246585093529E - 10$.

⁷et à plus forte raison de l'opérateur $I^{(2)}$, après projection de θ sur $D^{(2)}(\theta, \theta) > 0$

⁸grâce à la symétrie du problème, le calcul est effectué sur la demi-plaque supérieure, en fixant à zéro la troisième composante du déplacement aux nœuds de la surface moyenne des zones non délaminées

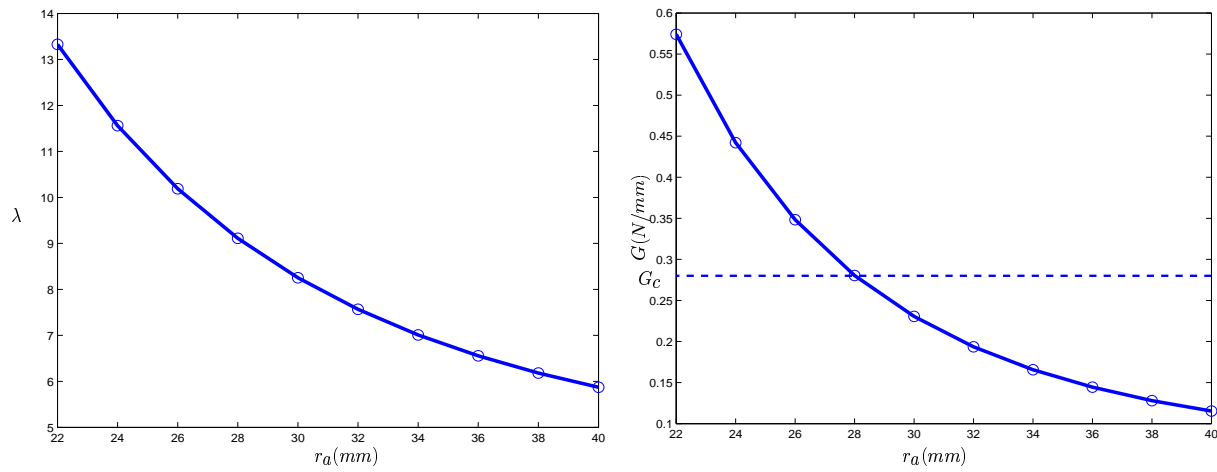


FIG. 6.10: Evolution du facteur de charge et de la force de délaminage en fonction de r_a .

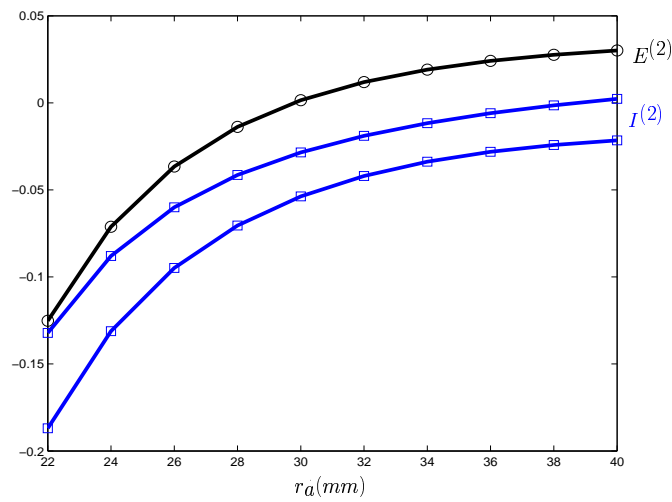


FIG. 6.11: Eléments du spectre de $I^{(2)}$ et de $E^{(2)}$.

atteint une forme quasi-circulaire ($u_d \approx 1.7mm$). La figure 6.15 représente le facteur de charge en laissant les itérations sur u : l'évolution est ici croissante. Enfin, la figure 6.14 décrit le maillage final, résultat des remaillages successifs.

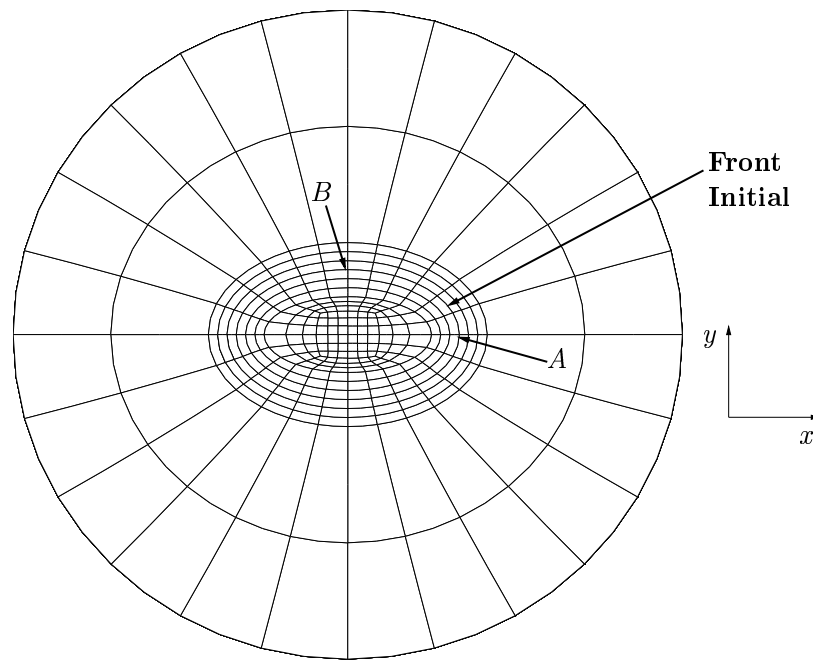


FIG. 6.12: Maillage initial 3292 nœuds (Front elliptique) ($r_a = 24mm, r_b = 40mm$).

Les résultats montrent que la propagation est stable. D'autre part, les incréments de pilotage étant suffisamment faibles, le spectre de $E^{(2)}$ ne contient que des éléments positifs, tandis que celui de $I^{(2)}$ contient au moins un élément négatif, convergeant vers une valeur négative très faible au cours de la propagation (selon la discussion plus haut et la figure 6.11). Il ressort de cette simulation que la forme naturelle du front associé à cet exemple, est - évidemment - le cercle, obtenu ici pour la valeur $u_d \geq 1.7mm$: tout front initial inclus dans le cercle de rayon $r = 40mm$ centré à l'origine converge, u_d étant fixé à $1.7mm$, vers le cercle de rayon r . Oubliant la condition de non recul, il correspond un cercle de rayon inférieur à $40mm$, pour la valeur $u_d = 0.8mm$. Il suffit pour cela, de relancer l'algorithme en autorisant le recul des nœuds : le front converge, sans apport d'énergie (u_d constant) vers le cercle de rayon $R \approx 25.6mm$, pour lequel le spectre de $I^{(2)}$ contient une valeur négative très proche de zéro. Cette position étant atteinte, le front progresse, en restant circulaire, lorsque u_d augmente (voir figure 6.17)

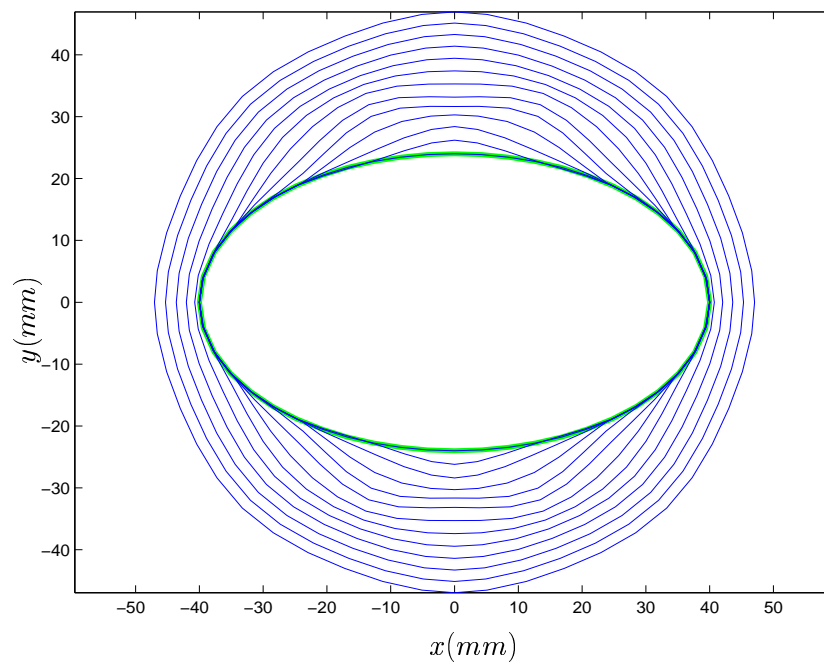


FIG. 6.13: Quelques positions du front à l'équilibre : $u_d = 0.88 + (i - 1) \times 0.12(mm)$, $i = 1, 12$.

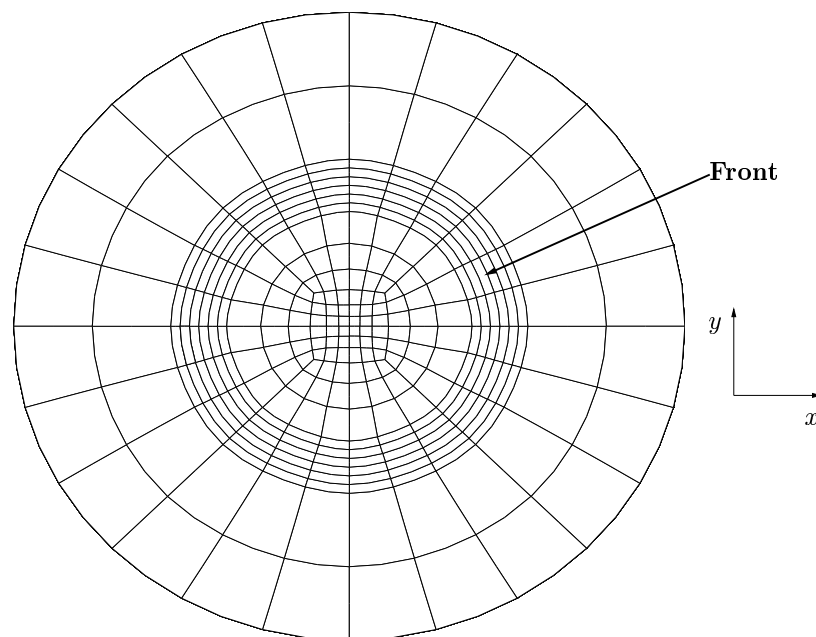
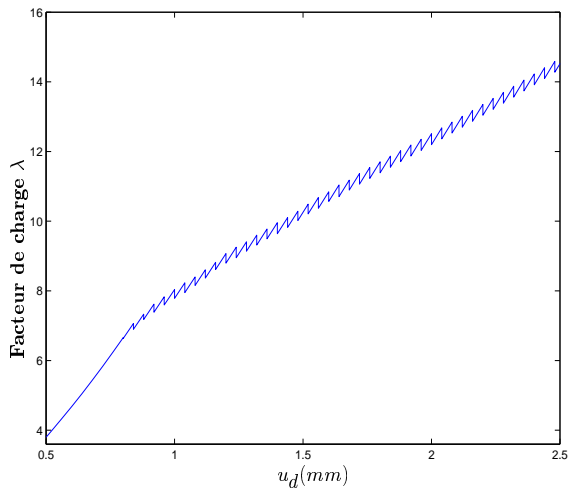
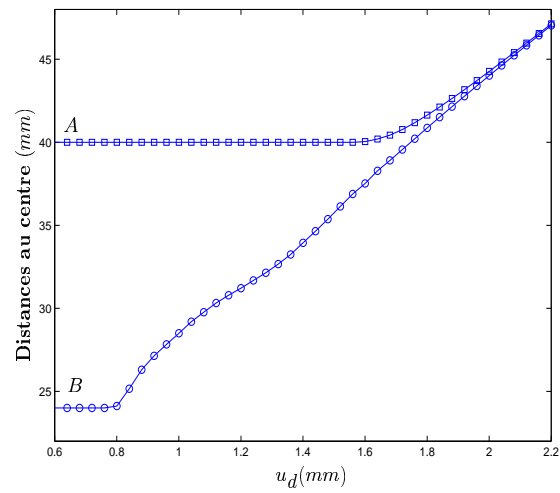
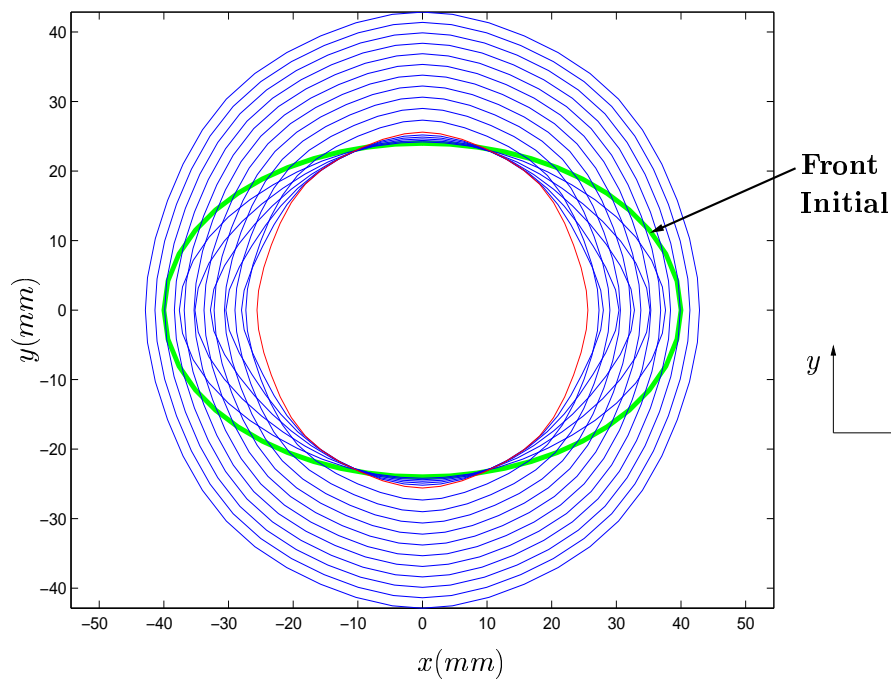


FIG. 6.14: Maillage final 3292 nœuds.

FIG. 6.15: Facteur de charge vs. u_d .FIG. 6.16: Distance des points A et B au centre $(0, 0)$ vs. u_d .FIG. 6.17: Recherche de la position du front naturel (argument négatif du spectre de $I^{(2)}$ minimal) sans apport d'énergie : $u_d = 0.8, 0.8 \times 5, 0.8mm, 0.8250 + (i - 1) \times 0.1, i = 1, 11(mm)$.

6.2.2 Cas d'un stratifié

Dans ce paragraphe, nous reprenons la structure précédente en supposant que les matériaux sont des stratifiés composites. De façon à pouvoir apprécier l'influence de la stratification, le front initial est supposé circulaire de rayon $r_a = r_b = 32mm$ tandis que $R = 120mm$. Suivant [ROBINSON & SONG (1992)], la séquence d'empilement suivante, comportant 24 plis, est retenue :

- Un stratifié multidirectionnel symétrique, avec pli $+\beta^\circ / +\beta^\circ$ dans le plan moyen :

$$[-\beta/0^\circ / (\beta)_2/0^\circ / -\beta/\beta/0^\circ / (-\beta)_2/0^\circ / \beta]_s . \quad (6.3)$$

Les résultats sur une DCB de [ROBINSON & SONG (1992)] fournissent $G_c(\beta = 0^\circ) = 0.281N/mm$ et $G_c(\beta = 45^\circ) = 0.713N/mm$. Le chargement étant un mode I pur, nous utilisons ces données.

Chacun des 24 plis présente une épaisseur de $0.125mm$, soit une épaisseur de la plaque de $3mm$.

E_1^\pm	E_2^\pm	ν_{12}^\pm	G_{12}^\pm	G_{13}^\pm	h
150000MPa	9500MPa	0.263	4900MPa	4900MPa	3mm

TAB. 6.9: Caractéristiques mécaniques.

FORCE DE DÉLAMINAGE LE LONG DU FRONT SELON β

Les figures 6.18 et 6.19 illustrent la dépendance de l'évolution du front par rapport à la valeur de β . La première figure donne la plus faible valeur du spectre de $I^{(2)}$ ainsi que la valeur moyenne de la force de délaminage. Comme précédemment, la plus faible valeur propre est négative. Elle est minimale pour une valeur autour de 60° , valeur pour laquelle le cercle est déjà une forme naturelle associée à ce type de chargement (le front de fissure va peu évoluer autour du cercle). Les plis à $\pm\beta$ annihilent l'influence des plis à 60° . En dehors de cette zone, la direction privilégiée est fortement imposée par β . Ainsi, lorsque $\beta \approx 90^\circ$, la force de délaminage est telle que le cercle va évoluer plus rapidement selon la direction y comme l'indique la figure 6.19 représentant la force de délaminage sur le premier quadrant de plan ($x \geq 0, y \geq 0$). Cet effet est amplifié lorsque $\beta = 0^\circ$: la valeur négative est très forte et l'amplitude de la force de délaminage est maximale. La forme naturelle est dans ce cas une "ellipse" très aplatie.

SIMULATION DE LA PROPAGATION

Les figures suivantes montrent quelques évolutions du front, pour différentes valeurs de l'angle β : $\beta = 20^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ et 90° . Nous prenons $G_c(\beta = 20^\circ) = 0.5N/mm$ et $G_c(\beta = 90^\circ) = 0.8N/mm$. Dans tous les cas la **propagation est stable**. On observe cependant un comportement légèrement différent, en début de propagation, de celui du cas isotrope front elliptique. Par exemple, pour $\beta = 30^\circ$ ($G_c = 0.5N/mm$), la propagation commence pour $u_d = 1.375mm$. Il faut ensuite attendre $u_d = 2.05mm$ pour que le front progresse à nouveau. Pour cette valeur de β , nous avons comme dans le paragraphe précédent, autorisé le recul du front. Les positions du front sont données figure 6.24 (à comparer avec la figure 6.23 [propagation proprement dite : non recul du front]). Le front de fissure recule, en une forme elliptique, jusqu'à obtenir sa forme naturelle.

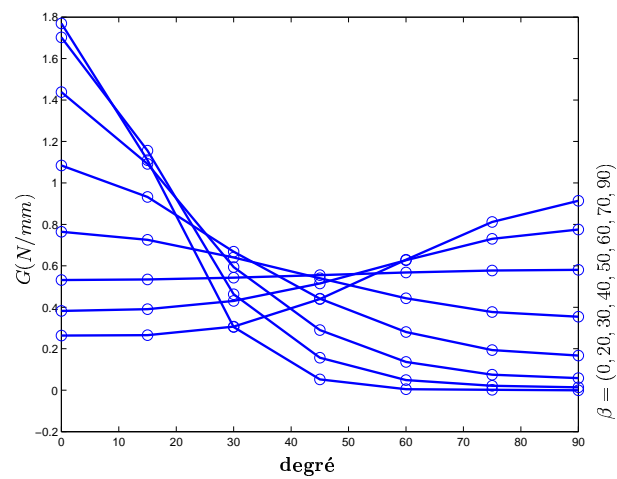
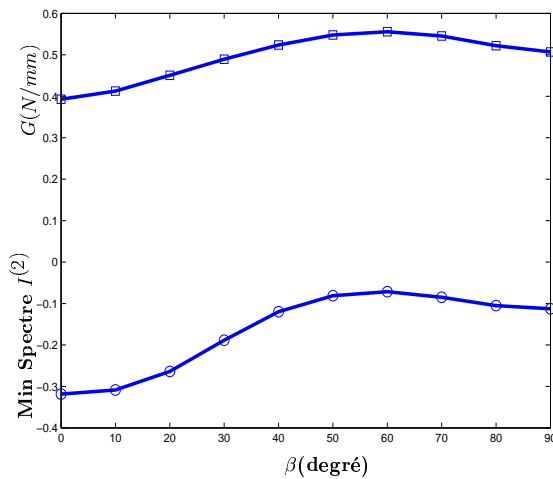


FIG. 6.18: Force de délaminage moyenne et Inf spectre $I^{(2)}$ en fonction de β [$u_d = 1.62mm$]. FIG. 6.19: Force de délaminage sur le premier quadrant [$u_d = 1.62mm$].

Au-delà, après incrémentation de la variable de pilotage, le front progresse de nouveau, et conserve sa forme, de façon homothétique⁹. La forme du front est comparable à celle donnée par la figure 6.23. La stabilité des évolutions est alors donnée sur la figure 6.25 représentant la valeur minimale des spectres des opérateurs $I^{(2)}$ et $E^{(2)}$, dans les cas de non recul ($\theta \cdot \nu \geq 0$) [figure 6.23] et de recul éventuel ($\theta \cdot \nu$ quelconque). Entre les valeurs $u_d = 1.3mm$ et $u_d = 1.375$ (trois incréments $\delta = 0.025mm$), le front reste immobile et la valeur minimale des spectres décroît. Puis vient la première propagation, le front évolue légèrement vers une position légèrement plus aplatie. La valeur de Min spectre $I^{(2)}$ augmente, puis décroît jusqu'à atteindre un minimum $u_d = 1.875mm$ pour $\theta \cdot \nu$ quelconque et $u_d = 2.05mm$ dans le cas $\theta \cdot \nu \geq 0$. Cette différence vient du fait que le front n'a pas exactement la même forme, puisque dans le premier cas, le front recule lorsque u_d vaut $1.375mm$. Dans le cas $\theta \cdot \nu$ quelconque, les éléments du spectre atteignent leurs bornes inférieures dès $u_d = 1.875mm$ après quelques propagations. Dans l'autre cas, la convergence vers la forme naturelle est plus lente; le plateau est lié aux formes de front, peu régulières, pour $u_d \approx [2.5mm, 3mm]$, effet de la sensibilité des fonctions splines. Enfin, la valeur de Min spectre $E^{(2)}$ est très légèrement positive (resp. négative) pour le cas $\theta \cdot \nu$ quelconque (resp. $\theta \cdot \nu \geq 0$). Ce dernier point est sans conséquence.

Nous terminons cette série avec le cas $\beta = 0^\circ$, pour lequel l'amplitude de la force de délaminage le long du front est la plus importante. A nouveau, la figure 6.28 présente les différentes positions

⁹la littérature emploie l'expression *auto-similaire*.

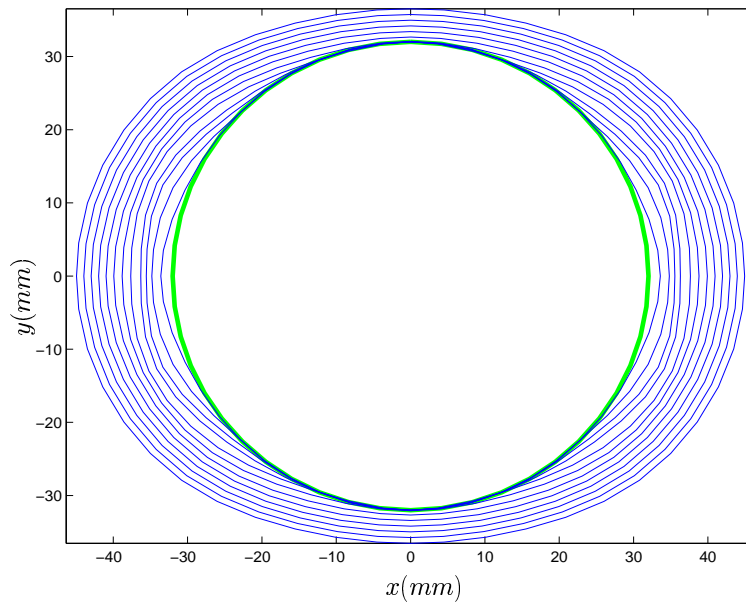


FIG. 6.20: empilement symétrique : $\beta = 45^\circ$ $u_d = 2.45, 2.52, 2.625, 2.725, 2.8, 2.9, 3., 3.1, .3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6(mm)$.

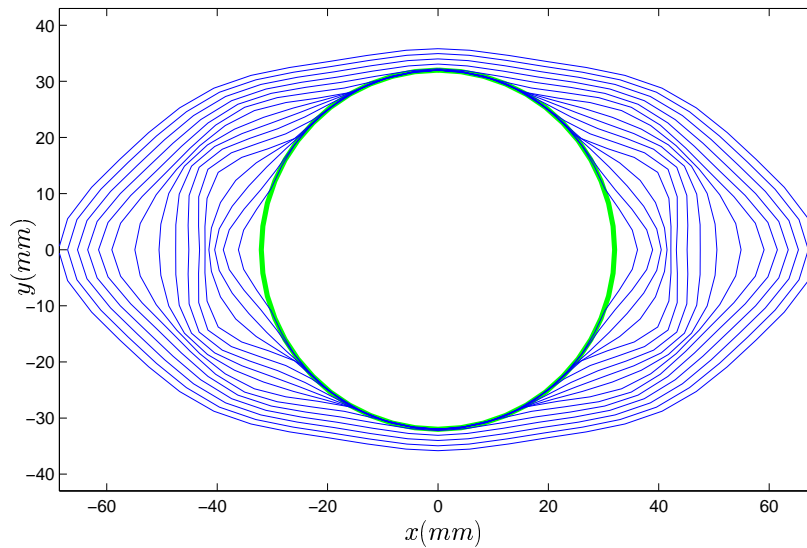


FIG. 6.21: empilement symétrique : $\beta = 20^\circ$ $u_d = 1.375, 2.175, 2.325, 2.475, 2.625, 2.775, 2.925, 3.075, .3.225, 3.375, 3.525, 3.675, 3.825, 3.975, 4.125, 4.275, 4.425(mm)$.

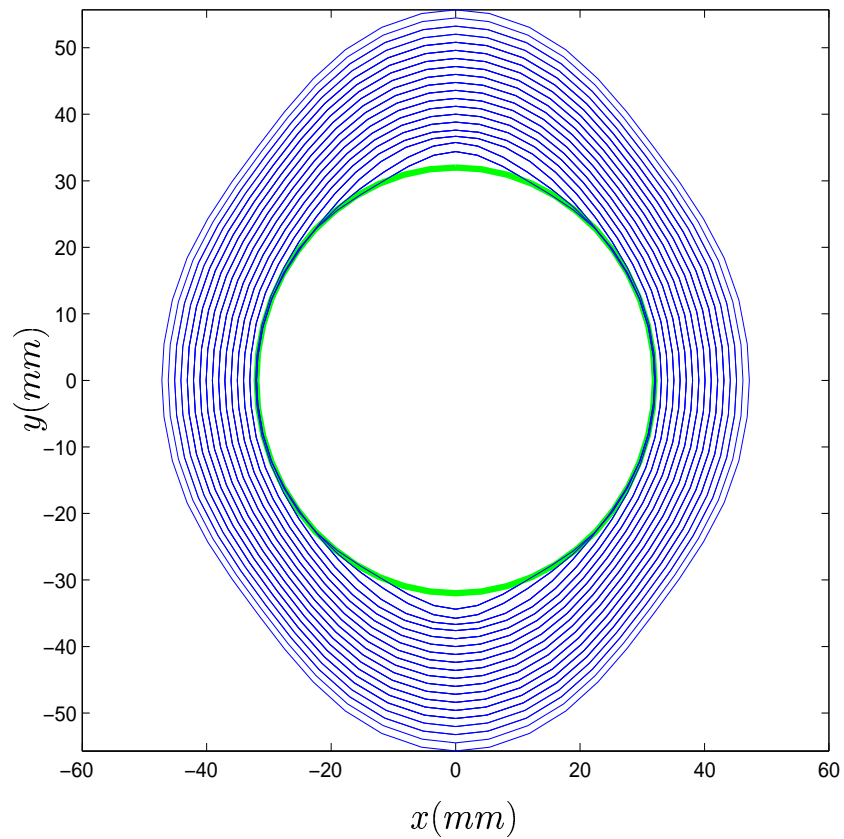


FIG. 6.22: empilement symétrique : $\beta = 90^\circ$ $u_d = 1.825, 2.725, 2.85, 2.975, 3.1, 3.225, 3.35, 3.475, 3.6, 3.725, 3.85, 3.975, 4.1, 4.225, 4.35, 4.475(mm)$.

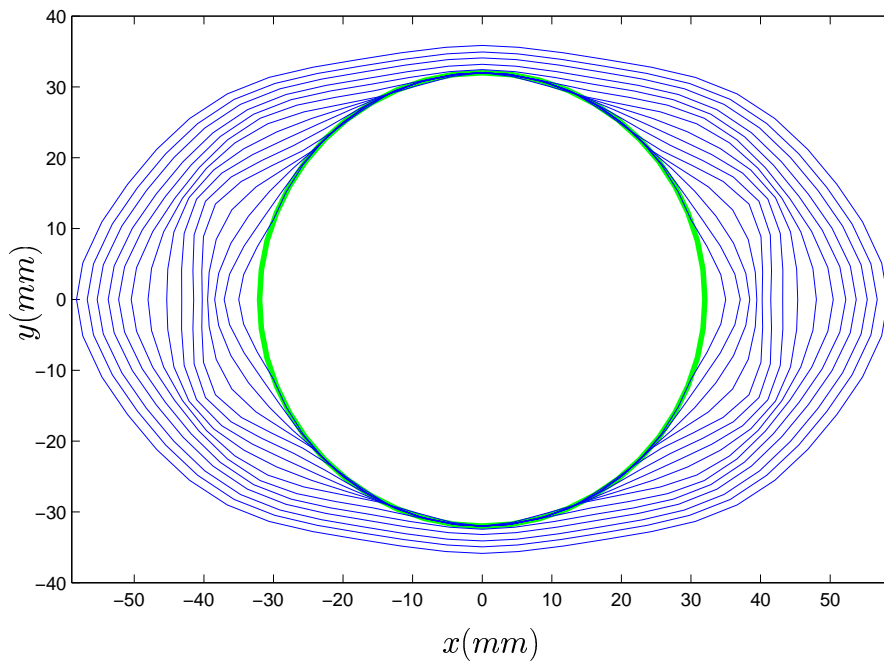


FIG. 6.23: $\beta = 30^\circ$ $u_d = 1.375, 2.15, 2.275, 2.4, 2.525, 2.65, 2.775, 2.9, 3.025, 3.15, 3.275, 3.4, 3.525, 3.65, 3.775, 3.9(mm)$.

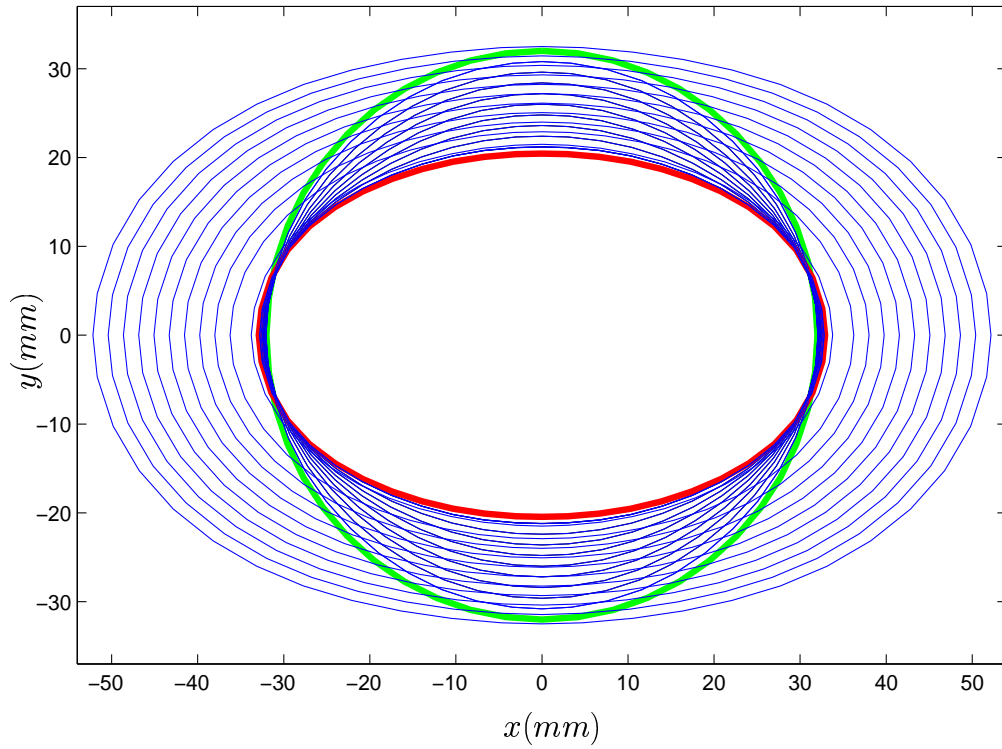


FIG. 6.24: Recherche de la position naturelle du front (argument négatif du spectre de $I^{(2)}$ minimal) sans apport d'énergie : $\beta = 30^\circ$ $u_d = 1.3, 1.875 \times 11, 1.875, 1.975, 2.15, 2.3, 2.45, 2.6, 2.75, 2.9, 3.05, 3.2, 3.35, 3.5(mm)$.

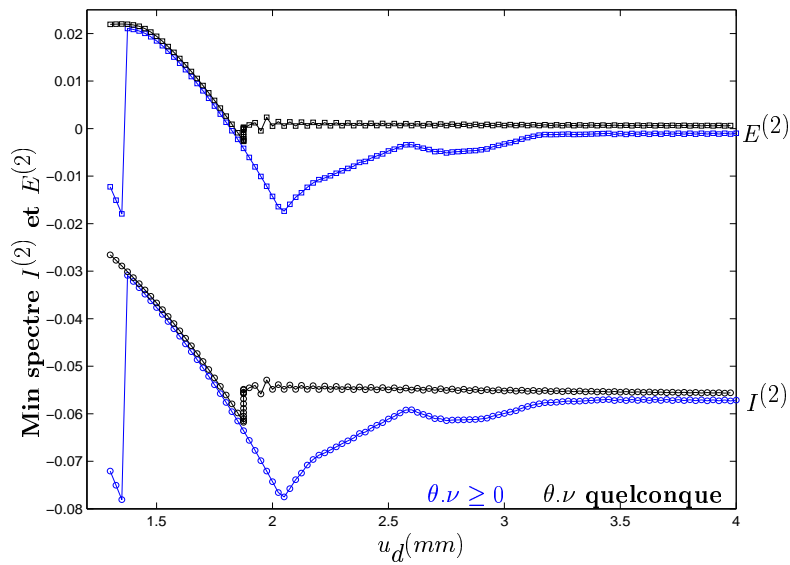
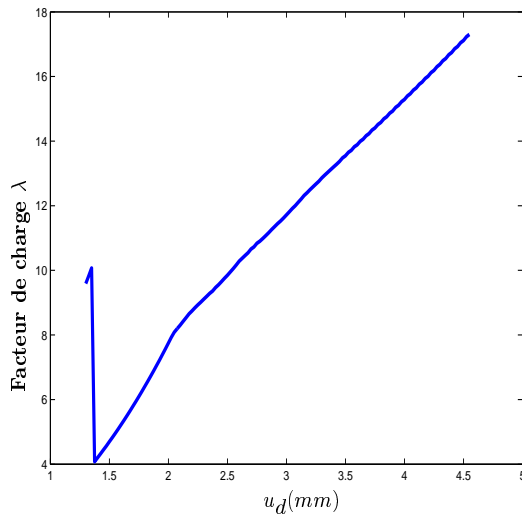
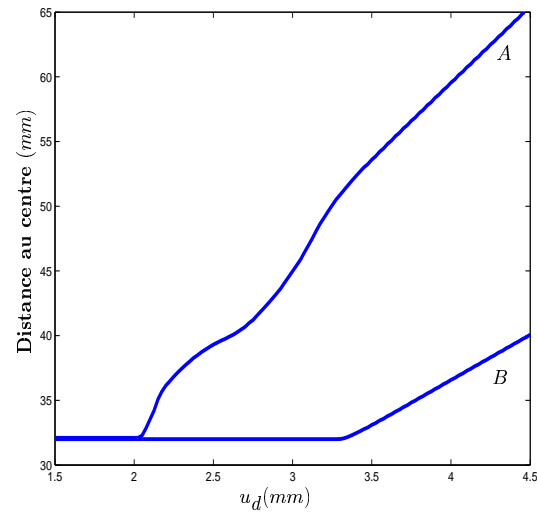


FIG. 6.25: Evolution de la plus petite valeur du spectre de $I^{(2)}$ et $E^{(2)}$ en fonction de u_d .

FIG. 6.26: Facteur de charge vs. u_d .FIG. 6.27: Distance des points A et B au centre $(0, 0)$ vs. u_d .

du front (lorsque le recul est autorisé). La convergence vers la forme naturelle, correspondant à Min spectre $I^{(2)}$ le plus faible, obtenue après un nombre important d'itérations est alternée, comme l'indiquent les figures 6.29 et 6.31. Plusieurs phases se distinguent dans la propagation. La première comprend l'instabilité évoquée plus haut - la valeur propre la plus faible de $E^{(2)}$, initialement négative, devient positive après la première propagation, puis l'augmentation de u_d (pendant laquelle le minimum du spectre de $E^{(2)}$ décroît), jusqu'à atteindre la valeur critique de propagation. Au-delà de cette valeur, le front en reculant s'aplatit et prend une forme plus naturelle (forte croissance de Min spectre $I^{(2)}$). La deuxième phase correspond aux nombreuses oscillations autour de cette forme naturelle (u_d ne varie pas et min spectre $I^{(2)}$ augmente très progressivement vers une borne supérieure). Ayant atteint sa forme naturelle¹⁰, le front progresse (u_d augmente) correspondant à la phase 3. Les fronts n'étant pas très précisément auto-similaires au front obtenu en fin de phase 2, la stabilité se dégrade légèrement ($E^{(2)}$ décroît), mais le restent suffisamment pour que $I^{(2)}$ revienne à sa valeur de début de phase 2. La phase 4 est alors consacrée à une nouvelle période d'oscillations (u_d ne varie pas) pour déterminer une meilleure forme naturelle.

6.3 Arche cylindrique

Dans ce paragraphe, nous étudions la propagation d'une fissure présente au sein d'une arche mince cylindrique, dont une carte associée est rappelée dans le paragraphe 4.4. Les cas d'un front débouchant et d'un front interne sont envisagés¹¹. Reprenant les notations du paragraphe 4.4,

¹⁰à une erreur près fixée *a priori*, à partir de la norme des déplacements normaux des nœuds du front

¹¹Nous reproduisons certains résultats numériques de [MÜNCH & OUSSET (2002a)].

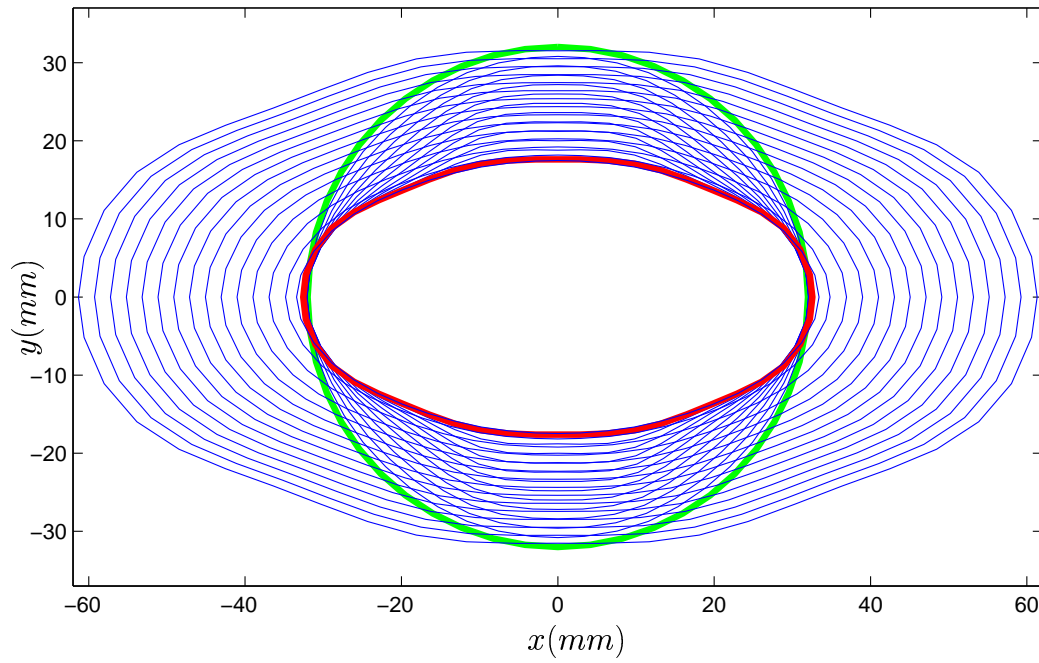


FIG. 6.28: Recherche de la forme naturelle du front (argument négatif du spectre de $I^{(2)}$ minimal) sans apport d'énergie : $\beta = 0^\circ$ $u_d = 0.9, 1.4 \times 5, 1.425, 1.45, 1.475, 1.5 \times 4, 1.525, 1.625, 1.775, 1.925, 2.075, 2.225, 2.375, 2.525, 2.675, 2.975, 3.125, 3.275, 3.425, 3.575(mm)$.

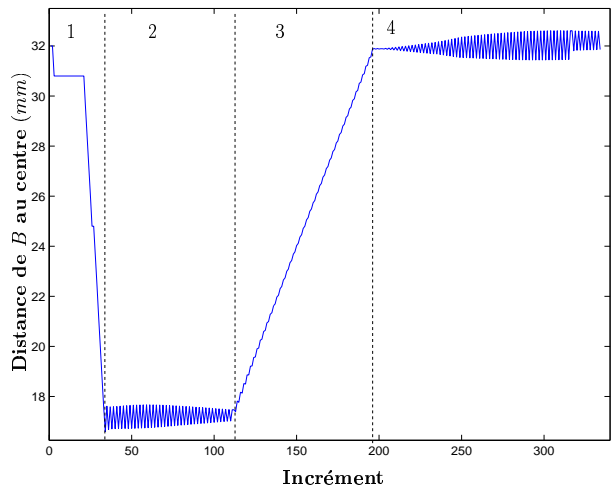


FIG. 6.29: Distance du point B au centre vs. incrément.

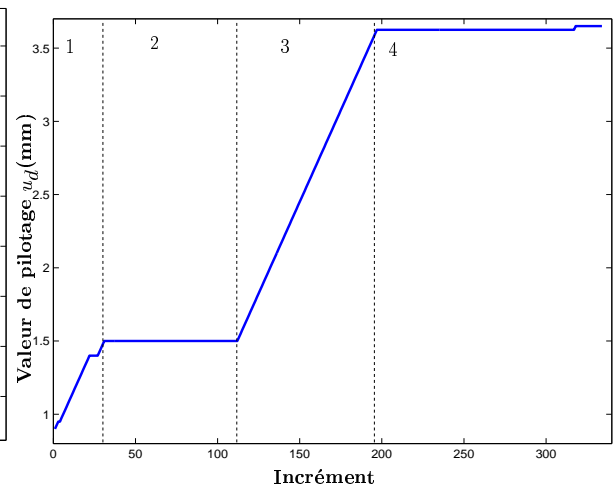
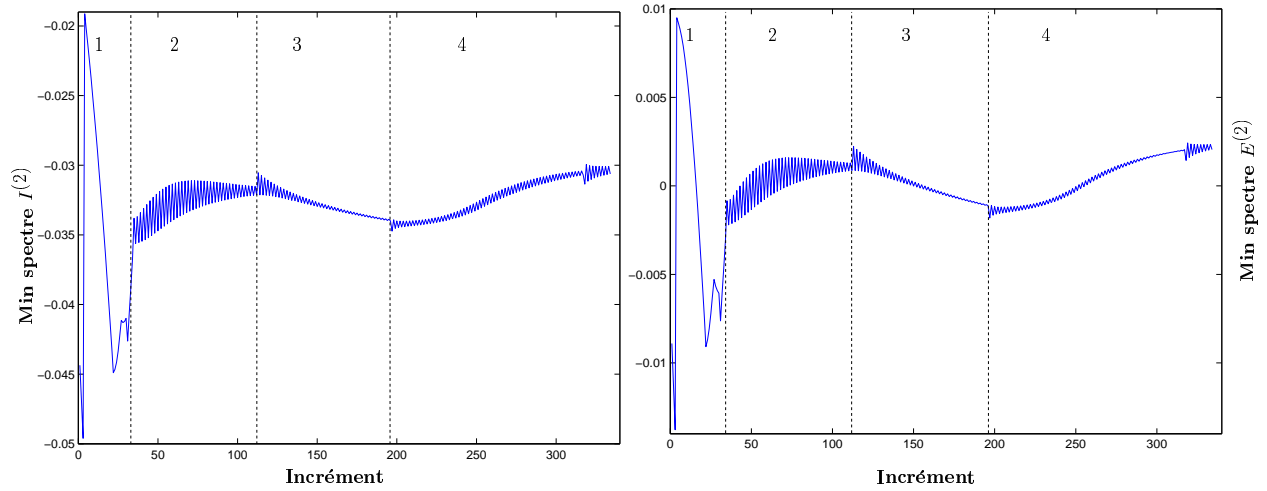


FIG. 6.30: u_d vs. incrément.


 FIG. 6.31: min spectre $I^{(2)}$ et min spectre $E^{(2)}$ vs. incrément.

l'arche présente une courbure constante non nulle dans la direction e_1 et nulle dans la direction e_2 (voir figure 6.33). Les caractéristiques géométriques et matériaux sont reportées dans le tableau (6.10)

E	ν	G_c	l	L	h	Θ_{max}	ϵ_θ
126000MPa	0.3	0.281N/mm	100mm	100mm	2.2mm	$10^{-2}l$ mm	$4 \cdot 10^{-4}l$ mm

TAB. 6.10: Caractéristiques géométriques et matériaux.

Enfin, signalons que pour cet exemple, les dérivées première et seconde de l'énergie de rupture s'écrivent simplement :

$$D^{(1)}(\boldsymbol{\theta}) = -G_c \int_{e\hat{\omega}_d} \text{div}\boldsymbol{\theta}(1 + \zeta_3 r^{-1}) d\hat{\omega} \quad ; \quad D^{(2)}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}) = -G_c \int_{e\hat{\omega}_d} \det(\nabla\boldsymbol{\theta})(1 + \zeta_3 r^{-1}) d\hat{\omega} \quad (6.4)$$

6.3.1 Front débouchant

L'arche cylindrique Ω représentée par l'ouvert $\hat{\Omega} =]-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}[\times]0, L[\times]-h, h[$ contient une fissure initiale au sein de sa surface moyenne ($\zeta_3 = 0$). La zone délaminée est $\hat{\omega}_d = \{(\zeta_1, \zeta_2) \in \hat{\omega}, \zeta_1 > \frac{l}{4}\}$ et le front de fissure est $\hat{\gamma}_f = \left\{ \boldsymbol{\zeta} = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \in \hat{\Omega}, \zeta_1 = \frac{l}{4}, \zeta_2 \in]0, L[, \zeta_3 = 0 \right\}$ ou bien $\gamma_f = \left\{ \mathbf{x} = (x, y, z) \in \Omega, x = r \sin \frac{l}{4r}, y \in]0, L[, z = r(\cos \frac{l}{4r} - \cos \frac{l}{2r}) \right\}$.

La structure est fixée sur le côté $\Gamma_u = \{\boldsymbol{\zeta} \in \hat{\Omega}, \zeta_1 = -\frac{l}{2}\}$ et soumise au chargement normal $\hat{\mathbf{f}} = (0, 0, \hat{f}_3^\pm), \hat{f}_3^+ = -\hat{f}_3^- = 8N$ sur le côté opposé. A nouveau, l'algorithme de Newton modifié est contrôlé en déplacement ; soit u_d le déplacement normal à une des deux extrémités de l'arête supérieure de la partie délaminée. Les figures 6.34 et 6.35 décrivent les variations du facteur de

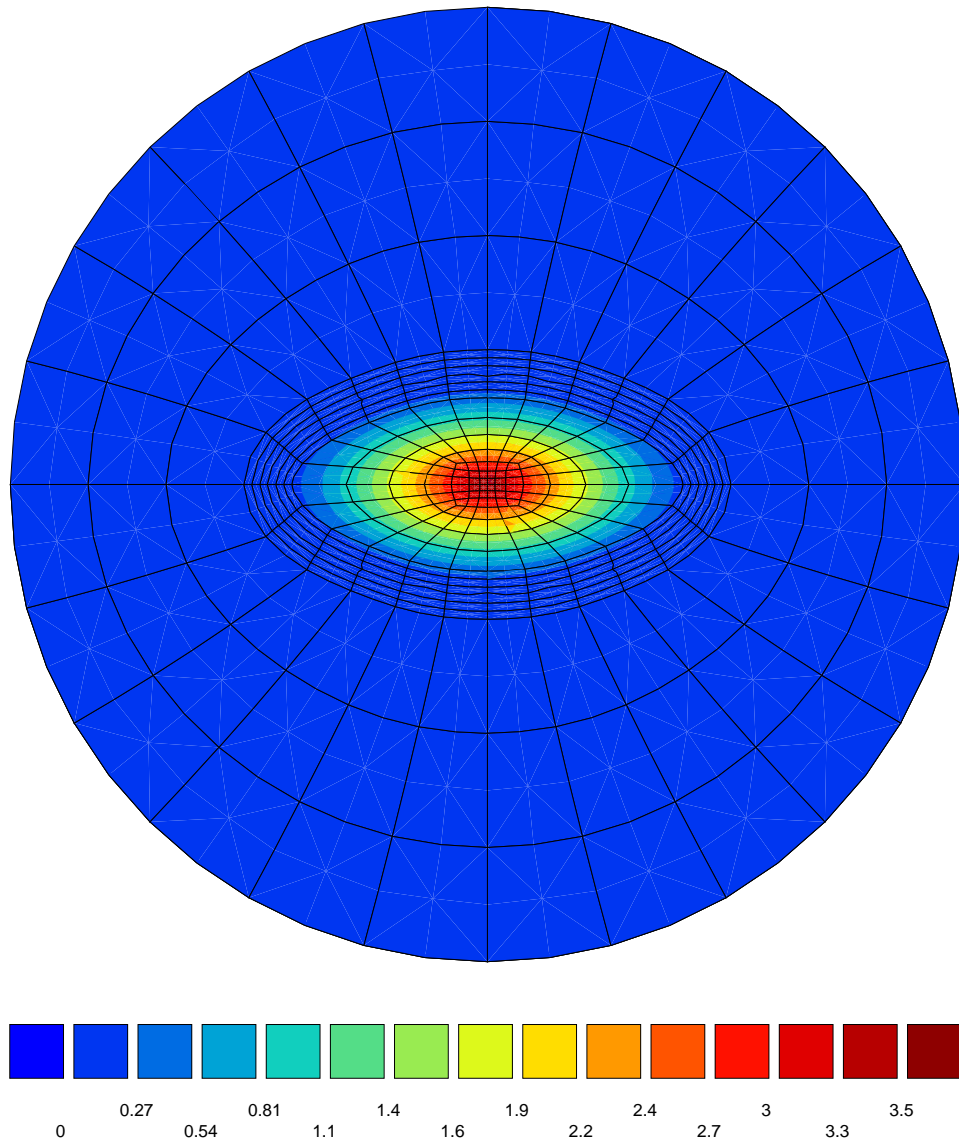


FIG. 6.32: $\beta = 0^\circ$ Isovaleurs de u_3 sur le maillage final ($u_d = 3.65mm$ - $R = 140mm$).

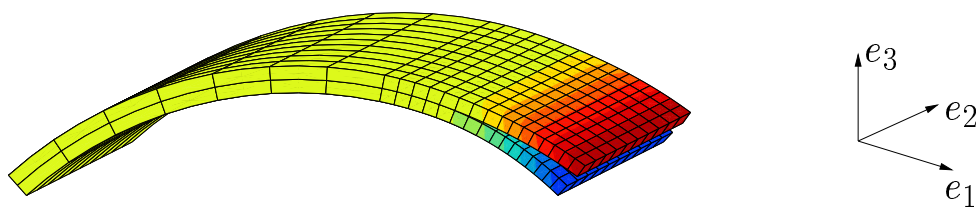


FIG. 6.33: Arche cylindrique délaminée ($r = 70mm$).

charge et de la longueur de délaminage (au point milieu du front) respectivement en fonction de la quantité u_d . Deux valeurs du rayon de courbure sont considérées : $r = 40mm$ et $r = 350mm$.

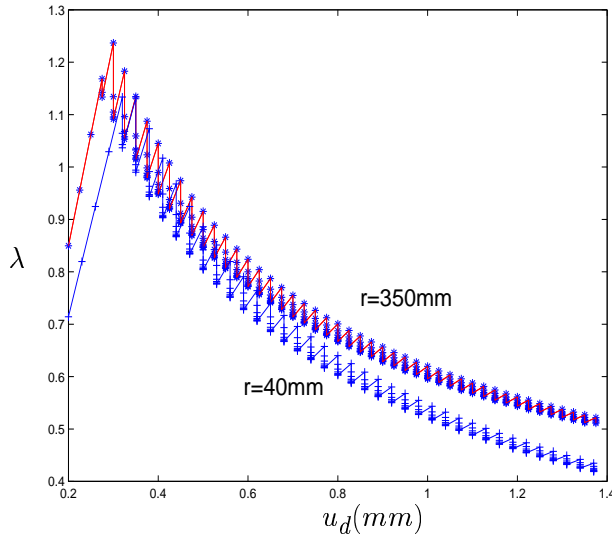


FIG. 6.34: Facteur de charge vs. u_d

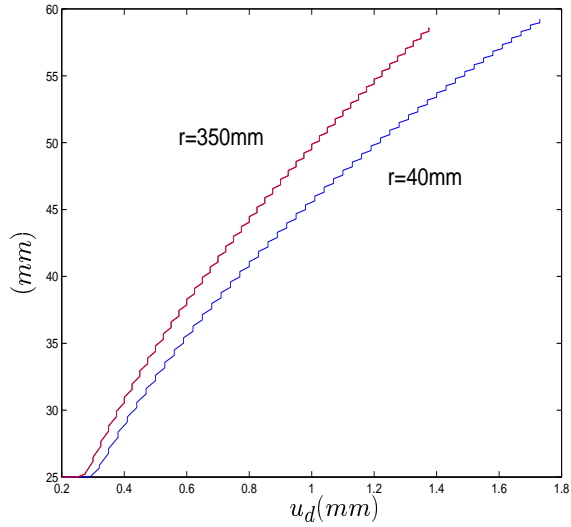


FIG. 6.35: Longueur du délaminage (au point milieu) vs. u_d

La figure 6.34 montre que la courbure accroît légèrement la rigidité de l'arche. A nouveau, les points de même abscisse correspondent aux itérations de l'algorithme en θ et uniquement les points inférieurs assurent en plus le minimum de E par rapport à la position du front. La convergence de cette position est obtenue en 6 itérations au plus avec un incrément $\delta u_d = 0.025mm$ et en 12 itérations au plus avec un incrément $\delta u_d = 0.1mm$. Les différents points d'équilibre obtenus avec ces deux valeurs sont reportées sur la figure 6.36. Naturellement, le chemin d'équilibre est indépendant de la valeur de l'incrément.

La figure 6.37 décrit l'évolution du taux de restitution de l'énergie en fonction du rayon de courbure de l'arche. Nous obtenons, en accord avec les développements analytiques du chapitre 3, que la courbure est un facteur limitant la propagation du front de fissure. Enfin, la position du front à équilibre est donnée, pour différentes valeurs de la quantité u_d sur la figure 6.38. Pour la lisibilité, les positions sont données dans le plan de référence (ζ_1, ζ_2) .

Le spécimen étant très large, les effets de bord restent faibles sur la forme du front qui reste rectiligne au cours de son évolution. Finalement, mentionnons que la propagation est stable, toutes les valeurs de $[I^{(2)}]$ (et donc de $[E^{(2)}]$) étant positives.

6.3.2 Front fermé

Le cas d'un front circulaire (dans le plan de référence) interne $\hat{\gamma}_f = \{\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3), \zeta_1^2 + \zeta_2^2 = a^2, \zeta_3 = 0\}$ centré à l'origine est considéré. a désigne le rayon du front et est égal à $40mm$. L'arche est fixée sur les côtés latéraux : $\Gamma_u = \{\zeta_1 = \pm l, \zeta_2 = 0, L\}$ et est soumise à deux forces normales

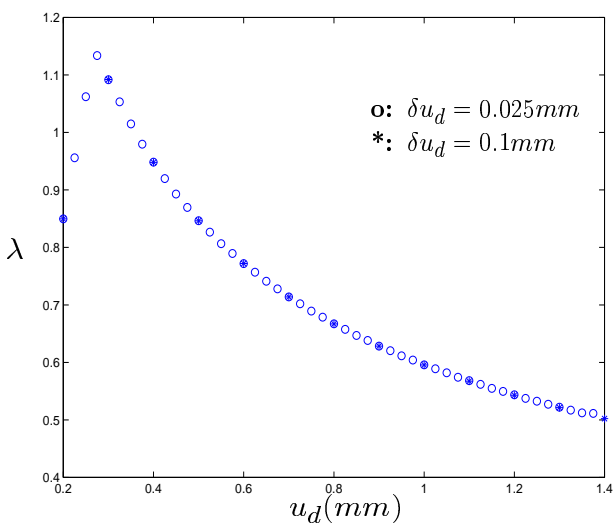


FIG. 6.36: Chemins d'équilibre (u_d, λ)

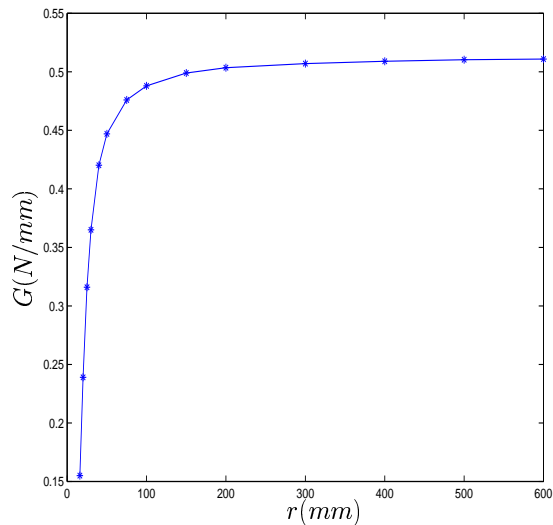


FIG. 6.37: Force de délaminage en fonction du rayon de courbure r

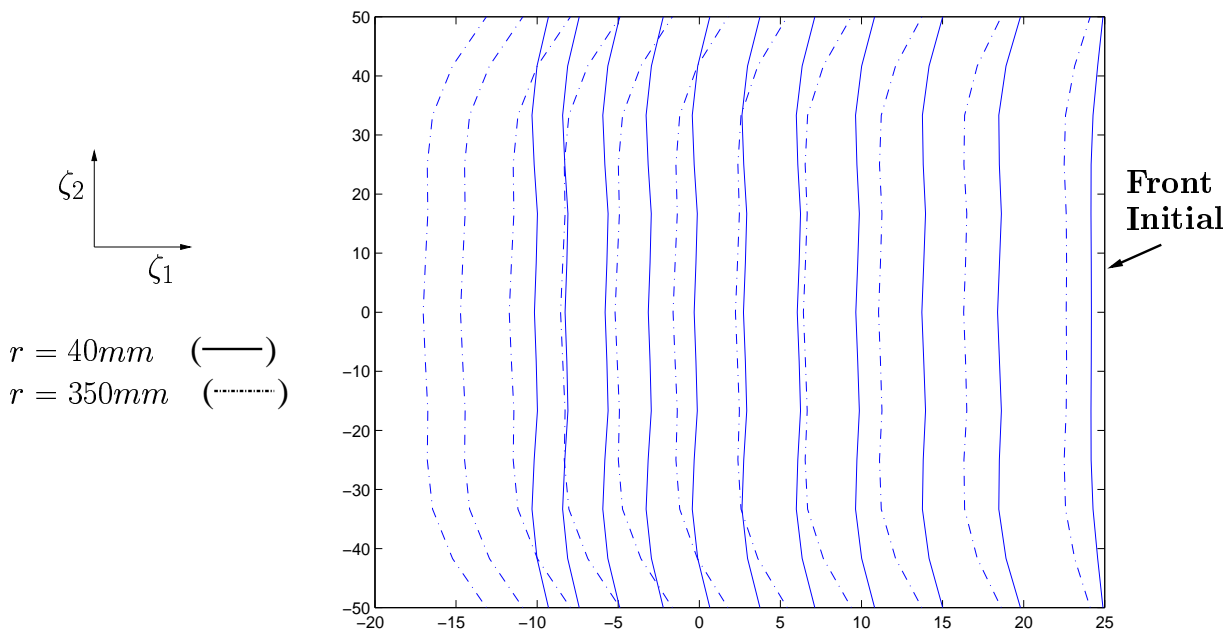


FIG. 6.38: Positions du front associées à $u_d = 0.32, 0.47, 0.62, 0.77, 0.92, 1.07, 1.22, 1.37, 1.52, 1.67, 1.79$ (mm)

ponctuelles $\hat{f}_3^+ = -\hat{f}_3^- = 100N$ appliquées au centre de la zone délaminée sur les faces inférieure et supérieure. Les caractéristiques de l'arche sont inchangées excepté $L = 200mm$. A l'image du cas précédent, l'algorithme de Newton est piloté en déplacement, la variable de pilotage est le déplacement normal du point central de la face supérieure. La figure 6.39 présente le maillage initial et un maillage final après quelques propagations.

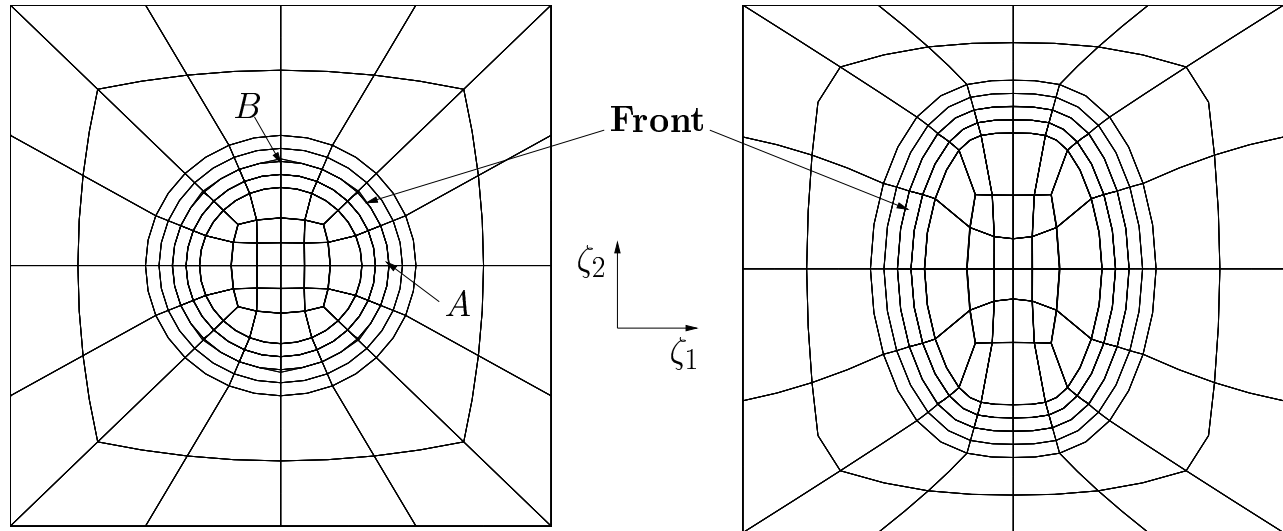


FIG. 6.39: Maillage initial (gauche) et final (droite) pour $r = 300mm$ et $u_d = 4.62mm$

Les figures 6.40 et 6.41 décrivent la variation du facteur de charge et des distances à l'origine des points A et B (définis sur la figure 6.39) du front en fonction de u_d , et ce, pour deux valeurs du rayon de courbure. Ces figures montrent, d'une part, qu'une valeur plus importante de u_d est nécessaire pour initier la propagation dans le cas le plus courbé et d'autre part, que le front évolue plus rapidement selon l'axe e_2 où la courbure est minimale (point B).

Les différentes positions du front sont reportées sur les figures 6.42 et 6.43 pour $r = 300mm$ et $r = 900mm$ respectivement : naturellement, les fronts restent symétriques par rapport aux deux axes.

Par ailleurs, les valeurs du taux de restitution local G et du déplacement normal associé le long du quadrant positif du front ($\zeta_1 > 0, \zeta_2 > 0$) sont reportées sur la figure 6.44. Le déplacement du front, apparaît être, à une constance près, une régularisation de la quantité $G - G_c$. Les variations du taux de restitution local aux points A et B en fonction du rayon de courbure sont reportées sur la figure : les évolutions sont identiques à l'exemple précédent.

Pour conclure, faisons quelques commentaires sur la stabilité. Les calculs réalisés pour les valeurs $r = 300mm$ et $r = 900mm$ des rayons de courbure montrent une évolution stable. Cependant, nous observons grâce aux figures 6.40 et 6.41 que pour de faibles valeurs de r , la réponse de l'arche

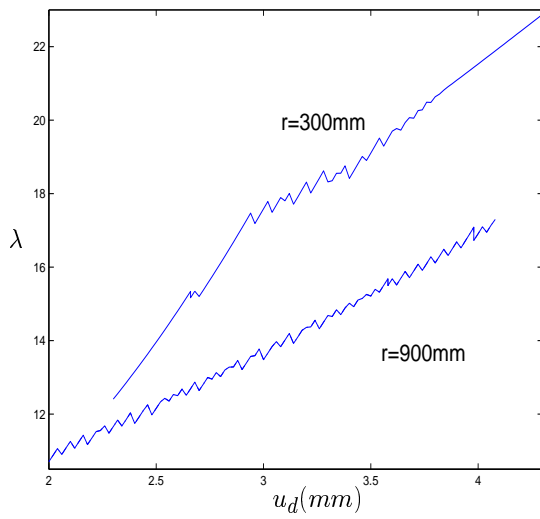


FIG. 6.40: facteur de charge vs. u_d

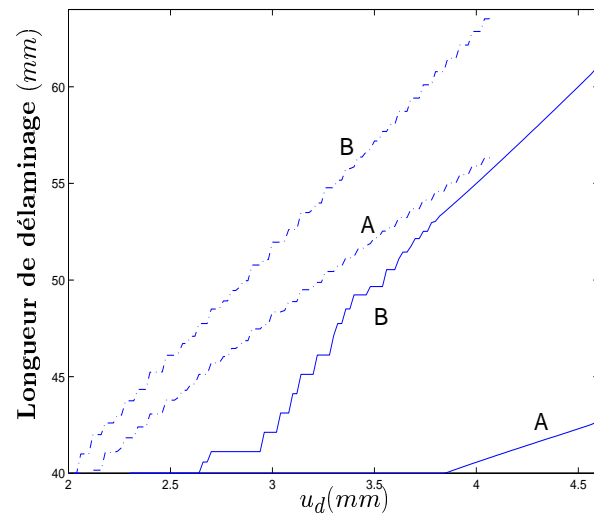


FIG. 6.41: Longueur délaminée vs. u_d : $r = 300\text{mm}$ (-) et $r = 900\text{mm}$ (-.)

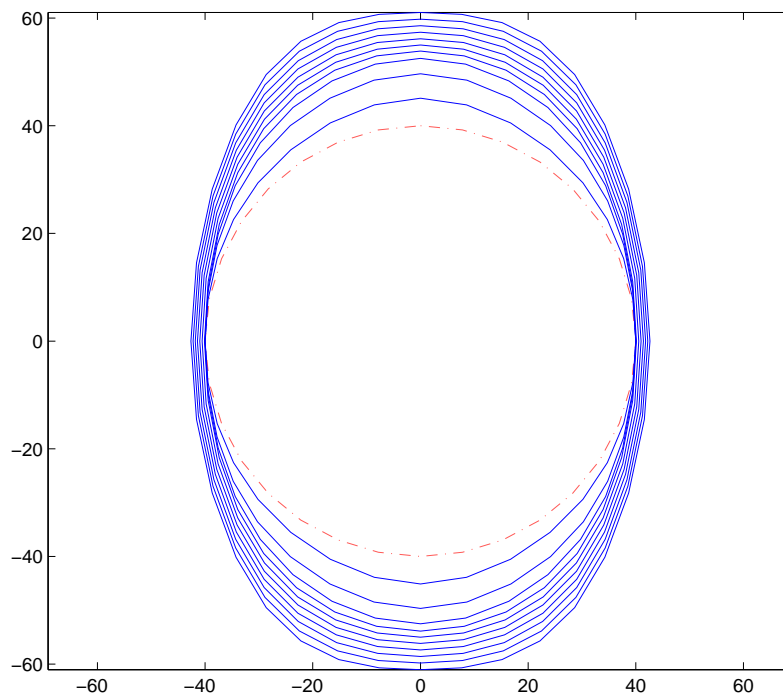


FIG. 6.42: Positions du front pour $r = 300\text{mm}$ associées à $u_d = 3.22, 3.56, 3.78, 3.9, 4.02, 4.14, 4.26, 4.38, 4.5, 4.62(\text{mm})$

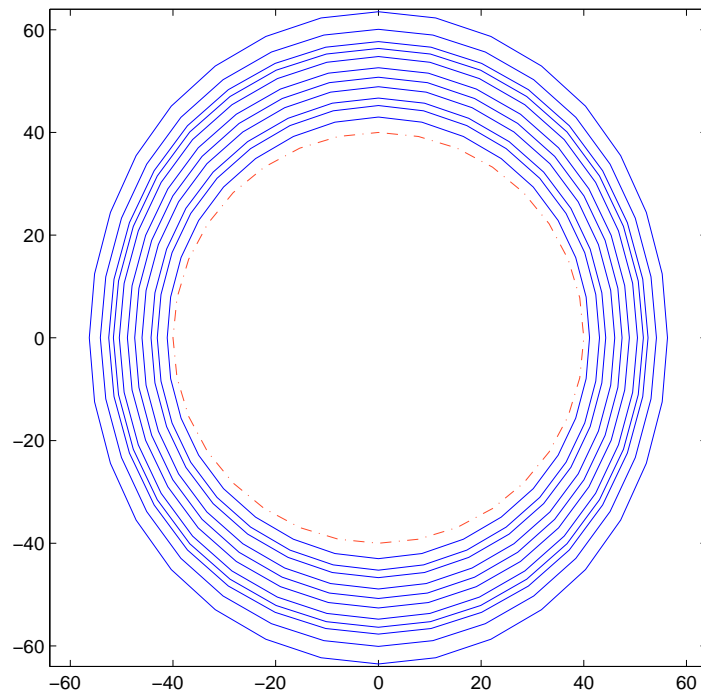


FIG. 6.43: Positions du front pour $r = 900mm$ associées à $u_d = 2.26, 2.46, 2.6, 2.8, 2.96, 3.14, 3.32, 3.46, 3.58, 3.8, 4.08(mm)$

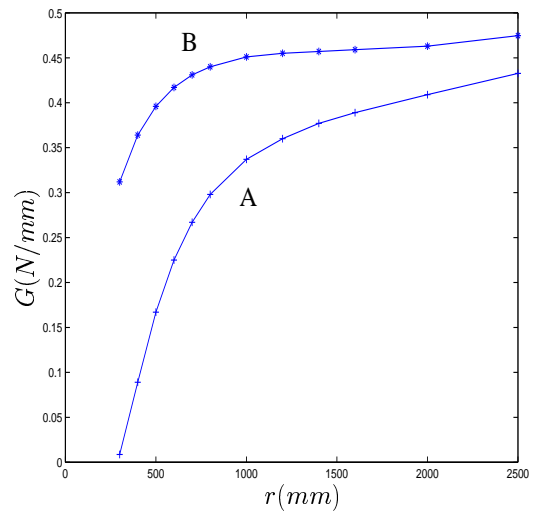
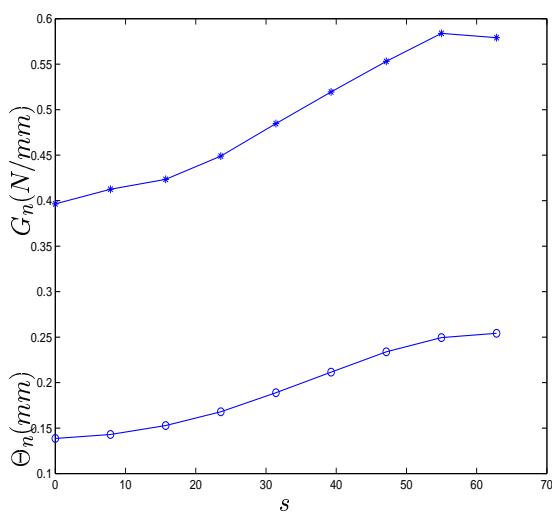


FIG. 6.44: Force normale de délaminage (G_n : *) et déplacement normal (θ_n : o) le long de r : $u_d = 2.3mm$
 $\hat{\gamma}_f$: $r = 900mm$ $u_d = 2.7mm$

est irrégulière pour une valeur de la variable de pilotage inférieure à $3.75mm$. Des calculs réalisés avec $r = 200mm$ révèlent une propagation instable. Il y a donc un compromis à déterminer, dans la conception de structure, entre la propagation et la stabilité : plus la courbure est importante, moins le risque de propagation est grand, mais plus celui d'une propagation instable (et peut-être catastrophique ?) l'est.

MODÈLES DE RUPTURE DE JOINT COLLÉ EN ÉLASTICITÉ NON LINÉAIRE



Chapitre 7

Problématique

Nous abordons dans cette seconde partie un problème dont les liens avec la partie précédente vont apparaître rapidement, celui de la modélisation de l'assemblage de structures par collage, puis de la modélisation de la rupture du joint. Grâce aux progrès dans la conception des colles et résines synthétiques, ce procédé d'assemblage mécanique a connu un succès important dans l'industrie, et ce pour l'assemblage de matériaux aussi divers que les bois, l'acier et de façon plus récente les céramiques et les composites. Le succès de cette technique est dû à plusieurs raisons. C'est la seule façon de relier deux pièces sans en altérer les propriétés mécaniques ; par ailleurs, les jonctions collées sont moins lourdes que les boulonnages ou rivetages et l'énergie nécessaire est bien inférieure à celle mise en œuvre dans un soudage. D'autres points comme l'anti-corrosion et l'étanchéité peuvent être également évoqués. La liaison métal-colle-métal est si résistante que son utilisation fut envisagée, dans les années 40, dans l'industrie aéronautique. Néanmoins, dans l'industrie aéronautique, où l'analyse des liaisons mécaniques est un des points les plus importants¹, la technique prépondérante reste celle du rivetage², jugée plus sûre, permettant un démontage éventuel des structures, alors que le collage y est davantage utilisé comme moyen de renfort ou de réparation. Une plus grande utilisation de cette technique requiert encore une meilleure connaissance de la description mécanique du joint et de son comportement aux dommages. Ces quelques points expliquent le grand nombre de travaux théoriques et expérimentaux visant à caractériser les états de contrainte dans le joint et ses différents modes de rupture. Principalement, deux paramètres sont à considérer : d'une part, l'épaisseur moyenne de l'adhésif par rapport à une longueur caractéristique de la structure, et d'autre part, le rapport des rigidités entre les différents constituants. D'un point de vue numérique, ce type de problème est délicat. La faible épaisseur du joint de colle nécessite un maillage fin engendrant un coût de calcul important. D'autre part, la matrice de rigidité du problème est mal conditionnée lorsque les rigidités des constituants sont d'un ordre de grandeur différent. Dans la section suivante, nous rappelons quelques modélisations mécaniques de ce problème, ramenant le joint à sa surface moyenne et permettant, en outre, de mener à terme la modélisation numérique.

¹le coût d'assemblage représente 30% à 50% du coût total de la structure et la masse des fixations et renforts représente environ 10% de la masse totale de la structure.

²pour un ordre de grandeur, environ 150000 vis et rivets sur un Rafale, 250000 sur un Falcon.

7.1 Sur la modélisation du joint

L'étude d'un assemblage Ω_ϵ de joint collé, est généralement ramenée dans la littérature à la situation simple suivante : Ω_ϵ est formé de deux adhérents notés Ω_ϵ^+ et Ω_ϵ^- liés sur une partie de leur frontière par un adhésif Ω_ϵ^m , d'épaisseur ϵh constante. ϵ représente un paramètre positif petit sans dimension et h une longueur caractéristique de l'assemblage.

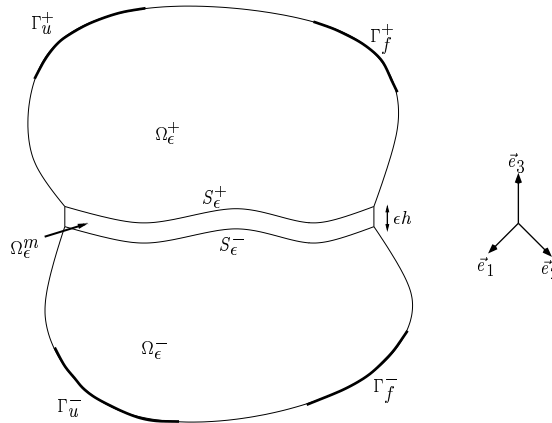


FIG. 7.1: Assemblage collé Ω_ϵ

L'hypothèse sur la différence de rigidités entre les constituants est prise en compte en introduisant trois tenseurs \mathbb{R}^+ , \mathbb{R}^- et \mathbb{R}^m de même ordre de grandeurs tels que $\mathbb{R}^\epsilon = \mathbb{R}^+$ sur Ω_ϵ^+ , $\mathbb{R}^\epsilon = \mathbb{R}^-$ sur Ω_ϵ^- , et $\mathbb{R}^\epsilon = \eta \mathbb{R}^m$ sur Ω_ϵ^m . ϵ et η sont les deux paramètres du problème. La structure est encadrée et soumise à une distribution surfacique de force sur deux parties disjointes de sa frontière.

Les premiers travaux de modélisations sont généralement crédités à l'actif de Goland et Reissner [GOLAND & REISSNER (1944)] retenant dans un cadre élastique linéaire les deux hypothèses suivantes : i) la flexibilité de l'adhésif est négligeable ii) les contraintes axiales sont négligeables tandis que les autres contraintes sont constantes dans l'épaisseur. Compte tenu de ces deux hypothèses, ces auteurs considèrent deux cas :

- le cas où le joint est si fin ($\epsilon h = o(1)$) et rigide $\eta = O(1)$ que les déformations sont négligeables. Les différents champs sont alors continus à travers le joint considéré comme un corps rigide. On introduit la notion d'interface parfaite (ou forte) ;
- le cas où l'adhésif est souple ($\eta = o(1)$) et flexible : la flexibilité du joint est due à la déformation de l'adhésif. On introduit la notion d'interface faible.

Cette analyse en contraintes a été affinée [ALLMAN (1977)], en supposant que la variation des contraintes est linéaire dans l'épaisseur du joint, hypothèse ensuite exploitée par des calculs analytiques donnant une première influence des paramètres mis en jeu [DELALE *et al.* (1981)] et par des travaux numériques basés sur la méthode des éléments finis ([WOOLEY & CARVER (1971)]). Le cadre élastique linéaire a ensuite été étendu à des lois non linéaires ([REDDY & ROY (1988)], [DESTUYNDER & NEVEU (1986)], [EDLUND (1994)]).

Pour certaines densités, une analyse asymptotique en les paramètres ϵ et η , similaire à celle utilisée pour les structure minces, a permis de justifier et d'affiner ces modèles, en les inscrivant dans un

cadre mathématique rigoureux. Le paramètre η est alors écrit sous la forme $\eta = \eta_0 \epsilon^p$, η_0 étant un paramètre sans dimension, indépendant de ϵ et les champs cinématique et statique sont développés formellement selon $(\mathbf{u}^\epsilon, \boldsymbol{\sigma}^\epsilon) = (\mathbf{u}^0, \boldsymbol{\sigma}^0) + \epsilon(\mathbf{u}^1, \boldsymbol{\sigma}^1) + \dots$. La valeur de p ainsi que la densité d'énergie choisie déterminent alors différents modèles simplifiés dits *limite*. Dans le cas de l'élasticité linéaire ([GILIBERT & RIGOLOT (1979)], [KLARBRING (1991)], [ABDELMOULA *et al.* (1996)], [GEYMONAT *et al.* (1999)]) et $p \in [0, 1[$, l'analyse conduit à des champs \mathbf{u}^0 et $\boldsymbol{\sigma}^0$ constants dans la colle. La colle est alors rigide au premier ordre en ϵ : cela correspond au premier cas étudié par Goland et Reissner. Dans le second cas évoqué où la colle est plus souple, que nous traduisons en écrivant $p = 1$, au premier ordre, les contraintes restent constantes dans la colle mais les déplacements sont linéaires en l'épaisseur de l'adhésif. Si celle-ci est portée par l'axe \mathbf{e}_3 , le champ cinématique s'écrit :

$$\mathbf{u}^\epsilon(\mathbf{x}^\epsilon) = \underbrace{\frac{\mathbf{u}^S(x_\alpha^\epsilon) + \mathbf{u}^I(x_\alpha^\epsilon)}{2} + \frac{x_3^\epsilon}{\epsilon h} [\mathbf{u}^0](x_\alpha)}_{\mathbf{u}^0(\mathbf{x}^\epsilon)} + O(\epsilon), \quad (7.1)$$

en notant $\mathbf{u}^S(x_\alpha^\epsilon) = \mathbf{u}^+(x_\alpha^\epsilon, \frac{\epsilon h}{2})$, $\mathbf{u}^I(x_\alpha^\epsilon) = \mathbf{u}^-(x_\alpha^\epsilon, -\frac{\epsilon h}{2})$ et $[\mathbf{u}^0](x_\alpha) = \mathbf{u}^S(x_\alpha^\epsilon) - \mathbf{u}^I(x_\alpha^\epsilon)$ le saut des déplacements à travers le joint. Cette écriture assure la continuité du champ cinématique sur $S_\epsilon^+ = \bar{\Omega}_\epsilon^+ \cap \bar{\Omega}_\epsilon^m$ et $S_\epsilon^- = \bar{\Omega}_\epsilon^- \cap \bar{\Omega}_\epsilon^m$. Dans Ω_ϵ^m , les contraintes valent $\sigma_{i3}^\epsilon = \frac{R_{i3i3}^m}{h} [u_i^0] + O(\epsilon)$ et l'énergie de déformations est remplacée, au premier ordre par une **énergie d'adhésion** de type rappel élastique définie sur la surface moyenne S de Ω_ϵ^m : $I_S([\mathbf{u}^\epsilon]) = \frac{1}{2} \int_S \frac{R_{i3i3}^m}{h} [u_i^\epsilon]^2 dS$. **Le joint disparaît d'un point de vue géométrique** de sorte que les éventuels problèmes numériques évoqués plus haut sont éliminés. Des travaux similaires concernent des lois élastiques non linéaires de type puissance (Norton-Hoff) ([SUQUET (1988)], [GANGHOFFER *et al.* (1997)]) ou traitent la situation plastique ([DESTUYNDER & NEVEU (1986)], [KRASUCKI & LENCI (2000)]). Concernant la justification des développements asymptotiques formels, la propriété de convexité des énergies permet enfin d'assurer dans un espace convenable, la convergence ou seulement la Γ -convergence de \mathbf{u}^ϵ vers \mathbf{u}^0 . Le cas $p > 1$ a été traité dans [GEYMONAT *et al.* (1999)] tandis que le cas $p < 0$ (inclusion de corps rigides) a été traité dans [CAILLERIE (1980)]. Une analyse sur le collage de plaques, correspondant à la situation où les adhérents présentent une dimension faible devant les autres, nécessite l'introduction d'un troisième paramètre et conduit, suivant la valeur de p , au modèle d'interface parfaite ou à un modèle de glissement ([DE MONTLEAU (1999)]). Dans [GEYMONAT & KRASUCKI (1997)], le collage dans leur plan de plaques de type Kirchhoff-Love est étudié. Deux cas significatifs sont mis en évidence suivant la valeur de p ($p = 1$ ou $p = 3$). Ce modèle a ensuite été justifié par Γ -convergence dans [ZAITTOUNI *et al.* (2002)].

Lorsque l'adhésif est plus souple que les adhérents ($p > 0$), l'hypothèse des petites déformations dans le joint, adoptée de façon quasi-systématique dans la littérature, est sujette à caution. Les auteurs présentent dans [LICHT & MICHAILLE (1996)] une première tentative de prise en compte des grandes déformations, introduisant une densité d'énergie non convexe, dont les hypothèses de croissance et de continuité sont cependant incompatibles avec la condition de préservation de l'orientation (1.1). En revanche, les auteurs prennent en compte à l'aide de fonctions fortement oscillantes, la rugosité des surfaces inférieure S_ϵ^- et supérieure S_ϵ^+ du joint. La Γ -convergence de l'énergie potentielle lorsque l'épaisseur du joint tend vers zéro est démontrée faisant apparaître une énergie d' "adhésion" fonction convexe positivement homogène de degré p du saut des déplacements et définie sur S . Les modèles obtenus sont étudiés numériquement dans [LEBON *et al.* (1998)]. Le chapitre 8 est consacré à une seconde tentative à l'aide d'une densité explicite prenant en compte la condition de préservation de l'orientation (1.1). La démarche sera ana-

logue. Avant cela, nous appliquerons la méthode sur la densité de Saint Venant-Kirchhoff, étendant [KLARBRING (1991)], et nous verrons que le modèle obtenu diffère de celui présenté dans [EDLUND & KLARBRING (1992)], dont nous rappelons maintenant les caractéristiques.

L'épaisseur du joint étant faible, les auteurs adoptent un déplacement linéaire selon l'épaisseur dans la colle (7.1). Notant $\mathbf{t} = \frac{[\mathbf{u}]}{\epsilon h}$ et $\bar{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}^S(x_\alpha) + \mathbf{u}^I(x_\alpha)}{2}$ le tenseur des déformations \mathbf{E} s'exprime dans la colle selon :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) = E_{\alpha\beta}(\bar{\mathbf{u}}) + \frac{1}{2}x_3 \left(t_{\alpha,\beta} + t_{\beta,\alpha} + \bar{u}_{k,\alpha}t_{k,\beta} + t_{k,\alpha}\bar{u}_{k,\beta} \right) + \frac{1}{2}x_3^2 t_{k,\alpha}t_{k,\beta} , \\ E_{\alpha 3}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(t_\alpha + \bar{u}_{3,\alpha} + \bar{u}_{k,\alpha}t_k) + \frac{x_3}{2}(t_{3,\alpha} + t_{k,\alpha}t_k) , \\ E_{33}(\mathbf{u}) = t_3 + \frac{1}{2}t_k t_k . \end{array} \right. \quad (7.2)$$

La relation $\sigma_{ij}^\pm F_{kj}^\pm \nu_i = \sigma_{ij}^m F_{kj}^m \nu_i$ sur S^\pm et la condition de raccord cinématique permettent d'en déduire que les contraintes sont du même ordre dans les adhérents que dans l'adhésif. Les auteurs supposent alors, la colle étant plus souple (cas $p = 1$), que les déformations $E_{\alpha\beta}$ sont d'ordre supérieur aux déformations $E_{\alpha 3}$ dans le joint. Enfin, la déformation $t_{3,\alpha} + t_{k,\alpha}t_k$, étant reliée à une contrainte nulle sur la surface moyenne du joint, est négligée devant les autres termes de $E_{\alpha 3}$. A l'aide de ces choix *a priori*, les auteurs en concluent :

$$E_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) \approx 0 \quad ; \quad E_{\alpha 3}(\mathbf{u}) \approx \frac{1}{2}(t_\alpha + \bar{u}_{3,\alpha} + \bar{u}_{k,\alpha}t_k) \quad ; \quad E_{33}(\mathbf{u}) = t_3 + \frac{1}{2}t_k t_k . \quad (7.3)$$

Les contraintes dans le joint sont alors, pour des matériaux monocliniques :

$$\sigma_{\alpha\beta} \approx R_{\alpha\beta 33}^\epsilon E_{33} \delta_{\alpha\beta} \quad ; \quad \sigma_{\alpha 3} \approx \frac{1}{2}R_{\alpha 3 \alpha 3}^\epsilon (t_\alpha + \bar{u}_{3,\alpha} + \bar{u}_{k,\alpha}t_k) \quad ; \quad \sigma_{33} \approx R_{33 33}^\epsilon (t_3 + \frac{1}{2}t_k t_k) , \quad (7.4)$$

conduisant à l'énergie de déformation suivante dans le joint :

$$I_S(\mathbf{u}) = \int_S \int_{-\frac{\epsilon h}{2}}^{\frac{\epsilon h}{2}} R_{\alpha 3 \alpha 3}^\epsilon (t_\alpha + \bar{u}_{3,\alpha} + \bar{u}_{k,\alpha}t_k)^2 + R_{33 33}^\epsilon (t_3 + \frac{1}{2}t_k t_k)^2 dx_3 dx_\alpha \quad (7.5)$$

qui s'intègre selon l'épaisseur pour obtenir une énergie d'adhésion définie sur la surface moyenne S :

$$I_S(\mathbf{u}) = \int_S \frac{R_{\alpha 3 \alpha 3}^\epsilon}{\epsilon h} ([u_\alpha] + \epsilon h \bar{u}_{3,\alpha} + \bar{u}_{k,\alpha} [u_k])^2 + \frac{R_{33 33}^\epsilon}{\epsilon h} \left([u_3] + \frac{1}{2\epsilon h} [u_k]^2 \right)^2 dx_\alpha . \quad (7.6)$$

Les auteurs ne traitent pas les questions d'analyse mathématique de leur modèle limite mais comparent numériquement, sur l'exemple de l'assemblage à simple recouvrement, les résultats avec ceux issus de l'élasticité linéaire.

7.2 Sur la modélisation de la rupture du joint

Les modèles de joints rappelés rapidement ci-dessus ne sont pas une fin en soi et servent à décrire les différents modes de rupture possibles du joint. Celui-ci est, par sa fonction et sa nature, un

lieu favorable de rupture, laquelle peut y apparaître principalement selon deux formes : d'une part, une rupture de l'interface adhérents-adhésif³ et d'autre part, une rupture du joint lui-même, par la présence de fissures ou micro-fissures⁴. L'apparition d'un de ces modes plutôt que l'autre dépend bien entendu de la nature du joint, de la géométrie de l'assemblage et aussi du chargement. Ainsi, dans [FLECK *et al.* (1991)] est décrit un assemblage, composé de deux demi-disques d'alliage d'aluminium joints par une fine couche d'epoxy : soumis à un chargement de mode I prédominant, la fissure apparaît à l'interface, malgré une énergie de rupture deux fois supérieure pour l'epoxy que pour l'interface aluminium-epoxy ; soumis à un mode II prédominant, la fissure apparaît dans le joint. Concernant la fissure d'interface, les modèles de rupture sont basés sur des critères en contrainte maximum [HARRIS & ADAMS (1984)] ou sur une étude des singularités présentes aux extrémités du recouvrement dans les coins et/ou à l'interface adhérents-adhésif (la différence des rigidités des matériaux donnant naissance à ces singularités). [DESTUYNDER *et al.* (1988)] réalisent une étude paramétrique des singularités présentes dans l'assemblage à double recouvrement. Dans [GEYMONAT *et al.* (1999)], un résultat de régularité général pour le problème plan permet de montrer que les singularités types sont toujours de type logarithmique quand les adhérents sont convexes. Par ailleurs, l'étude de la couche limite montre que des singularités d'ordre supérieur peuvent apparaître dans la colle. Les singularités, très localisées aux voisinages des points extrêmes ne peuvent fournir que des indications sur le processus d'amorçage de la fissure. En raison des grandes déformations dans le joint, certains auteurs préfèrent utiliser pour le second mode de rupture, des critères locaux en déformation ([CHAI (1996)] dans le cas du cisaillement, où la fissure initialement à l'interface évolue dans le joint). Ces résultats sont essentiellement expérimentaux. La finesse du joint nécessiterait ici un maillage très raffiné autour du front de fissure. Naturellement, les outils de la mécanique de la rupture sont utilisables et un modèle de propagation d'une fissure d'interface, basé sur un principe de moindre énergie et de ce fait sur le calcul de dérivées d'énergie, est parfaitement envisageable. De nombreux travaux concernent également la détermination des facteurs d'intensité de contraintes. Ainsi, [FLECK *et al.* (1991)] décrivent les chemins possibles de fissuration dans le joint suivant le critère de symétrie locale ($K_{II} = 0$) ; [SUO & HUTCHINSON (1990)] déterminent, dans le cas d'une structure semi-infinie et lorsque l'épaisseur du joint est faible, une relation universelle entre ces facteurs d'intensité et les facteurs d'intensité virtuels associés à une fissure dans un assemblage homogène, où le joint a disparu. [LEGUILLON & ABDELMOULA (2000)] utilisent la technique des développements asymptotiques raccordés pour calculer dans le cas anti-plan ces facteurs, selon la position de la fissure et le rapport des rigidités adhérents-adhésif. Cette tendance, visant à se ramener à la surface moyenne du joint, est également adoptée dans [DESTUYNDER *et al.* (1992)] utilisant le modèle d'interface élastique [KLARBRING (1991)](cas $p = 1$) pour déterminer un taux de restitution associé à une fissure le long de la surface moyenne. La procédure est identique à celle utilisée dans la première partie. Un terme supplémentaire dû au joint apparaît dans le taux de restitution :

$$g^\epsilon(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}^\epsilon) = g^0(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}^\epsilon) + \frac{1}{2} \int_S \frac{R_{i3i3}^\epsilon}{\epsilon h} [u_i^\epsilon]^2 \operatorname{div} \boldsymbol{\theta} dS \quad (7.7)$$

et les auteurs montrent que cette dérivée est indépendante de la cinématique virtuelle $\boldsymbol{\theta}$ du front pour obtenir une expression le long du front $g^\epsilon(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2} \int_{\gamma_f} \frac{R_{i3i3}^\epsilon}{\epsilon h} [u_i^\epsilon]^2 d\gamma$. La quantité g^0 désigne le taux de restitution obtenu sans le joint (expression (1.46) linéarisée). La singularité de contrainte proche du front virtuel de fissure γ_f est représentée par le saut des déplacements, à l'image de

³“adhesive fracture”.

⁴“cohesive fracture”.

l'expression (3.96), où apparaissent les sauts des efforts normaux et moment de flexion à travers la pointe de la fissure. Sur la structure réelle, cela revient à supposer que le joint se rompt sur toute son épaisseur, et que le front reste perpendiculaire aux interfaces S_ϵ^+ et S_ϵ^- . Cette hypothèse est d'autant moins forte que l'épaisseur du joint est faible, auquel cas les contraintes sont, au premier ordre, constantes dans l'épaisseur du joint. Il s'agit ici d'une vision énergétique, parfaitement en phase avec la modélisation du joint, décrite dans le paragraphe précédent. Par ailleurs, dans le cas où l'épaisseur du joint est très faible, les travaux expérimentaux montrent que le taux de restitution critique G_{IC} est très proche de celui associé à une fissure d'interface [CHAI (1986)]. Dans [DESTUYNDER *et al.* (1992)], les auteurs, compte tenu de l'hypothèse retenue, supposent le champ virtuel $\boldsymbol{\theta}$ constant dans l'épaisseur, soit $[\boldsymbol{\theta}] = 0$, fournissant alors une expression simplifiée de (1.46), écrite ensuite le long de $\Gamma_f \equiv \gamma_f \times] -\frac{\epsilon h}{2}, \frac{\epsilon h}{2} [$ selon $g^\epsilon(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_f} \sigma_{i_3}^\epsilon u_{i,3}^\epsilon d\gamma$. Cette expression est obtenue grâce aux résultats des études de singularité dans les "interfaces" faibles, présentes ici le long de $S_\epsilon^+ \cap \Gamma_f$ et $S_\epsilon^- \cap \Gamma_f$. L'expression précédente peut être obtenue, en raison de la commutativité des opérateurs, en dérivant d'abord l'énergie par rapport à une évolution du front puis en réalisant l'analyse asymptotique sur les formulations variationnelles vérifiées par les deux premières dérivées lagrangiennes. En revanche, cette stratégie adoptée sur une fissure d'interface adhérent-adhésif où les singularités sont plus fortes ne conduit pas à une expression à la fois simple et prenant en compte les propriétés du joint. Dans le chapitre 9, nous appliquerons cette technique aux modèles obtenus au chapitre 8. Dans le cas d'une interphase forte ($p \in [0, 1[$), où le joint est en première approximation un solide rigide, cette hypothèse est faible, puisque le taux de restitution converge vers celui de l'interface parfaite.

Chapitre 8

Modèles de joint collé en élasticité non linéaire

Dans le cadre de l'élasticité non linéaire, nous étudions le comportement d'un joint de colle d'épaisseur d'ordre ϵ reliant deux solides. Considérant la densité d'énergie de Saint Venant-Kirchhoff puis la densité d'énergie de Ciarlet-Geymonat, une technique de développement asymptotique formel fournit le terme de premier ordre en ϵ de l'énergie mécanique associée à la structure. L'existence et l'unicité de points critiques associés à cette énergie limite sont alors étudiées pour les deux densités. Enfin, quelques applications numériques sont présentées.

8.1 Position du problème

Soient dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3 muni d'une base orthonormée directe $(O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ deux ouverts Ω^+ et Ω^- disjoints, connexes, bornés de frontière $\partial\Omega^+$ et $\partial\Omega^-$ de classe C^2 . Soit $S = \partial\Omega^+ \cap \partial\Omega^-$ la partie commune des surfaces externes, de mesure 2D non nulle et projetable sur le plan $\{x_3 = 0\}$. Afin d'insérer l'adhésif, les ouverts Ω^+ et Ω^- sont translatés dans la direction \mathbf{e}_3 et $-\mathbf{e}_3$ respectivement sur une longueur égale à la demi-épaisseur $\frac{\epsilon h}{2}$ de l'adhésif. La quantité h désigne une longueur caractéristique, par exemple le diamètre de $\Omega^+ \cup \Omega^-$, tandis que la quantité ϵ , sans dimension, est strictement positive petite devant l'unité. Nous définissons alors les domaines suivants :

$$\begin{aligned}\Omega_\epsilon^+ &= \left\{ \mathbf{x} + \frac{\epsilon h}{2} \mathbf{e}_3, \mathbf{x} \in \Omega^+ \right\}, & \Omega_\epsilon^- &= \left\{ \mathbf{x} - \frac{\epsilon h}{2} \mathbf{e}_3, \mathbf{x} \in \Omega^- \right\}, \\ \Omega_\epsilon^m &= \left\{ \mathbf{x} + \frac{\epsilon z}{2} \mathbf{e}_3, -h < z < h, \mathbf{x} \in S \right\}, \\ S_\epsilon^+ &= \left\{ \mathbf{x} + \frac{\epsilon h}{2} \mathbf{e}_3, \mathbf{x} \in S \right\}, & S_\epsilon^- &= \left\{ \mathbf{x} - \frac{\epsilon h}{2} \mathbf{e}_3, \mathbf{x} \in S \right\},\end{aligned}$$

de sorte que :

$$\Omega_\epsilon = \Omega_\epsilon^+ \cup \Omega_\epsilon^- \cup \Omega_\epsilon^m \cup S_\epsilon^+ \cup S_\epsilon^- \quad (8.1)$$

désigne la configuration physique de référence de l'assemblage (figure 8.1). Selon la terminologie usuelle, Ω_ϵ^+ et Ω_ϵ^- sont appelés les *adhérents* tandis que Ω_ϵ^m est appelé l'*adhésif*.

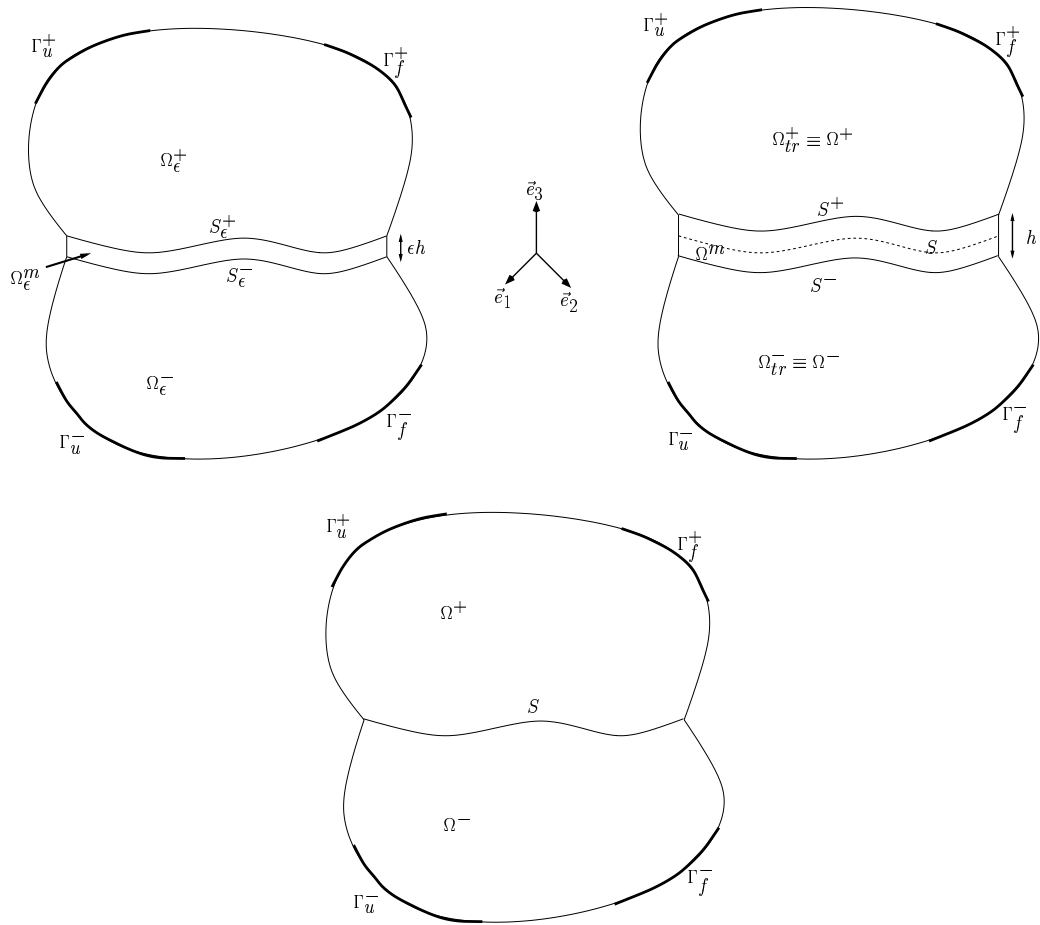


FIG. 8.1: Assemblage collé - Configuration de référence Ω_ϵ (gauche), dilatée Ω_{tr} (droite), limite Ω (bas).

Nous supposons que la rigidité de l'adhésif est plus faible que la rigidité des adhérents, dans un rapport ϵ , ce que nous traduisons en introduisant trois tenseurs \mathbb{R}^+ , \mathbb{R}^- et \mathbb{R}^m de même ordre de grandeur et indépendants de ϵ tels que :

$$\begin{cases} \mathbb{R}^\epsilon = \mathbb{R}^+ & \text{dans } \Omega_\epsilon^+ , \\ \mathbb{R}^\epsilon = \mathbb{R}^- & \text{dans } \Omega_\epsilon^- , \\ \mathbb{R}^\epsilon = \epsilon \mathbb{R}^m & \text{dans } \Omega_\epsilon^m . \end{cases} \quad (8.2)$$

Nous supposons également que les matériaux constituant l'assemblage sont monocliniques : $\mathbb{R}_{333\alpha}^\epsilon = \mathbb{R}_{\alpha\beta\gamma 3}^\epsilon = 0$. La structure est fixée sur les parties Γ_u^+ et Γ_u^- , $\Gamma_u^+ \subset \partial\Omega_\epsilon^+/S_\epsilon^+$ et $\Gamma_u^- \subset \partial\Omega_\epsilon^-/S_\epsilon^-$, l'une étant au moins de mesure bidimensionnelle non nulle et est soumise à une densité surfacique de force $\mathbf{f}_\epsilon^d \in (L^2(\Gamma_f))^3$ sur les parties Γ_f^+ et Γ_f^- , $\Gamma_f^+ \subset \partial\Omega_\epsilon^+/S_\epsilon^+$, $\Gamma_f^- \subset \partial\Omega_\epsilon^-/S_\epsilon^-$ de sorte que $\Gamma_u^+ \cap \Gamma_f^+ = \emptyset$ et $\Gamma_u^- \cap \Gamma_f^- = \emptyset$. Enfin, nous associons à cette structure l'énergie mécanique :

$$I^\epsilon(\mathbf{E}(\mathbf{v})) = \int_{\Omega^\epsilon} \check{W}^\epsilon(\mathbf{x}^\epsilon, \mathbf{E}(\mathbf{v})) d\mathbf{x}^\epsilon - L^\epsilon(\mathbf{v}) \quad (8.3)$$

définie sur un espace fonctionnel $V(\Omega^\epsilon)$. \check{W}^ϵ désigne la densité d'énergie associée aux matériaux et L^ϵ désigne l'application linéaire associée au chargement \mathbf{f}_d^ϵ :

$$L^\epsilon(\mathbf{v}) = \int_{\Gamma_u^\pm} \mathbf{f}_\epsilon^d \cdot \mathbf{v} d\Gamma \quad \mathbf{v} \in V(\Omega^\epsilon) . \quad (8.4)$$

Nous considérons deux densités d'énergie élastique non linéaire. La densité de Saint Venant-Kirchhoff pour laquelle nous avons :

$$V_{SV}(\Omega^\epsilon) = \{\mathbf{v} \in (W^{1,4}(\Omega^\epsilon))^3, \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_u^\pm\} \quad (8.5)$$

puis la densité de Ciarlet-Geymonat, rappelée au premier chapitre pour laquelle :

$$\boxed{V_{CG}(\Omega^\epsilon) = \{\mathbf{v} \in (W^{1,6}(\Omega^\epsilon))^3, \det \mathbf{F}(\mathbf{v}) > 0, \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_u^\pm\} .} \quad (8.6)$$

Le paramètre ϵ étant fixé, la solution \mathbf{u}^ϵ du problème de l'équilibre est, au moins formellement, un point critique de l'énergie mécanique. Dans le cas de la densité de Ciarlet-Geymonat, les résultats de J. Ball [BALL (1977)] assurent l'existence d'au moins un minimum de l'énergie. Cette question, dans le cas général, demeure ouverte pour l'énergie associée à \check{W}_{SV}^ϵ .

Compte tenu des deux hypothèses, l'une géométrique sur la faible épaisseur relative de l'adhésif, et l'autre matérielle sur la faible rigidité relative de l'adhésif, faisant intervenir un petit paramètre ϵ , notre objectif est d'atteindre un modèle simplifié du modèle élastique usuel précédent. Ce modèle approcherait d'autant mieux le modèle initial, dans un sens à définir, que le paramètre ϵ serait faible. A cette fin, nous utilisons la méthode des développements asymptotiques appelée au chapitre 3. Nous commençons par le cas de la densité d'énergie de Saint Venant-Kirchhoff.

8.2 Densité de Saint Venant-Kirchhoff

Nous reprenons la démarche adoptée dans [CIARLET & DESTUYNDER (1979)] consistant à travailler à partir d'une formulation variationnelle mixte. A cette fin, introduisons le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}^\epsilon = \frac{\partial \check{W}_{SV}^\epsilon}{\partial \mathbf{E}}(\mathbf{x}^\epsilon, \mathbf{E})$.

8.2.1 Formulation variationnelle et dilatation selon l'épaisseur

Les points critiques $(\mathbf{u}^\epsilon, \boldsymbol{\sigma}^\epsilon)$ sont, au moins formellement, caractérisés par la formulation mixte d'Hellinger-Reissner :

$$\mathcal{P}^\epsilon \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_\epsilon} S_{ijkl}^\epsilon \sigma_{kl}^\epsilon \tau_{ij} d\Omega_\epsilon = \int_{\Omega_\epsilon} \tau_{ij} E_{ij}(\mathbf{u}^\epsilon) d\Omega_\epsilon \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \Sigma(\Omega_\epsilon), \\ \int_{\Omega_\epsilon} \sigma_{ij}^\epsilon (\delta_{jk} + u_{k,j}^\epsilon) v_{k,i} d\Omega_\epsilon = \int_{\Gamma_f^\pm} \mathbf{f}_\epsilon^d \cdot \mathbf{v} dS \quad \forall \mathbf{v} \in V(\Omega_\epsilon), \end{array} \right.$$

avec $\Sigma(\Omega_\epsilon) = L_s^2(\Omega_\epsilon) = \{\boldsymbol{\tau} = (\tau_{ij}); \tau_{ij} \in L^2(\Omega_\epsilon); \tau_{ij} = \tau_{ji}\}$. Afin de faire apparaître explicitement la dépendance du problème en le paramètre ϵ , nous définissons, suivant les techniques développées dans [CIARLET & DESTUYNDER (1979)], un problème équivalent posé sur un domaine Ω_{tr} (figure 8.1 droite). A cette fin, nous introduisons la fonction $\pi^\epsilon : \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega_{tr} \rightarrow \mathbf{x}^\epsilon = (x_1^\epsilon, x_2^\epsilon, x_3^\epsilon) \in \Omega_\epsilon$ définie par :

$$\begin{cases} \pi^\epsilon(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3 - \frac{h}{2}(1 - \epsilon)) \in \Omega_\epsilon^+, & \text{pour } \mathbf{x} \in \Omega_{tr}^+, \\ \pi^\epsilon(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, \epsilon x_3) \in \Omega_\epsilon^m, & \text{pour } \mathbf{x} \in \Omega^m, \\ \pi^\epsilon(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3 + \frac{h}{2}(1 - \epsilon)) \in \Omega_\epsilon^-, & \text{pour } \mathbf{x} \in \Omega_{tr}^-, \end{cases} \quad (8.7)$$

avec $\Omega_{tr}^\pm = \{\mathbf{x} \pm \frac{h}{2} \mathbf{e}_3, \mathbf{x} \in \Omega^\pm\}$, $\Omega^m = \{\mathbf{x} + \frac{z}{2} \mathbf{e}_3, -h < z < h, \mathbf{x} \in S\}$, $S^\pm = \{\mathbf{x} \pm \frac{h}{2} \mathbf{e}_3, \mathbf{x} \in S\}$. Afin de simplifier les notations, nous identifions sans confusion possible Ω_{tr}^+ avec Ω^+ et Ω_{tr}^- avec Ω^- . Enfin, nous notons $\Omega_{tr} \equiv \Omega = \Omega^+ \cup \Omega^- \cup \Omega^m \cup S^+ \cup S^- \equiv \Omega^\pm \cup \Omega^m \cup S^\pm$. Le champ $\mathbf{u}(\epsilon, \mathbf{x})$ est défini sans changement d'échelle par $\mathbf{u}(\epsilon, \mathbf{x}) = \mathbf{u}^\epsilon(\mathbf{x}^\epsilon) = \mathbf{u}^\epsilon \circ \pi^\epsilon(\mathbf{x})$. La même correspondance, sans changement d'échelle, est adoptée pour le tenseur des contraintes ainsi que pour les modules de rigidité :

$$\boldsymbol{\sigma}(\epsilon, \mathbf{x}) = \boldsymbol{\sigma}^\epsilon(\mathbf{x}^\epsilon) = \boldsymbol{\sigma}^\epsilon \circ \pi^\epsilon(\mathbf{x}) \quad ; \quad \mathbb{R}(\epsilon, \mathbf{x}) = \mathbb{R}^\epsilon(\mathbf{x}^\epsilon) \quad (8.8)$$

avec $\mathbb{R}(\epsilon, \mathbf{x}) = \mathbb{R}^\pm$ sur Ω^\pm et $\mathbb{R}(\epsilon, \mathbf{x}) = \epsilon \mathbb{R}^m$ sur Ω^m . Enfin, nous effectuons le changement d'échelle des forces suivant :

$$\boxed{\mathbf{f}_\epsilon^d(\mathbf{x}^\epsilon) = \epsilon^p \mathbf{f}^d(\mathbf{x}), \quad p \in \mathbb{Z}.} \quad (8.9)$$

Selon les relations $\frac{\partial}{\partial x_\alpha^\epsilon}(\phi^\epsilon(\mathbf{x}^\epsilon)) = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\phi(\mathbf{x}))$, $\frac{\partial}{\partial x_3^\epsilon}(\phi^\epsilon(\mathbf{x}^\epsilon)) = \epsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial x_3}(\phi(\mathbf{x}))$ et $\int_{\Omega_\epsilon^m} \phi^\epsilon(\mathbf{x}^\epsilon) d\mathbf{x}^\epsilon = \epsilon \int_{\Omega^m} \phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \equiv \epsilon \int_{\Omega^m} \phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$, pour toute fonction ϕ différentiable et $d\Omega$ -mesurable et ϕ^ϵ telle que $\phi^\epsilon \circ \pi^\epsilon \equiv \phi$, le problème \mathcal{P}^ϵ se transforme en un problème $\mathcal{P}(\epsilon)$ posé sur Ω et défini par :

$$\mathcal{P}(\epsilon) \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega^\pm} S_{ijkl}^\pm \sigma_{kl} \tau_{ij} d\Omega + \int_{\Omega^m} S_{ijkl}^m \sigma_{kl} \tau_{ij} d\Omega = \epsilon^{-1} \int_{\Omega^m} \frac{\tau_{33}}{2} u_{i,3} u_{i,3} d\Omega \\ \quad + \int_{\Omega^\pm} \tau_{ij} \gamma_{ij}(\mathbf{u}) d\Omega + \int_{\Omega^m} (\tau_{i3} u_{i,3} + \tau_{\alpha 3} u_{i,3} u_{i,\alpha}) d\Omega \\ \quad + \epsilon \int_{\Omega^m} (\tau_{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) + \tau_{\alpha 3} u_{3,\alpha}) d\Omega \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \Sigma(\Omega), \\ \int_{\Omega^\pm} \sigma_{ik} (\delta_{jk} + u_{j,k}) v_{j,i} d\Omega + \epsilon^{-1} \int_{\Omega^m} \sigma_{33} u_{j,3} v_{j,3} d\Omega \\ \quad + \int_{\Omega^m} \left(\sigma_{\alpha 3} (u_{j,3} v_{j,\alpha} + u_{j,\alpha} v_{j,3}) + \sigma_{i3} v_{i,3} \right) d\Omega \\ \quad + \epsilon \int_{\Omega^m} (\sigma_{\alpha\beta} u_{j,\alpha} v_{j,\beta} + \sigma_{\alpha j} v_{j,\alpha}) d\Omega = \epsilon^p \int_{\Gamma_f^\pm} \mathbf{f}^d \cdot \mathbf{v} dS \quad \forall \mathbf{v} \in V(\Omega), \end{array} \right.$$

avec $V(\Omega) = \{\mathbf{v} \in (W^{1,4}(\Omega))^3, \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_u^\pm\}$ et $\Sigma(\Omega) = L_s^2(\Omega)$ tandis que l'énergie mécanique devient :

$$I(\epsilon, \mathbf{E}(\mathbf{v})) = \int_{\Omega} \check{W}_{SV}(\epsilon, \mathbf{x}, \mathbf{E}(\mathbf{v})) d\mathbf{x} - L(\epsilon, \mathbf{v}), \quad \mathbf{v} \in V(\Omega) \quad (8.10)$$

avec $L(\epsilon, \mathbf{v}) = \epsilon \int_{\Gamma_f} \mathbf{f}^d \cdot \mathbf{v} d\Gamma$.

8.2.2 Développement asymptotique formel

Comme dans [CIARLET & DESTUYNDER (1979)], nous supposons que les champs cinématique et statique se développent en une série de puissances du paramètre ϵ selon :

$$(\mathbf{u}(\epsilon, \mathbf{x}), \boldsymbol{\sigma}(\epsilon, \mathbf{x})) = \epsilon^q (\mathbf{u}^q(\mathbf{x}), \boldsymbol{\sigma}^q(\mathbf{x})) + \epsilon^{q+1} (\mathbf{u}^{q+1}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\sigma}^{q+1}(\mathbf{x})) + \dots \quad q \in \mathbb{Z}, \quad (8.11)$$

développements que nous injectons dans le problème $\mathcal{P}(\epsilon)$. L'identification des termes de même ordre en ϵ fournit alors une suite de problèmes variationnels. Si nous prenons $p = q = 0$ comme dans le cas de l'élasticité linéaire, alors le terme en ϵ^{-1} dans la relation de comportement fournit la relation $u_{i,3}^0 = 0$ dans Ω^m tandis que celui en ϵ^0 fournit $\sigma_{ij}^0 = 0$ dans Ω^m . Ces deux conditions sont incompatibles puisque selon la continuité des déplacements, le joint disparaît et l'adhérence parfaite est assurée entre les faces inférieure et supérieure, tandis que la condition en contraintes entraîne que ces faces sont libres d'effort. Par ailleurs, la distribution des forces \mathbf{f}^d pouvant être arbitrairement petite, il est naturel d'imposer que le problème limite cherché généralise le problème limite issu de l'élasticité linéaire présenté dans [KLARBRING (1991)]. Une telle condition requiert en fait $q = 1$ puis $p = 1$ ¹. Le problème variationnel à l'ordre 1 est alors :

$$\mathcal{P}^1 \left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{u}^1, \boldsymbol{\sigma}^1) \in V^1 \times \Sigma^1 \\ \int_{\Omega^\pm} S_{ijkl}^\pm \sigma_{kl}^1 \tau_{ij} d\Omega + \int_{\Omega^m} S_{ijkl}^m \sigma_{kl}^1 \tau_{ij} d\Omega = \\ \int_{\Omega^m} \left(\frac{\tau_{33}}{2} u_{i,3}^1 u_{i,3}^1 + \tau_{i3} u_{i,3}^1 \right) d\Omega + \int_{\Omega^\pm} \tau_{ij} u_{j,i}^1 d\Omega \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \Sigma^1, \\ \int_{\Omega^\pm} \sigma_{ij}^1 v_{j,i}^\pm d\Omega + \int_{\Omega^m} \left(\sigma_{33}^1 u_{j,3}^1 v_{j,3}^m + \sigma_{i3}^1 v_{i,3}^m \right) d\Omega = \int_{\Gamma_f^\pm} \mathbf{f}^d \cdot \mathbf{v}^\pm dS \quad \forall \mathbf{v} \in V^1, \end{array} \right.$$

avec

$$V^1 = \left\{ \mathbf{v}^- \in (H^1(\Omega^-))^3, \mathbf{v}^+ \in (H^1(\Omega^+))^3, \mathbf{v}^m \in (L^4(\Omega^m))^3, \right. \\ \left. v_{k,3}^m \in L^4(\Omega^m), \mathbf{v}^+|_{S^+} = \mathbf{v}^m|_{S^+}; \mathbf{v}^-|_{S^-} = \mathbf{v}^m|_{S^-}, \mathbf{v}^\pm = 0 \text{ sur } \Gamma_u^\pm \right\} \quad (8.12)$$

¹Une situation similaire est rencontrée lorsque l'on dérive le modèle de plaque de Von Kármán à partir de l'élasticité tridimensionnelle [CIARLET & DESTUYNDER (1979)] où le choix $q = 2$ est nécessaire. Une discussion est également donnée sur ce point dans [FONSECA & FRANCFORT (2000)]. D'une façon générale, l'analyse asymptotique effectuée sur des densités non linéaires ([CIMETIÈRE *et al.* (1988)], [FOX *et al.* (1993)], [BUSSE (1997)]) génère des difficultés supplémentaires importantes.

où \mathbf{v}^+ , \mathbf{v}^- et \mathbf{v}^m sont les restrictions de \mathbf{v} à Ω^+ , Ω^- et Ω^m , respectivement. V^1 est muni de la norme naturelle $\|\mathbf{v}\|_{V^1}$ telle que :

$$\|\mathbf{v}\|_{V^1}^2 = \|\mathbf{v}^+\|_{(H^1(\Omega^+))^3}^2 + \|\mathbf{v}^-\|_{(H^1(\Omega^-))^3}^2 + \|\mathbf{v}^m\|_{(L^4(\Omega^m))^3}^2 + \|\mathbf{v}_{,3}^m\|_{(L^4(\Omega^m))^3}^2 \quad (8.13)$$

et $\Sigma^1 = (L_s^2(\Omega))^9$.

En suivant la démarche de [CIARLET & RABIER (1980)], les solutions du problème \mathcal{P}^1 sont les points critiques de la fonctionnelle I_{SV}^1 définie sur V^1 par

$$I_{SV}^1(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega^\pm} R_{ijkl}^\pm v_{k,l}^\pm v_{i,j}^\pm d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega^m} \left[R_{\alpha 3 \beta 3}^m v_{\alpha,3}^m v_{\beta,3}^m + \frac{R_{3333}^m}{4} (v_{\alpha,3}^m v_{\alpha,3}^m + (v_{3,3}^m + 1)^2 - 1)^2 \right] d\Omega - \int_{\Gamma_f^\pm} \mathbf{f}^d \cdot \mathbf{v}^\pm d\Gamma .$$

Un simple calcul montre que l'on obtient directement cette fonctionnelle en développant l'énergie $I_{SV}(\epsilon, \mathbf{E}(\mathbf{u}(\epsilon)))$, exprimée sur l'ouvert virtuel Ω , par rapport à ϵ

$$\boxed{I_{SV}(\epsilon, \mathbf{E}(\mathbf{u}(\epsilon))) = \epsilon^2 I_{SV}^1(\mathbf{u}^1) + O(\epsilon^3)} \quad (8.14)$$

Cela signifie que l'opérateur noté A , qui a une série de puissance en ϵ associe son terme de plus faible degré, **commute** avec l'opérateur de dérivation par rapport au champ cinématique : $A(DI^\epsilon(\mathbf{u}^\epsilon) \cdot \mathbf{v}) = DA(I^\epsilon(\mathbf{u}^\epsilon)) \cdot \mathbf{v}$. Il en résulte que le problème initial est formellement réduit, au premier ordre, à la détermination des points critiques de I_{SV}^1 , caractérisés par le problème \mathcal{P}^1 .

REMARQUE(S) 25 Dans Ω^m , le gradient $\mathbf{F}(\mathbf{u}(\epsilon, \mathbf{x}))$ de la déformation $\mathbf{x} + \mathbf{u}(\epsilon, \mathbf{x})$ est :

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}(\epsilon, \mathbf{x})) = \begin{pmatrix} 1 + u(\epsilon, \mathbf{x})_{1,1} & u(\epsilon, \mathbf{x})_{1,2} & \epsilon^{-1} u(\epsilon, \mathbf{x})_{1,3} \\ u(\epsilon, \mathbf{x})_{2,1} & 1 + u(\epsilon, \mathbf{x})_{2,2} & \epsilon^{-1} u(\epsilon, \mathbf{x})_{2,3} \\ u(\epsilon, \mathbf{x})_{3,1} & u(\epsilon, \mathbf{x})_{3,2} & 1 + \epsilon^{-1} u(\epsilon, \mathbf{x})_{3,3} \end{pmatrix} \quad (8.15)$$

puis $\mathbf{F}(\mathbf{u}(\epsilon, \mathbf{x})) = \mathbf{F}^1(\mathbf{u}^1(\mathbf{x})) + O(\epsilon)$ avec

$$\mathbf{F}^1(\mathbf{u}^1(\mathbf{x})) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u^1(\mathbf{x})_{1,3} \\ 0 & 1 & u^1(\mathbf{x})_{2,3} \\ 0 & 0 & 1 + u^1(\mathbf{x})_{3,3} \end{pmatrix} \quad (8.16)$$

entraînant $\det(\mathbf{F}(\mathbf{u}(\epsilon, \mathbf{x}))) = 1 + u_{3,3}^1(\mathbf{x}) + O(\epsilon)$ dans Ω^m . Au premier ordre, la condition de préservation de l'orientation dans Ω^m équivaut ainsi à :

$$\boxed{1 + u_{3,3}^1(\mathbf{x}) > 0 \quad \mathbf{x} \in \Omega^m} \quad (8.17)$$

Un calcul similaire conduit à $\det(\mathbf{F}(\mathbf{u}(\epsilon, \mathbf{x}))) = 1 + O(\epsilon)$ dans Ω^\pm de sorte que la condition de préservation est, au premier ordre, toujours vérifiée dans les adhérents. ■

Pour simplifier les notations, nous omettons l'exposant 1 de \mathbf{u}^1 et $\boldsymbol{\sigma}^1$. Les équations locales correspondant au problème \mathcal{P}^1 sont :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sigma_{ij}^{\pm} = R_{ijkl}^{\pm} \frac{u_{k,l}^{\pm} + u_{l,k}^{\pm}}{2} & \text{dans } \Omega^{\pm}, \\ \sigma_{ij,j}^{\pm} = 0 & \text{dans } \Omega^{\pm}, \\ \sigma_{ij}^m = R_{ij\alpha 3}^m u_{\alpha,3}^m + R_{ij33}^m \left(u_{3,3}^m + \frac{1}{2} u_{k,3}^m u_{k,3}^m \right) & \text{dans } \Omega^m, \\ (\sigma_{i3}^m + \sigma_{33}^m u_{i,3}^m)_{,3} = 0 & \text{dans } \Omega^m, \\ \mathbf{u}^{\pm} = \mathbf{u}^m & \text{sur } S^{\pm}, \\ \sigma_{i3}^{\pm} = \sigma_{i3}^m + \sigma_{33}^m u_{i,3}^m & \text{sur } S^{\pm}, \\ \mathbf{u}^{\pm} = 0 & \text{sur } \Gamma_u^{\pm}, \\ (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu})^{\pm} = \mathbf{f}^d & \text{sur } \Gamma_f^{\pm}. \end{array} \right. \quad (8.18)$$

Les équations (8.18)₅ et (8.18)₆ représentent les équations de **transmission** statique et cinématique au passage de S^+ et S^- . Il apparaît ainsi que les adhérents, au premier ordre, ont un comportement linéaire géométrique tandis que celui de l'adhésif reste non linéaire, par la présence de la déformation normale E_{33} qui reste complète. Les déformations de cisaillement transverse $E_{\alpha 3}$ sont linéarisées tandis que les déformations planes sont, au premier ordre, négligées. L'opérateur "asymptotique" linéarise partiellement le problème de l'élasticité. C'est une situation rencontrée dans l'analyse asymptotique des plaques [CIARLET (1990)]. D'un point de vue mécanique, l'adhésif, plus souple, va subir des déformations plus importantes que les adhérents. Au second ordre, des termes non linéaires apparaissent dans les équations posées sur Ω^{\pm} .

Reportant (8.18)₃ dans (8.18)₄, nous obtenons que les déplacements dans l'adhésif Ω^m sont solutions du système non linéaire d'équations aux dérivées partielles suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[R_{i3\alpha 3}^m u_{\alpha,3}^m + (R_{i333}^m + R_{3333}^m u_{i,3}^m) \left(u_{3,3}^m + \frac{1}{2} u_{k,3}^m u_{k,3}^m \right) \right]_{,3} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \\ u_i^m(x_{\alpha}, \pm \frac{h}{2}) = u_i^{\pm}(x_{\alpha}, \pm \frac{h}{2}), \quad (8.18)_6, \end{array} \right. \quad (8.19)$$

Avant d'exploiter le fait que **les champs linéaires en la variable x_3 sont solutions de ce système**, traitons le cas unidimensionnel.

8.2.3 Le cas unidimensionnel

ETUDE DE L'ÉNERGIE LIMITE

Considérons l'assemblage de trois tiges $T_{\epsilon} = T_{\epsilon}^+ \cup T_{\epsilon}^- \cup T_{\epsilon}^m$ (voir figure 8.2, après dilatation), encadré à une extrémité et soumis à un chargement axial t à l'autre extrémité. La tige reliant les deux tiges extrêmes est de longueur et de rigidité d'ordre ϵ par rapport à celles des deux autres.

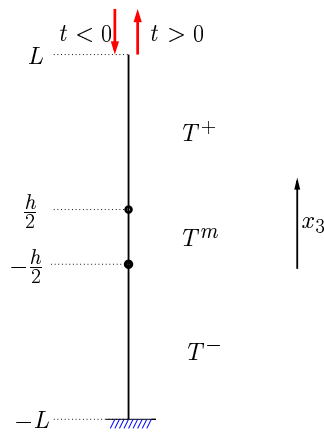


FIG. 8.2: Assemblage de trois tiges (configuration dilatée).

Après dilatation, la tige T_ϵ^m devient T^m et présente une longueur égale à h . Le système (8.18) précédent se réduit alors à (notons $R^+ = R_{3333}^+$, $R^- = R_{3333}^-$ et $R^m = R_{3333}^m$) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sigma_{33}^\pm = R^\pm u_{3,3} & ; \quad \sigma_{33,3}^\pm = 0 & \text{dans } T^\pm, \\ \sigma_{33}^m = R^m (u_{3,3} + \frac{1}{2} u_{3,3}^m u_{3,3}^m) & & \text{dans } T^m, \\ (\sigma_{33}^m + \sigma_{33}^m u_{3,3}^m)_{,3} = 0 & & \text{dans } T^m, \\ u_3^\pm = u_3^m & & \text{en } x_3 = \pm \frac{h}{2}, \\ \sigma_{33}^\pm = \sigma_{33}^m (1 + u_{3,3}^m) & & \text{en } x_3 = \pm \frac{h}{2}, \\ u_3^- = 0 & & \text{en } x_3 = -L, \\ \sigma_{33}^+ = t & & \text{en } x_3 = L. \end{array} \right. \quad (8.20)$$

Dans T^\pm , le déplacement est linéaire : $u_3^\pm(x_3) = \alpha^\pm x_3 + \beta^\pm$. Les conditions aux limites fournissent de plus $\alpha^+ = \frac{t}{R^+}$ et $\beta^- = \alpha^- L$. La relation (8.20)₅ fournit :

$$\boxed{t = \sigma_{33}^\pm = R^m u_{3,3}^m (1 + u_{3,3}^m) (1 + \frac{1}{2} u_{3,3}^m)} \quad (8.21)$$

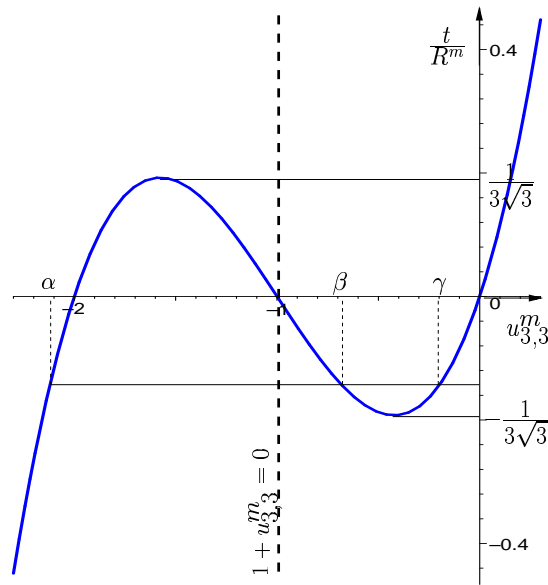
puis, de (8.20)₃, nous en déduisons que $u_{3,3}^m$ est constante par morceaux dans T^m , et $\sigma_{33}^+(\frac{h}{2}) = \sigma_{33}^-(\frac{h}{2})$. L'étude de la fonction réelle $f : x \rightarrow x(1+x)(1+\frac{1}{2}x)$ et la relation (8.21) montrent que trois cas sont à considérer (figure 8.3) :

- si $\frac{t}{R^m} < -\frac{1}{3\sqrt{3}}$, l'équation (8.21) admet une unique solution mais celle-ci ne vérifie pas la condition de préservation de l'orientation ;
- si $-\frac{1}{3\sqrt{3}} \leq \frac{t}{R^m} < 0$, (8.21) admet trois solutions (éventuellement de multiplicité deux) telles que :

$$-1 - \frac{2}{\sqrt{3}} \leq \alpha < -1 < \beta \leq \gamma < 0 \quad (8.22)$$

dont deux seulement, β et γ , vérifient la condition de préservation de l'orientation ;

- si $\frac{t}{R^m} > 0$ correspondant à un chargement de traction, il n'y a qu'une seule solution préservant l'orientation.


 FIG. 8.3: Chemin d'équilibre $(u_{3,3}^m, \frac{t}{R^m})$.

Le second cas conduit à $u_{3,3}^m \in \{\beta, \gamma\}$ presque partout, entraînant que le déplacement dans $T^m =]-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}[$ est linéaire par morceaux. Sur chaque intervalle de longueur non nulle de T^m , le déplacement a pour dérivée l'une des valeurs β ou γ , générant ainsi une infinité de solutions mathématiques possibles. Cependant, nous avons le

THÉORÈME 6 *L'énergie associée au chargement $t \in]-\frac{R^m}{3\sqrt{3}}, 0[$ est minimale pour la solution $u_{3,3}(x_3) = \gamma, \forall x_3 \in T^m$. ■*

Preuve : Calculons l'énergie de la structure soumise au chargement t . Supposons pour simplifier que $R^+ = R^-$. Envisageons le cas d'une solution classique où le déplacement est linéaire dans l'adhésif. Il vient :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t^{1+}(x_3) = \frac{t}{R^+}(x_3 + L) + h[\alpha_t - \frac{t}{R^+}] & x_3 \in T^+, \\ u_t^{1m}(x_3) = \alpha_t(x_3 + \frac{h}{2}) + \frac{t}{R^+}(L - \frac{h}{2}) & x_3 \in T^m, \\ u_t^{1-}(x_3) = \frac{t}{R^+}(x_3 + L) & x_3 \in T^-, \end{array} \right. \quad (8.23)$$

où $\alpha_t = f^{-1}(\frac{t}{R^m})$. L'énergie associée est alors :

$$I^1(\alpha_t) = \frac{1}{2}hR^m(\alpha_t + \frac{1}{2}\alpha_t^2)^2 - t\alpha_t h + \frac{t^2}{R^\pm}(\frac{h}{2} - L). \quad (8.24)$$

Lorsque $t \in]-\frac{R^m}{3\sqrt{3}}, 0[$, il suffit pour montrer que $I^1(\gamma) < I^1(\beta)$ d'étudier la fonction I^1 . La dérivée de I^1 est un polynôme de degré 3 $(I^1)'(p) = h\left[R^m(1+p)(p + \frac{1}{2}p^2) - t\right]$ qui s'annule en α, β et γ . Cette dérivée étant positive entre α et β car positive en -1 : $(I^1)'(-1) = -t > 0$, elle est négative entre β et γ entraînant que I^1 y est décroissante puis le résultat. Envisageons maintenant le cas d'une solution non classique. Nous subdivisons l'intervalle T^m en $n + 1$ intervalles $[\theta_i, \theta_{i+1}]$,

$n \geq 1 \in \mathbb{N}$ arbitraire et $\theta_0 = \frac{h}{2}$ et $\theta_{n+1} = -\frac{h}{2}$. Sur chaque intervalle $[\theta_i, \theta_{i+1}]$, $i = 1, n-1$, $u_{3,3}^m = \alpha_i \in \{\beta, \gamma\}$. L'énergie associée est :

$$I_n^1(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \frac{1}{2} R^m \sum_{i=0}^n (\theta_i - \theta_{i+1}) (\alpha_i + \frac{1}{2} \alpha_i^2)^2 - t \sum_{i=0}^n (\theta_i - \theta_{i+1}) \alpha_i + \frac{t^2}{R^\pm} (\frac{h}{2} - L) \quad (8.25)$$

puis par un argument identique, nous obtenons que $I^1(\gamma) = I_n^1(\gamma, \dots, \gamma) \leq I_n^1(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \leq I_n^1(\beta, \dots, \beta) = I^1(\beta)$. ■

COMPARAISON AVEC LE MODÈLE COMPLET

A titre de première comparaison avec le modèle complet, calculons de la même façon la solution analytique associée au modèle complet sur $T^\pm \cup T^m$. Il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t^+(\epsilon, x_3) = \frac{t\epsilon}{R^+} (x_3 + L) + h \left[\alpha_t^\epsilon - \frac{t\epsilon}{R^+} \right] \quad x_3 \in T^+, \\ u_t^m(\epsilon, x_3) = \alpha_t^\epsilon \left(x_3 + \frac{h}{2} \right) + \frac{t\epsilon}{R^+} \left(L - \frac{h}{2} \right) \quad x_3 \in T^m, \\ u_t^-(\epsilon, x_3) = \frac{t\epsilon}{R^+} (x_3 + L) \quad x_3 \in T^-, \end{array} \right. \quad (8.26)$$

avec $f_\epsilon(\alpha) = (1 + \epsilon^{-1}\alpha)(\alpha + \frac{\epsilon^{-1}}{2}\alpha^2)$, $A^\epsilon = \frac{R^+}{R^m} \left(\frac{t\epsilon}{R^+} + 1 \right) \left(\frac{t\epsilon}{R^+} + \frac{1}{2} \left(\frac{t\epsilon}{R^+} \right)^2 \right)$ et $f_\epsilon(\alpha_t^\epsilon) = A^\epsilon$. Il vient alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t^+(\epsilon, x_3) - \epsilon u_t^{1+}(x_3) = 2h \left[f_\epsilon^{-1}(A^\epsilon) - \epsilon f^{-1}\left(\frac{t}{R^+}\right) \right] \quad x_3 \in T^+, \\ u_t^m(\epsilon, x_3) - \epsilon u_t^{1m} = \left[f_\epsilon^{-1}(A^\epsilon) - \epsilon f^{-1}\left(\frac{t}{R^+}\right) \right] \left(x_3 + \frac{h}{2} \right) \quad x_3 \in T^m, \\ u_t^-(\epsilon, x_3) - \epsilon u_t^{1-}(x_3) = 0 \quad x_3 \in T^- \end{array} \right. \quad (8.27)$$

et :

$$I(\epsilon) = \frac{h}{2} R^m (\alpha_t^\epsilon + \frac{1}{2} (\alpha_t^\epsilon)^2)^2 + \frac{1}{R^+} \left(L - \frac{h}{2} \right) \left(t\epsilon + \frac{1}{2} (t\epsilon)^2 \right)^2 - t\epsilon \left(2 \frac{t\epsilon}{R^+} L + \left(\alpha_t^\epsilon - \frac{t\epsilon}{R^+} \right) h \right). \quad (8.28)$$

Après quelques calculs, nous exprimons que $\alpha_t^\epsilon - \epsilon \alpha_t = K(R^+, R^m, t)\epsilon^2 + O(\epsilon^2)$, $K(R^+, R^m, t) = O(t^2)$, montrant que les écarts sont de l'ordre de ϵ^2 et justifiant ici le développement asymptotique formel (8.11). Nous obtenons de même que $I(\epsilon) - \epsilon^2 I^1 = O(\epsilon^3)$.²

Dans le cas d'un déplacement imposé u_d^ϵ , les résultats sont qualitativement différents. Le système à résoudre est (sur T_ϵ^m directement) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha^+ L + \beta^+ = u_d^\epsilon \quad ; \quad \alpha^- = \alpha^+ \quad ; \quad \beta^- = \alpha^+ L, \\ \alpha^+ \frac{\epsilon h}{2} + \beta^+ = \alpha_3 \frac{\epsilon h}{2} + \beta_3 \quad ; \quad -\alpha^- \frac{\epsilon h}{2} + \beta^- = -\alpha_3 \frac{\epsilon h}{2} + \beta_3, \\ \alpha^+ R^{\epsilon^\pm} = R^{\epsilon m} \alpha_3 \left(1 + \alpha_3 \right) \left(1 + \frac{1}{2} \alpha_3 \right). \end{array} \right.$$

² $I^1 = \frac{h}{2} R^m (\alpha_t + \frac{1}{2} \alpha_t^2)^2 + \left(L - \frac{h}{2} \right) \frac{t^2}{R^+} - t \left(2 \frac{t}{R^+} L + \left(\alpha_t - \frac{t}{R^+} \right) h \right)$

Ecrivant $\frac{R^{\epsilon\pm}}{R^{\epsilon m}} = \frac{1}{\epsilon}$, $\alpha_3 = u_{3,3}^{m\epsilon}$ est alors solution de l'équation :

$$f(\alpha_3) = (2L - \epsilon h)\alpha_3^3 + (-3\epsilon h + 6L)\alpha_3^2 + (-2\epsilon h + 4L + 2h)\alpha_3 = \frac{2u_d^\epsilon}{\epsilon}. \quad (8.29)$$

Si la fonction f est monotone alors α_3 est unique et la solution également. En revanche, si f n'est pas monotone, ni α_3 , ni α^+ et β^+ ne sont uniques. f est monotone si elle n'admet pas de point critique (condition suffisante), soit $(2L - 2h - \epsilon h)(2L - \epsilon h) < 0$. Il en résulte que si les deux quantités h et L sont de même ordre, alors le problème précédent admet une solution unique. Cet exemple illustre les éventuelles différences qualitatives entre un chargement en force et un chargement en déplacement.

REMARQUE(S) 26 *Cet exemple met en lumière l'hypothèse (8.9) ; la quantité α_3^ϵ , qui représente la déformation de la tige T_ϵ^m est solution de l'équation $\alpha_3^\epsilon(1 + \alpha_3^\epsilon)(1 + \frac{1}{2}\alpha_3^\epsilon) = \frac{1}{R^\pm} \frac{t^\epsilon}{\epsilon}$ s'exprime ainsi, dans le cas $t^\epsilon > 0$ ³ :*

$$\alpha_3^\epsilon = \frac{54^{\frac{1}{3}}}{3} (R^\pm)^{-\frac{1}{3}} \left(\frac{t^\epsilon}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{3}} - 1 + \frac{1}{54^{\frac{1}{3}}} (R^\pm)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\epsilon}{t^\epsilon}\right)^{\frac{1}{3}} + O\left(\left(\frac{\epsilon}{t^\epsilon}\right)^{\frac{5}{3}}\right) \quad (8.30)$$

montrant que si t^ϵ n'est pas de l'ordre de ϵ , alors la déformation de l'adhésif ne peut être faible et est hors du domaine de validité de la densité de Saint Venant-Kirchhoff. Dans le cas linéaire, cette hypothèse, bien que non faite a priori est pour la même raison sous-jacente puisqu'il vient :

$$\alpha_3^\epsilon = \frac{1}{R^\pm} \frac{t^\epsilon}{\epsilon}. \quad (8.31)$$

En résumé, l'hypothèse (8.9) ne constitue pas une hypothèse mécanique supplémentaire. Elle est déjà nécessaire afin que les déformations induites par de tels efforts restent dans le domaine de validité du modèle de Saint Venant-Kirchhoff⁴. ■

8.2.4 Etude du problème limite \mathcal{P}^1

1. Nous étudions dans ce paragraphe le problème \mathcal{P}^1 , ce qui, rappelons-le, revient à étudier les points critiques de I_{SV}^1 dans V^1 .

REMARQUE(S) 27 *La fonctionnelle I_{SV}^1 est continue pour la topologie forte de V^1 . Cependant, elle n'est pas convexe, de sorte que la continuité forte n'implique pas la semi-continuité inférieure pour la topologie faible.* ■

Afin de montrer l'existence d'au moins une solution du problème \mathcal{P}^1 , nous introduisons la fonctionnelle suivante :

$$\begin{aligned} \hat{I}_{SV}^1(\mathbf{v}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega^\pm} R_{ijkl}^\pm v_{k,l}^\pm v_{i,j}^\pm d\Omega \\ &+ \frac{1}{2h} \int_S \left(R_{\alpha_3\beta_3}^m [v_\alpha][v_\beta] + \frac{R_{3333}^m}{4h^2} \left([v_\alpha][v_\alpha] + ([v_3] + h)^2 - h^2 \right)^2 \right) dS - \int_{\Gamma_f^\pm} \mathbf{f}^d \cdot \mathbf{v}^\pm d\Gamma \end{aligned}$$

³même résultat qualitatif dans le cas $t^\epsilon < 0$.

⁴La conclusion est identique dans le cas du déplacement imposé ; nous obtenons respectivement dans le cas non linéaire et linéaire les solutions suivantes :

$$\alpha_3^\epsilon = \left(\frac{u_d^\epsilon}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{3}} L^{-\frac{1}{3}} - 1 + \frac{1}{3} \frac{L-h}{L^{\frac{2}{3}}} \left(\frac{\epsilon}{u_d^\epsilon}\right)^{\frac{1}{3}} + O(\epsilon^{\frac{2}{3}}) \quad ; \quad \alpha_3^\epsilon = \frac{u_d^\epsilon}{\epsilon(-\epsilon h + 2L + h)}. \quad (8.32)$$

où :

$$[\mathbf{v}](x_1, x_2) \equiv \mathbf{v}^+(x_1, x_2, \frac{h}{2}) - \mathbf{v}^-(x_1, x_2, -\frac{h}{2}) \quad (8.33)$$

défini sur S représente le **saut** du champ des déplacements à travers Ω^m . \hat{I}_{SV}^1 est définie sur :

$$\hat{V}^1 = \{\mathbf{v}^+ \in (H^1(\Omega^+))^3, \mathbf{v}^- \in (H^1(\Omega^-))^3; \mathbf{v}^\pm = 0 \text{ sur } \Gamma_u^\pm\} \quad (8.34)$$

muni de la norme $\|\mathbf{v}\|_{\hat{V}^1}$ telle que $\|\mathbf{v}\|_{\hat{V}^1}^2 = \|\mathbf{v}^+\|_{(H^1(\Omega^+))^3}^2 + \|\mathbf{v}^-\|_{(H^1(\Omega^-))^3}^2$.

PROPOSITION 1 Si $\hat{\mathbf{u}} \in \hat{V}^1$ est un point critique de \hat{I}_{SV}^1 alors

$$\mathbf{u} = \begin{cases} \hat{\mathbf{u}} & \text{dans } \Omega^\pm, \\ \frac{\hat{\mathbf{u}}^+}{h}(\frac{h}{2} + x_3) + \frac{\hat{\mathbf{u}}^-}{h}(\frac{h}{2} - x_3) & \text{dans } \Omega^m, \end{cases} \quad (8.35)$$

est solution du problème \mathcal{P}^1 . ■

Preuve : Grâce à l'injection continue $(H^{\frac{1}{2}}(S))^3 \subset (L^4(S))^3$ ⁵, nous vérifions que \mathbf{u} défini par (8.35) est un élément de V^1 . De plus, si $\hat{\mathbf{u}}$ est un point critique de \hat{I}_{SV}^1 , alors pour tout $\hat{\mathbf{w}} \in \hat{V}^1$:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^\pm} R_{ijkl}^\pm \hat{u}_{k,l} w_{i,j} d\Omega \\ & + \frac{1}{h} \int_S \frac{R_{3333}^m}{2h^2} \left([\hat{u}_1]^2 + [\hat{u}_2]^2 + ([\hat{u}_3] + h)^2 - h^2 \right) \\ & \quad \left([\hat{u}_1][\hat{w}_1] + [\hat{u}_2][\hat{w}_2] + ([\hat{u}_3] + h)[\hat{w}_3] \right) dS \\ & + \frac{1}{h} \int_S R_{\alpha 3 \beta 3}^m [\hat{u}_\alpha][\hat{w}_\beta] dS = \int_{\Gamma_f^\pm} \mathbf{f}^d \cdot \hat{\mathbf{w}} d\Gamma. \end{aligned} \quad (8.36)$$

Utilisant (8.35), nous avons pour tout $\mathbf{w} \in V^1$:

$$\begin{aligned} DI_{SV}^1(\mathbf{u})(\mathbf{w}) &= \int_{\Omega^\pm} R_{ijkl}^\pm \hat{u}_{k,l} \hat{w}_{i,j} d\Omega \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega^m} R_{3333}^m \left(\frac{1}{h^2} ([\hat{u}_1]^2 + [\hat{u}_2]^2) + \left(\frac{[\hat{u}_3]}{h} + 1 \right)^2 - 1 \right) \\ & \quad \left(\frac{[\hat{u}_1]}{h} w_{1,3} + \frac{[\hat{u}_2]}{h} w_{2,3} + \left(\frac{[\hat{u}_3]}{h} + 1 \right) w_{3,3} \right) d\Omega \\ & + \int_{\Omega^m} R_{\alpha 3 \beta 3}^m \frac{[\hat{u}_\alpha]}{h} w_{\beta,3} d\Omega - \int_{\Gamma_f^\pm} \mathbf{f}^d \cdot \mathbf{w} d\Gamma. \end{aligned} \quad (8.37)$$

Enfin, puisque $\mathbf{w} \in V^1$ implique $\hat{\mathbf{w}} \equiv \mathbf{w}|_{\Omega^+ \cup \Omega^-} \in \hat{V}^1$, nous en déduisons, en identifiant S^+ et S^- avec S , et grâce à (8.36) et au théorème de Fubini que $DI_{SV}^1(\mathbf{u})(\mathbf{w}) = 0$ pour tout $\mathbf{w} \in V^1$. ■

2.

⁵Rappelons, S étant de dimension deux, que l'injection $H^{\frac{1}{2}}(S)$ dans $L^p(S)$ est continue pour $p \leq 4$ et compacte pour $p < 4$.

THÉORÈME 7 *La fonctionnelle \hat{I}_{SV}^1 définie sur \hat{V}^1 admet au moins un point critique.* ■

Preuve : Pour obtenir le résultat, nous montrons que \hat{I}_{SV}^1 est bornée inférieurement sur \hat{V}^1 et atteint son minimum. En vertu de l'implication :

$$R_{ijkl}^m t_{ij} t_{kl} \geq c_0 t_{nm} t_{nm} \quad \forall (t_{ij}) \text{ tq } t_{ij} = t_{ji} \implies R_{\alpha 3 \beta 3}^m t_{\alpha 3} t_{\beta 3} \geq c_0 t_{\gamma 3} t_{\gamma 3} \quad (8.38)$$

et de l'inégalité de Korn, il existe deux réels positifs strictement α et β tels que :

$$\hat{I}_{SV}^1(\mathbf{v}) \geq \alpha \|\mathbf{v}\|_{\hat{V}^1}^2 - \beta \|\mathbf{f}^d\|_{(L^2(\Gamma_f^\pm))^3} \|\mathbf{v}\|_{\hat{V}^1}, \quad (8.39)$$

de sorte qu'il suffit de montrer la semi-continuité inférieure pour la topologie faible. Alors, de la relation :

$$\begin{aligned} & \left([v_1]^2 + [v_2]^2 + [v_3 + h]^2 - h^2 \right)^2 = \\ & \left([v_1]^2 + [v_2]^2 + [v_3 + h]^2 \right)^2 + h^4 - 2h^2 \left([v_1]^2 + [v_2]^2 + [v_3 + h]^2 \right), \end{aligned} \quad (8.40)$$

\hat{I}_{SV}^1 apparaît comme la somme de termes convexes et continus pour la topologie forte et du terme supplémentaire $-\frac{1}{4h} \int_S R_{3333}^m \left([v_1]^2 + [v_2]^2 + [v_3 + h]^2 \right) dS$. La compacité de l'injection $H^{\frac{1}{2}}(S) \subset L^2(S)$ implique que ce terme est faiblement continu. Enfin, puisqu'une fonction convexe et continue est également faiblement semi-continue inférieurement, \hat{I}_{SV}^1 est semi-continue inférieurement. Le minimum est alors atteint. ■

3. Identifiant S^+ et S^- avec S , les conditions de transmission sur S deviennent, pour tout point critique de \hat{I}_{SV}^1 :

$$\begin{cases} \sigma_{\alpha 3}^+ = \sigma_{\alpha 3}^- = \frac{R_{\alpha 3 \beta 3}^m}{h} [u_\beta] + \frac{R_{3333}^m}{2h^3} \left([u_1]^2 + [u_2]^2 + ([u_3] + h)^2 - h^2 \right) [u_\alpha] & \alpha = 1, 2, \\ \sigma_{33}^+ = \sigma_{33}^- = \frac{R_{3333}^m}{2h^3} \left([u_1]^2 + [u_2]^2 + ([u_3] + h)^2 - h^2 \right) ([u_3] + h). \end{cases} \quad (8.41)$$

Il résulte alors de (8.35) que les points critiques de \hat{I}_{SV}^1 génèrent des déplacements linéaires selon x_3 dans Ω^m et des contraintes constantes. Le système précédent suggère par ailleurs, que pour certains choix de \mathbf{f}^d , la fonctionnelle \hat{I}_{SV}^1 pourrait avoir plusieurs points critiques. Pour $\mathbf{f}^d \equiv \mathbf{0}$, $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$ est l'unique minimum. De plus, nous avons :

$$\begin{aligned} D^2 \hat{I}_{SV}^1(\mathbf{v})(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{w}}) &= \int_{\Omega^\pm} R_{ijkl}^\pm w_{k,i} \hat{w}_{i,j} d\Omega + \frac{1}{h} \int_S R_{\alpha 3 \beta 3}^m [w_\alpha] [\hat{w}_\beta] dS \\ &+ \frac{1}{2h^3} \int_S R_{3333}^m \left([v_1]^2 + [v_2]^2 + ([v_3] + h)^2 - h^2 \right) \\ &\quad \left([w_1] [\hat{w}_1] + [w_2] [\hat{w}_2] + [w_3] [\hat{w}_3] \right) dS \\ &+ \frac{1}{h^3} \int_S R_{3333}^m \left([v_1] [\hat{w}_1] + [v_2] [\hat{w}_2] + ([v_3] + h) [\hat{w}_3] \right) \\ &\quad \left([v_1] [w_1] + [v_2] [w_2] + ([v_3] + h) [w_3] \right) dS \end{aligned} \quad (8.43)$$

menant à :

$$D^2 \hat{I}_{SV}^1(\mathbf{0})(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{w}}) = \int_{\Omega^\pm} R_{ijkl}^\pm w_{k,l} \hat{w}_{i,j} d\Omega + \frac{1}{h} \int_S R_{\alpha 3 \beta 3}^m [w_\alpha] [\hat{w}_\beta] dS + \frac{1}{h} \int_S R_{3333}^m [w_3] [\hat{w}_3] dS \quad (8.44)$$

qui est un isomorphisme défini positif. Cela implique que \hat{I}_{SV}^1 est strictement convexe en $\mathbf{0}$ et donc, pour $\|\mathbf{f}^d\|_{(L^2(\Gamma_f^\pm))^3}$ suffisamment petit, la fonctionnelle \hat{I}_{SV}^1 possède un unique minimum absolu. Des arguments similaires permettent de prouver la

PROPOSITION 2 *Il existe $\delta > 0$ tel que pour $\|\mathbf{f}^d\|_{(L^2(\Gamma_f^\pm))^3} < \delta$, le problème \mathcal{P}^1 a une unique solution, qui est le minimum absolu de I_{SV}^1 sur V^1 . ■*

Dans l'optique d'étudier la non-unicité des solutions de \mathcal{P}^1 , considérons l'opérateur $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$; $(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (G_1, G_2, G_3)$ défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} G_1(x_1, x_2, x_3) = R_{1313}^m x_1 + R_{1323}^m x_2 + \frac{R_{3333}^m}{2} x_1 \left(x_1^2 + x_2^2 + (x_3 + 1)^2 - 1 \right), \\ G_2(x_1, x_2, x_3) = R_{2313}^m x_1 + R_{2323}^m x_2 + \frac{R_{3333}^m}{2} x_2 \left(x_1^2 + x_2^2 + (x_3 + 1)^2 - 1 \right), \\ G_3(x_1, x_2, x_3) = \frac{R_{3333}^m}{2} (1 + x_3) \left(x_1^2 + x_2^2 + (x_3 + 1)^2 - 1 \right). \end{array} \right. \quad (8.45)$$

Alors, les équations (8.18)₅ et (8.18)₆ s'écrivent simplement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}^\pm = \mathbf{u}^m \text{ sur } S^\pm, \\ G(u_{,3}^m) = \boldsymbol{\sigma}^+ \cdot \mathbf{e}_3 = \boldsymbol{\sigma}^- \cdot \mathbf{e}_3 \text{ dans } \Omega^m. \end{array} \right. \quad (8.46)$$

Si, \mathbf{f}^d étant fixé, ce système détermine $u_{,3}^m$ de façon unique, alors \mathbf{u}^m est linéaire en la variable x_3 dans Ω^m et est donc complètement déterminé par $[u^m]$. Cette solution correspond à celle obtenue par la proposition 1. Si, au contraire, le système (8.46) possède plusieurs solutions, alors, à l'image du cas unidimensionnel du paragraphe précédent, nous pouvons prendre \mathbf{u}^m linéaire par morceaux en la variable x_3 sur un nombre arbitraire dénombrable de sous-intervalles de $]-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}[$. Ces solutions ne correspondent pas à des points critiques de \hat{I}_{SV}^1 . Un exemple de cette situation est donné par le cas $\boldsymbol{\sigma}^+ \cdot \mathbf{e}_3 = 0$. Dans ce cas, le système (8.46) admet les solutions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{\alpha,3}^m = 0; \quad u_{3,3}^m = \{-2, -1, 0\}, \\ (R_{1313}^m + Z)(R_{2323}^m + Z) = (R_{1323}^m)^2; \quad u_{3,3}^m = -1 \quad [Z \equiv \frac{R_{3333}^m}{2} ((u_{1,3}^m)^2 + (u_{2,3}^m)^2 - 1)]. \end{array} \right. \quad (8.47)$$

La dernière équation admet des solutions réelles en vertu de (8.38). Si $\mathbf{f}^d \equiv \mathbf{0}$, la seule solution est $u_{i,3}^m = 0$ qui correspond à la solution de la proposition 1, de sorte que I_{SV}^1 possède un minimum strict. De plus, par le calcul de la dérivée seconde, nous pouvons montrer que les autres solutions ne correspondent pas à un minimum strict de I_{SV}^1 .

REMARQUE(S) 28 – *A l'image du cas de l'élasticité linéaire ([KLARBRING (1991)], [DESTUYNDER et al. (1992)], [GEYMONAT et al. (1999)]), le joint disparaît d'un point de vue géométrique et est remplacé par une énergie d'adhésion définie sur la surface moyenne S .*

- Le modèle obtenu diffère du modèle de [EDLUND & KLARBRING (1992)] rappelé au chapitre précédent. L’analyse asymptotique conduit ici à une déformation $E_{\alpha 3}$ plus simple, ne faisant pas intervenir les déformations de la surface moyenne du joint. Précisément, les termes $\bar{u}_{3,\alpha} + \bar{u}_{k,\alpha} t_k$ dans (7.3) sont ici négligés. De plus, les termes non linéaires sont négligés dans les adhérents.
- Notons que les relations (8.18)₃ entraînent la nullité de la contrainte σ_{12}^m . Par ailleurs, les contraintes ne vérifient pas sur le bord latéral la condition $\boldsymbol{\sigma}^m \cdot \boldsymbol{\nu} = 0$: $\sigma_{ij}^m \cdot \nu_j = (\sigma_{11}^m \nu_1 + \sigma_{12}^m \nu_2, \sigma_{12}^m \nu_1 + \sigma_{22}^m \nu_2) = (\sigma_{11}^m \nu_1, \sigma_{22}^m \nu_2) \neq 0$. Le modèle simplifié fait ainsi apparaître un phénomène de couche limite près du bord latéral de Ω^m . Cependant, cette couche limite n’affecte pas l’énergie $\Gamma^1(\mathbf{u}^1)$ de la structure et est donc sans incidence sur le critère énergétique de rupture du prochain chapitre. D’autre part, contrairement au cas linéaire, les équations définies sur cette couche sont des équations couplées entre le terme correcteur et les termes corrigés (\mathbf{u}^0), rendant hors de portée une résolution “analytique” tel que cela a été fait dans ([DESTUYNDER (1986)], chapitre 6). ■

8.3 Densité de Ciarlet-Geymonat

Dans le paragraphe précédent, le modèle de joint issu de l’élasticité linéaire a été étendu au cas du modèle de l’élasticité associé à la densité de Saint Venant-Kirchhoff. Par ailleurs, nous avons montré l’existence d’au moins une solution du modèle limite. Ce modèle n’est valable que pour de faibles déformations, hypothèse sujette à caution ici, dans la mesure où l’adhésif est supposé plus souple que les adhérents. Nous allons étendre ce modèle à des déformations plus importantes, reprenant l’analyse précédente en remplaçant la densité de Saint Venant-Kirchhoff par la densité de Ciarlet-Geymonat rappelée au chapitre 1.

Nous nous plaçons maintenant dans le cas isotrope. Les coefficients de Lamé sont notés $(\lambda^\epsilon, \mu^\epsilon)$. L’hypothèse sur les rigidités se traduit par $(\lambda^\epsilon, \mu^\epsilon) = (\lambda^\pm, \mu^\pm)$ sur Ω^\pm et $(\lambda^\epsilon, \mu^\epsilon) = \epsilon(\lambda^m, \mu^m)$ sur Ω_ϵ^m , les coefficients nouvellement introduits étant du même ordre et indépendants de ϵ . L’énergie de la structure Ω_ϵ , soumise à des conditions de chargement et d’encastrement de même nature que dans les paragraphes précédents est alors :

$$I_{CG}^\epsilon(\mathbf{x}^\epsilon, \mathbf{E}(\mathbf{v})) = \int_{\Omega^\epsilon} \check{W}_{CG}^\epsilon(\mathbf{E}(\mathbf{v})) d\mathbf{x}^\epsilon - L^\epsilon(\mathbf{u}^\epsilon)$$

de densité :

$$\check{W}_{CG}^\epsilon(\mathbf{E}) = \gamma^\epsilon \text{Tr} \mathbf{E} + \frac{\lambda^\epsilon}{2} \left[(\text{Tr} \mathbf{E})^2 - \text{Tr} \mathbf{E}^2 \right] + 8c^\epsilon \det \mathbf{E} - \frac{\gamma^\epsilon}{2} \log \det(\mathbf{I}_3 + 2\mathbf{E}),$$

$\gamma^\epsilon = \frac{\lambda^\epsilon}{2} + \mu^\epsilon, c^\epsilon > 0$. I_{CG}^ϵ est définie sur l’espace :

$$V(\Omega^\epsilon) = \{ \mathbf{v} \in (W^{1,6}(\Omega^\epsilon))^3; \det(\mathbf{I}_3 + \nabla \mathbf{v}) > 0, \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_u^\pm \} \quad (8.48)$$

qui n’est plus un espace vectoriel, en raison de la “*contrainte-inégalité*”, qu’il est nécessaire ici de prendre en compte afin que le terme $\log \det(\mathbf{F})$ soit défini. Il en résulte que les états d’équilibre ne sont plus caractérisés par une équation variationnelle. Nous contournerons cette difficulté en développant directement l’énergie en une série de puissances du paramètre ϵ . Rappelons que

la relation entre les contraintes, définies comme la dérivée de la densité d'énergie par rapport à la transformation \mathbf{E} , et les déformations, est non linéaire. Pour cette raison, l'opérateur associé ne s'inverse pas explicitement de sorte que l'on ne peut pas obtenir d'équation variationnelle associée à la relation de comportement, analogue à celle du cas précédent. Ce point constitue un argument supplémentaire pour travailler directement sur l'énergie, fonction du champ des déplacements uniquement.

REMARQUE(S) 29 *La détermination numérique des points critiques de I_{CG}^ϵ est effectuée dans ([LE TALLEC & VIDRASCU (1984)], [LIAO (1990)]) utilisant une technique de lagrangien augmenté.* ■

8.3.1 Développement de l'énergie I_{CG}^ϵ

La démarche est similaire à celle du cas précédent. L'opérateur π^ϵ transforme l'ouvert Ω_ϵ en l'ouvert Ω faisant apparaître la dépendance du problème en le paramètre ϵ . Puis, nous développons formellement le champ des déplacements selon la relation (8.11) et le champ des efforts extérieurs selon (8.9), en prenant à nouveau $q = p = 1$. Cela fournit les développements en série de ϵ des trois invariants de \mathbf{F} . Nous obtenons dans l'adhésif Ω_ϵ^m les résultats suivants :

$$\begin{aligned}
E_{\alpha\beta}(\mathbf{u}^\epsilon) &= O(\epsilon) \quad ; \quad E_{\alpha 3}(\mathbf{u}^\epsilon) = \frac{1}{2}u_{\alpha,3}^1 + O(\epsilon) , \\
E_{33}(\mathbf{u}^\epsilon) &= u_{3,3}^1 + \frac{1}{2}u_{k,3}^1 u_{k,3}^1 + O(\epsilon) , \\
\det(\mathbf{F}^T \mathbf{F}) &= (1 + u_{3,3}^1)^2 + O(\epsilon) \implies (\det(\mathbf{F}^T \mathbf{F}))^{-1} = (1 + u_{3,3}^1)^{-2} + O(\epsilon) , \\
Tr \mathbf{E}(\mathbf{u}(\epsilon, \mathbf{x})) &= u_{3,3}^1 + \frac{1}{2}u_{k,3}^1 u_{k,3}^1 + O(\epsilon) , \\
Tr \mathbf{E}(\mathbf{u}(\epsilon, \mathbf{x})) E_{\alpha\beta}(\mathbf{u}(\epsilon, \mathbf{x})) &= O(\epsilon) , \\
Tr \mathbf{E}(\mathbf{u}(\epsilon, \mathbf{x})) E_{\alpha 3}(\mathbf{u}(\epsilon, \mathbf{x})) &= \frac{1}{2}u_{\alpha,3}^1 \left(u_{3,3}^1 + \frac{1}{2}u_{k,3}^1 u_{k,3}^1 \right) + O(\epsilon) , \\
Tr \mathbf{E}(\mathbf{u}(\epsilon, \mathbf{x})) E_{33}(\mathbf{u}(\epsilon, \mathbf{x})) &= \left(u_{3,3}^1 + \frac{1}{2}u_{k,3}^1 u_{k,3}^1 \right)^2 + O(\epsilon) , \\
E_{\alpha\beta}^2(\mathbf{u}(\epsilon, \mathbf{x})) &= \frac{1}{4}u_{\alpha,3}^1 u_{\beta,3}^1 + O(\epsilon) , \\
E_{\alpha 3}^2(\mathbf{u}(\epsilon, \mathbf{x})) &= \frac{1}{2}u_{\alpha,3}^1 \left(u_{3,3}^1 + \frac{1}{2}u_{k,3}^1 u_{k,3}^1 \right) + O(\epsilon) , \\
E_{33}^2(\mathbf{u}(\epsilon, \mathbf{x})) &= \frac{1}{4}u_{\gamma,3}^1 u_{\gamma,3}^1 + \left(u_{3,3}^1 + \frac{1}{2}u_{k,3}^1 u_{k,3}^1 \right)^2 + O(\epsilon) , \\
Tr(\mathbf{E}^2)(\mathbf{u}(\epsilon, \mathbf{x})) &= \frac{1}{2}u_{\gamma,3}^1 u_{\gamma,3}^1 + \left(u_{3,3}^1 + \frac{1}{2}u_{k,3}^1 u_{k,3}^1 \right)^2 + O(\epsilon) , \\
\det \mathbf{E} &= O(\epsilon) .
\end{aligned}$$

La densité d'énergie \check{W}_{CG}^ϵ s'écrit alors :

$$\check{W}_{CG}(\epsilon, \mathbf{E}(\mathbf{u}^\epsilon)) = \epsilon \mu^m u_{\alpha,3}^1 u_{\alpha,3}^1 + \epsilon \gamma^m \left(u_{3,3}^1 + \frac{1}{2} (u_{3,3}^1)^2 - \log(1 + u_{3,3}^1) \right) + O(\epsilon^2) \quad \text{dans } \Omega^m. \quad (8.49)$$

Dans les adhérents Ω^\pm , les relations :

$$E_{ij}(\mathbf{u}^\epsilon) = \epsilon e_{ij}(\mathbf{u}^1) + O(\epsilon^2) \quad (8.50)$$

fournissent directement :

$$\check{W}_{CG}(\epsilon, \mathbf{E}(\mathbf{u}^\epsilon)) = \epsilon^2 \frac{\lambda^\pm}{2} (\text{Tre}(\mathbf{u}^1))^2 + \epsilon^2 \mu^\pm \text{Tre}(\mathbf{u}^1)^2 + O(\epsilon^3) \quad \text{dans } \Omega^\pm. \quad (8.51)$$

Finalement, l'énergie de la structure se développe selon :

$$I_{CG}(\epsilon, \mathbf{u}^\epsilon) = \epsilon^2 I_{CG}^1(\mathbf{u}^1) + O(\epsilon^3) \quad (8.52)$$

avec

$$I_{CG}^1(\mathbf{v}) = \int_{\Omega^\pm} \check{W}_{SV}(\mathbf{e}(\mathbf{v}^\pm)) d\Omega^\pm - L^1(\mathbf{v}^\pm) + \int_{\Omega^m} \frac{\mu^m}{2} v_{\alpha,3}^m v_{\alpha,3}^m + \gamma^m \left(v_{3,3}^m + \frac{1}{2} (v_{3,3}^m)^2 - \log(1 + v_{3,3}^m) \right) d\Omega^m.$$

I_{CG}^1 est définie sur :

$$U^1 = \left\{ \mathbf{v} = (\mathbf{v}^-, \mathbf{v}^m, \mathbf{v}^+); \mathbf{v} \in (L^2(\Omega))^3, \mathbf{v}^- \in (H^1(\Omega^-))^3, \mathbf{v}^+ \in (H^1(\Omega^+))^3, \right. \\ \left. v_{k,3}^m \in L^2(\Omega^m), (1 + v_{3,3}^m) > 0 \text{ p.p. in } \Omega^m, \log(1 + v_{3,3}^m) \in L^1(\Omega^m), \right. \\ \left. \mathbf{v}^+|_{S^+} = \mathbf{v}^m|_{S^+}, \mathbf{v}^-|_{S^-} = \mathbf{v}^m|_{S^-}, \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_u^\pm \right\}. \quad (8.53)$$

De façon similaire au cas précédent, l'opérateur asymptotique a un effet linéarisant. Il transforme dans les adhérents la densité de Ciarlet-Geymonat en la densité de Hooke. Dans l'adhésif, la linéarisation est partielle, la densité conservant des termes non linéaires en $u_{3,3}^m$. Notons enfin que la condition de préservation de l'orientation (8.17), indépendante de la densité choisie, est inchangée.

8.3.2 Etude de I_{CG}^1

En vertu de la convexité de la fonction $x \rightarrow x - \log(1 + x)$, l'ensemble U^1 est un ensemble non vide ($\mathbf{0} \in U^1$), convexe de l'espace de Hilbert :

$$W^1 = \left\{ \mathbf{v} = (\mathbf{v}^-, \mathbf{v}^m, \mathbf{v}^+); \mathbf{v} \in (L^2(\Omega))^3, \mathbf{v}^- \in (H^1(\Omega^-))^3, \mathbf{v}^+ \in (H^1(\Omega^+))^3, \right. \\ \left. v_{k,3}^m \in L^2(\Omega^m), \mathbf{v}^+|_{S^+} = \mathbf{v}^m|_{S^+}, \mathbf{v}^-|_{S^-} = \mathbf{v}^m|_{S^-}, \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_u^\pm \right\} \quad (8.54)$$

muni de la norme naturelle $\|\mathbf{v}\|_{W^1}$ telle que :

$$\|\mathbf{v}\|_{W^1}^2 = \|\mathbf{v}^+\|_{(H^1(\Omega^+))^3}^2 + \|\mathbf{v}^-\|_{(H^1(\Omega^-))^3}^2 + \|\mathbf{v}^m\|_{(L^2(\Omega^m))^3}^2 + \|\mathbf{v}^m\|_{(L^2(\Omega^m))^3}^2. \quad (8.55)$$

Suivant l'approche de J. Ball [BALL (1977)], nous étendons le domaine de définition de I_{CG}^1 à W^1 . Pour cela, nous introduisons la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \equiv \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$:

$$g(\zeta) = \begin{cases} (\lambda^m + 2\mu^m) \left(\frac{1}{2}\zeta^2 + \zeta - \log(1 + \zeta) \right), & \text{si } 1 + \zeta > 0 \\ +\infty & \text{si } 1 + \zeta \leq 0. \end{cases} \quad (8.56)$$

REMARQUE(S) 30 g est une fonction de Carathéodory. ■

LEMME 2 La fonctionnelle

$$\mathbf{v} \rightarrow F(\mathbf{v}) = \int_{\Omega^m} g(\mathbf{v}(\mathbf{x})) d\mathbf{x} \quad (8.57)$$

est convexe, positive faiblement semi-continue inférieurement de $L^2(\Omega^m)$ dans $\overline{\mathbb{R}}$. ■

Preuve : Puisque $g(\zeta) \geq 0$, la fonctionnelle F est positive semi-continue inférieurement de $L^2(\Omega^m)$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ [EKELAND & TEMAN (1974)]. De plus, $\zeta \rightarrow g(\zeta)$ est convexe et donc $\mathbf{v} \rightarrow F(\mathbf{v})$ également. ■

THÉORÈME 8 Il existe au moins un élément $\mathbf{u} \in U^1$ tel que $I_{CG}^1(\mathbf{u}) = \text{Inf}_{\mathbf{v} \in U^1} I_{CG}^1(\mathbf{v})$. ■

Preuve : De $\mathbf{0} \in U^1$ et $I_{CG}^1(\mathbf{0}) = 0$, nous déduisons que :

$$\text{Inf}_{\mathbf{v} \in U^1} I_{CG}^1(\mathbf{v}) \leq 0. \quad (8.58)$$

Nous prolongeons alors la fonctionnelle I_{CG}^1 à l'espace W^1 en définissant :

$$\begin{aligned} \overline{I}_{CG}^1(\mathbf{v}) &= \int_{\Omega^\pm} \left(\frac{\lambda^\pm}{2} (e_{kk}(\mathbf{v}^\pm))^2 + \mu^\pm e_{ij}(\mathbf{v}^\pm) e_{ij}(\mathbf{v}^\pm) \right) d\Omega + \frac{1}{2} F(v_{3,3}^m) \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega^m} \mu^m ((v_{1,3}^m)^2 + (v_{2,3}^m)^2) d\Omega - \int_{\Gamma_f^\pm} \mathbf{f}^d \cdot \mathbf{v}^\pm d\Gamma. \end{aligned} \quad (8.59)$$

Nous remarquons que $\overline{I}_{CG}^1(\mathbf{v}) < \infty \Rightarrow \mathbf{v} \in U^1$. En effet, si $\overline{I}_{CG}^1(\mathbf{v}) < \infty$, alors $F(v_{3,3}^m) = \int_{\Omega^m} g(v_{3,3}^m(\mathbf{x})) d\mathbf{x} < \infty$ entraînant $1 + v_{3,3}^m > 0$ presque partout dans Ω^m . De plus,

$$\log(1 + v_{3,3}^m) = \frac{1}{2} (v_{3,3}^m)^2 + v_{3,3}^m - \frac{1}{\lambda^m + 2\mu^m} g(v_{3,3}^m(\mathbf{x})) \in L^1(\Omega^m) \quad (8.60)$$

grâce à $v_{3,3}^m \in L^2(\Omega^m)$, $g(v_{3,3}^m) \in L^1(\Omega^m)$ et $\frac{1}{\lambda^m + 2\mu^m} \in L^\infty(\Omega^m)$. Nous en déduisons alors que :

$$\overline{I}_{CG}^1(\mathbf{v}) = I_{CG}^1(\mathbf{v}) < \infty \iff \mathbf{v} \in U^1. \quad (8.61)$$

Selon le lemme 2, \overline{I}_{CG}^1 est convexe, faiblement semi-continue inférieurement de W^1 dans $\overline{\mathbb{R}}$. Alors, puisque $g(\zeta) \geq \frac{1}{2}(\lambda^m + 2\mu^m)\zeta^2$, pour $\zeta > -1$, il en résulte, comme dans [GEYMONAT *et al.* (1999)], qu'il existe deux réels positifs strictement α et β tels que :

$$\overline{I}_{CG}^1(\mathbf{v}) \geq \alpha \|\mathbf{v}\|_{W^1}^2 - \beta \|\mathbf{f}^d\|_{(L^2(\Gamma_f^\pm))^3} \|\mathbf{v}^\pm\|_{(H^1(\Omega^\pm))^3}. \quad (8.62)$$

Ainsi, il existe $\mathbf{u} \in W^1$ tel que $\bar{I}_{CG}^1(\mathbf{u}) = \inf_{\mathbf{v} \in W^1} \bar{I}_{CG}^1(\mathbf{v}) \leq 0$. Selon (8.61), $\mathbf{u} \in U^1$ montrant que \bar{I}_{CG}^1 atteint (et donc I_{CG}^1 également) son minimum en $\mathbf{u} \in U^1$:

$$I_{CG}^1(\mathbf{u}) = \inf_{\mathbf{v} \in U^1} I_{CG}^1(\mathbf{v}) = \inf_{\mathbf{v} \in W^1} \bar{I}_{CG}^1(\mathbf{v}) . \quad (8.63)$$

■

PROPOSITION 3 *Le minimum \mathbf{u} de I_{CG}^1 est unique.* ■

Preuve : Ce résultat est une conséquence directe de la stricte convexité de l'application $\zeta \rightarrow g(\zeta)$ pour $1 + \zeta > 0$. ■

Si la solution \mathbf{u} satisfait la régularité $(1 + u_{3,3}^m)^{-1} \in L^\infty(\Omega^m)$, alors \bar{I}_{CG}^1 admet une dérivée directionnelle pour tout $\mathbf{v} \in W_\infty^1 = \{\mathbf{v} \in W^1; v_{3,3}^m \in L^\infty(\Omega^m)\}$. De plus, le minimum $\mathbf{u} \in U^1$ est caractérisé par l'équation variationnelle suivante, $\forall \mathbf{v} \in W_\infty^1$:

$$\mathcal{Q} \left\{ \begin{aligned} & \int_{\Omega^\pm} \left(\lambda^\pm e_{kk}(\mathbf{u}^\pm) e_{kk}(\mathbf{v}^\pm) + 2\mu^\pm e_{ij}(\mathbf{u}^\pm) e_{ij}(\mathbf{v}^\pm) \right) d\Omega \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega^\pm} (\lambda^m + 2\mu^m) \left(1 + u_{3,3}^m - \frac{1}{1 + u_{3,3}^m} \right) v_{3,3}^m d\Omega \\ & + \int_{\Omega^m} \mu^m \left(u_{1,3}^m v_{1,3}^m + u_{2,3}^m v_{2,3}^m \right) d\Omega - \int_{\Gamma_f^\pm} \mathbf{f}^d \cdot \mathbf{v}^\pm d\Gamma = 0 . \end{aligned} \right.$$

3. Comme dans le cas de Saint Venant-Kirchhoff, il est possible de définir la fonctionnelle :

$$\begin{aligned} \hat{I}_{CG}^1(\mathbf{v}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega^\pm} \left(\lambda^\pm (e_{kk}(\mathbf{v}^\pm))^2 + 2\mu^\pm e_{ij}(\mathbf{v}^\pm) e_{ij}(\mathbf{v}^\pm) \right) d\Omega \\ &+ \frac{1}{2h} \int_S (\lambda^m + 2\mu^m) \left(\frac{1}{2} [v_3]^2 + h[v_3] - h^2 \log\left(1 + \frac{[v_3]}{h}\right) \right) dS \\ &+ \frac{1}{2h} \int_S \mu^m ([v_1]^2 + [v_2]^2) dS - \int_{\Gamma_f^\pm} \mathbf{f}^d \cdot \mathbf{v}^\pm d\Gamma \end{aligned} \quad (8.64)$$

sur l'ensemble :

$$\begin{aligned} \hat{U}^1 &= \left\{ \mathbf{v}^- \in (H^1(\Omega^-))^3, \mathbf{v}^+ \in (H^1(\Omega^+))^3, 1 + \frac{[v_3]}{h} > 0 \text{ p.p. sur } S, \right. \\ & \left. \log\left(1 + \frac{[v_3]}{h}\right) \in L^1(S), \mathbf{v}^\pm = 0 \text{ sur } \Gamma_u^\pm \right\} \end{aligned} \quad (8.65)$$

ensemble convexe non vide de l'espace de Hilbert :

$$\hat{W}^1 = \{\mathbf{v}^- \in (H^1(\Omega^-))^3, \mathbf{v}^+ \in (H^1(\Omega^+))^3; \mathbf{v}^\pm = 0 \text{ sur } \Gamma_u^\pm\}$$

muni de la norme $\|\mathbf{v}\|_{\hat{W}^1}$ telle que $\|\mathbf{v}\|_{\hat{W}^1}^2 = \|\mathbf{v}^+\|_{(H^1(\Omega^+))^3}^2 + \|\mathbf{v}^-\|_{(H^1(\Omega^-))^3}^2$. Alors, de façon similaire au lemme 2, nous avons le

LEMME 3 *Soit \hat{g} la fonction de Carathéodory suivante :*

$$\hat{g}(\zeta) = \begin{cases} (\lambda^m + 2\mu^m) \left(\frac{1}{2} \zeta^2 + h\zeta - h^2 \log\left(1 + \frac{\zeta}{h}\right) \right) & \text{si } 1 + \frac{\zeta}{h} > 0, \\ +\infty & \text{si } 1 + \frac{\zeta}{h} \leq 0. \end{cases} \quad (8.66)$$

La fonctionnelle $\mathbf{v} \rightarrow \hat{F}(\mathbf{v}) = \int_S \hat{g}(\mathbf{v}(\mathbf{x})) dS$ est à nouveau convexe positive, faiblement semi-continue inférieurement de $L^2(S)$ dans $\overline{\mathbb{R}}$. ■

Puis, en suivant la preuve du théorème 8, nous prolongeons $\hat{I}_{CG}^1(\mathbf{v})$ à \hat{W}^1 avec :

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{CG}^1(\mathbf{v}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega^\pm} \left(\lambda^\pm (e_{kk}(\mathbf{v}^\pm))^2 + 2\mu^\pm e_{ij}(\mathbf{v}^\pm) e_{ij}(\mathbf{v}^\pm) \right) d\Omega \\ &\quad + \frac{1}{2h} \int_S \mu^m ([v_1]^2 + [v_2]^2) dS + \frac{1}{2h} \hat{F}([v_3]) - \int_{\Gamma_f^\pm} \mathbf{f}^d \cdot \mathbf{v} d\Gamma. \end{aligned} \quad (8.67)$$

De façon similaire au théorème 8 et à la proposition 3, nous obtenons le

THÉORÈME 9 *Il existe un unique élément $\hat{\mathbf{u}} \in \hat{U}^1$ tel que :*

$$\hat{I}_{CG}^1(\hat{\mathbf{u}}) = \inf_{\mathbf{v} \in \hat{U}^1} \hat{I}_{CG}^1(\mathbf{v}) = \inf_{\mathbf{v} \in \hat{W}^1} \tilde{I}_{CG}^1(\mathbf{v}). \quad (8.68)$$

Si la solution $\hat{\mathbf{u}}$ satisfait la condition de régularité $(h + [\hat{u}_3])^{-1} \in L^{\frac{4}{3}}(S)$, alors \hat{I}_{CG}^1 est Gâteaux-différentiable en $\hat{\mathbf{u}}$ et le minimum est caractérisé par l'équation variationnelle, $\forall \mathbf{v} \in \hat{W}^1$

$$\hat{Q} \left\{ \begin{aligned} &\int_{\Omega^\pm} \left(\lambda^\pm e_{kk}(\hat{\mathbf{u}}^\pm) e_{kk}(\mathbf{v}^\pm) + 2\mu^\pm e_{ij}(\hat{\mathbf{u}}^\pm) e_{ij}(\mathbf{v}^\pm) \right) d\Omega \\ &+ \frac{1}{2h} \int_S (\lambda^m + 2\mu^m) \left(h + [\hat{u}_3] - \frac{1}{h + [\hat{u}_3]} \right) [v_3] dS \\ &+ \frac{1}{h} \int_S \mu^m \left([\hat{u}_1][v_1] + [\hat{u}_2][v_2] \right) dS - \int_{\Gamma_f^\pm} \mathbf{f}^d \cdot \mathbf{v}^\pm d\Gamma = 0. \end{aligned} \right.$$

4.

PROPOSITION 4 *Si $\hat{\mathbf{u}} \in \hat{U}^1$ est solution du problème \hat{Q} alors*

$$\tilde{\mathbf{u}} = \begin{cases} \hat{\mathbf{u}} & \text{dans } \Omega^\pm, \\ \frac{\hat{\mathbf{u}}^+}{h} \left(\frac{h}{2} + x_3 \right) + \frac{\hat{\mathbf{u}}^-}{h} \left(\frac{h}{2} - x_3 \right) & \text{dans } \Omega^m \end{cases} \quad (8.69)$$

est solution du problème Q . ■

Preuve : i) Vérifions que $\tilde{\mathbf{u}} \in U^1$. En fait, si $\tilde{\mathbf{u}} \in \hat{U}^1$, alors $\tilde{\mathbf{u}}$ défini par (8.69) vérifie $\tilde{\mathbf{u}}^m = \frac{\hat{\mathbf{u}}^+}{h} \left(\frac{h}{2} + x_3 \right) + \frac{\hat{\mathbf{u}}^-}{h} \left(\frac{h}{2} - x_3 \right) \in L^2(\Omega^m)$, $\tilde{u}_{3,3}^m = \frac{[\hat{u}_3]}{h} \in (L^2(\Omega^m))^3$, $1 + \tilde{u}_{3,3}^m = 1 + \frac{[\hat{u}_3]}{h} > 0$ p.p. in Ω^m et $\int_{\Omega^m} \log(1 + \tilde{u}_{3,3}^m) d\Omega^m = h \int_S \log\left(1 + \frac{[\hat{u}_3]}{h}\right) ds < \infty$.

ii) Finalement, montrons que :

$$\tilde{I}_{CG}^1(\tilde{\mathbf{u}}) \leq \tilde{I}_{CG}^1(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in U^1. \quad (8.70)$$

Nous associons à \mathbf{v} la fonction $\tilde{\mathbf{v}}$ selon :

$$\tilde{\mathbf{v}} = \begin{cases} \mathbf{v}^\pm & \text{dans } \Omega^\pm, \\ \frac{\mathbf{v}^+}{h} \left(\frac{h}{2} + x_3 \right) + \frac{\mathbf{v}^-}{h} \left(\frac{h}{2} - x_3 \right) & \text{dans } \Omega^m. \end{cases} \quad (8.71)$$

Puis, en utilisant l'égalité $\tilde{v}_{,3}^m = \frac{[v]}{h} = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} v_{,3} dx_3$ et la convexité de $\zeta \rightarrow g(\zeta)$, nous écrivons :

$$g(\tilde{v}_{,3}^m) \leq \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} g(v_{,3}) dx_3 . \quad (8.72)$$

Pour $\mathbf{v} \in W^1$, nous notons $\hat{\mathbf{v}} \in \hat{W}^1$ la restriction de \mathbf{v} à Ω^+ et Ω^- . Alors, un calcul explicite conduit, avec (8.71) et (8.72), à $\tilde{I}_{CG}^1(\hat{\mathbf{v}}) \leq \tilde{I}_{CG}^1(\tilde{\mathbf{v}}) \leq \tilde{I}_{CG}^1(\mathbf{v})$ de sorte que, grâce à (8.68), nous obtenons pour tout $\mathbf{v} \in W^1$:

$$\hat{I}_{CG}^1(\hat{\mathbf{u}}) = I_{CG}^1(\tilde{\mathbf{u}}) \leq \tilde{I}_{CG}^1(\hat{\mathbf{v}}) \leq \tilde{I}_{CG}^1(\mathbf{v}) . \quad (8.73)$$

■

REMARQUE(S) 31 *L'opérateur asymptotique transforme ainsi l'énergie $I_{CG}(\epsilon, \cdot)$, seulement polycopse au sens de J. Ball, en une énergie I_{CG}^1 strictement convexe et permet d'obtenir l'unicité de la solution du problème limite.*

5. Avant d'interpréter l'équation variationnelle \mathcal{Q} , définissons les fonctions suivantes :

$$\begin{cases} \sigma_{ij}^\pm = 2\lambda^\pm u_{k,k}^\pm + \mu^\pm (u_{i,j}^\pm + u_{j,i}^\pm) \in L^2(\Omega^\pm) , \\ \sigma_{\alpha 3}^m = -\frac{\lambda^m}{2} u_{\alpha,3}^m + \gamma^m \frac{u_{\alpha,3}^m}{(1+u_{3,3}^m)^2} \in L^1(\Omega^m) , \\ \sigma_{33}^m = \gamma^m \left(1 - \frac{1}{(1+u_{3,3}^m)^2} \right) \in L^1(\Omega^m) . \end{cases} \quad (8.74)$$

Ces fonctions apparaissent comme les dérivées de la densité d'énergie limite associée à l'énergie limite I_{CG}^1 . Puisqu'ici encore, l'opérateur de passage à la limite en ϵ et l'opérateur de dérivation par rapport au champ \mathbf{u} commutent, ces fonctions apparaissent également comme le terme de premier ordre en ϵ de la dérivée σ^ϵ de la densité d'énergie complète $\check{W}_{CG}(\epsilon, \mathbf{x})$. L'interprétation de \mathcal{Q} fournit alors les résultats suivants :

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j}^\pm = 0 & \text{dans } \Omega^\pm , \\ (\sigma_{i3}^m + \sigma_{33}^m u_{i,3}^m)_{,3} = 0 & \text{dans } \Omega^m , \\ \mathbf{u}^\pm = \mathbf{u}^m & \text{sur } S^\pm , \\ \sigma_{i3}^\pm = \sigma_{i3}^m + \sigma_{33}^m u_{i,3}^m & \text{sur } S^\pm , \\ \mathbf{u}^\pm = 0 & \text{sur } \Gamma_u^\pm , \\ (\sigma \cdot \nu)^\pm = \mathbf{f}^d & \text{sur } \Gamma_f^\pm . \end{cases} \quad (8.75)$$

(8.74) et ces relations entraînent alors $\sigma_{33}^m u_{\alpha,3}^m + \sigma_{\alpha 3}^m = \mu^m u_{\alpha,3}^m = (\sigma_{\alpha 3}^\pm)_{|S^\pm}$ et $\gamma^m \left(1 + u_{3,3}^m - \frac{1}{1+u_{3,3}^m} \right) = (\sigma_{33}^\pm)_{|S^\pm}$, soit :

$$\begin{cases} u_{\alpha,3}^m = \frac{(\sigma_{\alpha 3}^\pm)_{|S^\pm}}{\mu^m} , \end{cases} \quad (8.76)$$

$$\begin{cases} u_{3,3}^m = \frac{1}{2} \left(\frac{(\sigma_{33}^\pm)_{|S^\pm}}{\gamma^m} + \sqrt{\left(\frac{(\sigma_{33}^\pm)_{|S^\pm}}{\gamma^m} \right)^2 + 4} \right) - 1 \equiv \delta((\sigma_{33}^\pm)_{|S^\pm}) - 1 > -1 . \end{cases} \quad (8.77)$$

La condition de préservation de l'orientation se ramène donc à écrire que la fonction $(\sigma_{33}^\pm)_{|S^\pm}$ est finie presque partout ⁶.

⁶La mécanique de la rupture élastique fragile prévoit une contrainte infinie le long du front, lequel est de $d\Omega$ -mesure nulle.

REMARQUE(S) 32 – La constante c^ϵ de (1.30) n'est plus présente dans le modèle limite. Les coefficients de Lamé étant fixés, il correspond aux densités d'énergie $\check{W}_{CG}^\epsilon(\lambda^\epsilon, \mu^\epsilon, c^\epsilon)$ au premier ordre en ϵ une unique densité indépendante de c^ϵ .

- Les deux modèles limite obtenus présentent ainsi plusieurs similitudes : loi de comportement (loi de Hooke) identique dans les adhérents et déplacement linéaire (dans les cas de minimum strict) dans la colle. Ce fait est à rapprocher des résultats de [DAVET (1986)] obtenant que le modèle limite de plaque de Von-Kármán est indépendant de la loi de comportement hyperélastique utilisée en amont.
- Le fait de prendre, pour la densité \check{W}_{CG}^ϵ , à nouveau $p = 1$ dans (8.9) est une conséquence du choix des coefficients $a^\epsilon, b^\epsilon, c^\epsilon, d^\epsilon$ et e^ϵ entraînant que la densité \check{W}_{CG}^ϵ coïncide, pour les petites déformations, avec la densité \check{W}_{SV}^ϵ (1.29), pour laquelle $p = 1$ est nécessaire. Sans cette hypothèse, le terme $Tr \mathbf{E}$ ne s'élimine pas dans $\check{W}_{CG}^\epsilon(\mathbf{E})$ ⁷ et $p = 0$ conduit à un modèle limite de joint collé valable en grandes déformations... ■

8.3.3 Comparaison des modèles limite dans le cas unidimensionnel

Nous comparons les deux modèles limite, dans le cas unidimensionnel et le cas le plus significatif où la solution est linéaire dans l'adhésif. Les deux modèles simplifiés précédents diffèrent par la loi de comportement dans Ω^m . Dans le cas unidimensionnel, la condition de transmission s'écrit simplement, notant $x = \frac{[u_3]}{\epsilon h}$:

$$\begin{aligned} (\sigma_{33}^\pm)_{SV} &= R_{3333}^{m\epsilon} (1+x) \left(x + \frac{1}{2}x^2\right) = R_{3333}^{m\epsilon} x + \frac{3R_{3333}^{m\epsilon}}{2} x^2 + O(x^3), \\ (\sigma_{33}^\pm)_{CG} &= \frac{R_{3333}^{m\epsilon}}{2} \left(1+x - \frac{1}{1+x}\right) = R_{3333}^{m\epsilon} x - \frac{R_{3333}^{m\epsilon}}{2} x^2 + O(x^3), \end{aligned}$$

tandis que l'énergie de déformation dans Ω^m est⁸

$$\begin{aligned} I_{SV}^1(x) &= \epsilon h \frac{R_{3333}^{m\epsilon}}{2} \left(x + \frac{1}{2}x^2\right)^2 = \epsilon h \frac{R_{3333}^{m\epsilon}}{2} (x^2 + x^3 + O(x^4)), \\ I_{CG}^1(x) &= \epsilon h \frac{R_{3333}^{m\epsilon}}{2} \left(x + \frac{1}{2}x^2 - \log(1+x)\right) = \epsilon h \frac{R_{3333}^{m\epsilon}}{2} \left(x^2 - \frac{1}{3}x^3 + O(x^4)\right). \end{aligned}$$

Les développements limités indiquent que les deux modèles coïncident, lorsque la déformation x est petite, avec le modèle limite issu de la loi de Hooke. La figure 8.4 représente la trajectoire d'équilibre dans la colle, pour les densités de Hooke, de Saint Venant-Kirchhoff et de Ciarlet-Geymonat. Cette dernière est monotone et admet une asymptote verticale en $x = -1$, effet du logarithme, corrigeant les lacunes de la densité de Saint Venant-Kirchhoff. La figure 8.5 représente l'énergie de déformation, au facteur $\frac{1}{\epsilon h R_{3333}^{m\epsilon}}$ près, due à la colle en fonction de la déformation axiale $\frac{[u_3]}{\epsilon h}$, non convexe pour la densité de Saint Venant-Kirchhoff.

⁷La densité de Ciarlet-Geymonat est alors plus généralement une densité d'Ogden

⁸Dans le cas isotrope $\gamma^m = \frac{R_{3333}^m}{2}$.

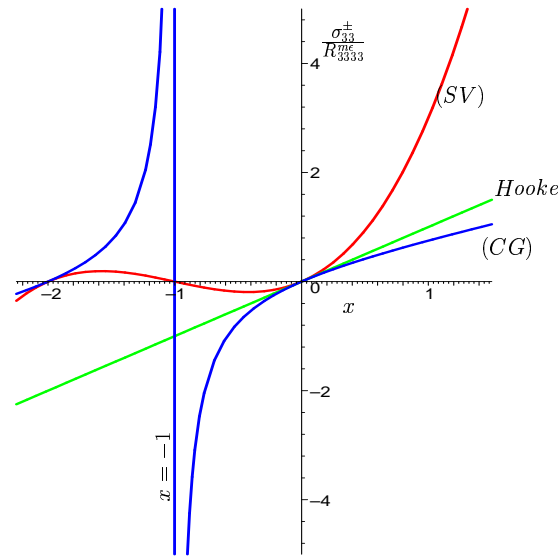


FIG. 8.4: Chemins d'équilibre $(x = \frac{[u_3]}{\epsilon h}, \frac{\sigma_{33}^\pm}{R_{3333}^m \epsilon})$.

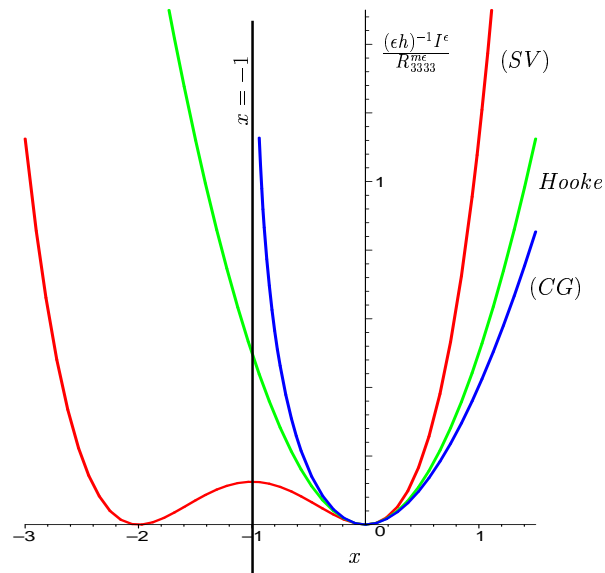


FIG. 8.5: Energies de déformation associées à Ω_ϵ^m en fonction de $x = \frac{[u_3]}{\epsilon h}$.

8.4 Mise en œuvre numérique

Avant de détailler quelques points de la mise en œuvre, réécrivons le modèle sur la structure réelle ; le champ \mathbf{u}^1 est alors approché au premier ordre par $\epsilon^{-1}\mathbf{u}(\epsilon, \cdot)$. Compte tenu de ce qui précède, le déplacement est dans : Ω_ϵ^m

$$\boxed{\mathbf{u}^\epsilon(\mathbf{x}^\epsilon) = \frac{\mathbf{u}^{\epsilon S}(x_\alpha^\epsilon) + \mathbf{u}^{\epsilon I}(x_\alpha^\epsilon)}{2} + \frac{x_3^\epsilon}{\epsilon h} [\mathbf{u}^\epsilon](x_\alpha^\epsilon) + O(\epsilon) \quad \mathbf{x}^\epsilon \in \Omega_\epsilon^m} \quad (8.78)$$

et les contraintes sont pour la densité de Saint Venant-Kirchhoff, écrivant au premier ordre, $\epsilon^{-1}\boldsymbol{\sigma}^\epsilon(\epsilon, \cdot) = \boldsymbol{\sigma}^1(\cdot) + O(\epsilon)$

$$\boxed{\sigma_{ij}^{\epsilon m} = \frac{R_{ij\alpha 3}^\epsilon}{\epsilon h} [u_\alpha^\epsilon] + \frac{R_{ij33}^\epsilon}{\epsilon h} \left([u_3^\epsilon] + \frac{1}{2\epsilon h} [u_k^\epsilon][u_k^\epsilon] \right) + O(\epsilon) \quad \text{dans } \Omega_\epsilon^m.} \quad (8.79)$$

La condition de préservation (8.17) s'écrit alors :

$$\boxed{[u_3^\epsilon] > -\epsilon h + O(\epsilon^2) \quad \text{dans } \Omega_\epsilon^m} \quad (8.80)$$

qui s'interprète comme une condition de non interpénétration des adhérents. La formulation variationnelle simplifiée est enfin :

$$\int_{\Omega_\epsilon^\pm} Tr(\boldsymbol{\sigma}^\epsilon \cdot \nabla \mathbf{v}) d\Omega + \int_S \left[\sigma_{\alpha 3}^\epsilon [v_\alpha] + \sigma_{33}^\epsilon \left([v_3] + \frac{1}{\epsilon h} [u_k^\epsilon][v_k] \right) \right] dS = \int_{\Gamma_f^\pm} \mathbf{f}_\epsilon^d \cdot \mathbf{v} d\Gamma \quad \forall \mathbf{v} \in \hat{V}^1(\Omega_\epsilon^\pm) \quad (8.81)$$

dont l'opérateur tangent associé est, $\forall \mathbf{g} \in \hat{V}^1(\Omega_\epsilon^\pm)$:

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u}^\epsilon, \mathbf{v}) \cdot \mathbf{g} &= \int_{\Omega_\epsilon^\pm} Tr(\mathbb{R}^\pm : \nabla \mathbf{g} \cdot \nabla \mathbf{v}) d\Omega^\pm + \int_S \sigma_{\alpha 3}^\epsilon(\mathbf{v}) [g_\alpha] dS + \int_S \frac{1}{\epsilon h} \sigma_{33}^\epsilon(\mathbf{u}^\epsilon) [g_k][v_k] dS \\ &+ \frac{1}{\epsilon h} \int_S R_{3333}^{m\epsilon} \left([g_3] + \frac{1}{\epsilon h} [g_l][u_l^\epsilon] \right) \left([v_3] + \frac{1}{\epsilon h} [u_k^\epsilon][v_k] \right) dS. \end{aligned} \quad (8.82)$$

L'état d'équilibre cinématique, caractérisé par la formulation non linéaire (8.81) est alors déterminé par l'algorithme de Newton⁹ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}^0 \in \hat{V}^1(\Omega_\epsilon^\pm) \quad ; \quad \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \mathbf{g} \quad (n \in \mathbb{N}), \\ T(\mathbf{u}^n, \mathbf{v}) \cdot \mathbf{g} = \int_{\Gamma_f^\pm} \mathbf{f}_\epsilon^d \cdot \mathbf{v} d\Gamma - \int_{\Omega^\pm} Tr(\mathbb{R}^\pm : \nabla \mathbf{u}^n \cdot \nabla \mathbf{v}) d\Omega^\pm \\ \quad - \int_S \left[\sigma_{\alpha 3}(\mathbf{u}^n)[v_\alpha] + \sigma_{33}(\mathbf{u}^n) \left([v_3] + \frac{1}{\epsilon h} [u_k^n][v_k] \right) \right] dS \quad \forall \mathbf{v} \in \hat{V}^1(\Omega_\epsilon^\pm). \end{array} \right. \quad (8.84)$$

De façon similaire à la première partie, un élément à 16 nœuds est utilisé : les fonctions de forme sont quadratiques dans le plan de la surface moyenne engendré par les vecteurs $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ et linéaires

⁹Nous omettons l'exposant ϵ de u^ϵ et de σ^ϵ .

dans l'épaisseur, selon la normale \mathbf{e}_3 : dans les adhérents Ω^\pm ainsi que dans Ω_ϵ^m , lorsque le modèle complet est utilisé, la i^{eme} composante du champ de déplacements est écrite selon :

$$u_i(\eta, \xi, \zeta) = \sum_{k=1}^8 p_k(\eta, \xi) \left[\frac{1+\zeta}{2} u_i^{kS} + \frac{1-\zeta}{2} u_i^{kI} \right], \quad i = 1, 3; \quad (\eta, \xi, \zeta) \in [-1, 1]^3, \quad (8.85)$$

p_k désigne les fonctions de forme selon le plan et u_i^{kS} (resp. u_i^{kI}) la i^{eme} composante du déplacement du nœud n^{kS} (resp. n^{kI}), $k = 1, 8$ situé dans le plan supérieur $\zeta = 1$ (resp. plan inférieur $\zeta = -1$). Lorsque le modèle simplifié est utilisé, le joint est remplacé par sa surface moyenne de sorte que les nœuds n^{kS} et n^{kI} sont, dans la configuration de référence, **géométriquement confondus** dans le plan $\zeta = 0$. Le saut des déplacements est alors discrétisé selon :

$$[u_i](\eta, \xi, 0) \equiv u_i^S(\eta, \xi, 0) - u_i^I(\eta, \xi, 0) = \sum_{k=1}^8 p_k(\eta, \xi) (u_i^{kS} - u_i^{kI}), \quad i = 1, 3 \quad (8.86)$$

impliquant pour $i, j = 1, 3$:

$$([u_i][v_j])(\eta, \xi, 0) = \sum_{m=1}^8 \sum_{n=1}^8 p_m(\eta, \xi) p_n(\eta, \xi) \begin{pmatrix} v_j^{nI} \\ v_j^{nS} \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i^{mI} \\ u_i^{mS} \end{pmatrix}. \quad (8.87)$$

Désignons par $\{\mathbf{v}\}$ le vecteur des valeurs nodales, de dimension 48 : $\{\mathbf{v}\} = \{v^1, v^2, \dots, v^8\}$ avec $v^j = (v_1^{jI}, v_2^{jI}, v_3^{jI}, v_1^{jS}, v_2^{jS}, v_3^{jS})$. L'approximation du terme de gauche de l'équation (8.84) prend la forme :

$$\{\mathbf{v}\}^t \cdot \left(\int_S [B] dS \right) \cdot \{\mathbf{g}\}$$

où $[B]$ désigne une matrice symétrique d'ordre 48 et composée de matrices symétriques d'ordre 6 $[C_{ij}]_{6 \times 6}$ de la façon suivante :

$$B \left(6(i-1) + 1 : 6i, 6(j-1) + 1 : 6j \right) = C_{ij}(1 : 6, 1 : 6), \quad i, j = 1, 8$$

avec

$$[C_{ij}] = p_i(\eta, \xi) p_j(\eta, \xi) \begin{pmatrix} [A]_{3 \times 3} & -[A]_{3 \times 3} \\ -[A]_{3 \times 3} & [A]_{3 \times 3} \end{pmatrix}$$

et finalement :

$$\begin{cases} A_{ll} = \frac{R_{1313}^\epsilon}{\epsilon h} + \frac{R_{1313}^\epsilon}{\epsilon h} \frac{[u_l]^2}{(\epsilon h)^2} + \frac{R_{3333}^\epsilon}{\epsilon h} \left((1 + 2\delta_{l3}) \frac{[u_3]}{\epsilon h} + \frac{1}{2} \frac{[u_k][u_k]}{(\epsilon h)^2} \right), \quad l = 1, 3, \\ A_{ln} = A_{nl} = \frac{R_{3333}^\epsilon}{\epsilon h} \frac{[u_l]}{\epsilon h} \left(\delta_{n3} + \frac{[u_n]}{\epsilon h} \right), \quad l, n = 1, 3 \quad l \neq n. \end{cases}$$

où δ_{ij} , $i, j = 1, 3$ désigne le symbole de Kronecker. Dans le cas de l'élasticité linéaire, seuls les termes en $\frac{1}{\epsilon h}$ demeurent et la matrice associée est simplement diagonale :

$$A_{Hooké} = \begin{pmatrix} R_{1313}^\epsilon \frac{1}{\epsilon h} & 0 & 0 \\ 0 & R_{2323}^\epsilon \frac{1}{\epsilon h} & 0 \\ 0 & 0 & R_{3333}^\epsilon \frac{1}{\epsilon h} \end{pmatrix}. \quad (8.88)$$

Concernant la densité de Ciarlet-Geymonat, la formulation variationnelle est identique, les espaces \hat{V}^1 et \hat{W}^1 étant identiques. Il suffit simplement de remplacer les définitions des contraintes (8.79) résultantes de (8.18)₃ par celles résultantes de (8.74). L'énergie d'adhésion associée à S est ainsi :

$$\int_S \left[\frac{\mu^{m\epsilon}}{2} \frac{[u_\alpha^\epsilon][u_\alpha^\epsilon]}{\epsilon h} + \gamma^{m\epsilon} \left([u_3^\epsilon] + \frac{[u_3^\epsilon]^2}{2\epsilon h} - \epsilon h \log \left(1 + \frac{[u_3^\epsilon]}{\epsilon h} \right) \right) \right] dS \quad (8.89)$$

et la formulation variationnelle (8.81) s'écrit

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^\pm} (2\lambda^\pm u_{k,k}^\epsilon + \mu^\pm (u_{i,j}^\epsilon + u_{j,i}^\epsilon)) v_{i,j} d\Omega \\ & + \int_S \gamma^{m\epsilon} [v_3] \left(1 + \frac{[u_3^\epsilon]}{\epsilon h} - \frac{1}{1 + \frac{[u_3^\epsilon]}{\epsilon h}} \right) + \mu^{m\epsilon} \frac{[u_\alpha^\epsilon]}{\epsilon h} [v_\alpha] dS = \int_{\Gamma_f^\pm} \mathbf{f}_\epsilon^d \cdot \mathbf{v} d\Gamma \quad \forall \mathbf{v} \in \hat{W}^1(\Omega_\epsilon^\pm). \end{aligned} \quad (8.90)$$

Un calcul similaire conduit à la matrice diagonale suivante¹⁰ :

$$A_{CG} = \begin{pmatrix} \mu^\epsilon \frac{1}{\epsilon h} & 0 & 0 \\ 0 & \mu^\epsilon \frac{1}{\epsilon h} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^\epsilon \frac{1}{\epsilon h} \left(1 + \left(1 + \frac{[u_3]}{\epsilon h} \right)^{-2} \right) \end{pmatrix}. \quad (8.91)$$

REMARQUE(S) 33 *En procédant comme dans la partie I, nous obtiendrions des modèles limites de joint collé courbe.*

8.5 Applications

8.5.1 Cube soumis à un chargement surfacique axial

Commençons par un exemple volontairement élémentaire visant à comparer à nouveau, mais numériquement sur un exemple tridimensionnel, les lois de comportement autour de la valeur zéro du facteur de charge noté λ . Soient deux adhérents Ω^\pm parallélépipèdes rectangle identiques de largeur l , de longueur L et de hauteur h , assemblés à l'aide d'un adhésif d'épaisseur ϵh . La structure est encadrée sur la face inférieure $(x, y, z) \in [0, l] \times [0, L] \times \{-h\}$ de l'adhérent inférieur et soumise à un chargement surfacique $\mathbf{f} = \lambda(0, 0, 10N)$ sur la face supérieure $(x, y, z) \in [0, l] \times [0, L] \times \{h\}$ de l'adhérent supérieur. Les matériaux sont isotropes et les caractéristiques sont reportées dans le tableau 8.1, conduisant à $\epsilon \approx 0.025$. L'algorithme de Newton est piloté en déplacement.

E^\pm	ν^\pm	E^m	ν^m	$L = l$	h	ϵh
126000MPa	0.3	3400MPa	0.3	100mm	40mm	1mm

TAB. 8.1: Caractéristiques géométriques et matériaux.

Le maillage éléments finis comporte 2394 nœuds. La figure 8.6 représente la déformée, après un déplacement imposé $u_d^\epsilon = -0.5mm$ (chargement de compression). Le saut du déplacement au point central est alors de $[u_3]_{sv} = -0.1594mm$ lorsque la densité de Saint Venant-Kirchhoff est

¹⁰Dans le cas isotrope, $\mathbb{R}_{1313}^\epsilon = \mathbb{R}_{2323}^\epsilon = \mu^\epsilon$, $\mathbb{R}_{3333}^\epsilon = 2\gamma^\epsilon$.

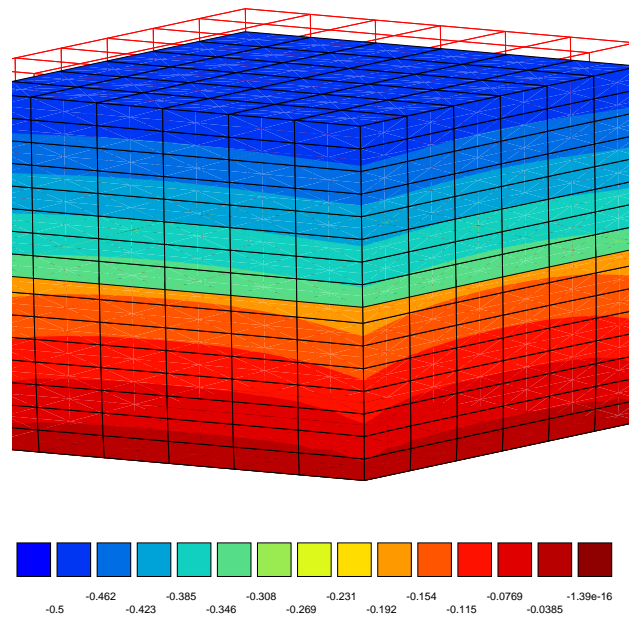


FIG. 8.6: Cube - chargement surfacique axial- $u_d^\epsilon = -0.5mm$ (déformée $\times 10$).

utilisée, signifiant que le joint de colle, absorbe près d'un tiers du déplacement imposé. La densité de Ciarlet-Geymonat, plus rigide pour les valeurs négatives de u_d^ϵ , conduit à $[u_3]_{cg} = -0.1258mm$. La figure 8.7 décrit l'évolution du saut $[u_3]$, au point $(50, 50, 0)$, pour les deux densités en fonction du facteur de charge. Les évolutions sont conformes aux calculs analytiques précédents (figure 8.4). Les sauts tangentiels sont ici négligeables. Pour les valeurs extrêmes de u_d^ϵ , le nombre d'itérations à convergence est plus faible pour la densité de Ciarlet-Geymonat. Pour une valeur comprise entre $u_d^\epsilon = -1.mm$ et $u_d^\epsilon = -0.95mm$, le spectre de la matrice tangente associée à \check{W}_{SV}^ϵ comporte un élément négatif très proche de zéro signifiant un état d'équilibre instable, lorsque la courbe d'équilibre atteint un point critique. Pour $u_d^\epsilon = -1mm$, l'algorithme de Newton converge en 17 itérations vers un état encore plus instable (le spectre de la matrice tangente comporte six éléments négatifs) qui ne correspond pas à un minimum de l'énergie. Au-delà, l'algorithme de Newton diverge.

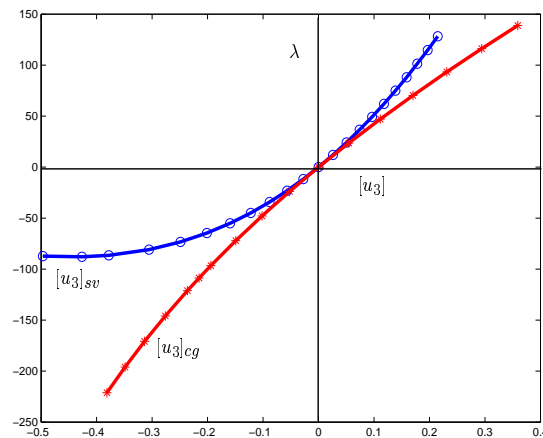


FIG. 8.7: Chemins d'équilibre $([u_3], \lambda)$ en $(50, 50, 0) \in S$.

Les trois figures suivantes représentent les trois composantes du saut, le long de la droite $D = \{(30, y, 0), y \in [0, 100]\}$ lorsque la structure est soumise au chargement $u_d^\epsilon = 0.5\text{mm}$. Les trois densités sont retenues. La troisième composante reste la composante prédominante.

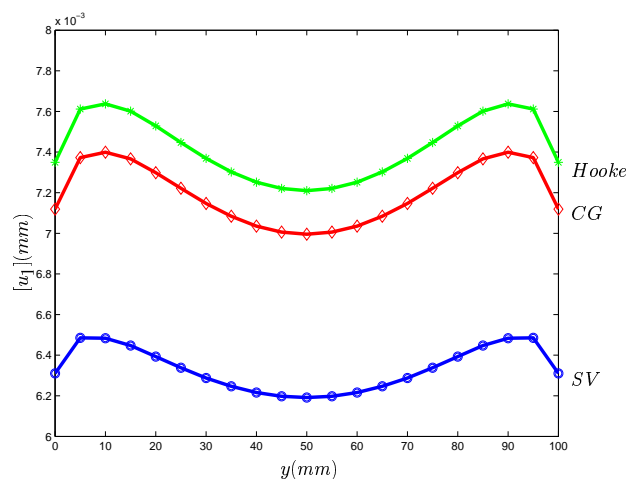


FIG. 8.8: Saut $[u_1]$ le long de $(30, y, 0)$.

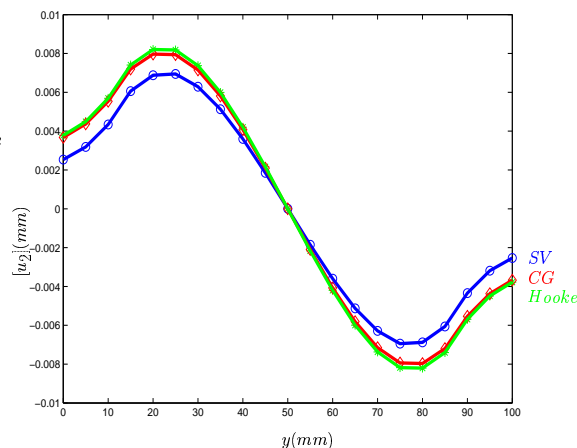


FIG. 8.9: Saut $[u_2]$ le long de $(30, y, 0)$.

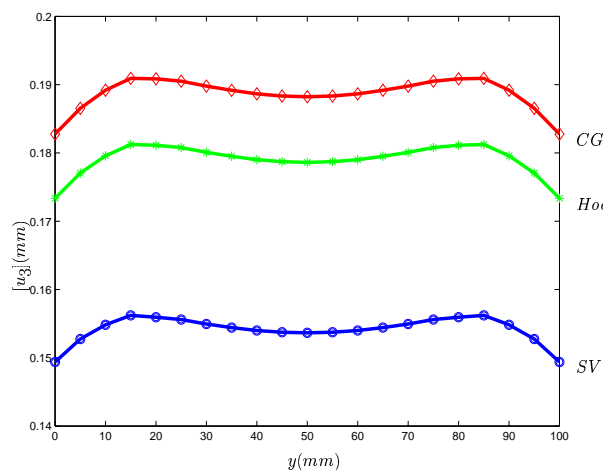


FIG. 8.10: Saut $[u_3]$ le long de $(30, y, 0)$.

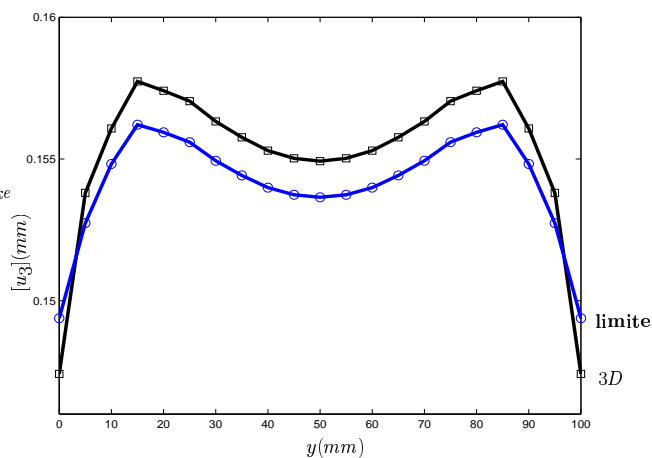


FIG. 8.11: Comparaison des sauts $[u_3]$ le long de $(30, y, 0)$ (Cas Saint Venant-Kirchhoff).

La figure 8.11 représente les sauts $[u_3]$ obtenus à partir du modèle initial et du modèle limite. Sur cet exemple, le modèle limite est plus rigide. L'écart est d'environ 1%. Les écarts pour les deux autres composantes sont plus importants, mais cela n'est pas significatif, compte tenu de la faible valeur de ces quantités. Les écarts relatifs restent faibles. Le saut issu du modèle initial a été obtenu en maillant le joint à l'aide d'un unique élément dans l'épaisseur. Le nombre de nœuds du maillage reste alors identique. Dans les deux cas, le déplacement obtenu est linéaire dans l'épaisseur, de

sorte que la différence se situe alors seulement au niveau des termes du tenseur des déformations. La figure 8.12 représente les écarts relatifs sur le déplacement de la face supérieure du joint, le long de D . Ces écarts sont de l'ordre, respectivement, de 2%, 4% et 1%. Ce résultat est normal, compte tenu des simplifications réalisées dans le tenseur des déformations.

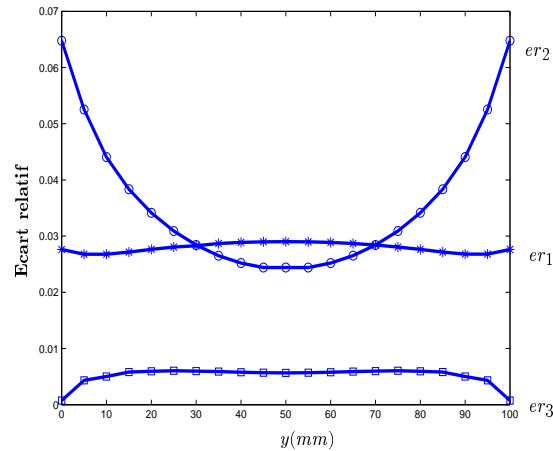


FIG. 8.12: Ecart relatif sur les déplacements le long de $(30, y, 0)$: $er_i = abs(\frac{u_i - (u_i)_{3d}}{u_i})$ [Cas Saint Venant-Kirchhoff].

8.5.2 Convergence numérique

Nous donnons dans ce paragraphe une comparaison asymptotique entre le modèle initial et le modèle limite, associés à la densité de Saint Venant-Kirchhoff. Le chargement est légèrement modifié de façon à exciter le saut tangentiel : nous appliquons en plus du chargement axial précédent un chargement surfacique sur l'une des faces latérales de l'adhérent supérieur. Puis nous faisons varier la valeur de l'épaisseur du joint et sa rigidité de façon à conserver le même ordre de grandeur pour les deux paramètres. La figure 8.13 représente la différence des déplacements des premières et troisièmes composantes $comp_i^S = (u_i^S)_{complet} - (u_i^S)_{limite}$ ¹¹, au point de l'interface de coordonnées $(70, 40, 0)$. La figure 8.14 représente la différence des sauts au même point. L'évolution est décroissante avec le paramètre ϵ signifiant que le modèle simplifié approche d'autant mieux le modèle complet que ce paramètre est petit. Nous obtenons pour $comp_1 = [u_1]_{complet} - [u_1]_{limite} = O(\epsilon^{1.23})$ et $comp_3 = [u_3]_{complet} - [u_3]_{limite} = O(\epsilon^{2.34})$ obtenant des taux de convergence numériques meilleurs que ceux espérés théoriquement par le développement (8.11). Pour le modèle complet, le joint a été maillé avec deux éléments dans l'épaisseur.

8.5.3 Assemblage à simple recouvrement

Le second exemple concerne l'assemblage à simple recouvrement, composé de deux armatures en composite unidirectionnel¹² de longueur $L = 120mm$, de largeur $l_3 = 30mm$, d'épaisseur

¹¹rappelons que l'exposant S est associé au point de l'interface supérieure.

¹²Des résultats numériques pour le cas isotrope sont présentés dans [KRASUCKI *et al.* (200x)].

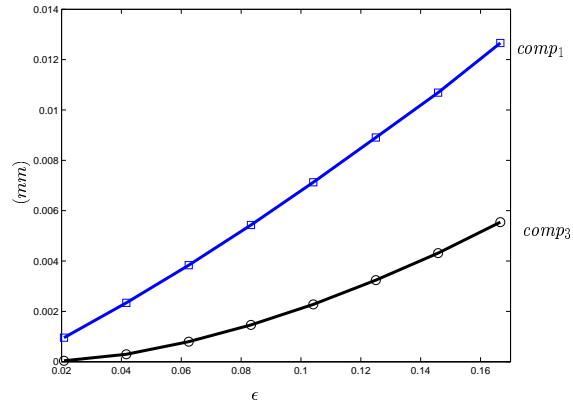
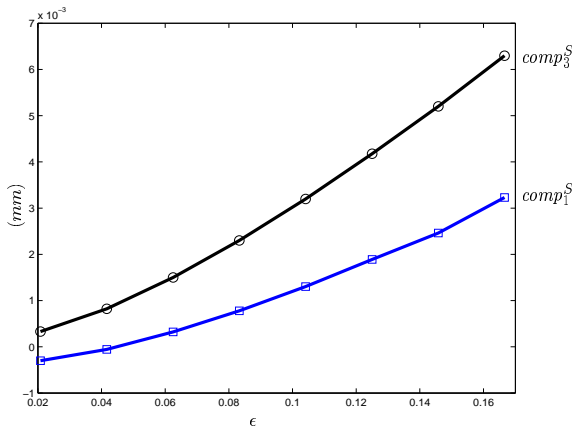


FIG. 8.13: Différence des déplacements en (70, 40, 0).
 FIG. 8.14: Différence des sauts en (70, 40, 0).

$h = 3mm$ et collé sur une longueur $l_1 = 60mm$ par un joint de colle isotrope d'épaisseur $0.3mm$ (figure 8.15). Les caractéristiques mécaniques sont regroupées dans le tableau 8.2. La structure est encastree sur l'extrémité Γ_u^- . Sur la face latérale de l'autre extrémité, la composante u_3 du déplacement est fixée à zéro, la force normale $(f_\epsilon^d)_1$ est donnée et la composante tangentielle de la force selon la direction e_2 est nulle.

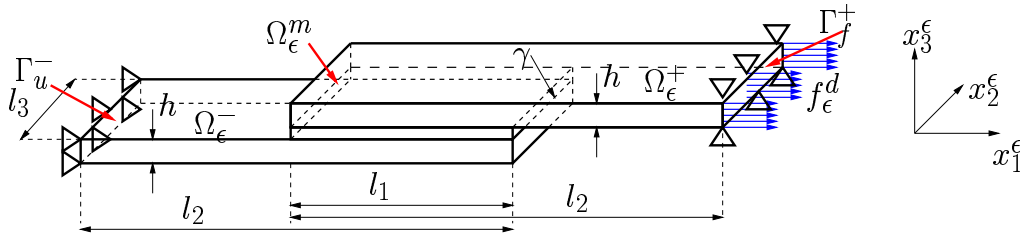


FIG. 8.15: Assemblage simple recouvrement : $h = 3mm, l_1 = 60mm, l_2 = 120mm, l_3 = 30mm$, épaisseur du joint : $\epsilon h = 0.3mm$.

E_1^\pm	E_2^\pm	ν_{12}^\pm	G_{12}^\pm	G_{13}^\pm	E^m	ν^m
150000MPa	9500MPa	0.263	4500MPa	3760MPa	4000MPa	0.3

TAB. 8.2: Caractéristiques mécaniques.

A nouveau l'algorithme est piloté en déplacement. Pour ce chargement, le saut tangentiel $[u_1]$ est prédominant devant les autres composantes. La figure 8.17 représente ces trois composantes, pour les modèles de Saint Venant-Kirchhoff complet et simplifié, le long du segment $(l_1, y, \frac{\epsilon h}{2})$. La valeur du déplacement imposé est $u_d^\epsilon = 0.15mm$. L'algorithme de Newton requiert 10 itérations pour que la norme du résidu descende en dessous de 10^{-4} . La figure 8.16 représente la déformée et les isovaleurs de la déformation E_{11} . Sur cet exemple, c'est la déformation de cisaillement E_{13} qui est la plus importante, atteignant des valeurs de l'ordre de 0.03 aux deux extrémités du recouvrement.

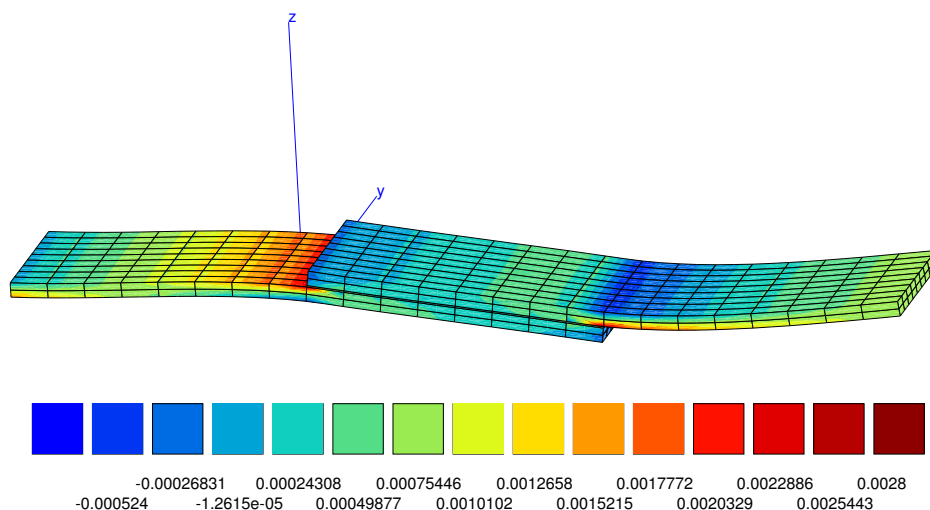


FIG. 8.16: Déformation E_{11} (position déformée $\times 10$).

Comme attendu, l'écart le plus important est atteint sur la première composante, compte tenu du tenseur des déformations associé au modèle limite. Cet effet est ici amplifié par l'épaisseur du joint trop importante par rapport à l'épaisseur des adhérents pour que les deux paramètres usuels soient d'un ordre de grandeur similaire. Une meilleure comparaison est obtenue lorsque l'épaisseur du joint est réduite, ainsi que le montre la figure 8.18 : l'écart relatif des sauts $[u_1]$ et $[u_3]$, au point $(60, 15, 0)$ est donnée en fonction de l'épaisseur du joint. Pour $\epsilon h = 0.1 \text{ mm}$, nous obtenons des écarts de 2% et 4%. Le cas isotrope conduit à des résultats similaires ; la variation des sauts le long du segment est cependant plus importante, en particulier aux extrémités. Cela influencera la forme d'un front de fissure à l'équilibre.

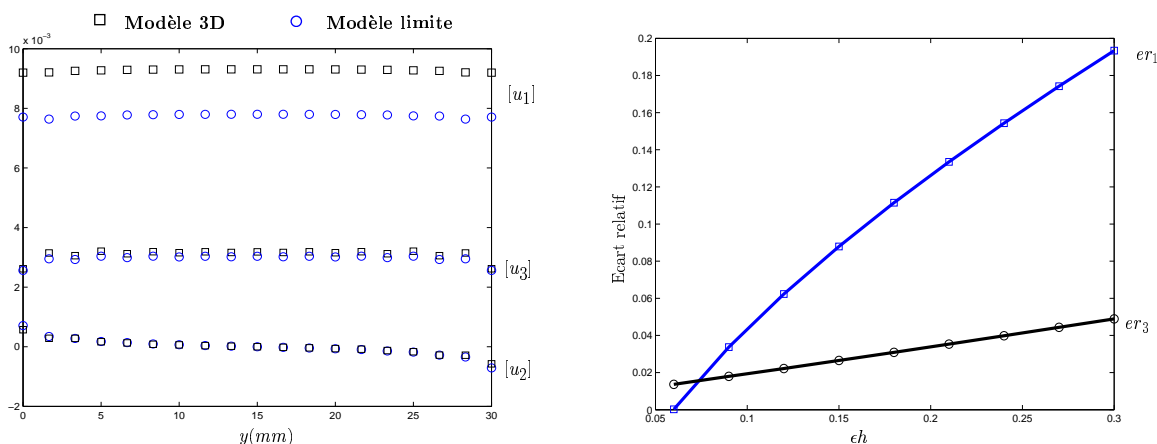


FIG. 8.17: Comparaison des sauts le long de γ . FIG. 8.18: Ecart relatif en $(60, 15, 0)$ de $[u_1]$ et $[u_3]$.

REMARQUE(S) 34 Dans l'introduction de cette seconde partie, nous avons signalé que d'éventuels problèmes numériques peuvent avoir lieu, lorsque le joint n'est pas réduit à sa surface moyenne. Lorsque le joint est maillé avec un élément dans l'épaisseur, aucun mauvais conditionnement numérique n'a été constaté. L'arithmétique double précision des outils de calculs actuels

permet de prendre des élancements d'élément fini jusqu'à 50. Compte tenu des valeurs rencontrées dans les assemblages collés, la marge reste grande. Même en prenant deux éléments dans l'épaisseur, entraînant l'isolement de certains nœuds du joint par rapport aux nœuds des adhérents, la conclusion est identique. Ces observations rejoignent celles de [EDLUND & KLARBRING (1992)].



Chapitre 9

Rupture du joint

Dans ce chapitre, nous présentons des modèles simplifiés de ruptures du joint. Ceux-ci sont construits à partir des modèles limite obtenus rigoureusement dans le chapitre précédent et sont basés sur un principe de moindre énergie. Après quelques commentaires sur ces modèles, notamment leurs liens avec les modèles dits d'interface endommageable, nous présentons quelques applications analytiques et numériques, simulant l'amorçage de la rupture du joint puis sa propagation.

9.1 Modélisation de la rupture du joint

Considérons l'assemblage collé Ω_ϵ du chapitre précédent et supposons que le joint Ω_ϵ^m présente une fissure sur toute son épaisseur, délimitée par la surface C_f^ϵ (figure 9.1). Suivant [DESTUYNDER *et al.* (1992)], la surface C_f^ϵ est supposée au cours de son éventuelle évolution, restée perpendiculaire à la surface moyenne S de Ω_ϵ^m , supposée plane. L'étude de l'évolution de la surface C_f^ϵ , de normale portée par l'axe \mathbf{e}_3 , est de ce fait équivalente à l'étude de l'évolution de la ligne $c_f \in S$ telle que :

$$C_f^\epsilon = c_f \times] -\frac{\epsilon h}{2}, \frac{\epsilon h}{2}[. \quad (9.1)$$

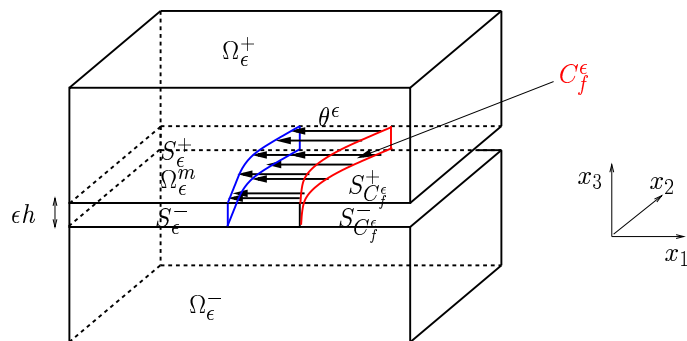


FIG. 9.1: Propagation virtuelle de C_f^ϵ .

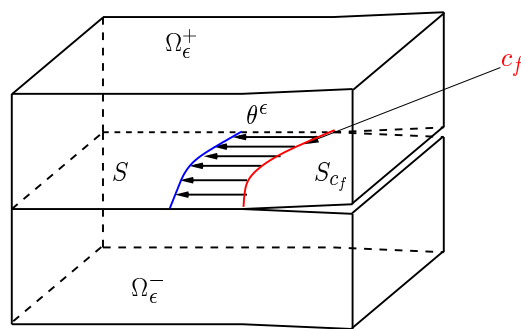


FIG. 9.2: Propagation virtuelle de c_f .

Il est alors possible, compte tenu de cette hypothèse, d'autant moins forte que ϵ est petit, de construire un modèle de propagation de la surface C_f^ϵ . Pour cela, nous procédons comme dans la partie I, en supposant que le couple $(\mathbf{u}^\epsilon, C_f^\epsilon)$ réalise à l'équilibre le minimum d'une énergie totale associée à Ω_ϵ :

$$E^\epsilon(\mathbf{u}^\epsilon, C_f^\epsilon) \equiv I^\epsilon(\mathbf{u}^\epsilon, C_f^\epsilon) + D(C_f^\epsilon). \quad (9.2)$$

La surface C_f^ϵ restant de normale portée par l'axe \mathbf{e}_3 , le champ $\boldsymbol{\theta}^\epsilon = (\theta_1^\epsilon, \theta_2^\epsilon, 0) \in (W^{1,\infty}(\overline{\Omega_\epsilon}))^3$, représentant le déplacement virtuel de C_f^ϵ , est pris indépendant de la variable x_3^ϵ dans Ω_ϵ^m soit $[\boldsymbol{\theta}^\epsilon] = 0$. Les expressions du chapitre 1 (concernant la densité de Saint Venant-Kirchhoff) peuvent alors s'adapter et il ne reste plus qu'à appliquer l'algorithme présenté au chapitre 5 pour simuler l'évolution de C_f^ϵ . En utilisant les résultats du chapitre précédent, nous allons simplifier un tel modèle dit complet. Cela permettra ainsi de prendre en compte les hypothèses géométrique et matériau relatives à l'adhésif. Dans les modèles limite du chapitre précédent, l'énergie de déformation du joint est remplacée au premier ordre en ϵ par une énergie d'adhésion définie sur S . Cela suggère de remplacer la recherche d'un minimum de E^ϵ , par la recherche d'un minimum de l'énergie suivante :

$$\boxed{E(\mathbf{u}^\epsilon, c_f) \equiv I(\mathbf{u}^\epsilon, c_f) + D(c_f)} \quad (9.3)$$

l'énergie I étant le terme de premier ordre en ϵ de l'énergie I^ϵ et a été déterminée au chapitre précédent. Nous en concluons que l'étude de la rupture de l'interphase Ω_ϵ^m se ramène à l'étude de la rupture de l'interface S (voir figure 9.2) ¹ identique à celle de la partie I, mis à part un terme supplémentaire d'énergie d'adhésion présent dans $I(\mathbf{u}^\epsilon, c_f)$. Afin d'utiliser l'algorithme de propagation de c_f présenté au chapitre 5, il reste à déterminer les dérivées lagrangiennes première et seconde associées à l'énergie simplifiée E ².

9.2 Dérivées lagrangiennes de E

9.2.1 Densité de Saint Venant-Kirchhoff

Concernant le modèle simplifié, nous retenons la solution d'équilibre $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ dont la restriction à Ω_ϵ^m est linéaire en x_3^ϵ correspondant à un minimum strict de l'énergie. Les dérivées lagrangiennes premières $(\mathbf{u}^1, \boldsymbol{\sigma}^1)$ nécessaires pour le calcul de $E^{(2)}$ sont solutions du problème variationnel suivant, pour tout champ $\boldsymbol{\theta} \in (W^{1,\infty}(\overline{\Omega_\epsilon^\pm}))^3$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma}^1 = \mathbb{R}^\pm : (\nabla \mathbf{u}^1 - \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\theta})^S \quad \text{dans } \Omega_\epsilon^\pm ; \\ \sigma_{\alpha 3}^1 = \frac{R_{\alpha 3 \alpha 3}^m}{\epsilon h} [u_\alpha^1] \quad ; \quad \sigma_{33}^1 = \frac{R_{3333}^m}{\epsilon h} \left([u_3^1] + \frac{1}{\epsilon h} [u_k^1][u_k] \right) \quad \text{sur } S ; \\ \int_{\Omega_\epsilon^\pm} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}^1 \cdot \nabla \mathbf{v}) d\Omega^\pm + \int_S \left[\sigma_{\alpha 3}^1 [v_\alpha] + \sigma_{33}^1 \left([v_3] + \frac{1}{\epsilon h} [u_l][v_l] \right) + \frac{1}{\epsilon h} \sigma_{33} [u_l^1][v_l] \right] dS \\ = - \int_{\Omega_\epsilon^\pm} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \nabla \mathbf{v}) \text{div} \boldsymbol{\theta} d\Omega^\pm + \int_{\Omega^\pm} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}) \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\theta}) d\Omega^\pm \\ - \int_S \left[\sigma_{\alpha 3} [v_\alpha] + \sigma_{33} \left([v_3] + \frac{1}{\epsilon h} [v_l][u_l] \right) \right] \text{div} \boldsymbol{\theta} dS \quad \forall \mathbf{v} \in \hat{V}^1(\Omega_\epsilon^\pm). \end{array} \right. \quad (9.4)$$

¹Dans la littérature, le mot interphase est utilisé pour décrire une structure d'épaisseur faible non nulle.

²Afin de ne pas alourdir les notations, nous abandonnons désormais l'exposant ϵ de \mathbf{u}^ϵ , $\boldsymbol{\sigma}^\epsilon$ et $\boldsymbol{\theta}^\epsilon$.

REMARQUE(S) 35 – A nouveau, les dérivées lagrangiennes sont solutions d'un système linéaire impliquant l'opérateur tangent $T(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ (8.82) du problème simplifié.

- La formulation précédente a été obtenue en écrivant la formulation variationnelle (8.81) sur l'ouvert virtuel $(\Omega^\pm)^\eta$, et sur S^η , $[\mathbf{u}^\eta] = [\mathbf{u}^0] + \eta[\mathbf{u}^1] + \dots$, ce qui revient à supposer que \mathbf{u}^η est linéaire dans la colle. Ceci est vrai. Pour le voir, il faut en toute rigueur procéder différemment, en commençant par dériver la formulation complète par rapport à Ω_ϵ puis appliquer l'analyse asymptotique. Le chapitre 8 concerne l'analyse asymptotique du problème vérifié par \mathbf{u}^0 . L'analyse asymptotique du problème vérifié par \mathbf{u}^1 est identique. Après changement d'échelle et interprétation, le champ \mathbf{u}^1 vérifie dans Ω^m un système linéaire d'équations aux dérivées partielles fonction de \mathbf{u}^0 . Il apparaît alors, que \mathbf{u}^0 étant linéaire dans Ω^m , il en est de même pour \mathbf{u}^1 , justifiant la notation $[\mathbf{u}^1]$. ■

Après des calculs similaires à ceux des chapitres précédents, le taux de restitution prend la forme suivante :

$$g(\boldsymbol{\theta}) = \int_{\Omega_\epsilon^\pm} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\theta}) d\Omega^\pm - \frac{1}{2} \int_{\Omega_\epsilon^\pm} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{u}) \text{div} \boldsymbol{\theta} d\Omega^\pm - \frac{1}{2} \int_S \left[\sigma_{\alpha 3} [u_\alpha] + \sigma_{33} \left([u_3] + \frac{1}{2\epsilon h} [u_k] [u_k] \right) \right] \text{div} \boldsymbol{\theta} dS. \quad (9.5)$$

A nouveau, cette expression est indépendante du prolongement du champ de vecteurs $\boldsymbol{\theta}$ au voisinage de c_f :

THÉORÈME 10 Le taux de restitution s'exprime sous la forme d'une intégrale curviligne le long de c_f :

$$\boxed{g(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2} \int_{c_f} \left[\sigma_{\alpha 3} [u_\alpha] + \sigma_{33} \left([u_3] + \frac{1}{2\epsilon h} [u_l] [u_l] \right) \right] \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\nu} dS.} \quad (9.6)$$

Preuve : Nous décomposons Ω_ϵ^\pm selon $\Omega_\epsilon^\pm = B_R \cup \Omega_R$, B_R désignant un tube cylindrique de rayon R centré sur le front de fissure $c_f \subset S$. Notons $S_{\Omega_R} = S \cap \Omega_R$, $c_R = S \cap \partial\Omega_R$ et $\bar{g}(\boldsymbol{\theta})$ la partie de $g(\boldsymbol{\theta})$ restreint à B_R de sorte que :

$$g(\boldsymbol{\theta}) = \bar{g}(\boldsymbol{\theta}) + \int_{\Omega_R} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\theta}) d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega_R} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{u}) \text{div} \boldsymbol{\theta} d\Omega - \frac{1}{2} \int_{S_{\Omega_R}} \left[\sigma_{\alpha 3}^m [u_\alpha] + \sigma_{33}^m \left([u_3] + \frac{1}{2\epsilon h} [u_k] [u_k] \right) \right] \text{div} \boldsymbol{\theta} dS. \quad (9.7)$$

³ En utilisant la formule de Green et le fait que le vecteur normal de la surface moyenne S est porté par l'axe \mathbf{e}_3 , le premier terme posé sur Ω_R devient :

$$\int_{\Omega_R} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\theta}) d\Omega = - \int_{\Omega_R} (\sigma_{ij} u_{j,k} \theta_k)_{,i} d\Omega - \int_{\partial\Omega_R} \sigma_{ij} u_{j,k} \theta_k \nu_i d\Gamma - \int_{S_{\Omega_R}} [\sigma_{3j} u_{j,k}] \theta_k dS \quad (9.8)$$

³nous rajoutons un exposant ici afin de bien spécifier les contraintes $\boldsymbol{\sigma}^m$ du joint.

où $\boldsymbol{\nu}$ désigne la normale extérieure à B_R . Le terme en saut n'apparaît pas dans les deux autres termes de $g(\boldsymbol{\theta}) - \bar{g}(\boldsymbol{\theta})$, en raison de la relation $\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\nu} = \theta_3 e_3 \equiv 0$ sur S et il vient simplement :

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{\theta}) = & \bar{g}(\boldsymbol{\theta}) + \frac{1}{2} \int_{\Omega_R} (\sigma_{ij} u_{j,i})_{,k} \theta_k d\Omega - \int_{\Omega_R} (\sigma_{ij} u_{j,k})_i \theta_k d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_R} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{u}) \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\nu} d\Gamma \\ & - \int_{\partial\Omega_R} \sigma_{ij} u_{j,k} \theta_k \nu_i d\Gamma + \frac{1}{2} \int_{S_{\Omega_R}} \left[\sigma_{\alpha 3} [u_\alpha] + \sigma_{33} \left([u_3] + \frac{1}{2\epsilon h} [u_l][u_l] \right) \right]_{,k} \theta_k dS \\ & - \int_{S_{\Omega_R}} [\sigma_{3j} u_{j,k}] \theta_k dS + \frac{1}{2} \int_{c_R} \left[\sigma_{\alpha 3} [u_\alpha] + \sigma_{33} \left([u_3] + \frac{1}{2\epsilon h} [u_l][u_l] \right) \right] \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\nu} d\gamma. \end{aligned} \quad (9.9)$$

Les termes posés sur Ω_R s'éliminent. En effet, ils valent $\frac{1}{2}(\sigma_{ij} u_{i,j})_{,k} - (\sigma_{ij} u_{j,k})_{,i}$ puis selon $\sigma_{ij,j} = 0$, $\frac{1}{2}\sigma_{ij,k} u_{j,i} - \frac{1}{2}\sigma_{ij} u_{u,ij}$. En utilisant alors les symétries du tenseur de rigidité \mathbb{R} et $\sigma_{ij} = \frac{1}{2} R_{ij\tau\theta}(u_\tau, \theta + u_\theta, \tau)$, le terme restant est nul. De façon similaire, les termes posés sur S_{Ω_R} s'annulent. En effet, les contraintes σ_{3j} étant constantes dans le joint, nous avons $[\sigma_{3j} u_{j,k}] = \sigma_{3j} [u_{j,k}]$. Puis selon les relations (8.18)₆, il vient :

$$\sigma_{3j} [u_{j,k}] = \sigma_{3j} [u_j]_{,k} = \sigma_{3j}^m [u_j]_{,k} + \sigma_{33}^m \frac{[u_j]}{\epsilon h} [u_j]_{,k}$$

tandis que la symétrie de la loi de comportement dans le joint (8.18)₃ conduit à :

$$\frac{1}{2} \left[\sigma_{\alpha 3}^m [u_\alpha] + \sigma_{33}^m \left([u_3] + \frac{1}{2\epsilon h} [u_l][u_l] \right) \right]_{,k} = \sigma_{\alpha 3}^m [u_\alpha]_{,k} + \sigma_{33}^m \left([u_3]_{,k} + \frac{[u_l]}{\epsilon h} [u_l]_{,k} \right), \quad (9.10)$$

puis à :

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{\theta}) = & \bar{g}(\boldsymbol{\theta}) + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_R} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{u}) \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\nu} d\Gamma - \int_{\partial\Omega_R} \sigma_{ij} u_{j,k} \theta_k \nu_i d\Gamma \\ & + \frac{1}{2} \int_{c_R} \left[\sigma_{\alpha 3}^m [u_\alpha] + \sigma_{33}^m \left([u_3] + \frac{1}{2\epsilon h} [u_l][u_l] \right) \right] \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\nu} d\gamma. \end{aligned} \quad (9.11)$$

Enfin, la valeur de g étant indépendante de R , l'expression précédente est valable pour un R arbitrairement petit. Si les adhérents sont convexes, l'étude des singularités de contraintes, dans le cas de l'interface faible, en fond de fissure, permet de conclure que les intégrales de $\bar{g}(\boldsymbol{\theta})$ et celles posées sur $\partial\Omega_R$ convergent vers zéro avec R . Le résultat annoncé en découle. ■

REMARQUE(S) 36 *Le taux de restitution local G apparaît ainsi comme une fonction des sauts à travers la colle :*

$$G = \frac{1}{2} \left(\sigma_{\alpha 3} [u_\alpha] + \sigma_{33} \left([u_3] + \frac{1}{2\epsilon h} [u_k][u_k] \right) \right) = \frac{1}{2\epsilon h} \left(R_{\alpha 3\alpha 3}^{m\epsilon} [u_\alpha]^2 + R_{3333}^{m\epsilon} \left([u_3] + \frac{1}{2\epsilon h} [u_k][u_k] \right)^2 \right). \quad (9.12)$$

Remarquons que cette quantité est strictement positive, même en l'absence de fissure. ■

Enfin, la dérivée seconde a pour expression :

$$\begin{aligned}
I^{(2)}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}) &= -\frac{1}{2} \int_{\Omega^\pm} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{u}^1 \cdot \nabla \boldsymbol{\theta}) d\Omega^\pm - \frac{1}{2} \int_{\Omega^\pm} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}^1 \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\theta}) d\Omega^\pm \\
&+ \frac{1}{2} \int_{\Omega^\pm} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}^1 \cdot \nabla \mathbf{u}) \text{div} \boldsymbol{\theta} d\Omega^\pm + \int_{\Omega^\pm} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\theta} \cdot \nabla \boldsymbol{\theta}) d\Omega^\pm \\
&- \frac{1}{2} \int_{\Omega^\pm} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\theta}) \text{div} \boldsymbol{\theta} d\Omega^\pm + \frac{1}{2} \int_{\Omega^\pm} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{u}) \det(\nabla \boldsymbol{\theta}) d\Omega^\pm \\
&+ \frac{1}{2} \int_S \left[\sigma_{\alpha 3}^1 [u_\alpha] + \sigma_{33}^1 \left([u_3] + \frac{1}{2\epsilon h} [u_l][u_l] \right) \right] \text{div} \boldsymbol{\theta} dS \\
&+ \frac{1}{2} \int_S \left[\sigma_{\alpha 3} [u_\alpha] + \sigma_{33} \left([u_3] + \frac{1}{2\epsilon h} [u_l][u_l] \right) \right] \det(\nabla \boldsymbol{\theta}) dS, \tag{9.13}
\end{aligned}$$

et est à nouveau une forme quadratique associée à une forme bilinéaire symétrique dépendante de la solution $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ et des dérivées lagrangiennes premières $(\mathbf{u}^1, \boldsymbol{\sigma}^1)$. En supposant ces dernières suffisamment régulières et en interprétant la formulation (9.4), cette dérivée seconde s'exprime à nouveau sous la forme d'une intégrale curviligne :

$$\begin{aligned}
I^{(2)}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}) &= -\frac{1}{2} \int_{c_f} \left[\sigma_{\alpha 3}^1 [u_\alpha] + \sigma_{33}^1 \left([u_3] + \frac{1}{2\epsilon h} [u_k][u_k] \right) \right] \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\nu} d\gamma \\
&= -\frac{1}{2\epsilon h} \int_{c_f} \left[R_{\alpha 3 \alpha 3}^m [u_\alpha^1][u_\alpha] + R_{3333}^m \left([u_3^1] + \frac{1}{\epsilon h} [u_k^1][u_k] \right) \left([u_3] + \frac{1}{2\epsilon h} [u_k][u_k] \right) \right] \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\nu} d\gamma. \tag{9.14}
\end{aligned}$$

9.2.2 Densité de Ciarlet-Geymonat

Dans le cas de la densité de Ciarlet-Geymonat, certains résultats peuvent être obtenus directement à partir de ceux des paragraphes précédents. Ainsi, la formulation (9.4) vérifiée par $(\mathbf{u}^1, \boldsymbol{\sigma}^1)$ reste identique exceptées les relations sur S qui deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{\alpha 3}^1 = -\frac{\lambda^\epsilon}{2} \frac{[u_\alpha^1]}{\epsilon h} + \gamma^\epsilon \frac{1}{\left(1 + \frac{[u_3]}{\epsilon h}\right)^2} \left(\frac{[u_\alpha^1]}{\epsilon h} - \frac{2}{\left(1 + \frac{[u_3]}{\epsilon h}\right)} \frac{[u_\alpha]}{\epsilon h} \frac{[u_3^1]}{\epsilon h} \right); \alpha = 1, 2, \\ \sigma_{33}^1 = 2\gamma^\epsilon \frac{1}{\left(1 + \frac{[u_3]}{\epsilon h}\right)^3} \frac{[u_3^1]}{\epsilon h}. \end{array} \right.$$

Compte tenu de la relation $\sigma_{33}^m \frac{[u_\alpha^m]}{\epsilon h} + \sigma_{\alpha 3}^m = \mu^m \frac{[u_\alpha]}{\epsilon h}$ dans Ω_ϵ^m , utilisée dans le chapitre précédent, la formulation prend la forme condensée suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega^\pm} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}^1 \cdot \nabla \mathbf{v}) d\Omega^\pm + \int_S \left[\mu^m [v_\alpha] \frac{[u_\alpha^1]}{\epsilon h} + \gamma^m [v_3] \frac{[u_3^1]}{\epsilon h} \left(1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{[u_3]}{\epsilon h}\right)^2} \right) \right] dS \\ = - \int_{\Omega^\pm} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \nabla \mathbf{v}) \text{div} \boldsymbol{\theta} d\Omega^\pm + \int_{\Omega^\pm} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}) \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\theta}) d\Omega^\pm \\ - \int_S \left[\mu^m [v_\alpha] \frac{[u_\alpha]}{\epsilon h} + \gamma^m [v_3] \left(1 + \frac{[u_3]}{\epsilon h} - \frac{1}{1 + \frac{[u_3]}{\epsilon h}} \right) \right] \text{div} \boldsymbol{\theta} dS \quad \forall \mathbf{v} \in W^1(\Omega^\pm). \end{array} \right. \tag{9.15}$$

Le taux de restitution prend la forme :

$$g(\boldsymbol{\theta}) = \int_{\Omega^\pm} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\theta}) d\Omega^\pm - \frac{1}{2} \int_{\Omega^\pm} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{u}) \text{div } \boldsymbol{\theta} d\Omega^\pm \\ - \int_S \left[\gamma^\epsilon \left([u_3] + \frac{1}{2\epsilon h} [u_3]^2 - \epsilon h \log \left(1 + \frac{[u_3]}{\epsilon h} \right) \right) + \frac{\mu^\epsilon}{2\epsilon h} [u_\alpha]^2 \right] \text{div } \boldsymbol{\theta} dS, \quad (9.16)$$

qui s'exprime également comme une intégrale curviligne le long de c_f :

$$g(\boldsymbol{\theta}) = \int_{c_f} \left[\gamma^\epsilon \left([u_3] + \frac{1}{2\epsilon h} [u_3]^2 - \epsilon h \log \left(1 + \frac{[u_3]}{\epsilon h} \right) \right) + \frac{\mu^\epsilon}{2\epsilon h} [u_\alpha]^2 \right] \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\nu} d\gamma. \quad (9.17)$$

Enfin, les termes posés sur S dans (9.13) valent pour cette densité :

$$\int_S \left[\gamma^\epsilon \left([u_3] + \frac{1}{2\epsilon h} [u_3]^2 - \epsilon h \log \left(1 + \frac{[u_3]}{\epsilon h} \right) \right) + \frac{\mu^\epsilon}{2\epsilon h} [u_\alpha]^2 \right] \det(\nabla \boldsymbol{\theta}) dS \\ + \int_S \left[\gamma^\epsilon [u_3^1] \left(1 + \frac{[u_3]}{\epsilon h} - \frac{1}{1 + \frac{[u_3]}{\epsilon h}} \right) + \frac{\mu^\epsilon}{\epsilon h} [u_\alpha] [u_\alpha^1] \right] \text{div } \boldsymbol{\theta} dS, \quad (9.18)$$

les autres termes de $I^{(2)}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta})$ étant communs pour les deux densités.

COMPARAISON DES MODÈLES DE RUPTURE DANS LE CAS UNIDIMENSIONNEL

Reprenons l'exemple unidimensionnel du paragraphe 8.2.3. Forts des expressions des taux de restitution en fonction du saut $[u_3]$ et des relations entre le chargement axial t^ϵ et ce même saut, nous exprimons chacun de ces taux en fonction de t^ϵ permettant une comparaison. Il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} G_{Hooke}(t^\epsilon) = \frac{1}{2} \frac{\epsilon h}{R_{3333}^{m\epsilon}} (t^\epsilon)^2, \\ G_{SV}(t^\epsilon) = \frac{1}{2} \frac{\epsilon h}{R_{3333}^{m\epsilon}} (t^\epsilon)^2 - \frac{1}{2} \frac{\epsilon h}{(R_{3333}^{m\epsilon})^2} (t^\epsilon)^3 + O((t^\epsilon)^4), \\ G_{CG}(t^\epsilon) = \frac{1}{4} \frac{\epsilon h}{\gamma^{m\epsilon}} (t^\epsilon)^2 + \frac{1}{12} \frac{\epsilon h}{(\gamma^{m\epsilon})^2} (t^\epsilon)^3 + O((t^\epsilon)^4), \end{array} \right. \quad (9.19)$$

soit, pour un chargement de traction $t^\epsilon > 0$ - le seul conduisant à une éventuelle rupture - , $G_{SV}(t^\epsilon) < G_{Hooke}(t^\epsilon) < G_{CG}(t^\epsilon)$. Il apparaît que le critère de rupture en taux de restitution critique est atteint d'abord pour un matériau associé au modèle de Ciarlet-Geymonat.

9.3 Commentaires sur les modèles limites

Nous résumons ici quelques observations sur les modèles obtenus, pour certaines illustrées numériquement dans les applications.

9.3.1 Modèle de propagation et amorçage

Les résultats précédents nous permettent de simuler la rupture du joint en appliquant sans modification l'algorithme présenté au paragraphe 5.2.3. L'équation (5.39) fournissant le déplacement

du front s'écrit ici simplement :

$$E^{(2)}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\psi}) = \int_{c_f} (G - G_c) \boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\nu} d\Gamma \quad \forall \boldsymbol{\psi} \in V_\theta . \quad (9.20)$$

Soulignons que dans le cas du joint, la force de délaminage est explicitement connue en fonction des sauts des déplacements à travers S et permet de caractériser le front c_f à l'équilibre. Notons \mathbf{u}_λ le champ cinématique à l'équilibre associé au facteur de charge λ . Alors, en prenant dans (9.20) un champ $\boldsymbol{\psi}$ tel que $\boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1$, le front c_f est :

$$c_f = \{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in S, \text{ tq } \max_{0 \leq \lambda' \leq \lambda} \int_{c_f} (G(\mathbf{u}_{\lambda'}(\mathbf{x})) - G_c) d\Gamma = 0 \} , \quad (9.21)$$

caractérisation différente de celle obtenue par le critère de Griffith local :

$$c_f = \{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in S, \text{ tq } \max_{0 \leq \lambda' \leq \lambda} (G(\mathbf{u}_{\lambda'}(\mathbf{x})) - G_c) = 0 \} . \quad (9.22)$$

La présence du max traduit la condition d'irréversibilité du front. Il en résulte que minimiser l'énergie totale par rapport à ces deux arguments revient à déterminer seulement le champ cinématique minimisant l'énergie mécanique puis l'ensemble c_f . Ce front est le front cherché si et seulement si un nouveau calcul d'équilibre à partir de ce nouveau c_f n'en entraîne pas une évolution, et ainsi de suite. Cette méthode, évitant les calculs des dérivées lagrangiennes, présente néanmoins des lacunes indéniables, à commencer par ne plus donner d'indication sur la stabilité du front (voir néanmoins [FLOREZ (1990)]). Avant de les évoquer dans le paragraphe suivant, signalons également que le cas de l'amorçage du joint (ou interphase) est ici plus facile à simuler que dans le cas d'une interface (résolu au chapitre 5). En effet, nous sommes dans la situation où le chargement critique λ_c est explicitement connu :

$$\lambda_c = \min \{ \lambda; G(\mathbf{u}_\lambda(\mathbf{x})) - G_c = 0, \mathbf{x} \in S \} . \quad (9.23)$$

La méthode permettant de déterminer la première position du front c_f après amorçage est décrite au chapitre 5. Néanmoins, le chargement critique ainsi défini n'assure pas la conservation de l'énergie totale à l'amorçage instable (voir paragraphe 9.4.2). Enfin, la connaissance explicite de la force de délaminage permet de déterminer les contraintes critiques et déplacements en fonction de G_c . Par exemple, dans le cas d'un mode I, négligeant les sauts $[u_\alpha]$, nous obtenons, lorsque la densité de Saint Venant-Kirchhoff est retenue, les relations suivantes :

$$\sigma_{33c} = \frac{R_{3333}^{m\epsilon}}{\epsilon h} ([u_3]_c + \frac{1}{2\epsilon h} [u_3]_c^2) \quad ; \quad G_c = \frac{1}{2} \sigma_{33c}^2 \frac{\epsilon h}{R_{3333}^{m\epsilon}} \quad (9.24)$$

soit :

$$\boxed{\sigma_{33c} = \sqrt{2G_c \frac{R_{3333}^{m\epsilon}}{\epsilon h}} \quad ; \quad [u_3]_c = -\epsilon h + \epsilon h \sqrt{1 + \sqrt{\frac{8G_c}{\epsilon h R_{3333}^{m\epsilon}}}} = O((\epsilon h)^{1/2}) .} \quad (9.25)$$

Dans le cas d'un mode I d'ouverture, la figure (8.4), reliant pour les trois densités d'énergies la contrainte σ_{33}^\pm à la déformation $\frac{[u_3]}{\epsilon h}$, décrit les lois de comportement "interfaciales" obtenues. Ces trois lois sont énergétiquement équivalentes si et seulement si l'aire sous chacune des courbes jusqu'à décohéation, égale au taux de restitution critique, est identique. Le déplacement critique et la contrainte critique sont naturellement différents pour les trois lois.

9.3.2 Analogie avec les modèles d'interfaces endommageables

Compte tenu des remarques précédentes, il apparaît des liens entre les modèles précédents et les modèles dits d'interfaces endommageables. Un modèle précurseur à ces derniers, analogue au modèle élastique issu de la loi de Hooke $\sigma_{i3} = \frac{R_{3333}}{\epsilon h} [u_i]$ sur S , a été introduit dans [EHLACHER (1985)] par un raisonnement inverse. Ainsi, dans le but de contourner le paradoxe de Rice - annulation du taux de restitution associée à une fissure d'interface en situation plastique -, A. Ehrlacher considère que l'idéalisation d'une fissure par une surface de discontinuité est probablement non conforme à la réalité et reconsidère la zone d'élaboration d'épaisseur petite mais non nulle, proche de la pointe où la fissure est endommagée et microfissurée. Ce raisonnement consiste ainsi à prendre en compte dans la loi de comportement de cette zone de faible épaisseur, l'élaboration de la fissure par affaiblissement et rupture du matériau, principe de la mécanique de l'endommagement. Dans [EHLACHER (1985)], l'auteur ne considère que la loi élastique citée plus haut, qu'il appelle loi avec endommagement brutal. A une telle vision constructive, se heurte le choix des dimensions de la zone d'élaboration, et plus précisément dans notre contexte, le choix d'une épaisseur ϵh . L'analyse asymptotique permet de retrouver, et ce rigoureusement, dans un contexte géométrique et matériel initial différent, ce type de modèle. Dans le but de simplifier le raisonnement, plaçons-nous dans le cas d'un chargement monotone mode I sur une structure type DCB (négligeant à nouveau les sauts $[u_\alpha]$). Les lois obtenues précédemment, représentées sur la figure (8.4), sont toutes des lois élastiques : tant que le taux de restitution n'a pas atteint sa valeur critique, l'état du joint est complètement réversible. Cette analyse néglige la petite zone d'irréversibilité proche de la pointe de fissure et nous pourrions remplacer les lois de la figure (8.4) par des lois régularisées à l'image de la loi définie sur S suivante :

$$\sigma_{33}^\pm = \frac{R_{3333}}{\epsilon h} [u_3] (1 - d^\beta) \quad ; \quad d = \max \left(0, \min \left(1, \max_{0 \leq \lambda' \leq \lambda} \frac{[u_3]}{[u_3]_c} \right) \right), \quad (9.26)$$

faisant intervenir explicitement la quantité critique $[u_3]_c$ (β désigne un réel positif sans dimension arbitraire) et décrite sur la figure (9.3).

La loi régularisée n'est plus élastique. Tant que le saut n'atteint pas la valeur $[u_3]_r = (1 + \beta)^{-1/\beta} [u_3]_c = [u_3]_c (1 - \frac{\ln(\beta)}{\beta}) + O(\beta^{-2})$, le comportement est élastique. Au-delà, l'interphase est dégradée de façon irréversible. Si cette zone dite *cohésive* reste de faible longueur (ici de l'ordre de $\frac{\ln \beta}{\beta}$), alors les quantités énergétiques ne sont pas affectées au premier ordre et il est plus simple, tant théoriquement que numériquement, de conserver la loi de Hooke initiale. Par ailleurs, l'aire sous la courbe permet de relier G_c à $[u_3]_c$ selon $G_c = \frac{1}{2} \frac{R_{3333}}{\epsilon h} \frac{\beta}{\beta+2} [u_3]_c^2$. Enfin, lorsque la quantité $[u_3]$ est monotone croissante avec λ (pas de décharge), l'énergie d'adhésion prend la forme ⁴ :

$$I([u_3]) = \frac{R_{3333}}{2\epsilon h} \int_S \frac{[u_3]^2}{\beta+2} \left(\beta+2 - 2 \left(\frac{[u_3]}{[u_3]_c} \right)^\beta \right) dS \quad (9.27)$$

et la formulation est :

$$\int_{\Omega^\pm} Tr(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{v}) d\Omega + \frac{R_{3333}}{\epsilon h} \int_S [u_3] \left(1 - \left(\frac{[u_3]}{[u_3]_c} \right)^\beta \right) [v_3] dS = \int_{\Gamma_f^\pm} \mathbf{f}_\epsilon^d \cdot \mathbf{v} d\Gamma. \quad (9.28)$$

⁴formellement ; nous supposons que tous les termes intégraux sont définis et que I est Gâteaux-différentiable.

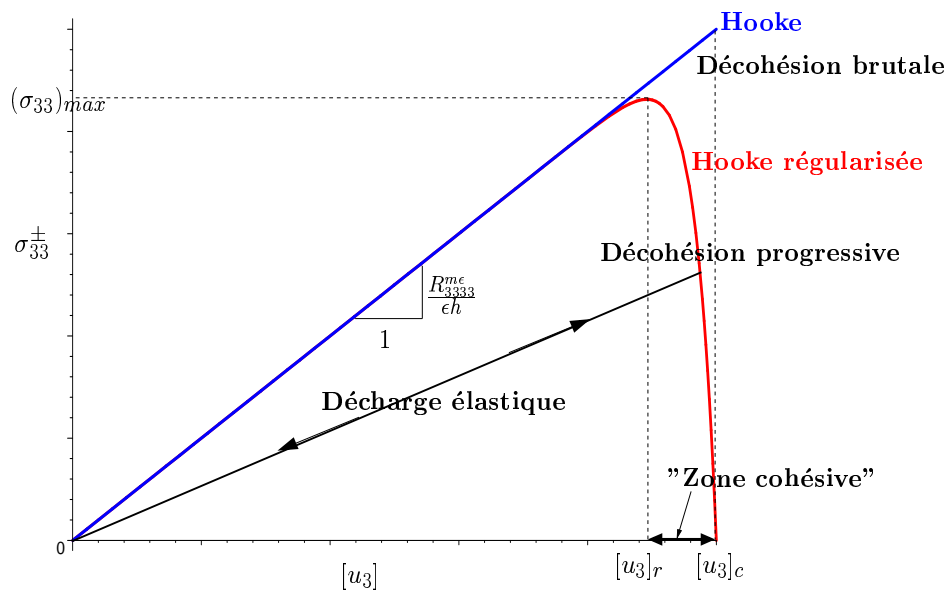


FIG. 9.3: Régularisation du modèle d'interphase issu de la loi de Hooke ($\beta = 30$)

Enfin, nous associons sans difficulté une formulation analogue à (9.4) ainsi que des dérivées lagrangiennes. Dans le cas où cette zone n'est pas négligeable ($[u_3]_r$ non proche de $[u_3]_c$), la littérature abonde de modèles régularisés, introduits dans de multiples contextes, évoquant l'appellation de lois d'interfaces⁵ endommageables. Citons ([ALFANO & CRISFIELD (2001)], [ALLIX & CORIGLIANO (1999)], [CHABOCHE *et al.* (2001)], [LADEVEZE (1992)], [POINT & SACCO (1996)], [TVERGAARD (1990)], [WELLS & SLUYS (2001)]) et leurs références. Tous ces modèles sont décrits par deux paramètres désignant un déplacement critique et une contrainte critique au-delà desquels le matériau entre dans un processus de dégradation irréversible. Ces deux paramètres dépendent d'une longueur caractéristique : dans le cas du délaminage de structures stratifiées, cette longueur correspond à l'épaisseur de la matrice située entre deux couches. Dans le cas d'une interface (fissure au sein d'un matériau homogène), l'interprétation de cette longueur caractéristique est évidemment plus difficile, certains des auteurs précédemment cités font intervenir des longueurs arbitrairement petites, qualifiées de longueurs microscopiques (typiquement $\delta = 10^{-3}mm$) : la séparation de deux points, à l'échelle macroscopique des maillages utilisés confondus de l'interface a lieu, non pas lorsque leur distance $[u_3]$ devient non nulle, mais lorsqu'elle excède une fraction donnée de δ , définie égale à $[u_3]_c$. En toute rigueur, ces modèles d'interphases sont inaptes à décrire la fissuration d'interface tel que cela a été fait dans la partie I. Naturellement, il est toujours possible, sur des cas simples [ROUDOLFF & OUSSET (2002)], d'identifier les deux paramètres de façon à ce que les résultats obtenus coïncident avec ceux issus des méthodes de la partie I. Mais cela reste peu satisfaisant pour l'esprit d'autant que les valeurs obtenues après identification ne semblent pas avoir un caractère intrinsèque [LÉVÊQUE (1996)]. D'autre part, ces nombreux modèles, contrairement aux modèles étudiés, souffrent d'aucune justification rigoureuse⁶. Ce point est ouvert et la question sous-jacente est la suivante : existe-t-il une densité d'énergie cohérente, et si oui laquelle, conduisant après analyse asymptotique, aux lois d'interphases utilisées dans les références citées

⁵il serait plus correct de dire lois d'interphases.

⁶Dans notre cas, les points de départ sont des densités d'énergie, conséquence du théorème de Rivlin-Erickssen.

ci-dessus ? ⁷ La loi obtenue avec la densité de Ciarlet-Geymonat est une réponse dans le cas des grandes déformations. Enfin, ces lois souffrent de lacunes numériques, liées pour certaines d'entre elles à la description géométrique du front. Dans ce travail, la description à l'aide de fonction spline est explicite et le maillage suit l'évolution du front de fissure. Les modèles de zone cohésive, où la description du front est implicite (analogue à (9.22)) à partir de valeurs locales en fond de fissure, nécessitent un maillage très raffiné alors que l'utilisation du taux de restitution analytique permet un maillage relativement grossier. Ce point explique le coût numérique très important de ces méthodes. Cependant, la loi de comportement adoptée et la description du front choisie étant deux notions différentes, il est parfaitement envisageable d'associer ce type de loi interfaciale et la description du front utilisée en déterminant les dérivées lagrangiennes associées. Cela permettrait de prendre en compte efficacement dans l'évolution du front des phénomènes non élastiques...

REMARQUE(S) 37 *Le modèle de rupture d'interphase présente dans sa forme des points communs avec les modèles de zone cohésive introduite par G.I. Barenblatt (voir remarque 24). Dans un cas, l'énergie totale s'écrit :*

$$E(\mathbf{u}, \gamma) = I_{\Omega^\pm}(\mathbf{u}, \gamma) + I_S([\mathbf{u}]) + D(\gamma) \quad [\text{Griffith} + \text{Interphase}] \quad (9.29)$$

tandis que dans l'autre cas, le "saut" est incorporé dans l'énergie de rupture, et est défini sur la partie délaminée :

$$E(\mathbf{u}, \gamma) = I_\Omega(\mathbf{u}, \gamma) + D(\gamma, [\mathbf{u}]) \quad [\text{Barenblatt} + \text{Interface}] . \quad (9.30)$$

ce qui lève, dans le cas de matériau homogène notamment, les problèmes de justifications évoqués précédemment. ■

9.3.3 Convergence vers les modèles d'interface parfaite

Oubliant dans ce paragraphe les origines des modèles élastiques, étudions leur limite lorsque l'épaisseur du joint tend vers zéro, les caractéristiques matériaux étant fixées. Nous raisonnons dans le cas de l'élasticité linéaire. L'énergie d'adhésion apparaît alors comme une condition de pénalisation de la condition d'interface parfaite $[\mathbf{u}] = 0$ sur S . Le développement, dans la formulation (8.81) (linéarisée) définie sur \hat{V}^1 , des champs selon $(\boldsymbol{\sigma}^\epsilon, \mathbf{u}^\epsilon) = (\boldsymbol{\sigma}^0, \mathbf{u}^0) + \epsilon(\boldsymbol{\sigma}^1, \mathbf{u}^1) + o(\epsilon)$, entraîne :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}^0 = \frac{1}{2}\mathbb{R}^\pm : (\nabla \mathbf{u}^0 + (\nabla \mathbf{u}^0)^T) ; \\ \int_{\Omega^\pm} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \nabla \mathbf{v}) d\Omega^\pm = \int_{\Gamma_f^\pm} \mathbf{f}^\pm \cdot \mathbf{v} d\Gamma \quad \forall \mathbf{v} \in V , \end{cases} \quad (9.31)$$

sur $V = \{\mathbf{v} \in \hat{V}^1 | \mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^3, \Omega = \Omega^+ \cup \Omega^- \cup S\}$, formulation associée au modèle d'interface parfaite. Ce résultat est justifié par le

THÉORÈME 11 *Lorsque ϵ tend vers zéro, les convergences suivantes ont lieu :*

- $\exists C \in \mathbb{R}_+^*$ tq $\|[\mathbf{u}^\epsilon]\|_{(L^2(S))^3} \leq C\epsilon$,
- $\mathbf{u}^\epsilon \rightarrow \mathbf{u}^0$ dans \hat{V}^1 ,

⁷[WU (1992)] offre peut-être une piste en évoquant des densités d'énergies du troisième gradient issues des travaux de Mindlin, faisant intervenir notamment un module de cohésion. Voir également [DESTUYNDER & NEVEU (1986)] pour une situation plastique.

- $\sigma^\epsilon \rightarrow \sigma^0$ dans $(\mathbb{L}_S^2(\Omega))^6$,
- $g^\epsilon(\theta) \rightarrow g^0(\theta)$ dans \mathbb{R} . ■

Preuve : La preuve des trois premiers points suit l'approche développée par J-L. Lions [LIONS (1973)], et nous renvoyons par exemple à [AIT MOUSSA (1996)]. Puis, selon $\theta \in (W^{1,\infty}(\overline{\Omega}))^3$, le passage à la limite dans le taux de restitution :

$$g^\epsilon(\theta) = -\frac{1}{2} \int_{\Omega^\pm} Tr(\sigma^\epsilon \cdot \nabla u^\epsilon) div \theta d\Omega^\pm + \int_{\Omega^\pm} Tr(\sigma^\epsilon \cdot \nabla u^\epsilon \cdot \nabla \theta) d\Omega^\pm - \frac{1}{2\epsilon h} \int_S \mathbb{R}_{i3i3}^m [u_i^\epsilon]^2 div \theta dS$$

conduit à :

$$g^\epsilon(\theta) \rightarrow g^0(\theta) = -\frac{1}{2} \int_{\Omega^\pm} Tr(\sigma^0 \cdot \nabla u^0) div \theta d\Omega^\pm + \int_{\Omega^\pm} Tr(\sigma^0 \cdot \nabla u^0 \cdot \nabla \theta) d\Omega^\pm. \quad \blacksquare \quad (9.32)$$

Les résultats numériques confirmeront ce résultat attendu. Naturellement, le même résultat est obtenu en partant du modèle complet sans faire d'hypothèse sur la rigidité de la colle. Les effets du joint apparaissent alors dans l'énergie et ses dérivées, au second ordre en ϵ . Cette étude est intéressante lorsque le taux de restitution g^0 est nul (par exemple à l'amorçage).

9.4 Applications

9.4.1 Solution analytique dans le cas d'une poutre linéaire

La première application concerne la résolution analytique dans le cas d'une poutre : deux poutres homogènes isotropes d'épaisseur η sont reliées par un adhésif d'épaisseur ϵh . L'assemblage est fixé en $x = 0$ et est soumis à un déplacement normal δ aux extrémités inférieure et supérieure des bras délaminés, en $x = L$ (voir figure 9.4).

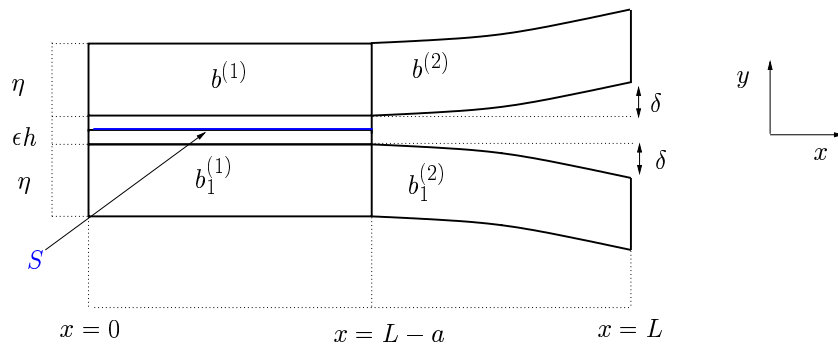


FIG. 9.4: Le problème de la poutre.

L'adhésif est ensuite représenté par une énergie d'adhésion définie sur sa surface moyenne S . Grâce à la symétrie du problème, le saut $[u_1]$ à travers S est identiquement nul de sorte que l'énergie de la structure est (pour mener à son terme le calcul analytique, nous négligeons les termes non linéaires

en la variable cinématique) :

$$I(u_2) = \int_0^{L-a} m^{(1)}(x) \frac{d^2 u_2^{(1)}(x)}{dx^2} dx + \int_{L-a}^L m^{(2)}(x) \frac{d^2 u_2^{(2)}(x)}{dx^2} dx + \frac{1}{2} \frac{E_3}{\epsilon h} \int_0^{L-a} [u_2(x)]^2 dx \quad (9.33)$$

où $m^{(i)} = \frac{E_i \eta^3}{12} \frac{d^2 u_2}{dx^2}$ désigne le moment de flexion ⁸, E_i le module d'Young de la poutre i et E_3 celui du joint, indépendant de ϵ . Les déplacements vérifient alors à l'équilibre les équations différentielles suivantes :

$$\frac{d^4 u_2^{(1)}(x)}{dx^4} + \frac{12E_3}{\epsilon h E_1 \eta^3} u_2^{(1)}(x) = 0 \quad x \in]0, L-a[\quad ; \quad \frac{d^4 u_2^{(2)}(x)}{dx^4} = 0 \quad x \in]L-a, L[\quad , \quad (9.34)$$

montrant que le déplacement $u_2^{(1)}$ (resp. $u_2^{(2)}$) est engendré par la base $\{e^{\pm\alpha x} \cos(\alpha x), e^{\pm\alpha x} \sin(\alpha x)\}$, $\alpha = (\frac{6E_3}{\epsilon h E_1 \eta^3})^{\frac{1}{4}}$ (resp. $\{1, x, x^2, x^3\}$). La figure 9.5 représente l'évolution du déplacement $u_2^{(1)} \equiv \frac{1}{2}[u_2^{(1)}]$ pour trois valeurs de ϵ et $a = 40\text{mm}$, $L = 80\text{mm}$, $\delta = 1\text{mm}$, $E_1 = E_2 = 150000\text{MPa}$, $E_3 = 4000\text{MPa}$, $\eta = 4\text{mm}$ et $h = 10\text{mm}$.

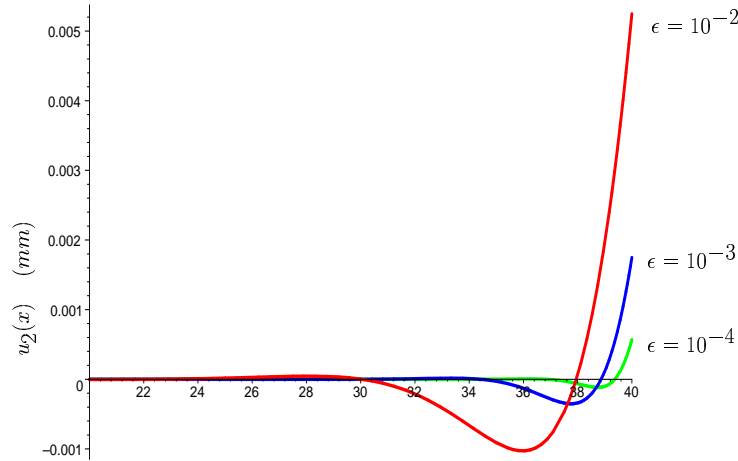


FIG. 9.5: $u_2(x) \equiv \frac{1}{2}[u_2](x)$, $x \in [20, L-a]$.

Le saut $[u_2]$ présente des oscillations près de la pointe de fissure, induites par le joint élastique. En certains points, le saut est même négatif ; cependant, la condition de préservation de l'orientation (8.17) est satisfaite. Ces oscillations en fond de fissure montrent que l'évolution de $[u_2]$ n'est pas monotone jusqu'à décohésion, et ce, en tout point non rompu de S . Par ailleurs, le taux de restitution, calculé pour une longueur a suffisante, est une fonction décroissante de a : la propagation de la pointe de fissure est stable, la présence du joint ne modifiant pas qualitativement les résultats du cas sans joint. Précisément, lorsque ϵ tend vers zéro, le modèle reproduit les résultats issus de la théorie de la mécanique de la rupture pour une interface parfaite. Sur cet exemple, le saut $[u_2]$ converge vers zéro à la vitesse $\sqrt{\epsilon}$ environ : $[u_2](x) = O(\epsilon^{0.496})$ (voir figure 9.6) et le taux de restitution g converge vers celui de l'interface parfaite g_{FM} à la vitesse $\epsilon^{\frac{1}{4}}$ environ : $g_{FM}(x) - g(x) = O(\epsilon^{\frac{1}{4}})$.

⁸les efforts résultants $n^{(i)}$ sont nuls.

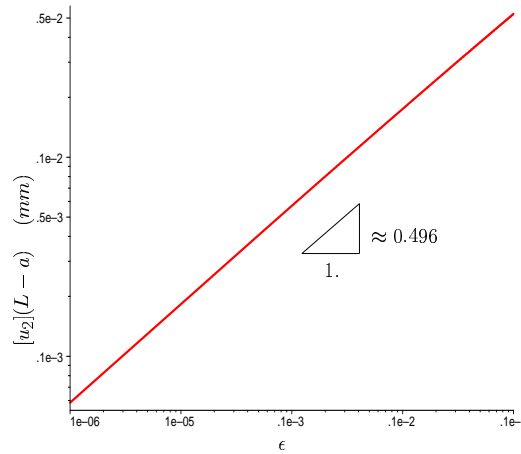


FIG. 9.6: $[u_2](L - a)$ vs. ϵ en échelle log-log.

9.4.2 Structure DCB - Front ouvert

Le second exemple concerne une éprouvette type D.C.B. composée, à l'image de la structure représentée par la figure (9.1), de deux adhérents parallélépipédiques identiques reliés par un joint de colle d'épaisseur ϵh . De façon similaire à l'exemple du paragraphe 6.1, la structure de longueur L , de largeur l , est encadrée sur l'une des extrémités et est soumise à un chargement d'ouverture sur les arêtes externes de l'autre extrémité. Nous simulons dans ce paragraphe l'amorçage de la rupture du joint. Certains résultats se placent dans le cas isotrope (tableau 9.1) ou le cas d'un stratifié unidirectionnel (voir tableau 8.2).

E^\pm	ν^\pm	E^m	ν^m	L	l	h	ϵh
150000MPa	0.3	4000MPa	0.35	80mm	30mm	2mm	0.1mm

TAB. 9.1: Caractéristiques géométriques et matériaux.

EVOLUTION DU SAUT $[u_3]$ ET COMPARAISON DES EXPRESSIONS INTÉGRALE ET CURVILIGNE DE G

Supposons que la structure présente une fissure de front $\gamma_f = \{x_f, y \in [0, l], z = 0\}$. La figure 9.7 représente, pour le modèle issu de \check{W}_{SV} , l'évolution de la troisième composante du saut $[u_3]$ le long du segment $]x_f - 6, x_f[\times \frac{l}{2}$ de la surface moyenne, pour $x_f = 50mm$ et une valeur de pilotage $u_d = 1mm$. Le modèle issu de \check{W}_{CG}^ϵ fournit des résultats très proches.

L'évolution obtenue du saut devant le front est conforme aux résultats analytiques (fig. 9.5). La figure 9.8 représente pour la même configuration, la force de délaminage, dans le cas de Saint Venant-Kirchhoff, calculée avec l'expression analytique (9.6) (G_2 sur la figure) et la même quantité déduite selon (5.49) du taux de restitution calculé selon la relation (9.5) (G_1 sur la figure). Une bonne concordance est à nouveau obtenue. La figure 9.9 concerne le cas unidirectionnel. La force de délaminage varie moins le long du front. Dans ce cas, il en résulte que le front de fissure associé reste quasiment rectiligne au cours de la propagation avec un léger effet de bord aux extrémités.

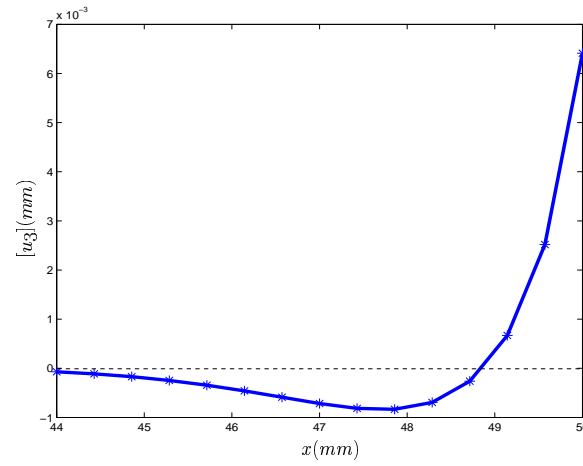


FIG. 9.7: Saut $[u_3]$ sur la ligne $x_f - 6, x_f \times \frac{l}{2}$.

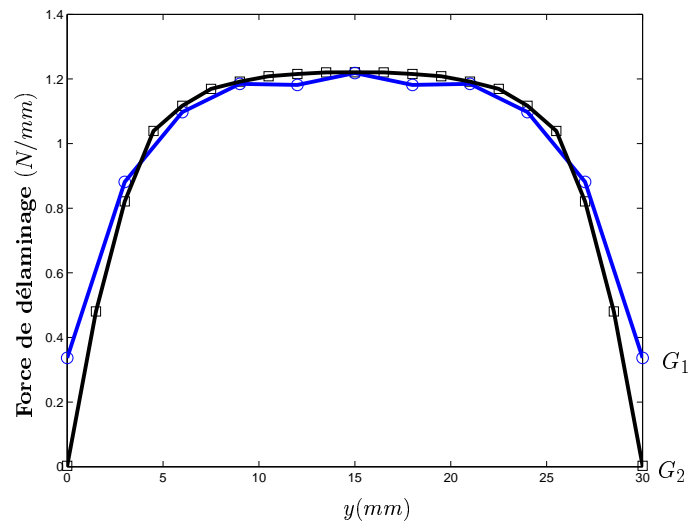


FIG. 9.8: Force de délaminage le long du front - Comparaison des expressions intégrale (G_1) et curviligne (G_2) - Cas isotrope.

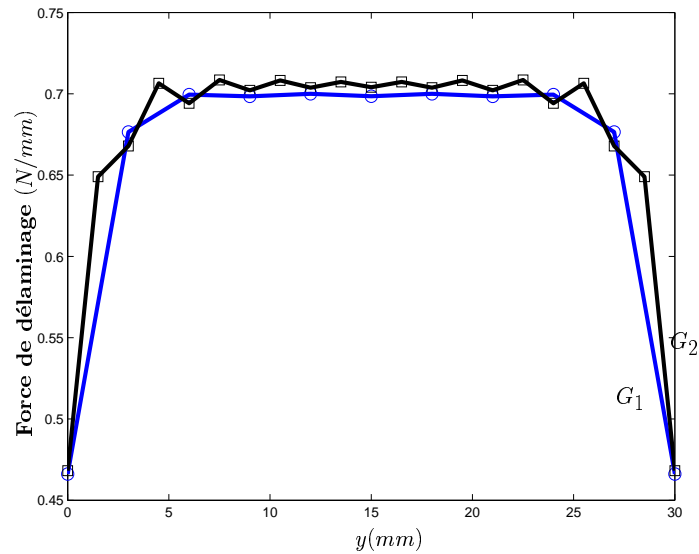


FIG. 9.9: Force de délaminage le long du front - Comparaison des expressions intégrale (G_1) et curviligne (G_2) - Cas unidirectionnel.

DÉTERMINATION DES VALEURS CRITIQUE D'AMORÇAGE

Envisageons maintenant le cas de l'amorçage de la rupture du joint correspondant à $x_f = 80mm$. Plaçons-nous dans le cas isotrope. Les deux arêtes inférieure et supérieure sont chargées et nous imposons que les nœuds situés sur ces arêtes ont même composante selon z , égale à $u_d = 0.009mm$. La figure 9.10 représente la force de délaminage le long de γ . Compte tenu des conditions aux limites, cette force varie très peu. Le taux moyen est égal à $G = 0.3398N/mm$, valeur que nous adoptons (arbitrairement) pour taux de restitution critique, faisant de $0.009mm$ le déplacement critique d'amorçage, noté u_{dc} .

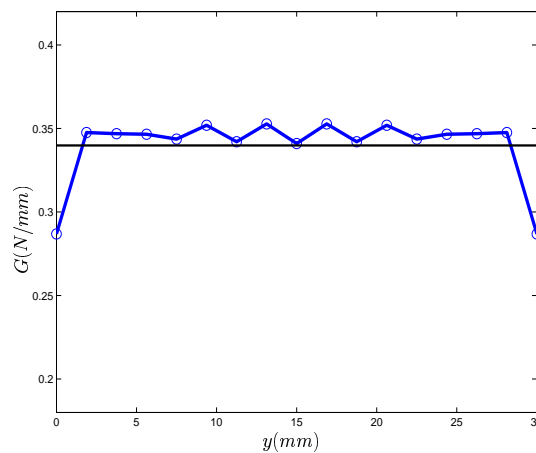


FIG. 9.10: Force de délaminage pour $x_f = 80$.

Le tableau 9.2 résume les autres valeurs critiques correspondantes,

u_{dc}	$[u_3]_c$	G_c	σ_{33c}
0.009mm	0.00320mm	0.3398N/mm	209.239MPa

TAB. 9.2: Valeur critique d'amorçage au point (80., 15., 0.).

soit une déformation critique $E_{33} = \frac{[u_3]}{\epsilon h} + \frac{1}{2} \frac{[u_k][u_k]}{(\epsilon h)^2}$ égale à 3.25%. Les figures 9.11 et 9.12 représentent les isovaleurs de la troisième composante du déplacement et de la déformation E_{33} sur la position déformée. Compte tenu des conditions de symétrie, la structure n'est pas maillée sur toute sa longueur mais seulement dans un voisinage de l'extrémité chargée.

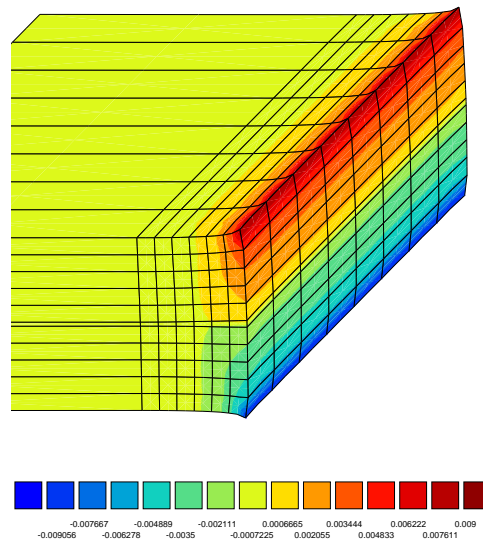


FIG. 9.11: Déplacement u_3 juste avant amorçage (déformée $\times 20$).

Dans cet exemple, la valeur du taux de restitution critique a été prise arbitrairement dans l'intervalle $[0.3N/mm, 0.4N/mm]$, intervalle généralement obtenu pour les matériaux composites usuels (voir [ROBINSON & SONG (1992)] pour la DCB). Pour cet intervalle, des valeurs importantes de E_{33c} à rupture sont obtenues, montrant l'importance de la prise en compte de termes non linéaires. Pour les assemblages collés, cette situation est accentuée : selon [CHAI (1986)] où des déformations E_{33} de l'ordre de 5% sont obtenues, le taux de restitution critique est une fonction croissante de l'épaisseur et de la souplesse du joint. Si nous notons $G^H \equiv \frac{1}{2\epsilon h} R_{1313}^m [u_l]^2$ la force de délaminage obtenue avec la loi de Hooke et si nous négligeons $[u_\alpha]$ devant $[u_3]$, il apparaît que l'écart relatif :

$$\frac{G-G^H}{G^H} = \frac{[u_3]}{\epsilon h} + \frac{1}{4} \left(\frac{[u_3]}{\epsilon h} \right)^2 \approx E_{33} \quad (9.35)$$

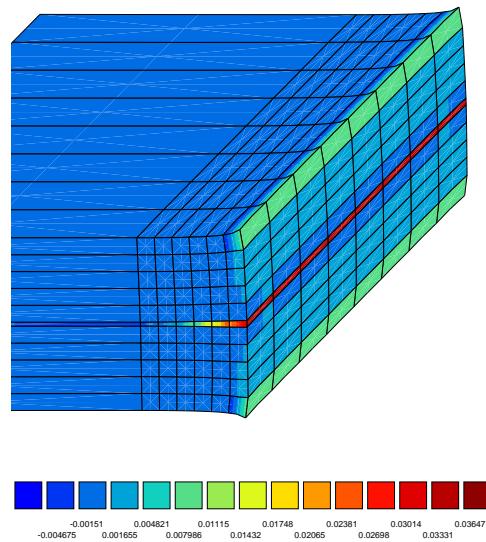


FIG. 9.12: Déformation E_{33} juste avant amorçage (déformée $\times 20$).

est de l'ordre de la déformation prédominante E_{33} et est ainsi non négligeable. Enfin l'inégalité $G > G^l$ montre que le facteur de charge critique obtenu avec la loi de Hooke est supérieur à celui obtenu avec la loi non linéaire, laquelle anticipe ainsi mieux la rupture du joint.

MODÉLISATION DU PROCESSUS D'AMORCAGE ET ÉTUDE DE LA STABILITÉ DU FRONT

La valeur du déplacement critique étant connue, modélisons le processus d'amorçage. A cet effet, soit un front de la surface moyenne arbitrairement proche du "front" de fissure initial - par exemple $x_f = 79mm$ - puis appliquons l'algorithme de propagation, la valeur de u_d étant fixée. Le vecteur force de délaminage $\mathbf{f} = (f_t, f_n)$ est décrit dans le tableau 9.3, aux nœuds du front de coordonnées $(x_1, x_2, 0)$.

$x_1(mm)$	$x_2(mm)$	$f_t(N/mm)$	$f_n(N/mm)$
$0.79000E + 02$	$0.00000E + 00$	$-0.86736E - 18$	$0.44859E + 00$
$0.79000E + 02$	$0.37500E + 01$	$0.53140E - 02$	$0.62427E + 00$
$0.79000E + 02$	$0.75000E + 01$	$-0.28852E - 02$	$0.61004E + 00$
$0.79000E + 02$	$0.11250E + 02$	$0.12220E - 02$	$0.61162E + 00$
$0.79000E + 02$	$0.15000E + 02$	$-0.52832E - 07$	$0.61212E + 00$
$0.79000E + 02$	$0.18750E + 02$	$-0.12220E - 02$	$0.61162E + 00$
$0.79000E + 02$	$0.22500E + 02$	$0.28852E - 02$	$0.61004E + 00$
$0.79000E + 02$	$0.26250E + 02$	$-0.53140E - 02$	$0.62427E + 00$
$0.79000E + 02$	$0.30000E + 02$	$0.00000E + 00$	$0.44859E + 00$

TAB. 9.3: Force de délaminage ($x_f = 79mm$; $u_d = 0.009mm$).

17 nœuds sont placés sur le front, un sur deux étant un nœud spline. La norme de la force de délaminage est supérieure en tout point du front à G_c . Les valeurs propres de la matrice d'ordre 11 associée à l'opérateur $E^{(2)}$ sont décrites dans le tableau 9.4

$1.2240054323204851E - 3$	0.165004082423868	0.625684242086128
-0.3838907999738166	0.08500566404097587	0.7114415481271491
0.24763026077867855	0.3586128384419768	0.4747752536639963
0.10040179712888919	$1.2689490568050798E - 3$	

TAB. 9.4: Valeurs propres de $[E^{(2)}]$.

L'élément négatif indique ici le caractère instable de la position du front, conséquence de l'instabilité du processus d'amorçage ($x_f = 80mm$). Le calcul du déplacement du front par résolution du système (5.39) fournit alors les résultats du tableau 9.5.

$x_1(mm)$	$x_2(mm)$	$\theta_t(mm)$	$\theta_n(mm)$
$0.79000E + 02$	$0.00000E + 00$	$0.00000E + 00$	$-0.24201E + 01$
$0.79000E + 02$	$0.37500E + 01$	$-0.47802E - 14$	$-0.25228E + 01$
$0.79000E + 02$	$0.75000E + 01$	$0.93203E - 14$	$-0.24595E + 01$
$0.79000E + 02$	$0.11250E + 02$	$0.44048E - 14$	$-0.23247E + 01$
$0.79000E + 02$	$0.15000E + 02$	$0.00000E + 00$	$-0.14309E + 01$
$0.79000E + 02$	$0.18750E + 02$	$0.00000E + 00$	$-0.23247E + 01$
$0.79000E + 02$	$0.22500E + 02$	$-0.13980E - 13$	$-0.24595E + 01$
$0.79000E + 02$	$0.26250E + 02$	$0.00000E + 00$	$-0.25228E + 01$
$0.79000E + 02$	$0.30000E + 02$	$0.00000E + 00$	$-0.24201E + 01$

TAB. 9.5: Déplacement du front obtenu avec la matrice $[E^{(2)}]$.

Le signe du déplacement normal du front θ_n illustre que, malgré une force de délaminage suffisante, la fissure se referme. L'algorithme de Newton, en raison de cette valeur négative, démarre dans le "mauvais sens". Pour y remédier, remplaçons l'opérateur dérivée seconde par l'opérateur identité. Dans ce cas, le déplacement du front est proportionnel en norme L^2 à $G - G_c$ et les résultats obtenus sont reportés dans le tableau 9.6.

$x_1(mm)$	$x_2(mm)$	$\theta_t(mm)$	$\theta_n(mm)$
$0.79000E + 02$	$0.00000E + 00$	$0.00000E + 00$	$0.47466E + 00$
$0.79000E + 02$	$0.37500E + 01$	$0.17091E - 14$	$0.90201E + 00$
$0.79000E + 02$	$0.75000E + 01$	$-0.38522E - 14$	$0.10165E + 01$
$0.79000E + 02$	$0.11250E + 02$	$-0.19365E - 14$	$0.10220E + 01$
$0.79000E + 02$	$0.15000E + 02$	$0.00000E + 00$	$0.10226E + 01$
$0.79000E + 02$	$0.18750E + 02$	$0.00000E + 00$	$0.10220E + 01$
$0.79000E + 02$	$0.22500E + 02$	$0.57782E - 14$	$0.10165E + 01$
$0.79000E + 02$	$0.26250E + 02$	$0.00000E + 00$	$0.90201E + 00$
$0.79000E + 02$	$0.30000E + 02$	$0.00000E + 00$	$0.47466E + 00$

TAB. 9.6: Déplacement du front obtenu avec la matrice identité.

Deux itérations suffisent alors pour obtenir, après déplacement des nœuds du front, les résultats des tableaux 9.7, 9.8 et 9.9.

$x_1(mm)$	$x_2(mm)$	$f_t(N/mm)$	$f_n(N/mm)$
$0.78505E + 02$	$-0.11102E - 15$	$0.40837E - 01$	$0.31091E + 00$
$0.78179E + 02$	$0.37500E + 01$	$0.49022E - 02$	$0.33500E + 00$
$0.78183E + 02$	$0.75000E + 01$	$-0.39349E - 02$	$0.33619E + 00$
$0.78200E + 02$	$0.11250E + 02$	$0.14423E - 02$	$0.33817E + 00$
$0.78198E + 02$	$0.15000E + 02$	$0.16979E - 06$	$0.33913E + 00$
$0.78200E + 02$	$0.18750E + 02$	$-0.14427E - 02$	$0.33817E + 00$
$0.78183E + 02$	$0.22500E + 02$	$0.39363E - 02$	$0.33619E + 00$
$0.78179E + 02$	$0.26250E + 02$	$-0.49033E - 02$	$0.33500E + 00$
$0.78505E + 02$	$0.30000E + 02$	$-0.40839E - 01$	$0.31092E + 00$

TAB. 9.7: Force de délaminage après convergence.

$8.579131918055038E - 4$	0.07272848627355699	0.48963142118865443
0.4383482840971279	0.0601131565968972	-0.058333145131107655
0.11795386089591009	0.33897631779681414	0.2563536336902895
0.1757333811617826	$8.306069520125359E - 4$	

TAB. 9.8: Valeurs propres de la matrice $[E^{(2)}] \equiv [I^{(2)}]$.

$x_1(mm)$	$x_2(mm)$	$\theta_t(mm)$	$\theta_n(mm)$
$0.78505E + 02$	$-0.11102E - 15$	$0.43485E - 02$	$0.33107E - 01$
$0.78179E + 02$	$0.37500E + 01$	$0.63175E - 03$	$0.18094E - 01$
$0.78183E + 02$	$0.75000E + 01$	$0.11087E - 03$	$-0.84801E - 02$
$0.78200E + 02$	$0.11250E + 02$	$-0.12411E - 05$	$-0.46052E - 02$
$0.78198E + 02$	$0.15000E + 02$	$-0.31218E - 09$	$-0.20708E - 02$
$0.78200E + 02$	$0.18750E + 02$	$0.12431E - 05$	$-0.46023E - 02$
$0.78183E + 02$	$0.22500E + 02$	$-0.11084E - 03$	$-0.84761E - 02$
$0.78179E + 02$	$0.26250E + 02$	$-0.63160E - 03$	$0.18090E - 01$
$0.78505E + 02$	$0.30000E + 02$	$-0.43480E - 02$	$0.33103E - 01$

TAB. 9.9: Déplacement du front après convergence.

Les valeurs du tableau 9.9 indiquent une force de délaminage par unité de longueur de l'ordre de G_c et un déplacement de front oscillant suivant les points autour de zéro. Le spectre présente encore une valeur négative très faible, que l'on peut attribuer à un maillage trop grossier (3012 nœuds). Un nombre important de nœuds représentant le front est nécessaire pour obtenir un front stable en tous points. La figure 9.13 représente l'évolution de la valeur propre négative en fonction

de la progression simulée (en pratique cette progression est instantanée) du front. Si cependant, l'algorithme n'est pas arrêté, le front converge très lentement et de façon alternée vers le front cherché, la plus faible valeur propre de l'opérateur $E^{(2)}$ valant $-0.056970110730768575\dots$

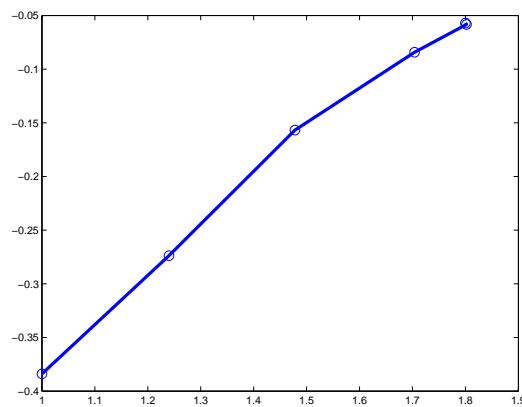


FIG. 9.13: Plus faible valeur propre en fonction de la distance du point central du front à l'arête chargée.

Finalement, l'examen de la colonne x_1 du tableau 9.9 nous indique que la fissure s'est brutalement propagée sur une longueur de 1.8mm environ, le front obtenu étant légèrement courbé aux extrémités⁹. Les figures 9.14 et 9.15 représentent les isovaleurs de u_3 et E_{33} , à l'équilibre retrouvé

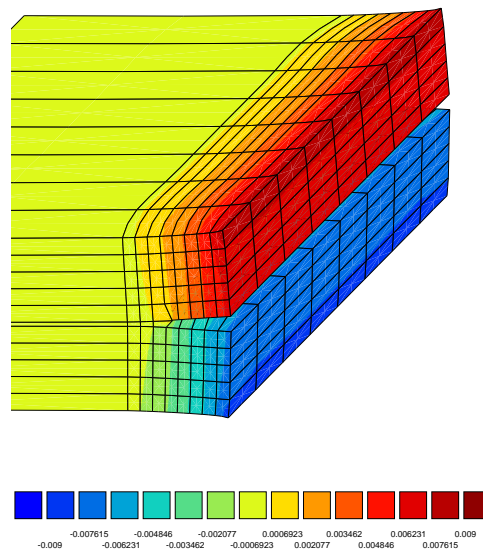


FIG. 9.14: Déplacement u_3 juste après amorçage (déformée $\times 20$).

⁹L'épaisseur de la structure est un facteur de cette longueur d'amorçage. Dans [KRASUCKI *et al.* (2002)], un calcul similaire conduit à une première extension de longueur de l'ordre de 2.65mm pour une épaisseur double.

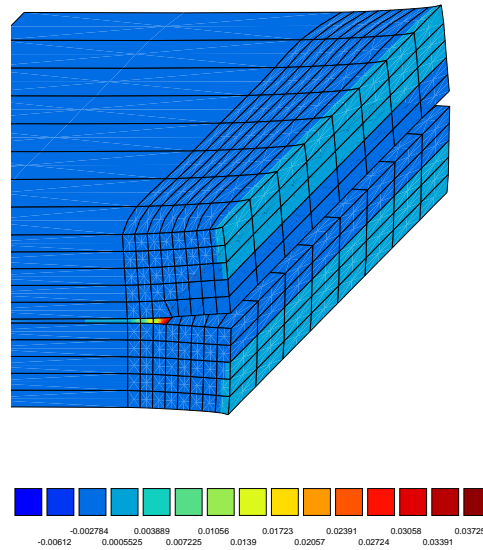


FIG. 9.15: Déformation E_{33} juste après amorçage (déformée $\times 20$).

EVOLUTION ET LIMITE EN L'ÉPAISSEUR ϵh DU TAUX DE RESTITUTION EN FONCTION DE L'AIRE DÉLAMINÉE

L'examen de la stabilité peut également se faire sur l'évolution de la force de délaminage en fonction de l'aire de la fissure. A cet effet, la figure 9.16 représente cette force au point central du front, en fonction de la distance de ce point à l'extrémité chargée. Les calculs sont effectués ici en supposant que le front reste rectiligne. Compte tenu de la figure 9.10, cette approximation est correcte. Le chargement étant maintenu constant, la figure est conforme aux résultats précédents, mettant en évidence l'instabilité de la position du front à l'amorçage ainsi que sur une faible longueur. Négligeant les effets d'inertie, la progression du front s'arrête lorsque la force de délaminage devient inférieure à G_c . Nous retrouvons alors une première extension de fissure de l'ordre de $1.8mm$. Au-delà de cette extension, la propagation devient stable et le reste ¹⁰. Compte tenu des relations (8.79), le saut $[u_3]$ et la contrainte σ_{33} , prédominants ici, possèdent une évolution similaire à celle de G (Figures 9.17 et 9.18)

Les figures 9.17 et 9.18 illustrent également la convergence du modèle d'interface élastique (ou interphase) vers le modèle interface parfaite, la rigidité des constituants étant fixée. L'abscisse a représente la distance du nœud du front de seconde coordonnée $x_2 = \frac{l}{2}$ à la droite d'équation $x_1 = 80mm$. Nous vérifions que $[u_3^\epsilon](a)$ converge vers zéro avec ϵ et que $\sigma_{33}^\epsilon(a)$ explose, sauf en $a = 0$. Sortant ainsi des hypothèses initiales, le modèle de joint de colle doit être simplement vu comme un modèle de pénalisation du modèle d'interface parfaite. Pour ϵ faible, nous écrivons :

$$[u_3^\epsilon](a) \approx K(a)(\epsilon h)^{\alpha(a)}, \quad (9.36)$$

l'exposant α dépendant de la longueur de la fissure a . En vertu de la relation $\sigma_{33}^\epsilon(a) = \frac{R_{3333}}{\epsilon h}[u_3^\epsilon](a)$, et du fait que $\sigma_{33}^\epsilon(a)$ explose sauf en zéro, il apparaît que $\alpha(a) \leq 1$ et $\alpha(0) = 1$ fournissant $K(a) \approx \frac{\sigma_{33}^\epsilon(0)}{R_{3333}}$. Cela est conforme aux résultats analytiques du paragraphe 9.4.1 ($\alpha(40) \approx 0.496$)

¹⁰Lorsque la longueur de fissure est suffisamment grande, l'évolution de la force de délaminage devient conforme à celle obtenue analytiquement pour la poutre.

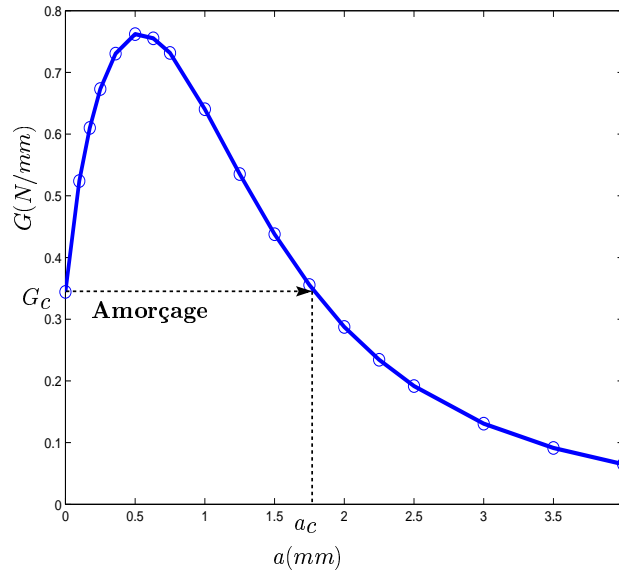


FIG. 9.16: Force de délaminage au point (80. – $a, l/2$) en fonction de a ($\epsilon h = 0.1mm$).

et n'est pas en contradiction avec les résultats de convergence numérique déterminés au chapitre 8, la définition de convergence étant ici différente. Les calculs numériques fournissent ici en $a = 0$, $[u_3^\epsilon](0) = 0.0312(\epsilon h)^{0.967}$, et donc $[\sigma_{33}^\epsilon](0) = 203.50(\epsilon h)^{-0.035}$, soit $\alpha(0) = 0.967$. L'obtention de la valeur 1 requiert probablement un maillage plus fin. La figure 9.19 représente l'évolution du taux de restitution pour ces mêmes valeurs de ϵ , comparés au taux de restitution obtenu sans la présence du joint. Contrairement au saut et à la contrainte, la convergence du taux n'est pas monotone quelle que soit la valeur de a , mais alternée. Les résultats numériques indiquent que α est une fonction, égale à 1 en zéro, décroissante puis croissante vers 1 par valeur inférieure. Lorsque a est suffisamment grand, la présence du joint limite la propagation, la force de délaminage étant plus faible. Enfin, pour $a = 0$, nous vérifions que la force de délaminage converge vers zéro à la vitesse ϵh :

$$G^\epsilon(0) \approx \epsilon h \frac{1}{2R_{3333}} (\sigma_{33}^0(0))^2. \quad (9.37)$$

Lorsque ϵh tend vers zéro, la structure ne présentant pas de fissure, la quantité $(\epsilon h)^{-1}G^\epsilon$ qui peut s'interpréter comme la pente de G à l'origine, converge vers la quantité $\frac{1}{R_{3333}}(\sigma_{33}^0(0))^2$. Ainsi, pour une épaisseur de joint suffisamment faible, la quantité pertinente à étudier semble être non pas G^ϵ mais $\epsilon^{-1}G^\epsilon(0)$ ou de façon équivalente $\sigma_{33}^0(0)$. Dans le cas où les adhérents n'ont pas les mêmes caractéristiques géométriques, la contrainte est singulière en $a = 0$ ($\alpha(0) < 1$) et la quantité pertinente semble être non pas G^ϵ mais $\epsilon^{1-2\alpha(0)}G^\epsilon(0)$. Par exemple, pour $E^+ = 150000MPa$ et $E^- = 120000MPa$, le calcul fournit $\alpha(0) \approx 0.912$.

EVOLUTION DE L'ÉNERGIE TOTALE EN FONCTION DE L'AIRE DÉLAMINÉE

La figure 9.20 représente l'évolution de l'énergie totale et de l'énergie mécanique (réduite ici simplement à l'énergie de déformation), en fonction de la distance du front à l'extrémité chargée (ou de façon équivalente, le front étant maintenu rectiligne, en fonction de l'aire délaminée).

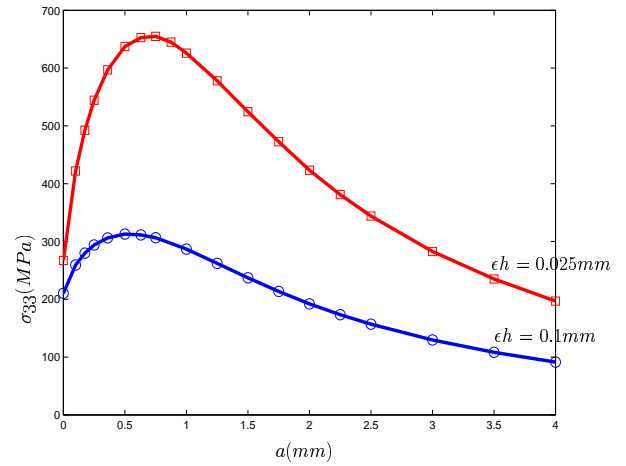
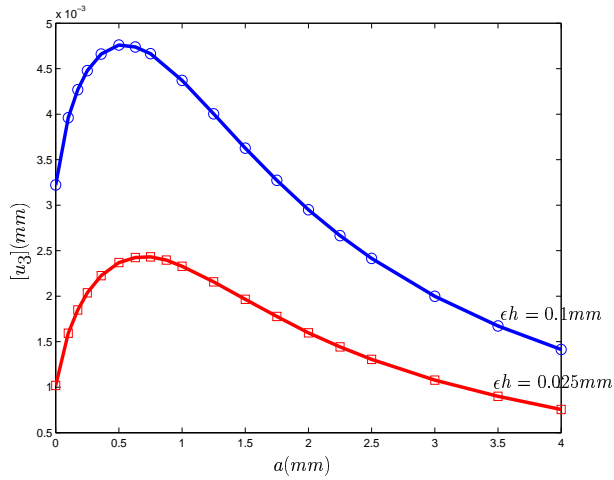


FIG. 9.17: Saut $[u_3]$ au point $(80. - a, 15.)$ en fonction de a .

FIG. 9.18: Contrainte σ_{33} au point $(80. - a, 15.)$ en fonction de a .

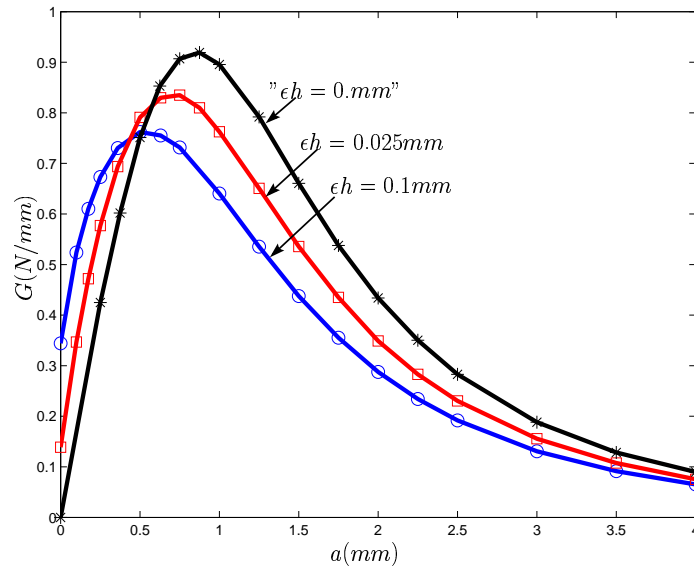


FIG. 9.19: Force de délaminage au point $(80. - a, 15.)$ en fonction de a .

L'énergie totale est $E(a, \mathbf{u}) = I(a, \mathbf{u}) + G_{cal}$. Comme attendu, l'énergie totale présente un minimum, autour de $a_c = 1.8mm$, à l'équilibre retrouvé, après amorçage. En revanche, il apparaît clairement que **l'énergie n'est pas conservée**. Cela est du à la non nullité de la force de délaminage $G^c(0)$ à l'amorçage. En effet, l'énergie mécanique dans un voisinage de $a = 0$, s'écrit :

$$I(\mathbf{u}, a) = I(\mathbf{u}, 0) - G(\mathbf{u}, 0)a + K(\mathbf{u})a^2 + o(a^2), \quad (9.38)$$

où $K(\mathbf{u})$ est négatif (cela résulte de l'instabilité). L'énergie totale est alors :

$$E(\mathbf{u}, a) = I(\mathbf{u}, 0) + (G_c - G(\mathbf{u}, 0))a + K(\mathbf{u})a^2 + o(a^2). \quad (9.39)$$

Si l'amorçage est simulé pour $G(\mathbf{u}, 0) = G_c$, alors le premier minimum de E par rapport à ses deux arguments ne peut assurer la conservation de l'énergie totale. Si nous avons imposé la conservation de l'énergie à l'amorçage, alors le déplacement critique aurait été inférieur à celui obtenu ici. D'une part, cela signifie que la présence de la colle retarde l'amorçage par rapport au cas de l'interface parfaite (la colle absorbant une partie de l'énergie), et confirme d'autre part, que le critère en taux de restitution (valable avec un joint) utilisé ici est différent du critère d'amorçage de la partie I. **Seul un taux de restitution critique à l'amorçage plus faible (dépendant de σ_{33}^0 selon 9.37) que le taux de restitution critique de propagation G_c peut assurer la conservation de l'énergie totale.** Par ailleurs, une partie de cet écart δE d'énergie peut être attribuée à la variation (positive) de l'énergie cinétique, négligée dans cette étude.

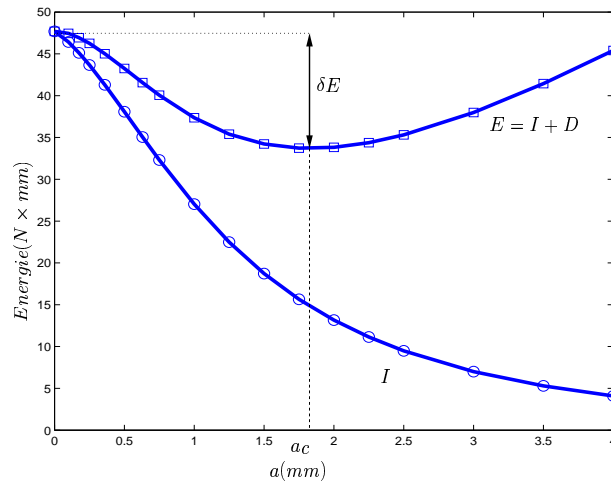


FIG. 9.20: Evolution de l'énergie en fonction de la distance du front à l'extrémité chargée ($\epsilon h = 0.1mm$).

9.4.3 Assemblage circulaire troué

Nous considérons un assemblage circulaire de rayon $R = 120mm$ ¹¹, composé de deux plaques d'épaisseur $\frac{e_p}{2} = 1.5mm$ jointes par une couche d'épaisseur $0.1mm$. La structure présente un trou elliptique H en son centre : $H = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} < 1\}$, $b \leq a < R$ (figure 9.21).

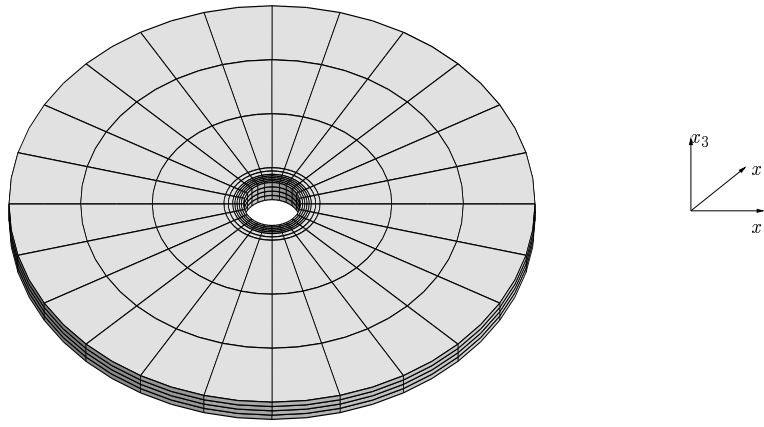


FIG. 9.21: Assemblage troué (4608 nœuds).

L'assemblage est encasté sur la frontière extérieure $\Gamma_u = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3), x_1^2 + x_2^2 = R^2, x_3 = \pm \frac{e_p}{2}\}$ et soumis à un chargement linéique normal $\mathbf{f} = (0, 0, f_3^\pm)$ le long de $\Gamma_f^\pm = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3), \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} < 1, x_3 = \pm \frac{e_p}{2}\}$. En raison de ces conditions aux limites, le joint va se rompre sur la ligne $\partial H \cap S$. Les caractéristiques matériaux sont reportées dans le tableau 9.10. Le premier calcul concerne le cas d'un trou circulaire. Le processus de rupture est très similaire à celui détaillé sur la D.C.B. dans le paragraphe précédent. Le taux de restitution étant constant le long de $\partial H \cap S$, lorsque la variable de contrôle u_d excède la valeur critique u_{dc} , un front de fissure circulaire de rayon r est créé. Puis, la croissance est stable et le front reste circulaire. Les valeurs critiques d'amorçage adoptées sont répertoriées dans le tableau 9.11.

E^\pm	E^m	ν^\pm	ν^m	G_c
150000MPa	4000MPa	0.3	0.35	0.373N/mm

TAB. 9.10: Caractéristiques géométriques et matériaux.

u_{dc}	$[u_3]_c$	G_c	σ_{33c}	r_c
0.0106mm	0.00346mm	0.397N/mm	225.975MPa	15.691mm

TAB. 9.11: Valeurs critiques d'amorçage.

La figure 9.22 décrit l'évolution du facteur de charge (partie gauche) et du rayon r (partie droite) du front en fonction de la valeur de pilotage.

Dans le cas d'un trou elliptique ($a > b$), le taux de restitution de l'énergie varie le long de $\partial H \cap S$, comme l'indique la figure 9.23 (partie gauche), reportant sa valeur sur le premier quadrant $\{(x_1, x_2) = (a \cos \alpha, b \sin \alpha), \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]\}$ de $\partial H \cap S$. Ces calculs sont obtenus avec les valeurs $a = 18mm$, $b = 13mm$ et $u_d = 0.0101mm$.

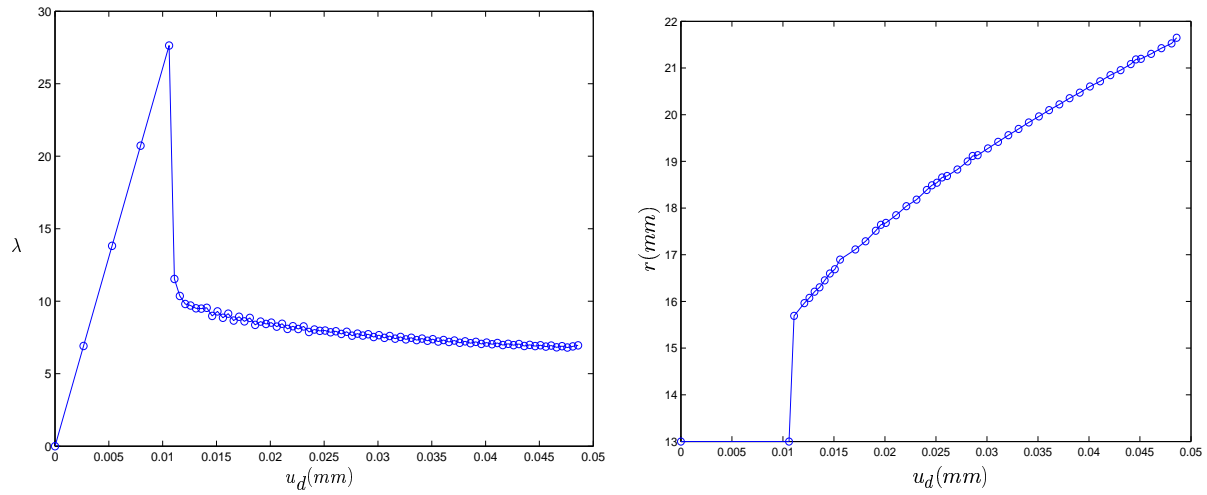


FIG. 9.22: Evolution du facteur de charge et du rayon r en fonction du déplacement imposé.

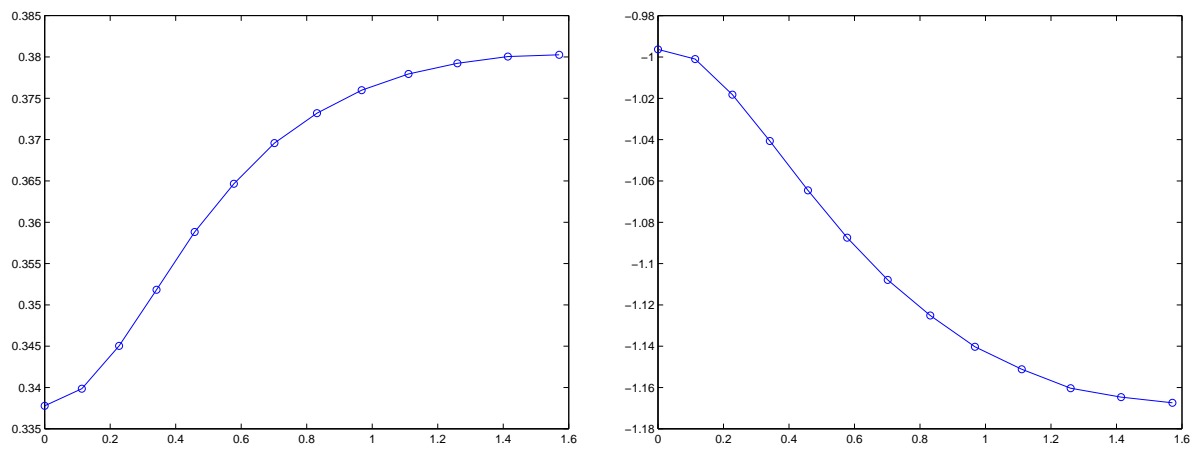


FIG. 9.23: Evolution de la force de délaminage $G(a \cos \alpha, b \sin \alpha)$ et de l'opposé de sa dérivée normale $-\frac{\partial G}{\partial \alpha} |_{\partial H} \cdot \nu$ en fonction de l'angle $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Le taux de restitution critique est atteint en premier aux points $(0, \pm b)$ correspondant à $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$. Cependant, le caractère instable du front à l'amorçage assure la rupture du joint sur toute sa frontière. Par ailleurs, pour ce type de chargement, la forme elliptique du front accroît l'instabilité. Comme l'indique la figure 9.23 (partie droite), l'opposé de la dérivée normale de la force de délaminage G au point $(a\cos(\alpha), b\sin(\alpha))$ du front, négatif le long $\partial H \cap S$ atteint son minimum en $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$ où la force G atteint son maximum. En conséquence, le déplacement (normal) du front en ces points est maximum. Les différentes positions du front, en fonction de la valeur de pilotage, sont décrites sur la figure 9.24. Le front conserve une forme elliptique avec un rapport $\frac{a}{b}$ décroissant vers la valeur 1.06 approximativement.

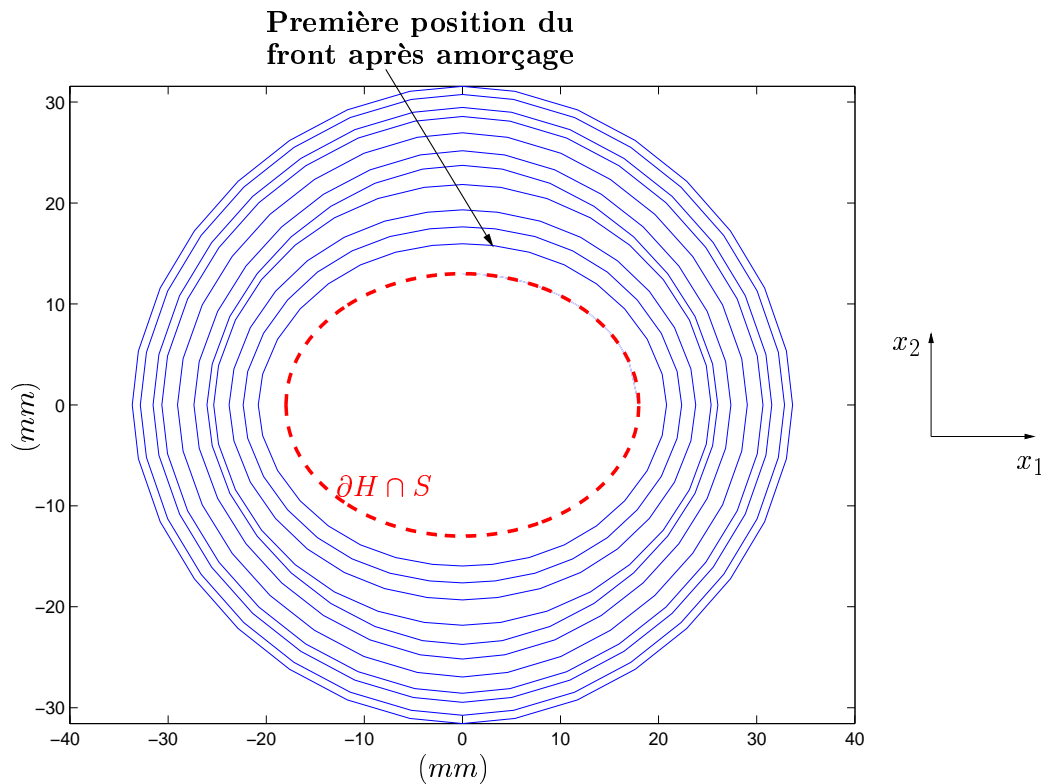
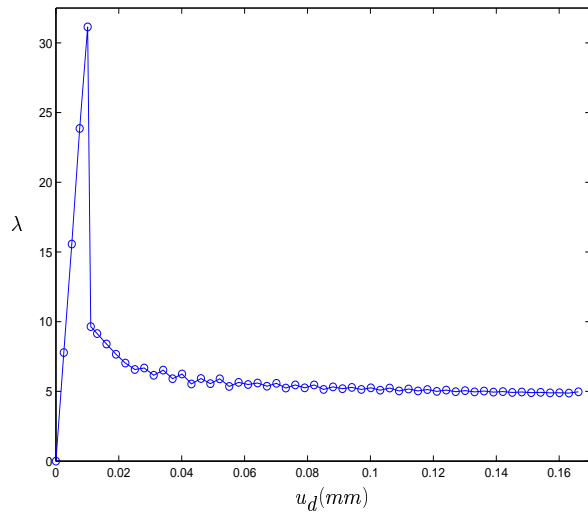
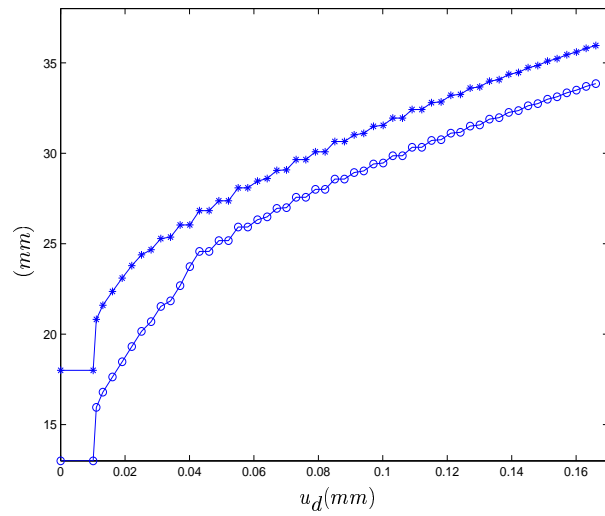


FIG. 9.24: Positions du front pour $u_d = 0.0101, 0.0131, 0.0191, 0.0251, 0.0371, 0.0431, 0.0551, 0.0701, 0.0911, 0.1031, 0.1211(mm)$.

Les variations du facteur de charge et la distance de deux points du front en fonction de u_d sont respectivement données sur les figures 9.25 et 9.26.

¹¹Nous reproduisons ici certains résultats numériques de [KRASUCKI *et al.* (2002)]

FIG. 9.25: λ en fonction de u_d .FIG. 9.26: Distance du front à ∂H en fonction de u_d : \circ :point $\alpha = 0$; * :point $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Chapitre 10

Multi-délamination

Nous simulons dans ce dernier chapitre la propagation simultanée de deux fronts de fissure, ouverts, puis internes selon deux surfaces parallèles. Le modèle de propagation présenté au chapitre 5 se généralise sans difficulté au cas de plusieurs fissures. Nous mettons en évidence, sur quelques exemples élémentaires, l'influence de la présence d'un front de fissure sur l'évolution de l'autre front. Pour simplifier l'exposé, l'étude est effectuée dans le cas de surfaces délaminiées planes.

10.1 Problématique

Considérons une structure Ω présentant deux surfaces de délamination évoluant au sein de deux plans ω^I et ω^S différents et parallèles à sa surface moyenne ω . Notons γ_f^I et γ_f^S les fronts de fissures appartenant respectivement à ω^I et ω^S (voir figure 10.1). Le modèle d'évolution des fronts γ_f^I et γ_f^S repose à nouveau sur un principe de moindre énergie ; précisément, l'état d'équilibre $(\mathbf{u}, \gamma_f^I, \gamma_f^S)$ associé à un chargement donné, minimise sur l'espace des états admissibles $V_u \times V_{\gamma^I} \times V_{\gamma^S}$ la fonctionnelle suivante :

$$E(\mathbf{v}, \gamma^I, \gamma^S) = I(\mathbf{v}, \gamma^I, \gamma^S) + D^I(\gamma^I) + D^S(\gamma^S) \quad (10.1)$$

avec

$$D^I(\gamma^I) = \int_{\omega_d^I} G_c^I dS \quad ; \quad D^S(\gamma^S) = \int_{\omega_d^S} G_c^S dS . \quad (10.2)$$

$\omega_d^I \subset \omega^I$ et $\omega_d^S \subset \omega^S$ représentent les parties délaminiées. Identifiant à nouveau le front cherché γ_f^I (resp. γ_f^S) avec le déplacement $\boldsymbol{\theta}^I \in V_{\theta^I}$ (resp. $\boldsymbol{\theta}^S \in V_{\theta^S}$) du précédent front à l'équilibre, le problème s'écrit :

$$(\mathcal{P}) \quad (\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}^I, \boldsymbol{\theta}^S) = \arg \left(\min E(\mathbf{v}, \boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\theta}^I, \boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\theta}^S), \quad \mathbf{v} \in V_u, \boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\theta}^I \in V_{\theta^I}, \boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\theta}^S \in V_{\theta^S} \right)$$

que nous résolvons de façon découplée, en minimisant dans un premier temps la fonctionnelle E par rapport à la variable cinématique \mathbf{u} :

$$(\mathcal{P}_1) \quad \mathbf{u} = \arg(\min_{V_u} E(\mathbf{v}, \boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\theta}^I, \boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\theta}^S), \quad \mathbf{v} \in V_u, \boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\theta}^I \in V_{\theta^I}, \boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\theta}^S \in V_{\theta^S})$$

puis de façon simultanée par rapport aux champs θ^I et θ^S :

$$(\mathcal{P}_2) \left\{ \begin{array}{l} \theta^I = \arg(\min_{V_{\theta^I}} E(\mathbf{v}, \delta\theta^I, \delta\theta^S), \quad \mathbf{u} \in V_u, \delta\theta^I \in V_{\theta^I}, \delta\theta^S \in V_{\theta^S}), \\ \theta^S = \arg(\min_{V_{\theta^S}} E(\mathbf{u}, \delta\theta^I, \delta\theta^S), \quad \mathbf{u} \in V_u, \delta\theta^I \in V_{\theta^I}, \delta\theta^S \in V_{\theta^S}). \end{array} \right.$$

Il en résulte que chacun des fronts cherchés est en équilibre cinématique et vérifie le critère de Griffith au sens faible. L'algorithme présenté au paragraphe 5.2.3 s'adapte sans difficulté. Le remaillage est effectué lorsqu'au moins l'un des deux fronts progresse. La difficulté majeure repose sur le maillage d'une structure comportant plus d'un front tridimensionnel. Une telle structure peut être vue comme le résultat de l'assemblage de deux plaques délaminiées Ω^I et Ω^S par une zone de raccord (voir figure 10.1). Le maillage des plaques délaminiées est obtenu par translation selon l'axe x_3 à partir d'un maillage des surfaces ω^I et ω^S . Il reste alors à relier les nœuds de la partie supérieure de Ω^I avec ceux de la partie inférieure de Ω^S . Pour cela, nous supposons que les fronts γ_f^I et γ_f^S sont de même nature (fronts ouverts ou fermés) et comportent le même nombre de nœuds. Nous supposons également que les côtés en vis-à-vis selon \mathbf{e}_3 de ω^I et ω^S comportent un nombre identique de nœuds. Dans ce cas, la zone de raccord peut être maillée à l'aide d'éléments hexahédriques à 16 nœuds (les arêtes d'un de ces éléments de raccord sont reportées en couleur verte sur la figure 10.1). Remarquons toutefois que cette vision, qui permet de mailler la structure multi-délaminiée, conduit à des éléments hexahédriques de raccords d'autant plus aplatis que les projections des deux côtés fronts sur la surface moyenne ω seront distantes l'une de l'autre.

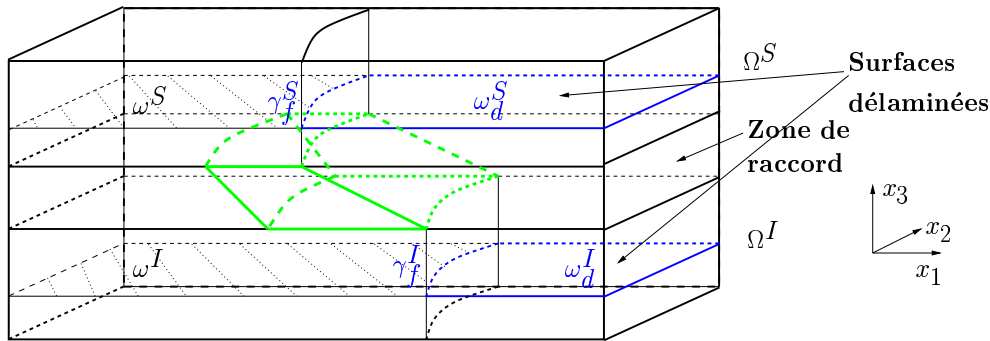


FIG. 10.1: Raccord de deux structures Ω^I et Ω^S délaminiées par des éléments hexahédriques à 16 nœuds.

Parmi les rares références de la littérature concernant la propagation de fissures multiples, citons [OUSSET & ROUDOLFF (1992)], présentant un modèle de poutre bi-délaminiée et mettant en évidence un transfert d'énergie lorsqu'une fissure double la seconde et par ailleurs [BUDYN *et al.* (2001)] concernant une étude numérique dont la méthode repose également sur un principe de minimisation, et nécessite le calcul des facteurs d'intensité et de leurs dérivées premières.

10.2 Deux délaminaages parallèles au sein d'une DCB

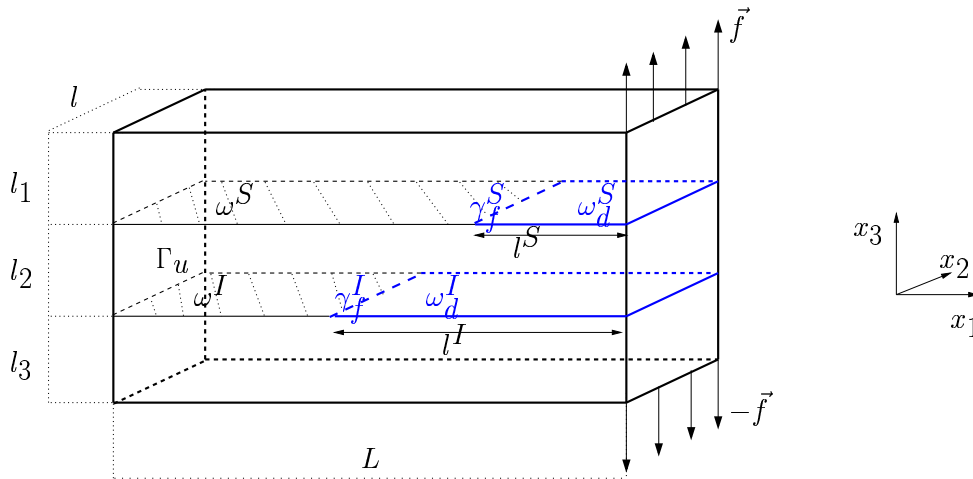
Reprenons à nouveau un spécimen type DCB, contenant cette fois deux surfaces de délaminaages superposées. La structure est encastree sur une face latérale et est soumise à un chargement normal symétrique $\mathbf{f} = (0, 0, \pm f_3)$ sur les arêtes inférieure et supérieure d'une autre face (figure 10.2). Les valeurs des paramètres géométriques et matériaux sont reportées dans le tableau 10.1.

L	l	l_1	l_2	l_3	E	ν	$G_c^{I/S}$
200mm	80mm	2mm	3mm	2mm	126000MPa	0.3	0.3N/mm

TAB. 10.1: Paramètres géométriques et matériaux.

SENSIBILITÉ AUX LONGUEURS RELATIVES DES FISSURES ET AUX INCRÉMENTS DE CHARGEMENT

Les deux fronts γ_f^I et γ_f^S sont initialement rectilignes, de tangentes portées par l'axe e_2 et notons l^I et l^S les distances des deux fronts à la face chargée. Si ces deux distances sont égales, alors compte tenu des symétries, les taux de restitution moyens associés à chaque front sont égaux ; de plus, ces taux sont à chargement constant, des fonctions décroissantes des longueurs l^I et l^S , indiquant une évolution simultanée stable des deux fronts. Cependant, il apparaît que cette évolution est très sensible aux longueurs l^I et l^S . Ainsi, prenons $l^I = 40.05mm$ et $l^S = 40.mm$.

FIG. 10.2: Structure présentant deux surfaces délaminiées $\omega_d^I \subset \omega^I$ et $\omega_d^S \subset \omega^S$.

L'algorithme est piloté en déplacement. L'incrément de la variable de pilotage u_d est $\delta u_d = 0.005mm$. La figure 10.3 représente le facteur de charge et la distance des points centraux des deux fronts à la face chargée en fonction de u_d . Compte tenu de la symétrie du chargement, il est aisé de voir que le taux de restitution moyen associé à la fissure la plus étendue est supérieur à celui associé à l'autre fissure. Cela est dû au fait que le chargement dont le support est proche de la fissure la moins étendue agit davantage comme force d'ouverture sur la fissure la plus étendue que l'inverse. Dans notre cas, il en résulte que le déplacement du front γ_f^I est supérieur au déplacement du front γ_f^S . Tant que l'écart entre l'aire des surfaces moyennes ω_d^I et ω_d^S reste faible, l'évolution des fronts est stable. Au-delà, atteint pour la valeur $u_d = 1.27mm$, le front γ_f^S ne progresse plus et l'évolution du front γ_f^I devient instable.

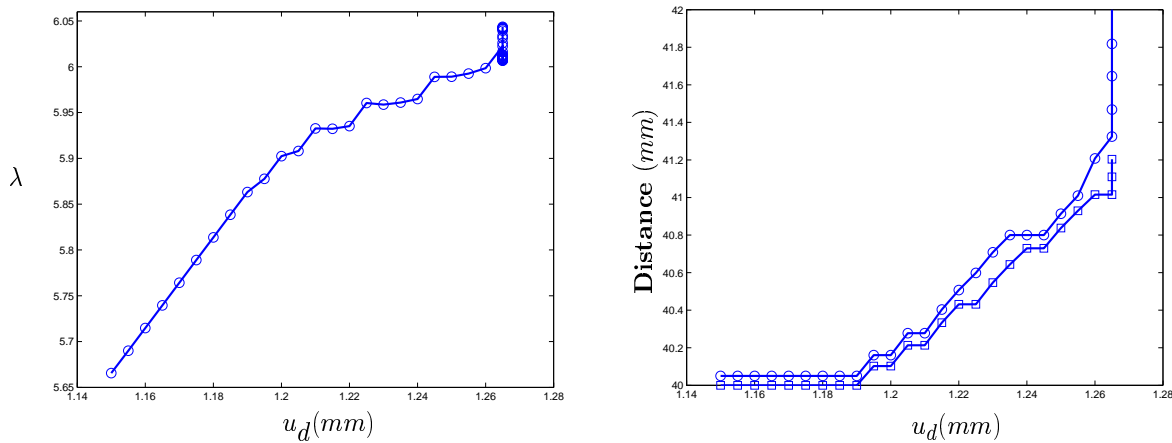


FIG. 10.3: Facteur de charge et distance des points centraux de γ_f^I et γ_f^S à $x_1 = 200mm$ en fonction de la variable de pilotage

La sensibilité de la propagation est également observée lorsque initialement $l^I = l^S$. Ce cas conduit en théorie à l'égalité $G(\gamma_f^I) = G(\gamma_f^S)$. Cependant, en raison des erreurs d'arrondi, cette égalité n'est pas vraie numériquement, de sorte que l'accumulation de ces erreurs conduit après plusieurs propagations de fronts à, en moyenne, l'une des deux situations suivantes : $G(\gamma_f^I) < G_c < G(\gamma_f^S)$ ou bien $G(\gamma_f^S) < G_c < G(\gamma_f^I)$. L'un des fronts prend alors définitivement l'ascendant sur l'autre front. La figure 10.4 décrit l'évolution du facteur de charge et des distances l^I et l^S en fonction de la variable de pilotage. Initialement, les longueurs valent $l^I = l^S = 40mm$. Il apparaît que les résultats diffèrent selon la valeur de l'incrément δu_d . Lorsque $\delta u_d = 0.005mm$, les deux fronts évoluent de façon simultanée et symétrique. Puis, lorsque u_d atteint la valeur $1.52mm$ (voir tableau 10.2), le front inférieur γ_f^I s'immobilise tandis que le front supérieur poursuit son évolution de façon stable.

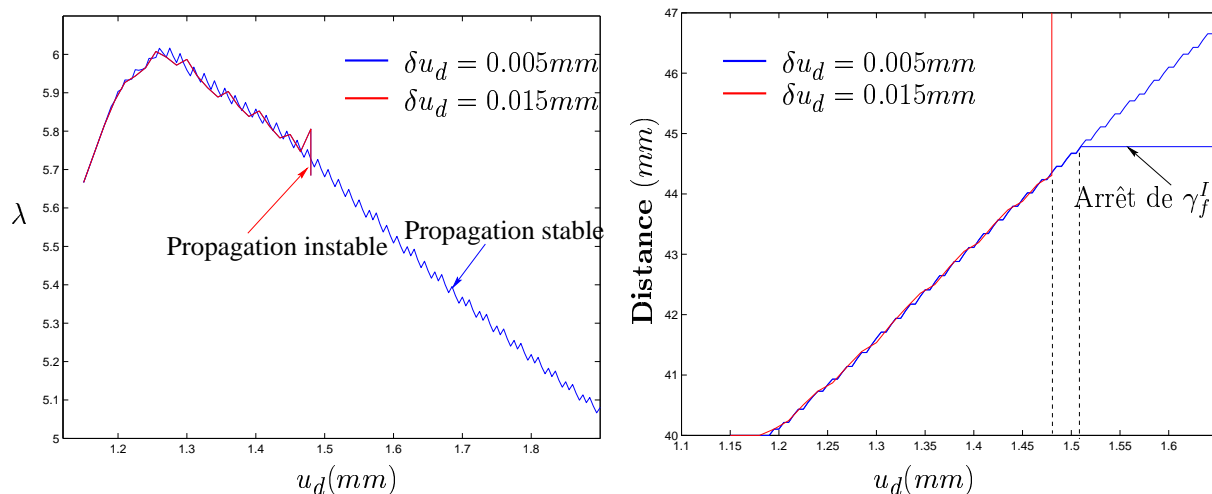


FIG. 10.4: Facteur de charge et distance des points centraux de γ_f^I et γ_f^S à $x_1 = 200mm$ en fonction de la variable de pilotage pour $\delta u_d = 0.005mm$ et $\delta u_d = 0.015mm$

Lorsque $\delta u_d = 0.015mm$, les deux fronts évoluent dans un premier temps à nouveau de façon symétrique. Puis, lorsque $u_d = 1.48mm$ (voir tableau 10.3), le front γ_f^S s'immobilise et l'évolution de γ_f^I devient instable. Ce résultat confirme la sensibilité de l'évolution simultanée de deux fronts. Il semble exister, pour cette configuration géométrique, une longueur critique pour l^I et l^S , en-deçà de laquelle, lorsque l'écart entre les deux fronts est suffisamment important, cela conduit à une instabilité de l'un des fronts. Ainsi, le calcul effectué avec $\delta u_d = 0.015mm$ et $l^I = l^S = 50mm$ conduit à un phénomène stable.

$u_d(mm)$	$l^I(mm)$	$l^S(mm)$
1.494999999999925	44.567908738354745	44.57578608909577
1.499999999999924	44.66842270848415	44.677526907949683
1.504999999999923	44.66842270848415	44.677526907949683
1.509999999999922	44.782445612581703	44.792892713412584
1.514999999999921	44.782445612581703	44.894050687881815
1.519999999999992	44.782445612581703	44.894050687881815
1.524999999999992	44.782445612581703	45.00931829987685
1.5299999999999918	44.782445612581703	45.110778531194235
1.5349999999999917	44.782445612581703	45.110778531194235
1.5399999999999915	44.782445612581703	45.225873332218235
1.5449999999999914	44.782445612581703	45.3268611405238

TAB. 10.2: Quelques valeurs de l^I et l^S en fonction de u_d ($\delta u_d = 0.005mm$) - arrêt de γ_f^I et évolution stable de γ_f^S

Dans le cas $\delta u_d = 0.015mm$, il est possible également que le front inférieur n'ait pas "eu le temps" d'atteindre sa forme naturelle. C'est le cas dans l'exemple précédent où un écart de $0.05mm$ est imposé entre l^I et l^S sur deux fronts rectilignes, forme non naturelle pour le chargement associé. Ce même phénomène est obtenu lorsque $l^I = 50.05mm$, $l^S = 50mm$ quelle que soit la valeur de δu_d

Les figures 10.5 et 10.6 représentent les isovaleurs du déplacement u_3 et de la contrainte σ_{33} sur la position d'équilibre associée à la valeur $u_d = 2.415mm$, pour lequel en moyenne $l^I = 44.48mm$ et $l^S = 56.27mm$. Le maillage de la structure comporte 3632 nœuds.

SENSIBILITÉ AUX RAPPORTS DES MODULES D'YOUNG

Afin d'illustrer le fait que la sensibilité dépend des longueurs initiales de l^I et l^S , nous définissons la quantité $s(l^I) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{G^S(l^I + \eta) - G^I(l^I)}{\eta G^I(l^I)}$. La figure 10.8 décrivant s pour l^I dans l'intervalle $[25mm, 75mm]$ confirme que la sensibilité décroît avec l^I . En revanche, l'amplitude entre le module d'Young E affecté au matériau situé au-dessus (resp. en dessous) du plan ω_d^S (resp. ω_d^I) et le

$u_d(mm)$	$l^I(mm)$	$l^S(mm)$
1.4649999999999978	44.15748219037833	44.15002452536455
1.4799999999999977	44.30531811672248	44.29671262238081
1.4799999999999977	44.405008154007283	44.29671262238081
1.4799999999999977	44.5213218549099	44.29671262238081
1.4799999999999977	44.65544569118665	44.29671262238081
1.4799999999999977	44.81045178045315	44.29671262238081
1.4799999999999977	44.98994925854077	44.29671262238081
1.4799999999999977	45.19755097987652	44.396182882831816
1.4799999999999977	45.38625472284493	44.396182882831816
1.4799999999999977	45.60397784135499	44.396182882831816
1.4799999999999977	45.85340615041602	44.396182882831816

TAB. 10.3: Quelques valeurs de l^I et l^S en fonction de u_d ($\delta u_d = 0.015mm$) - arrêt de γ_f^S puis évolution instable de γ_f^I

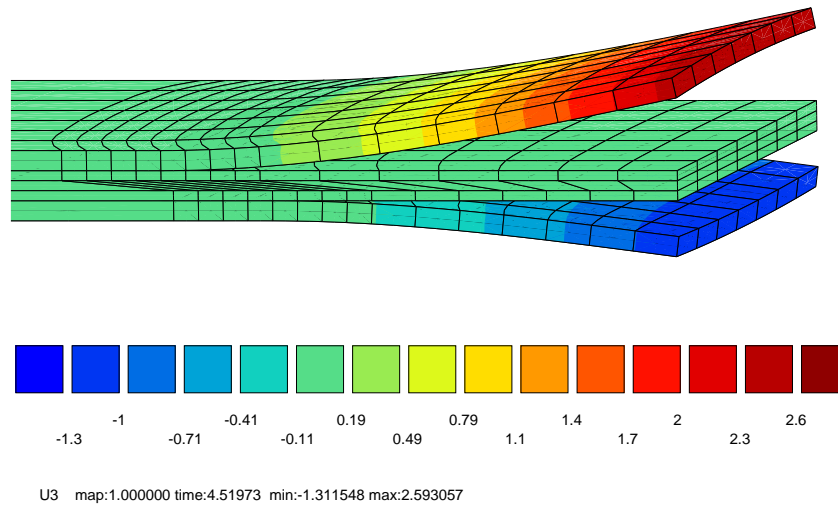


FIG. 10.5: Déplacement $u_3(mm)$ pour $u_d = 2.415mm$ (Déformée $\times 3$)

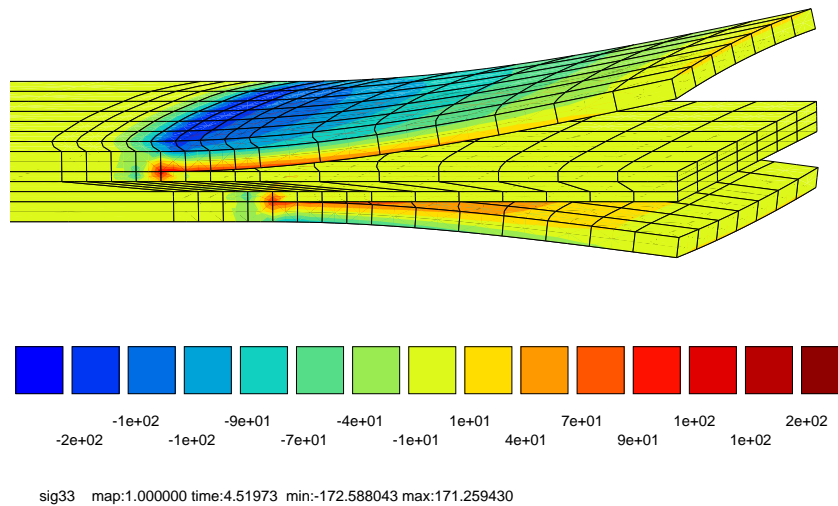


FIG. 10.6: Contrainte $\sigma_{33}(MPa)$ pour $u_d = 2.415mm$ (Déformée $\times 3$)

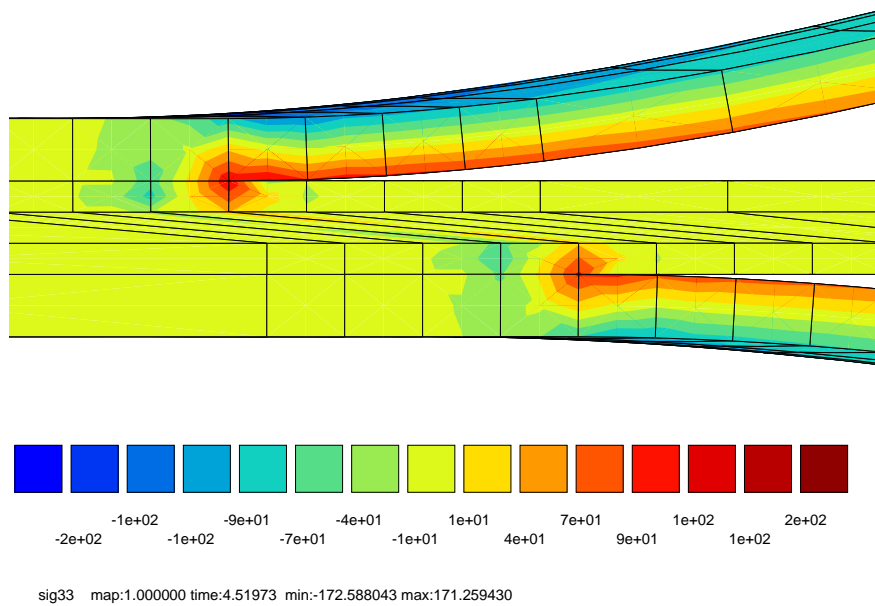


FIG. 10.7: Contrainte $\sigma_{33}(MPa)$: grossissement sur la zone de raccord entre les deux fronts de fissure : $l^S \approx 56.27mm$ et $l^I \approx 44.78mm$ (vue selon e_2)(Déformée $\times 3$)

module d'Young $E^{I/S}$ affecté au matériau situé entre les plans ω_d^I et ω_d^S ne modifie que légèrement cette sensibilité (figure 10.9).

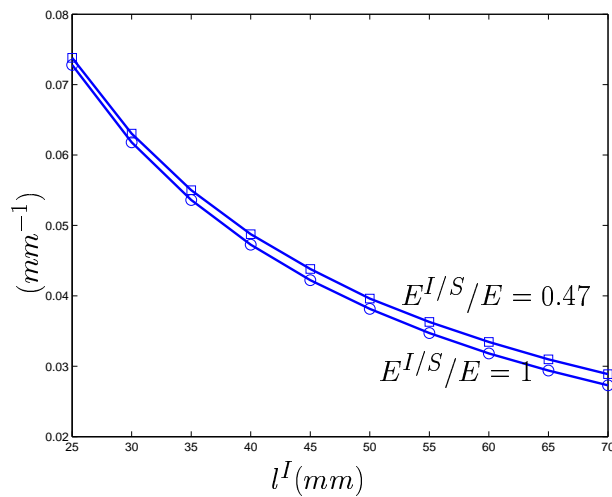


FIG. 10.8: Evolution de la sensibilité s

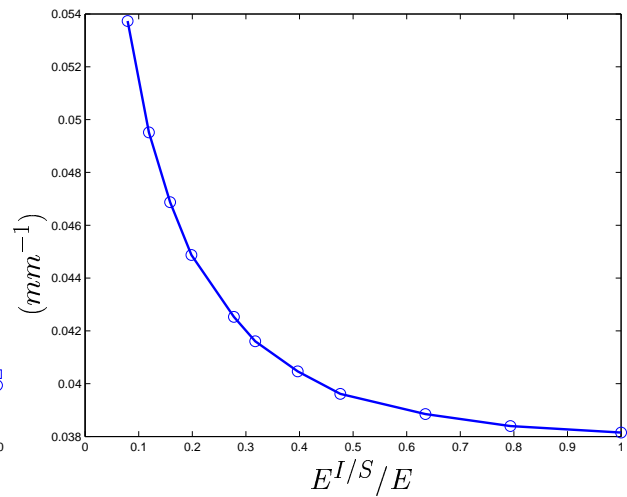


FIG. 10.9: Evolution de $s(l^I = 50mm)$ en fonction du rapport $E^{I/S}/E$

La figure 10.10 décrit l'évolution des taux de restitution moyens $G(\gamma_f^I)$ et $G(\gamma_f^S)$ associés aux deux fronts lorsque, u_d étant constant égal à $1.4mm$, l^S reste constant à $50mm$ et l^I varie de $40mm$ à $60mm$. Hormis une évolution légèrement oscillante lorsque les deux fronts sont proches, la variation de ces taux est linéaire. L'oscillation est nettement plus prononcée lorsque les plans ω^I et ω^S représentent la surface moyenne de deux joints collés de module d'Young E^m . La figure

10.11 représente la variation obtenue pour $E^m = 4000\text{MPa}$, $\epsilon h = 0.1$, $\nu^m = 0.35$, $l_1 = l_2 = l_3 = 4\text{mm}$ et $u_d = 1\text{mm}$. Selon la valeur de l^I , le front supérieur est dans une position stable ou instable. Lorsque l^I devient proche de $l^S = 50\text{mm}$, l'instabilité du front γ_f^I , qui se déduit de la pente de $G(\gamma_f^I)$, s'accroît. Enfin la figure (10.12) présente l'évolution, similaire de celle de G , de la troisième composante du saut des déplacements à travers γ_f^I et γ_f^S en leur point central ($x_2 = 40\text{mm}$). Ces résultats laissent entrevoir des phénomènes plus complexes autour de la propagation simultanée de deux fissures de joints collés.

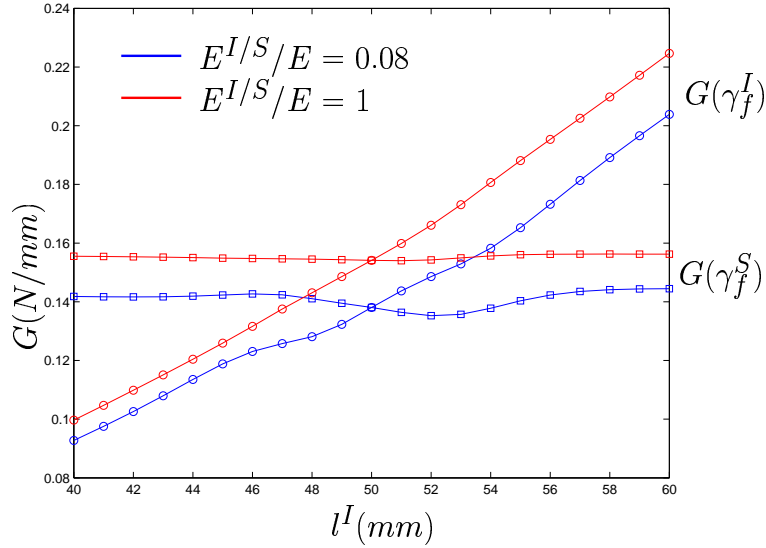


FIG. 10.10: Evolution des taux de restitution moyen pour $l^S = 50\text{mm}$ et $l^I \in [40\text{mm}, 60\text{mm}]$ (cas interface parfaite)

Cette rapide étude met en évidence l'importante sensibilité des paramètres géométriques sur la nature de l'évolution des deux fronts. La propagation simultanée et stable de deux fronts ouverts, semble exclue. Ce résultat est en bon accord avec [OUSSET & ROUDOLFF (1992)]. La conclusion est différente dans le cas de deux fronts fermés, présenté dans le prochain paragraphe.

10.3 Fronts elliptiques internes

Nous traitons dans cette section le cas de deux fronts fermés évoluant selon des surfaces planes et parallèles entre elles. Les deux fronts sont initialement elliptiques, centrés à l'origine de la surface moyenne ω circulaire de rayon R :

$$\omega_d^I = \{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \omega^I; \frac{x_1^2}{a_I^2} + \frac{x_2^2}{b_I^2} < 1 \} \quad ; \quad \gamma_f^I = \partial\omega_d^I, \quad (10.3)$$

$$\omega_d^S = \{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \omega^S; \frac{x_1^2}{a_S^2} + \frac{x_2^2}{b_S^2} < 1 \} \quad ; \quad \gamma_f^S = \partial\omega_d^S. \quad (10.4)$$

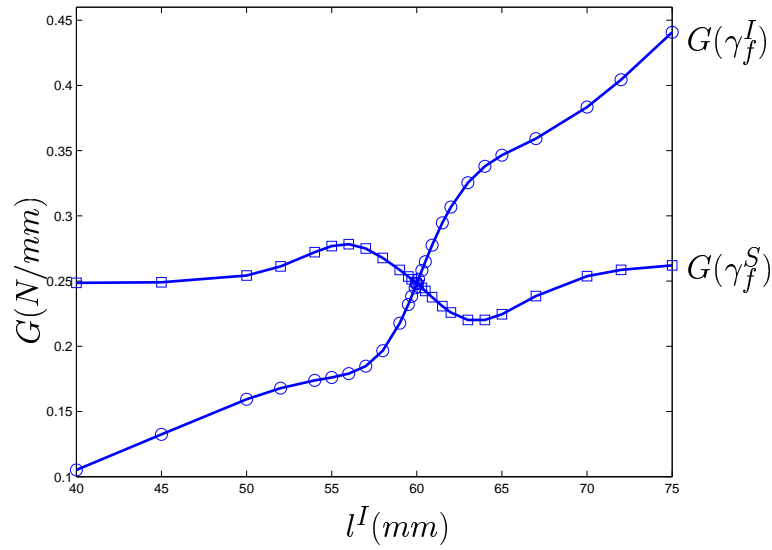


FIG. 10.11: Evolution du taux de restitution moyen pour $l^S = 60mm$ et $l^I \in [40mm, 75mm]$ (cas interface élastique)

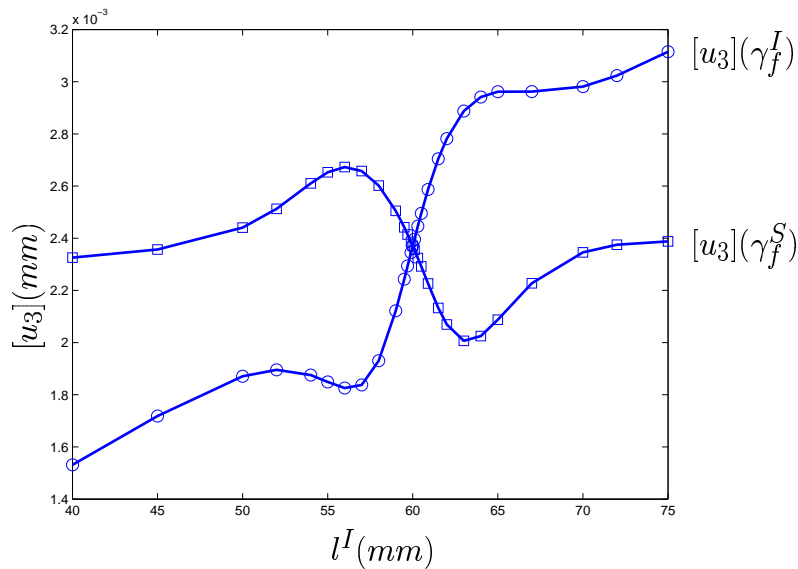


FIG. 10.12: Evolution des sauts $[u_3]$ à travers γ_f^I et γ_f^S en leur point central (cas interface élastique)

A l'image des chapitres précédents, la structure est encadrée sur la face extérieure de la structure circulaire $\Gamma_u = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \bar{\Omega}, x_1^2 + x_2^2 = R^2, x_3 \in [-h, h]\}$ (h désigne la demi-épaisseur de la structure) et soumise à un chargement normal d'ouverture aux points $(0, 0, h)$ et $(0, 0, -h)$. Les valeurs des paramètres géométrique et matériau sont celles du tableau 10.1. Enfin, les valeurs initiales de a^I , a^S , b^I et b^S sont respectivement $45mm$, $35mm$, $35mm$ et $45mm$. Il en résulte que les deux fronts elliptiques sont entrecroisés comme l'indiquent les figures 10.13 et 10.14.

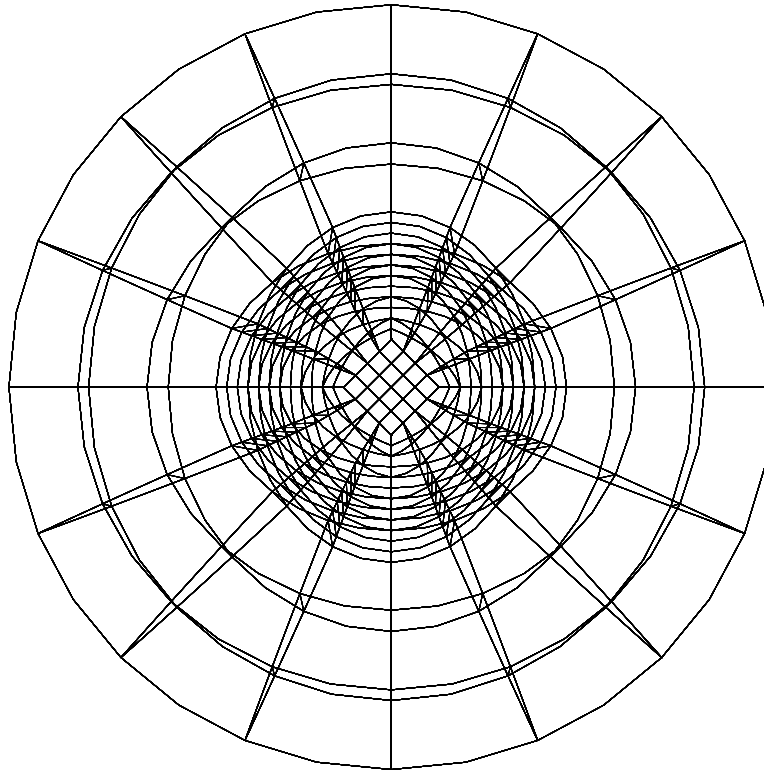


FIG. 10.13: Maillage initial (4438 nœuds) : deux fronts elliptiques croisés (vue selon e_3)

La figure 10.15 décrit l'évolution du facteur de charge et des quantités a_I et b_I en fonction de u_d . Les deux axes de l'ellipse inférieure tendent vers une même valeur au cours de la propagation. L'évolution de la quantité a^S (resp. b^S) est identique à celle de b^I (resp. a^I). Ce résultat, dû à la symétrie du problème, semble indiquer que l'évolution simultanée des deux fronts est peu sensible aux paramètres géométriques. Les deux fronts se transforment en deux fronts identiques proches du cercle, comme l'indique la figure 10.16 et la projection selon e_3 du maillage en fin d'itérations, figure 10.17. La nature de l'évolution des deux fronts est donc complètement différente de celle observée pour deux fronts débouchants.

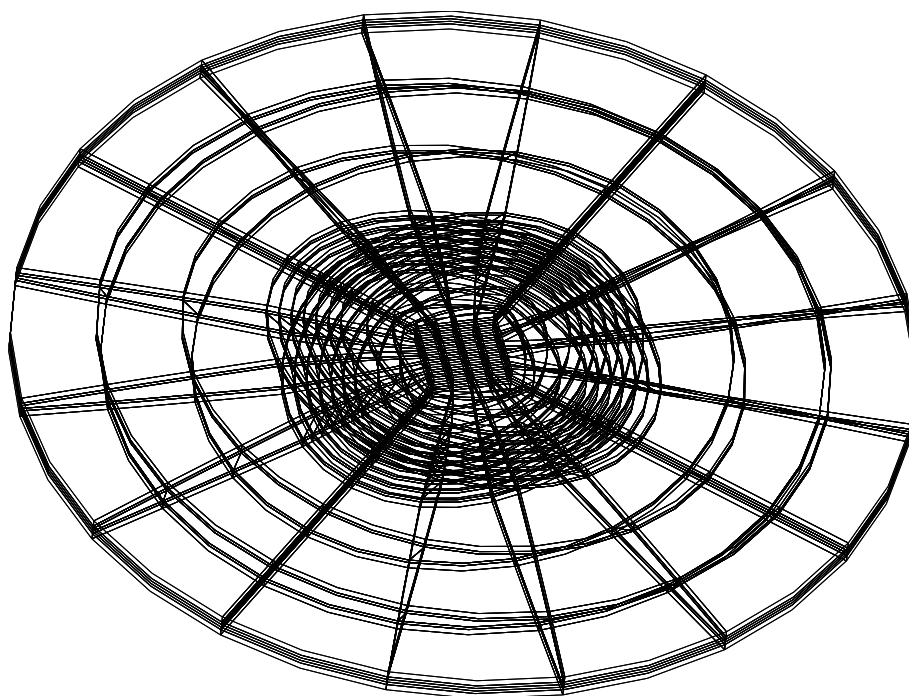
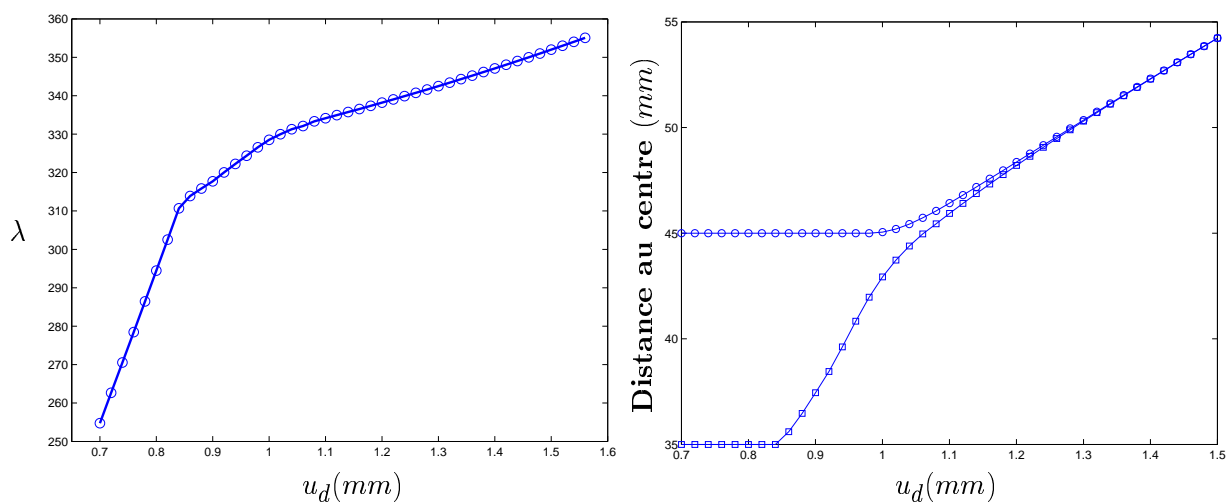


FIG. 10.14: Maillage initial (4438 nœuds)

FIG. 10.15: Evolution du facteur de charge et de a_I et b_I en fonction de la variable de pilotage ($\delta u_d = 0.02\text{mm}$)

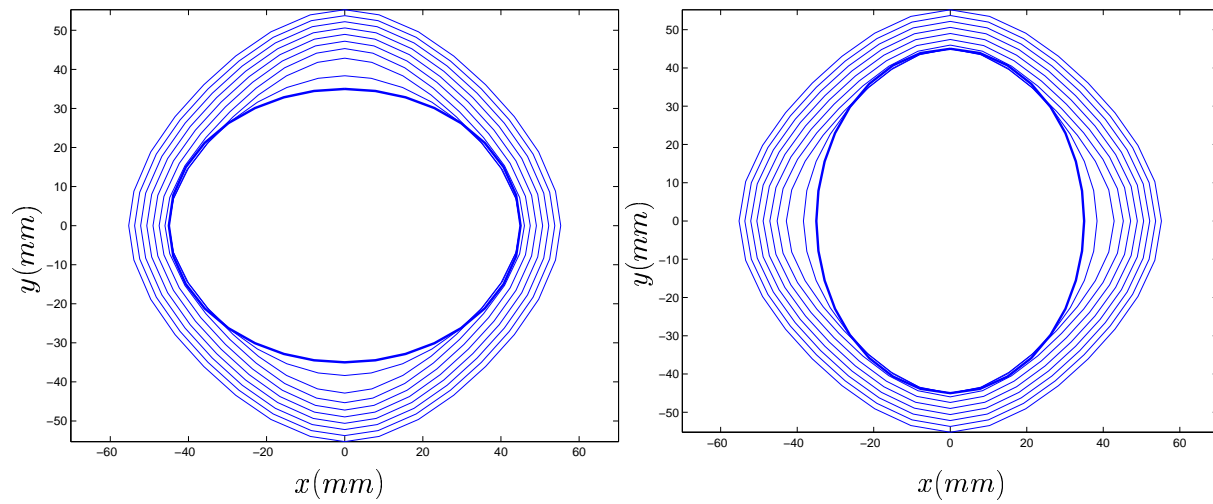


FIG. 10.16: Positions des fronts inférieur (partie gauche) et supérieur (partie droite) pour $u_d = 0.78 + 0.8 \times i(mm)$, $i = 1..11$

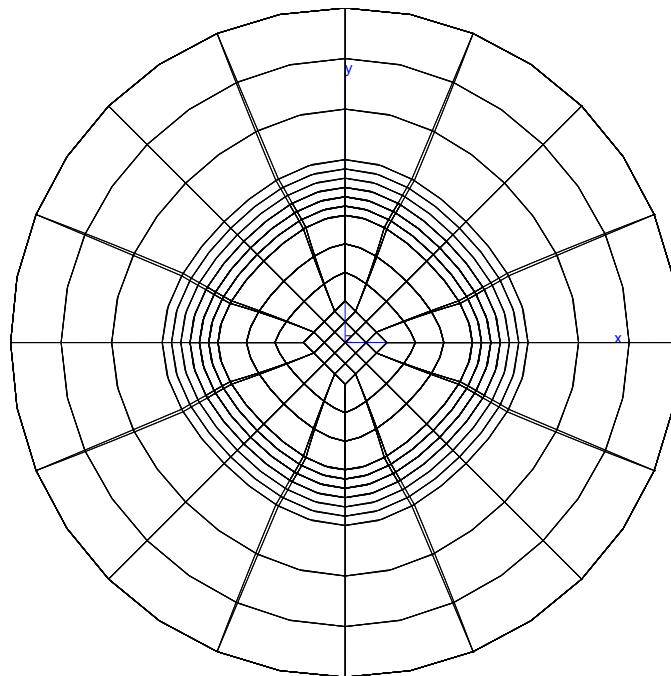


FIG. 10.17: Maillage correspondant à la valeur $u_d = 1.6mm$

Conclusions et Perspectives

Nous nous sommes intéressés à la modélisation théorique et à la simulation numérique de la propagation de fissures tridimensionnelles, présentes par exemple, au sein de matériaux composites stratifiés. Supposant que le front γ_f reste au sein d'une surface régulière S donnée, notre objectif était de décrire l'évolution quasi-statique (stabilité, forme du front) au cours de l'augmentation du chargement. Bien que la propagation soit un phénomène irréversible, nous avons adopté une approche élastique en utilisant seulement la densité d'énergie élastique de Saint Venant-Kirchhoff. Ce choix, *a priori* très pauvre, reste conforme avec notre vision macroscopique utilisant uniquement des quantités énergétiques et globales. Précisément, en suivant les idées développées par A. EHR-LACHER puis G.A. FRANCFORT et J-J. MARIGO, la loi d'évolution est obtenue en supposant que le front à l'équilibre réalise un minimum de l'énergie totale $E(\mathbf{u}, \gamma_f)$ associée à la structure, et définie comme la somme de l'énergie mécanique et d'une énergie dite de rupture. Les points critiques (\mathbf{u}, γ) de la fonctionnelle non linéaire E sont déterminés à l'aide d'une méthode type Newton. A cette fin, les dérivées première et seconde de $E(\mathbf{u}, \cdot)$ par rapport aux déplacements du front sont déterminées analytiquement en utilisant la θ -méthode développée par PH. DESTUYNDER. Cette approche peut également être utilisée pour prévoir et décrire l'amorçage de la fissure. Dans ce cas, le facteur de charge est une inconnue supplémentaire et est déterminé en écrivant la conservation de l'énergie totale entre les deux états d'équilibre, juste avant et après amorçage. Cette conservation résulte de l'instabilité du processus d'amorçage, numériquement confirmée par l'étude du spectre de l'opérateur associé à la dérivée seconde de $E(\mathbf{u}, \cdot)$ par rapport au front. L'étude de $E_{,\gamma\gamma}$ met en évidence la notion de front naturel associé à un chargement donné. Par ailleurs, lorsque la surface S de délaminage, support du front, est non plane, et décrite par une carte ϕ régulière, l'énergie totale doit être exprimée au préalable dans un repère local attaché à S . Le modèle de propagation permet alors d'étudier l'influence des paramètres géométriques sur la propagation. Il apparaît que ce type d'influence est lié à la nature du chargement. Les exemples considérés dans ce document ont fait jouer à la courbure un effet restreignant la propagation. Enfin, concernant la discrétisation numérique, nous avons retenu une approximation par des fonctions splines cubiques, à la fois pour la description géométrique du front et pour le champ de déplacement θ . L'usage de la méthode de Newton couplée à un modèle basé sur des quantités énergétiques, permettant un maillage relativement grossier, assure une détermination rapide d'un état d'équilibre, tant au niveau du nombre d'itérations de la méthode de Newton qu'à celui du temps de calcul. Dans le contexte des stratifiés composites présentant des surfaces de délaminage privilégiées et connues *a priori*, l'algorithme exposé est très certainement optimal, le remaillage étant peu coûteux et simple à réaliser.

Nous nous sommes également intéressés, dans une seconde partie, à la description d'assemblages collés formés de deux adhérents reliés entre eux par une fine couche d'adhésif, les matériaux étant décrits par la densité d'énergie de Saint Venant-Kirchhoff. Supposant que le rapport noté ϵ de à la fois l'épaisseur et la rigidité des différents constituants, une analyse asymptotique formelle,

similaire à celle utilisée pour dériver les modèles de plaques et de coques, nous a permis d'associer au modèle initial un modèle simplifié où l'adhésif disparaît d'un point géométrique et est remplacé par une énergie d'adhésion définie sur la surface moyenne du joint. Une analyse mathématique a permis de montrer que l'énergie non linéaire associée possède un minimum non unique alors que l'existence demeure un problème ouvert pour l'énergie complète. Puis, considérant que l'hypothèse des petites déformations est sujette à caution dans l'adhésif, compte tenu de sa faible rigidité relative, nous avons repris cette analyse en remplaçant la densité de Saint Venant-Kirchhoff par la densité de Ciarlet-Geymonat, laquelle fait intervenir les trois invariants du tenseur \mathbf{F} . L'énergie simplifiée obtenue est strictement convexe et possède un unique minimum, l'existence de minima pour l'énergie complète est assurée par les travaux de J. BALL. Enfin, en supposant que la fissure se développe sur toute l'épaisseur du joint, ou de façon équivalente selon sa surface moyenne, l'approche utilisée dans la première partie nous a permis de simuler l'évolution de la rupture du joint. La présence du joint, en absorbant une partie des efforts extérieurs, retarde et assouplit le phénomène de fissuration. Le critère d'amorçage de la rupture du joint prévoit une intensité critique de chargement supérieure à celle obtenue, dans la partie I, en écrivant la conservation de l'énergie.

Profitant des outils numériques développés, nous avons simulé la propagation simultanée de deux fronts de fissure, selon deux interfaces parallèles. L'influence de la présence d'un des fronts sur la propagation de l'autre front dépend ici encore de la géométrie de la structure et de la nature du chargement. Ainsi, la propagation simultanée stable de deux fronts débouchants au sein d'une structure soumise à un chargement linéique semble exclue. La conclusion est inverse dans le cas de deux fronts internes soumis à un chargement ponctuel.

Naturellement, comme tout modèle physique fondé sur des hypothèses, ici mécaniques, limitatives voire fortement restrictives, le travail proposé est tout sauf à l'abri de critiques multiples et variées, et ne saurait prétendre décrire autrement que grossièrement un phénomène aussi complexe que la fissuration tridimensionnelle. Bien évidemment, ce travail doit être enrichi et ses résultats confrontés avec l'expérimentation. En premier lieu, au niveau macroscopique, le modèle doit prendre en compte, par l'intermédiaire de termes supplémentaires dans l'énergie mécanique, les effets dynamiques dont il est bien difficile de penser qu'ils ne jouent qu'un rôle négligeable dans les évolutions brutales (par exemple à l'amorçage). Une telle prise en compte devrait permettre de statuer plus finement non seulement sur la stabilité du front à l'équilibre mais aussi sur la stabilité de son évolution (non différenciées dans une approche quasi-statique). Cette question essentielle semble délicate et ouverte. En second lieu, cette vision exclusivement macroscopique semble avoir vécu, et la tendance actuelle se porte vers une intégration dans ces modèles de phénomènes ayant lieu à une échelle plus fine. Dans le contexte étudié ici, c'est l'objet de nombreux modèles d'interface, concentrant dans l'énergie d'adhésion des effets non linéaires complexes tels le frottement ou autres processus irréversibles. Ces modèles issus d'approches constructives souffrent malheureusement d'aucune justification mathématique rigoureuse (voir paragraphe 9.3.2). Cette tendance est également adoptée (voir remarque 24) par, entre autres ([FRANCFORT & MARIGO (1998)], [BRAIDES & FONSECA (2002)]), toujours dans le cadre d'un principe de minimum d'énergie, en modifiant l'énergie de rupture type Griffith, parfaitement en phase avec la vision macroscopique, au profit d'une énergie type Barenblatt ou autre incluant sur une petite zone devant le front les interactions entre les lèvres de la fissure. Il est probable, en adoptant une approche plus fine dans un cadre élastique, qu'il faille renoncer définitivement à la densité de Saint-Venant Kirchhoff, très majoritairement employée, et de ce fait modifier également l'énergie mécanique. Nous avons réalisé un premier pas dans cette direction, en utilisant la densité de Ciarlet-Geymonat. Dans [WU

(1992)], C.H. WU étudie les possibilités de rendre compte des processus de fissuration à l'aide d'une densité d'énergie du troisième gradient (voir également [FONSECA (2001)]), extension rigoureuse de la densité de Saint Venant-Kirchhoff. Proposée en 1965 par Mindlin, cette densité qui fait intervenir un module de cohésion est peut-être une piste sérieuse. La conclusion de cet article sera la notre : "It is perhaps time again to reexamine the role of higher gradients in our pursuit for the understanding of failure of solids".

Bibliographie

- MÉCANIQUE DE LA RUPTURE [1982]. Ecole CEA-INRIA-EDF.
- ABDELMOULA, R., COUTRIS, M., MARIGO, J.J. [1996]. Comportement asymptotique d'une interphase élastique mince, C.R. Acad. Sci. Paris Série Iib, 326, pp. 237-242.
- AIT MOUSSA, A. [1996]. Comportement asymptotique d'une bande élastique mince. Les Annales Maghrébines de l'Ingénieur, Vol. 10 (2).
- ALFANO, G., CRISFIELD, M.A. [2001]. Finite element interface models for the delamination analysis of laminated composites : mechanical and computational issues. Int. J. Numer. Meth. Eng. 50, pp. 1701-1736.
- ALLIX, O., CORIGLIANO, A. [1999]. Geometrical and interfacial non-linearities in the analysis of delamination in composites. Int J. Solids Structures. 36, pp. 2189-2216.
- ALLMAN, D.J. [1977]. A theory for elastic stresses in adhesive bonded lap joints. Mech appl. Math., Vol. 30, p.415-436.
- AMESTOY, M., BUI, H.D., LABBENS, R. [1981]. On the definition of local path independent integrals in three-dimensional crack problems. Mechanics research Communication, 8, 231-236.
- ANICIC, S., LÉGER, A. [1999]. Formulation bidimensionnelle exacte du modèle de coque 3D de Kirchhoff-Love, C.R. Acad. Sci. Paris Série I, 329, pp. 741-746.
- AYADI, M. [1990]. Contribution à l'étude des plaques composites délaminiées, Thèse Paris VI.
- BACH, M. [2001]. On the treatment of propagating mode-1 cracks by variational inequalities. The mathematics of finite elements and applications. Eds. J.R. Whiteman, Elsevier, pp.377-386.
- BALL, J.M. [1977]. Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity. Arch. Rational Mech. Anal. 63, pp. 337-403.
- BARENBLATT, G.I. [1962]. The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. Adv. Appl. Mech. 7, pp. 55-129.
- BEOM, H.G., EARMME, Y.Y., CHOI, S.Y. [1994] Energy release rate for an arbitrarily curved interface crack. Mechanics of Materials 18, pp. 195-204.
- BERGEZ, D. [1974]. La rupture des plaques et des coques fissurées. Thèse d'Etat Paris VI.
- BERNADOU, M. [1994]. Méthodes d'éléments finis pour les problèmes de coques minces, Masson Paris.
- BERNADOU, M., CIARLET, P., MIARA, B. [1994] Existence theorems for two-dimensional linear shell theories. Journal of elasticity 34, pp. 111-138.
- BERTHELOT, J.M. [1999] Matériaux composites : Comportement mécanique et analyse des structures.

- BILTERYST, F. [2000]. Une approche énergétique de la décohésion et de la microfissuration dans les composites, Thèse Paris VI.
- BONNET, M. [1999]. Stability of crack fronts under Griffith criterion : a computational approach using integral equations and domain derivatives of potential energy. *Comp. Meth. in Appl. Mech. Engng.*, Vol 173, pp. 337-364.
- BOTTEGA, W.J. [1994]. On circumferential splitting of a laminated cylindrical shell. *Int. J. Solids Structures*, Vol 31(14), pp. 1891-1909.
- BOURDIN, B., FRANCFORT, G.A., MARIGO, J.J. [2000]. Numerical experiments in revisited brittle fracture. *J. Mech. Phys. Solids*. 48, pp. 797-826.
- BRAIDES, A., FONSECA, I. [2002]. Brittle thin films. To appear in *Applied Math. and Optimization*.
- BREZIS, H. [1993]. *Analyse fonctionnelle. Théorie et Applications*. Masson, Paris.
- BRUNO, D., GRIMALDI, A. [1990]. Delamination failure of layered composite plates loaded in compression. *Int J. Solids Structures* Vol. 26 (3), pp. 313-330.
- BUDYN, E., MOËS, N., BELYTSCHKO, T. [2001]. Extended finite element analysis of multiple crack growth in brittle materials. 6th U.S. congress on computational mechanics. Dearborn.
- BUI, H.D. [1978]. *Mécanique de la rupture fragile*, Masson, Paris.
- BUI, H.D., EHRLACHER, A. [1997]. Developments of fracture mechanics in France in the last decades, A.A. Balkema/Rotterdam. Edited by H.P. Rossmannith.
- BUSSE, S. [1997]. Sur quelques questions liées à la théorie mathématique des coques en coordonnées curvilignes, Doctoral Dissertation, Université Pierre et Marie Curie, Paris.
- CAILLERIE, D. [1980]. The effect of a thin inclusion of high rigidity in an elastic body. *Math. Meth. Appl. Sci.* 2, p. 251-270.
- CARRERE, N. [2001]. Sur l'analyse multi-échelle des matériaux composites à matrice métallique : application au calcul de structure. Thèse Ecole Polytechnique, Palaiseau.
- CHABOCHE, J.L., GIRARD, R., LEVASSEUR, P. [1997]. On the interface debonding models, *Int. J. Damage Mechanics*, Vol. 6, pp. 220-257.
- CHABOCHE, J.L., FEYEL, F., MONERIE, Y. [2001]. Interface debonding models : a viscous regularization with a limited rate dependency. *Int. J. Solids. Struct.* 38, pp. 3127-3160.
- CHAI, H. [1986]. On the correlation between the mode I failure of the adhesive joints and laminated composites, *Eng. Fract. Mechs.* Vol.24 3 413-431.
- CHAI, H. [1996]. A crack propagation criterion based on local shear strain in adhesive bonds subjected to shear. *J.Mech. Phys. Solids*. Vol.44 (10), pp. 1669-1689.
- CHANG, F.K., KUTLU, Z. [1989]. Response of composite shells containing a delamination. *Appl. Mech. Rev.*, 22, p. S48-S53.
- CHARLOTTE, M. [2001]. Modèles discrets de rupture, Thèse Paris VI.
- CHEN, Y.Z. [1993]. Numerical solution of a curved crack problem by using hypersingular integral equation approach. *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 46 (2), pp.275-283.
- CHOQUET-BRUHAT, Y., DEWITT-MORETTE, C. [1982]. *Analysis, Manifolds and physics*, North-Holland.

- CIARLET, P.G., DESTUYNDER, P. [1979]. A justification of a nonlinear model in plate theory, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 17/18, pp. 227-258.
- CIARLET, P.G., RABIER, P. [1980]. Les équations de Von Kármán. *Lecture Notes in Math.*, Vol. 826, Springer Verlag, Berlin.
- CIARLET, P.G., GEYMONAT, G. [1982]. Sur les lois de comportement en élasticité non linéaire compressible, *C.R. Acad. Sci. Paris Série II*, 295, pp. 423-426.
- CIARLET, P.G. [1988]. *Mathematical elasticity, Vol I : Three dimensional elasticity*, North-Holland.
- CIARLET, P.G. [1990]. *Plates and junctions in elastic multi-structures : an asymptotic analysis*, Masson Paris.
- CIARLET, P.G. [2000]. *Mathematical elasticity, Vol III : Theory of shells*, North-Holland.
- CIMETIERE, A., GEYMONAT, G., LE DRET, H., RAOULT, A., TUTEK, Z. [1988]. Asymptotic theory and analysis for displacements and stress distribution in nonlinear elastic straight slender rods. *J. Elasticity* 19, pp. 111-161.
- COCHELIN, B., POTIER-FERRY, M. [1991]. A numerical model for buckling and growth of delamination in composite laminates. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 89, pp. 443-459.
- COTTERELL, B., RICE, J.R. [1980]. Slightly curved or kinked cracks. *Int. J. Fract.* 16, 155.
- COX, B., MASSABÒ, R., KEDWARD, K. [1996]. Suppression of delaminations in curved structures by stitching, *Composites Part A*, pp. 1133-1138.
- DAVET, J.L. [1985]. Sur les densités d'énergie en élasticité non linéaire : confrontation de modèles et de travaux expérimentaux, *Annales des Ponts et Chaussées*, 3ième trimestre, 2-33.
- DAVET, J.L. [1986]. Justification de modèles de plaques non linéaires pour des lois de comportement générales. *Math. Model. Numer. Analysis. Vol. 20, n°2*, pp. 225-249.
- DAVIDSON, B.D. [1988] Two new techniques for predicting delamination growth in laminated plates, Ph. D. Thesis, A&M University, College station, Texas.
- DAVIDSON, B.D. [1990] An analytical investigation of delamination front curvature in double cantilever beam specimens. *J. Compos. Mater.* 24, pp. 1124-1137.
- DAVIES, P., RANNOU, F. [1995] The effect of defects in tubes : Part 1. Mode I delamination resistance. *Applied Composite Materials*, 1, pp.333-349.
- DAVIES, P., GINESTE, B., PIERRON, F., CARLSSON, L.A. [2000] Delamination resistance of cylindrical composite structures, *Proceeding J.N.C.* 12, Cachan, pp.235-244.
- DELALE, F., ERDOGAN, F., AYDINOGLU, M.N. [1981]. Stresses in adhesively bonded joints : a closed form solution. *J. of Comp. Mat.* 15, pp. 249-271.
- DESTUYNDER, P. [1980]. Sur une justification des modèles de plaques et coques par les méthodes asymptotiques, *Doctoral Dissertation*, Université Pierre et Marie Curie, Paris.
- DESTUYNDER, P., DJAOUA, M. [1981]. Sur une interprétation mathématique de l'intégrale de Rice en théorie de la rupture fragile. *Math. Meth. Appl. Sci.* 3, pp. 179-207.
- DESTUYNDER, P. [1983]. Calcul des forces d'avancement d'une fissure en tenant compte du contact unilatéral entre les lèvres de la fissure, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 296, pp. 745-748.
- DESTUYNDER, P., DJAOUA, M., LESCURE, S. [1983]. Quelques remarques sur la mécanique de la rupture élastique. *J. Meca. theor. Appli.*, vol. 2(1), pp. 113-135.

- DESTUYNDER, P. [1986]. Une théorie asymptotique des plaques minces en élasticité linéaire, Masson.
- DESTUYNDER, P., NEVEU, D. [1986]. Sur les modèles de lignes plastiques en mécanique de la rupture. *Mathematical modelling and numerical analysis* Vol 20 (2), pp. 251-263.
- DESTUYNDER, P., OUSSET, Y., STACKLER, C. [1988]. Sur les singularités de contraintes dans les joints collés. *J. Mec. Theor. Appli.*, Vol. 7(6), pp. 899-926.
- DESTUYNDER, P. [1990]. Modélisation des coques minces élastiques, Masson.
- DESTUYNDER, P., MICHAVILA, F., SANTOS, A., OUSSET, Y. [1992]. Some theoretical aspects in computational analysis of adhesive lap joints. *Int. J. Numer. Methods. Eng.*, 35, pp. 1237-1262.
- DJAOUA, M. [1983]. Analyse mathématique et numérique de quelques problèmes en mécanique de la rupture, Thèse d'état Paris VI.
- EDLUND, U., KLARBRING, A. [1992]. A geometrically nonlinear model of the adhesive joint problem and its numerical treatment, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, pp. 327-350.
- EDLUND, U. [1994]. Surface adhesive joint description with coupled elastic-plastic damage behaviour and numerical applications. *Comput. Methods Appl Mech Engrg*, 115, pp. 253-276.
- EHLACHER, A. [1985]. Contribution à l'étude thermodynamique de la progression de fissure et à la mécanique de l'endommagement brutal, Thèse d'état, Université Paris VI.
- EKELAND, I., TEMAN, R. [1974]. Analyse convexe et problèmes variationnels. Dunod.
- ERIKSSON, K. [2000]. A general expression for an area integral of a point-wise J for a curved crack front. *Int. J. Fracture*, 106, p.65-80.
- EVANS, A.G., HUTCHINSON, J.W. [1989]. Effects of nonplanarity on the mixed mode mode fracture resistance of bimaterial interfaces, *Acta Metall. Mater.* 37, 909.
- FEDELICH, B. [1990]. Trajets d'équilibre des systèmes mécaniques dissipatifs à comportement indépendant du temps physique, Thèse de Doctorat, Ecole Nationale des ponts et chaussées.
- FEYEL, F. [1998]. Application du calcul parallèle aux modèles à grand nombre de variables internes. Thèse Ecole des Mines, Paris.
- FERNLUND, G., MCCAMMOND, D., SPELT, J.K. [1994]. Curvilinear formulation of the 3-D J integral : Application to delamination cracking of curved laminates. *Composites Structures*, 35, pp. 123-130.
- FLECK, N.A., HUTCHINSON, J.W., SUO, Z. [1991]. Crack path selection in a brittle adhesive layer. *Int. J. Solids Structures* 27, pp. 1683-1703.
- FLOREZ, J. [1990]. Elasticité couplée à l'endommagement : formulation, analyse théorique et approximation numérique. Thèse E.N.S Cachan.
- FONSECA, I. [2001]. Higher Order variational problems. 2001 CNA Summer school. Pittsburgh.
- FONSECA, I., FRANCFORT, G.A. [2000]. On the inadequacy of the scaling of linear elasticity for 3D-2D asymptotics in a nonlinear setting. *J. Math. Pures et Appl.* 80, pp.547-562.
- FOX, D.D., RAOULT, A., SIMO, J.C. [1993]. A justification of nonlinear properly invariant plate theories, *Arch. Rational Mech. Anal.* 124, pp-157-199.
- FRANCFORT, G.A., MARIGO, J.J. [1993]. Stable damage evolution in a brittle continuous medium. *Eur. J. Mech., A/Solids*, 12(2), pp. 149-189.

- FRANCFORT, G.A., MARIGO, J.J. [1998]. Revisiting brittle fracture as an energy minimisation problem. *J. Mech. Phys. Solids*. 46(8), pp. 1319-1342.
défaut. CANUM 98, ESAIM Proc 6.
- FRIEDMAN, A., LIU, Y. [1996]. Propagation of crack in elastic media. *Arch. Rational Mech. Anal.* 136, pp.235-290.
- GANGHOFFER, J.F., BRILLARD, A., SCHULTZ, J. [1997]. Modelling of the mechanical behaviour of joints bonded by a nonlinear incompressible elastic adhesive. *Eur. J. Mech. A/Solids* 16(2), pp. 255-276.
- GERMAIN, P. [1972]. *Mécanique des Milieux Continus, Tome I*, Masson, Paris.
- GEYMONAT, G., KRASUCKI, F. [1997]. Analyse asymptotique du comportement en flexion de deux plaques collées. *C.R. Acad. Sci. Série Iib*, 325, pp. 307-314.
- GEYMONAT, G., KRASUCKI, F., LENCI, S. [1999]. Mathematical analysis of a bonded joint with a soft thin adhesive. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 4, pp. 201-255.
- GEYMONAT, G., KRASUCKI, F., MARINI, D., VIDRASCU, M. [1998]. A domain decomposition method for a bonded structure. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*. Vol.8, pp. 1387-1402.
- GILIBERT, Y., RIGOLOT, A. [1979]. Analyse asymptotique des assemblages collés à double recouvrement sollicités au cisaillement en traction. *J. Mech. Appl.* 3, pp. 341-372.
- GOLAND, M., REISSNER, E. [1944]. The stresses in cemented joints, *J. Appl Mech.*, ASME, 11, A17-A27.
- GRIFFITH, A. A. [1920]. The phenomena of rupture and flow in Solids. *Phil. Trans. Roy. Soc. London*. pp. 163-198.
- GURTIN, M.E. [1981]. *An Introduction to Continuum Mechanics*, Academic Press, New York.
- HARRIS, J.A., ADAMS, R.D. [1984]. Strength prediction of bonded single lap joints by nonlinear finite element methods. *Int J. Adhesion and adhesives* , Vol. 4 (2), pp. 65-78.
- HASHIN, Z. [1996]. Finite thermoelastic fracture criterion with application to laminate cracking analysis. *J. Mech. Phys. Solids*, 44(7), pp. 1129-1145.
- HERSKOVITS, J. [1992]. An interior point technique for nonlinear optimization, Research Report INRIA n° 1808.
- HUTCHINSON, J.W., MEAR, M.E., RICE, J.R. [1987]. Crack paralleling an interface between dissimilar materials. *J. of Appl. Mech.* 54, pp. 828-832.
- HUTCHINSON, J.W. [2001]. Delamination of compressed films on curved substrates. *J. Mech. Phys. Solids*. 49. pp. 1847-1864.
- KACHANOV, L.M. [1976]. Layering in glass fiber pipes subjected to external pressure. *Mekh. Pol.* 5. pp.918-922.
- KARIHALOO, B.L., KEER, L.M. [1981]. Approximate description of crack kinking and curving, *ASME J. Appl. Mech.* 48, 515.
- KLARBRING, A. [1991]. Derivation of a model of adhesively bonded joints by the asymptotic expansion method. *Int. J. Eng Sci.* 29 pp. 493-512.
- KOITER, W.T. [1970]. On the nonlinear theory of thin elastic shells. *Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch*, B 69. pp. 1-54.

- KOLTON, L.H., NAZAROV, S.A. [1992]. Quasistatic propagation of a mode-I crack in an elastic space. C.R.Acad Sci. Paris, Série II, t. 315., pp. 1453-1457.
- KRASUCKI F., LENCI S. [2000]. Yield design of bonded joints. Eur. Journal Mechs. Solids /A. 19(4). pp. 649-667.
- KRASUCKI F., MÜNCH, A., OUSSET, Y. [2001]. Asymptotic analysis of a bonded joint in nonlinear elasticity. C.R.Acad Sci. Paris, Série IIb, t. 329. Vol. 6, pp. 429-434.
- KRASUCKI F., MÜNCH, A. [2001]. Modèles de joint collé en élasticité non linéaire, XV^{ème} congrès français de mécanique, Septembre, Nancy.
- KRASUCKI F., MÜNCH, A., OUSSET, Y. [2002]. Numerical simulation of debonding of adhesively bonded joints. Int. J. of Solids and Structures, In Press.
- KRASUCKI F., MÜNCH, A., OUSSET, Y. [200x]. Mathematical analysis of nonlinear bonded joint models, Submitted to Mathematics Models and Methods in Applied Sciences.
- LADÈVEZE P. [1992]. A damage computational method for composite structures. Comput. Struct. , 22, pp. 79-87.
- LARSSON, P.L., LECKIE, F.A. [1992]. Plane strain delamination growth in composite panels. Composites structures. 20, pp.175-184.
- LAZARUS, V. [1997]. Quelques problèmes tridimensionnels de mécanique de la rupture fragile, Thèse Paris VI.
- LAZARUS, V. [1999]. Fatigue propagation path of 3D plane cracks under mode I loading. C.R.Acad Sci. Paris, Série IIb, t. 327., pp. 1319-1324.
- LEBLOND, J-B. [1989]. Crack paths in Plane situations- I. General form of the expansion of the stress intensity factors. Int. J. Solids. Structures, 25, pp.1311-1325.
- LEBLOND, J-B. [1999]. Crack path in three dimensional elastic solids I. Int. J. Solids. Structures, 36, pp.79-103.
- LEBON, F., OULD KHAOUA, A., LICHT. C [1998]. Numerical study of soft adhesively bonded joints in finite elasticity. Computational Mechanics, 21, pp. 134-140.
- LEGUILLON, D., ABDELMOULA, R. [2000]. Mode III near and far fields for a crack lying in or along a joint. Int. J. Solids. Struct., Vol. 37, pp. 2651-2672.
- LEGUILLON, D. [2002]. Strength or Toughness ? A criterion for crack onset at a notch. Eur. J. of Mech A/Solids, 21, pp. 61-72.
- LEMAITRE, J., CHABOCHE, J.L. [1985]. Mécanique des matériaux solides. Paris, Dunod.
- LE TALLEC, P., VIDRASCU, M. [1984]. Une méthode numérique pour les problèmes d'équilibre de corps hyperélastiques compressibles en grandes déformations. Numer Math. 43, pp.199-224.
- LÉVÊQUE, D. [1996]. Analyse de la tenue au délaminage des composites stratifiés : identification d'un modèle d'interface interlaminaire. Thèse LMT-Cachan.
- LI, X., KEER, L.M. [1992]. A direct method for solving crack growth problems. Int. J. Solids. Structures, 29(22), pp.2735-2747.
- LIAO, D. [1990]. Approche par l'élasticité non linéaire du flambage de composites en compression, Thèse Université Montpellier II.
- LICHT, C., MICHAILLE, G. [1996]. Une modélisation du comportement d'un joint collé élastique. C.R. Acad. Sci. Paris, t. 322, Série I, pp. 295-300.

- LIONS, J-L. [1973]. Perturbations singulières dans les problèmes aux limites et en contrôle optimal. Springer Verlag, Berling.
- MÖES, N., DOLBOW, J., BELYTSCHKO, T. [1999]. A finite element method for crack growth without remeshing. Int. J. Numer. Meth. Eng., 46(1), pp. 131-150.
- DE MONTLEAU, P. [1999]. Interfaces composites collées : Analyses asymptotiques et rupture fragile. Thèse Paris VI.
- MÜNCH, A., OUSSET, Y. [2000]. Taux de restitution de l'énergie pour une poutre courbe mince, C.R. Acad. Sci. Paris Série Iib, 328, pp. 471-476.
- MÜNCH, A., OUSSET, Y. [2001]. Propagation du délaminage dans les coques composites stratifiées, *V^{ème}* colloque national en calcul des structures, Giens.
- MÜNCH, A., OUSSET, Y. [2002a]. Numerical simulation of delamination growth in curved interfaces. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, 191(19-20), pp. 2045-2067.
- MÜNCH, A., OUSSET, Y. [2002b]. Fracture model of bonded joint : initiation and propagation. 14th European conference on Fracture, Cracow.
- MÜNCH, A., KRASUCKI, F. [2002]. Analyse mathématique de modèles de joints collés. 34ième congrès d'analyse numérique. Anglet.
- MURAT, F., SIMON, J. [1974]. Quelques résultats sur le contrôle par un domaine géométrique, Université Pierre et Marie Curie, 1974.
- NAZAROV, S.A., POLYAKOVA, O.R. [1996]. Rupture criteria, asymptotic conditions at crack tips, and selfadjoint extensions of the Lamé operator. Trans. Moscow Math. Soc. pp.13-68.
- NEVERS, T. [1986]. Modélisation théorique et numérique du délaminage des plaques composites, Thèse Ecole Centrale Paris.
- NGUYEN, Q.S. [1984]. Bifurcation et stabilité des systèmes irréversibles obéissant au principe de dissipation maximale. J. Meca. Theorique Appliquée, 3(1), pp. 41-61.
- NGUYEN, Q.S. [2000]. Stability and Nonlinear Solids Mechanics. John Wiley and Sons, Chichester.
- NILSSON, K.F. [1993]. On growth of crack front in D.C.B. test. Composites Eng. 3 (1993), pp.527-546.
- NODA, NAO-AKI., ODA, K. [1993]. Effect of curvature at the crack tip on the stress intensity factor for curved cracks. Int. Journal of Fracture. 64, pp.239-249.
- OUSSET, Y. [1993]. Derivation of the second derivative of the energy in a thin plate delamination. Rech. Aéronautique, 4, pp.43-54.
- OUSSET, Y. [1997]. Taux de restitution de l'énergie associé à une fissure se propageant le long d'une interface curviligne. C.R. Acad. Sci. Paris Série Iib, 324, pp. 603-609.
- OUSSET, Y., ROUDOLFF, F. [1992]. Un modèle limite de bande mince présentant deux fissures longitudinales, C.R. Acad. Sci. Paris Série II, 314, pp. 7-12.
- OUSSET, Y., ROUDOLFF, F. [1997]. Computation of the energy release in multilayered composites plates. Rech. Aéronautique, 2, pp. 137-147.
- OUSSET, Y. [1999c]. Etude numérique d'un panneau composite raidi sollicité en compression : évaluation d'algorithme de contact, RT 29/7795 DMSE/Y.

- OUSSET, Y. [1999]. Numerical simulation of delamination growth in layered composites plates, Eur. J. Mech. A/Solids, 18, pp. 291-312.
- OUSSET, Y., MÜNCH, A. [2001]. Delamination growth simulation in layered composite panels, European conference on computational mechanics, Cracow, June 26-29.
- OZDIL, F., CARLSSON, L.A. [2000a]. Characterization of mode I : Delamination growth in Glass/Epoxy composite cylinders. J. Composite Materials, Vol. 34 (5), pp.398-419.
- OZDIL, F., CARLSSON, L.A. [2000b]. Characterization of mixte mode : Delamination growth in Glass/Epoxy composite cylinders. J. Composite Materials, Vol. 34 (5), pp.420-440.
- PERLMAN, A.B., SIH, G.C. [1967]. Elastostatic problems of curvilinear cracks in bonded dissimilar materials, Int. J. Eng. Sci., 5, 845..
- POINT, N., SACCO, A. [1996]. A delamination model for laminated composites, Int. J. Solids Struct., 33, pp. 483-509.
- PRADEILLES-DUVAL, R.M. [1992]. Evolution de systèmes avec surfaces de discontinuités mobiles : Application au délaminage, Thèse Ecole Polytechnique.
- RANKIN, C.C., BROGAN, F.A., RIKS, E. [1993]. Some computational tools for the analysis of through cracks in stiffened fuselage shells. Report LR-701, Faculty of Aerospace Engineering - Delft University of Technology.
- RAOULT, A. [1986]. Non-polyconvexity of the stored energy function of a Saint Venant-Kirchhoff material, Aplikace Matematiky,6, pp. 417-419.
- REDDY, J.N., ROY, S. [1988]. Nonlinear analysis of adhesively bonded joints. Int J. Nonlinear Mechanics, Vol. 23, No.2, pp. 97-112.
- RICE, J.R. [1985]. First-order variation variation in elastic fields due to variation in location of a planar crack front. ASME, Journal of Applied Mechanics, 52, pp.571-579.
- RIGOLOT, A. [1972]. Sur une théorie asymptotique des poutres. J. Mécanique, 11, pp. 673-703.
- ROBINSON, P., SONG, D. Q. [1992]. A modified DCB specimen for Mode I Testing of multidirectional laminates. J. Composite Materials, Vol. 26, No.11, pp. 1554-1577.
- ROSE, L.R.F. [1987]. Crack reinforcement by distributed springs. J. Mech. Phys. Solids, 34 pp. 383-405.
- ROUDOLFF, F., OUSSET, Y. [2002]. Comparison between two approaches for the simulation of delamination growth in a DCB specimen. Aerospace science and technology, Vol. 6 (2)Rech. Aérospatiale, 2, pp. 123-130.
- RYBICKI, E.F., KANNINEN, A. [1977]. A finite element calculation of stress intensity factors by a modified crack closure integral, Eng. Fract. Mech., 9, pp.931-938.
- SANCHEZ-HUBERT, J., SANCHEZ-PALENCIA, E. [1997]. Coques élastiques minces : propriétés asymptotiques, Masson, Paris.
- SLÁDEK, V., SLÁDEK, J. [1983]. Three-dimensional curved crack in an elastic body, Int. J. Solids Structures Vol 19 (5), pp.425-436.
- SIMITSES, G.J. [1996]. Buckling of pressure loaded, delaminated, cylindrical shells and panels. Key Engineering Materials, 121-122, pp.407-426.
- SIMO, J.C., LAURSEN, T.A. [1992]. An augmented lagrangien treatment of contact problems involving friction, Computers and Structures Vol 42 (1), pp.97-116.

- STÖRAKERS, B., ANDERSSON, B. [1988]. Nonlinear plate theory applied to delamination in composites, *J. Mech. Phys. Solids*, 36, pp. 689-718.
- STÖRAKERS, B., LARSSON, P-L. [2000]. On buckling and growth of shallow delaminations, A. Benallal (Ed.), *Continuous Damage and Fracture*, pp.187-195.
- SUO, Z., HUTCHINSON, J.W. [1989]. Sandwich test specimens for measuring interface crack toughness, *Materials Science and Engineering*, A107, pp.135-143.
- SUQUET, P. [1988]. Discontinuities and plasticity. In Moreau, J.J., Panagiotopoulos, P.D. (Eds.), *Non-Smooth Mechanics and Applications*. Springer Verlag, Wien, pp. 280-340.
- TAILLADE, F. [2001]. Association de la shearographie et des ondes de Lamb pour la detection rapide et quantitative des délaminages. Thèse Conservatoire national des arts et métiers.
- TOYA, M. [1974]. A crack along the interface of a circular inclusion embedded in an infinite solids, *J. Mech. Phys. Solids*, 22,325.
- TROSHIN, V.P. [1983]. Effect of longitudinal delamination in a laminar cylindrical shell on the critical external pressure. *J. Composites Mater.*, 17(5),pp..563-7.
- TVERGAARD, V. [1990]. Effect of fibre debonding in a whisker-reinforced metal. *Mater. Sci. Engng. A* 125, pp. 203-213.
- TZAFEROPOULOS, M.A., PANAGIOTOPOULOS, P.D. [1993]. Delamination of composites as a substationarity problem : Numerical approximations and algorithms. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* 110, pp. 63-85.
- WELLS, G.N., SLUYS, L.J. [2000]. A new method for modelling cohesive cracks using finite elements. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 50, pp. 2667-2682.
- WOOLEY, G.R., CARVER, D.R. [1971]. Stress concentration factors for bonded lap joints. *J. Aircraft* 8 (10), pp. 817-820.
- WU, C.H. [1992]. Cohesive elasticity and surface phenomena, *Quarterly of Applied Mathematics*, Vol. L, 1, pp. 73-103.
- ZAITTOUNI F., LEBON, F., LICHT, C [2002] . Etude théorique et numérique du comportement d'un assemblage de plaques. *C.R. Acad. Sci., Série Iib*, 330(5), pp. 359-365.