# PRÉPARATION À L'AGRÉGATION EXTERNE : (CO-)DIAGONALISATION, (CO-)TRIGONALISATION

SIMON RICHE

## 1. Rappels : critères de diagonalisabilité et trigonalisabilité

On se place sur un corps $\Bbbk$, et on note $V$ un $\Bbbk$-espace vectoriel de dimension finie. Si $f \in \mathrm{End}(V)$, on notera $\mu_f$ son polynôme minimal, et $\chi_f$ son polynôme caractéristique.

**Exercice 1.**
(1) Soit $f \in \mathrm{End}(V)$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   (a) $f$ est diagonalisable ;
   (b) $f$ admet un polynôme annulateur scindé à racines simples ;
   (c) $\mu_f$ est scindé à racines simples.
(2) Peut-on caractériser la diagonalisabilité en termes de $\chi_f$ ?

**Exercice 2.** Soit $f \in \mathrm{End}(V)$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
(1) $f$ est trigonalisable ;
(2) $\chi_f$ est scindé ;
(3) $\mu_f$ est scindé ;
(4) $f$ admet un polynôme annulateur scindé.

## 2. Quelques théorèmes de cotrigonalisation

On se place sur un corps $\Bbbk$, et on note $V$ un $\Bbbk$-espace vectoriel de dimension finie.

Le résultat de codiagonalisation / cotrigonalisation le plus classique est le suivant.

**Exercice 3.**
(1) Soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes diagonalisables de $V$ qui commutent deux à deux. Montrer qu'il existe une base de $V$ qui codiagonalise tous les $f_i$, c'est-à-dire dans laquelle les matrices de tous les $f_i$ sont diagonales.
(2) Soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes trigonalisables de $V$ qui commutent deux à deux. Montrer qu'il existe une base de $V$ qui cotrigonalise tous les $f_i$, c'est-à-dire dans laquelle les matrices de tous les $f_i$ sont triangulaires supérieures.

Si une famille d'endomorphismes est codiagonalisable, alors ces endomorphismes commutent deux à deux (puisque les matrices diagonales commutent entre elles). Le résultat de l'exercice précédent est donc optimal en ce qui concerne la codiagonalisation. Par contre, des endomorphismes cotrigonalisables ne commutent pas nécessairement entre eux ; pour la cotrigonalisation, on peut donc espérer obtenir des résultats sous des hypothèse plus faibles. Le but des exercices qui suivent est de démontrer un certain nombre de tels résultats, dans lesquels l'hypothèse de commutation est remplacée par une hypothèse moins contraignante (mais dans lesquels on impose par contre d'avoir une certaine structure sur l'ensemble d'endomorphismes considéré).

On rappelle que si $H$ est un groupe, son sous-groupe dérivé $\mathscr{D}(H)$ est le sous-groupe engendré par les éléments de la forme $ghg^{-1}h^{-1}$ avec $g, h \in H$. On rappelle que $\mathscr{D}(H)$ est un sous-groupe distingué de $H$, et que le groupe quotient $H/\mathscr{D}(H)$ est abélien.

On définit le sous-groupe $\mathscr{D}^n(H) \subset H$ par récurrence, en posant

$$\mathscr{D}^0(H) = H, \quad \mathscr{D}^{n+1}(H) = \mathscr{D}(\mathscr{D}^n(H)) \text{ pour } n \geq 0.$$

On vérifie facilement que chaque $\mathscr{D}^n(H)$ est un sous-groupe distingué de $H$. On rappelle que $H$ est dit *résoluble* si $\mathscr{D}^n(H) = \{1\}$ pour $n$ entier assez grand.

**Exercice 4** (Théorème de Lie–Kolchin)**.** Dans cet exercice on suppose que $\Bbbk = \mathbb{C}$. Le but est de démontrer le *Théorème de Lie–Kolchin*, qui affirme que si $G \subset \mathrm{GL}(V)$ est un sous-groupe résoluble connexe (pour la distance induite par n'importe quel choix de norme sur $\mathrm{End}(V)$) alors il existe une base de $V$ dans laquelle les matrices de tous les éléments de $G$ sont triangulaires supérieures.

(1) Soit $G \subset \mathrm{GL}(V)$ un sous-groupe connexe. Montrer que chaque $\mathscr{D}^n(G)$ est un sous-groupe connexe de $G$.

(2) Le but de cette question est de montrer que si $G \subset \mathrm{GL}(V)$ un sous-groupe connexe résoluble non abélien, il existe un sous-espace vectoriel $W \subset V$ non trivial (c'est-à-dire strict et non nul) qui est stable par tous les éléments de $G$.

   (a) On note $\ell \geq 1$ le plus entier tel que $\mathscr{D}^\ell(G) = \{1\}$. (On a $\ell \geq 2$ puisque $G$ est non abélien.) Montrer que $H := \mathscr{D}^{\ell-1}(G)$ est un sous-groupe distingué connexe abélien et non trivial de $G$.

   (b) Montrer que l'ensemble

   $$E := \{v \in V \smallsetminus \{0\} \mid \forall h \in H, \, h(v) \in \mathbb{C}v\}$$

   est non vide.

   (c) Si $v \in E$, pour tout $h \in H$, on note $\alpha_v(h)$ le nombre complexe tel que $h(v) = \alpha_v(h) \cdot v$. Montrer que si $v \in E$ et si $g \in G$, alors $g(v) \in E$ et

   $$\alpha_{g(v)}(h) = \alpha_v(g^{-1}hg)$$

   pour tout $h \in H$.

   (d) Montrer que si $v \in E$ la fonction $\alpha_v : H \to \mathbb{C}$ est continue.

   (e) On fixe $v \in E$ et $h \in H$. Notons $\lambda := \alpha_v(h)$ la valeur propre pour laquelle $v$ est vecteur propre de $h$. Montrer que pour tout $g \in G$ le vecteur $g(v)$ est vecteur propre de $h$ pour la valeur propre $\lambda$. (On pourra utiliser les deux questions précédentes, et remarquer que l'ensemble des valeurs propres de $h$ est fini.)

   (f) On fixe $v \in E$, et on note $W$ le sous-espace de $V$ engendré les vecteurs $g(v)$ avec $g \in G$ et $v \in E$. Montrer que $W$ est un sous-espace non trivial de $V$ stable par tous les éléments de $G$. (Indication : pour montrer que

$W \neq V$, on raisonnera par l'absurde, et on montrera que si $W = V$ tout élément de $h$ est une homothétie de déterminant 1.)

(3) Démontrer le théorème de Lie–Kolchin par récurrence sur $\dim(V)$.

(4) Montrer que si $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est un sous-groupe résoluble connexe, alors $G$ est conjugué à un sous-groupe du groupe des matrices inversibles triangulaires supérieures.

(5) La réciproque de l'assertion de la question précédente est-elle vraie ?

Référence : Caldero–Germoni, *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries, Tome I*, Calvage & Mounet, 2017, Exercice IV.B.6.

Les exercices suivants font intervenir la notion de *sous-algèbre de Lie* de $\mathrm{End}(V)$. Pour $f, g \in \mathrm{End}(V)$, on pose

$$[f, g] = f \circ g - g \circ f.$$

Alors $[-,-] : \mathrm{End}(V) \times \mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}(V)$ est une application bilinéaire antisymétrique. (Il s'agit d'un exemple de *crochet de Lie*, qui munit $\mathrm{End}(V)$ d'une structure d'*algèbre de Lie* ; mais il n'est pas utile de le savoir.) Un sous-espace vectoriel $E \subset \mathrm{End}(V)$ est appelé une *sous-algèbre de Lie* si pour tous $f, g \in E$ on a $[f, g] \in E$. Étant donnée une sous-algèbre de Lie $E \subset \mathrm{End}(V)$, un sous-espace vectoriel $F \subset E$ est appelé un *idéal* de $E$ si pour tout $f \in E$ et tout $g \in F$ on a $[f, g] \in F$. (Remarquons qu'alors $F$ est automatiquement une sous-algèbre de Lie de $\mathrm{End}(V)$.)

**Exercice 5** (Théorème d'Engel)**.** Le but de cet exercice est de démontrer que si $E \subset \mathrm{End}(V)$ est une sous-algèbre de Lie constituée d'endomorphismes nilpotents, alors il existe une base de $V$ dans laquelle les matrices de tous les éléments de $E$ sont strictement triangulaires supérieures.

(1) Montrer que si $f, g, h \in \mathrm{End}(V)$ on a

$$[f, [g, h]] = [[f, g], h] + [g, [f, h]].$$

(Cette égalité est appelée *l'identité de Jacobi.*)

(2) Montrer que si $f \in \mathrm{End}(V)$ est nilpotent, alors l'application linéaire

$$\mathrm{ad}(f) : \begin{cases} \mathrm{End}(V) & \to & \mathrm{End}(V) \\ g & \mapsto & [f, g] \end{cases}$$

est nilpotente. (*Indication* : on pourra écrire $\mathrm{ad}(f)$ comme une somme d'applications linéaires nilpotentes qui commutent.)

(3) Soient $E \subset \mathrm{End}(V)$ une sous-algèbre de Lie et $F \subset E$ un idéal. Montrer que si

$$W := \{v \in V \mid \forall x \in F,\, x(v) = 0\},$$

alors pour tout $y \in E$ on a $y(W) \subset W$.

(4) Le but de cette question est de montrer que, pour tout $\Bbbk$-espace vectoriel $V$ non nul de dimension finie, si $E \subset \mathrm{End}(V)$ est une sous-algèbre de Lie constituée d'endomorphismes nilpotents, alors il existe un vecteur $v \in V \smallsetminus \{0\}$ tel que pour tout $x \in E$ on a $x(v) = 0$. On procédera par récurrence sur $\dim(E)$.

(a) Vérifier le résultat quand $\dim(E) = 0$.

(b) On fixe maintenant un entier $n$, et on suppose le résultat connu quand $\dim(E) \leq n$. On fixe un espace vectoriel $V$ et une sous-algèbre de Lie $E \subset \mathrm{End}(V)$ constituée d'endomorphismes nilpotents de dimension $n+1$. Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel strict $F \subset E$ qui est une sous-algèbre de Lie de $\mathrm{End}(V)$ et qui est maximal pour cette propriété (c'est-à-dire tel qu'aucun sous-espace vectoriel $G$ tel que $F \subsetneq G \subsetneq E$ n'est une sous-algèbre de Lie de $\mathrm{End}(V)$).

(c) On fixe un tel sous-espace $F$. On considère l'application linéaire
$$\varphi : F \to \mathrm{End}(E/F)$$
telle que pour $y \in F$, $\varphi(y)$ est l'application linéaire qui envoie $x + F$ sur $[y, x] + F$. Montrer que $\varphi$ est bien définie, et qu'elle vérifie
$$\varphi([f, g]) = [\varphi(f), \varphi(g)]$$
pour tous $f, g \in F$. (*Indication* : on pourra utiliser l'égalité prouvée en (1).)

(d) En déduire que $\mathrm{Im}(\varphi)$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathrm{End}(E/F)$, constituée d'endomorphismes nilpotents, et de dimension au plus $n$.

(e) En appliquant l'hypothèse de récurrence, montrer qu'il existe $x \in E \smallsetminus F$ tel que pour tout $y \in F$ on a $[y, x] \in F$.

(f) En déduire que $E = F \oplus \Bbbk \cdot x$, et que $F$ est un idéal de $E$.

(g) En considérant le sous-espace de $V$ donné par
$$W := \{v \in V \mid \forall x \in F,\ x(v) = 0\},$$
et en utilisant la question (3), en déduire qu'il existe $v \in V$ tel que $x(v) = 0$ pour tout $x \in E$.

(h) Conclure

(5) Démontrer le théorème d'Engel par récurrence sur $\dim(V)$.

Référence : `https://lmbp.uca.fr/~riche/alg-Lie-total.pdf`, p. 48–50.

Pour l'exercice suivant, étant donnée une sous-algèbre de Lie $E \subset \mathrm{End}(V)$, on note $\mathscr{D}(E)$ le sous-espace vectoriel de $\mathrm{End}(V)$ engendré par les éléments de la forme $[f, g]$ pour $f, g \in E$. Il n'est pas difficile de voir (en utilisant par exemple l'identité de Jacobi) que $\mathscr{D}(E)$ est un idéal de $E$, et donc en particulier une sous-algèbre de Lie de $\mathrm{End}(V)$. On peut alors définir des sous-algèbres de Lie $\mathscr{D}^n(E)$ en posant
$$\mathscr{D}^1(E) = E, \quad \mathscr{D}^{n+1}(E) = \mathscr{D}(\mathscr{D}^n(E)) \text{ si } n \geq 1.$$
On dira qu'une sous-algèbre de Lie $E$ de $\mathrm{End}(V)$ est *résoluble* s'il existe $n \geq 1$ tel que $\mathscr{D}^n(E) = \{0\}$.

**Exercice 6** (Théorème de Lie)**.** Le but de cet exercice est de démontrer le *Théorème de Lie*, qui affirme que si $\Bbbk$ est algébriquement clos de caractéristique nulle, et si $E \subset \mathrm{End}(V)$ est une sous-algèbre de Lie résoluble, alors il existe une base de $V$ dans lequelle les matrices de toutes les applications $x \in E$ sont triangulaires supérieures. (Ce théorème peut être considéré comme une "version linéaire" du théorème de Lie–Kolchin.)

On suppose donc dans cet exercice que $\Bbbk$ est algébriquement clos de caractéristique nulle.

(1) Le but de cet question est de montrer que si $V$ est un $\Bbbk$-espace vectoriel de dimension finie, si $E \subset \mathrm{End}(V)$ est une sous-algèbre de Lie et si $F \subset E$ est un idéal, alors pour toute forme linéaire $\lambda : F \to \Bbbk$ le sous-espace vectoriel

$$W := \{v \in V \mid \forall y \in F,\, y(v) = \lambda(y) \cdot v\}$$

vérifie $x(W) \subset W$ pour tout $x \in E$.

(a) On suppose $W \neq \{0\}$, et on fixe $v \in W \smallsetminus \{0\}$ et $x \in E$. Notons $n \geq 1$ le plus grand entier tel que les vecteurs

$$v,\, x(v),\, \cdots,\, x^n(v)$$

sont linéairement indépendants puis, pour tout $i \in \{0, \cdots, n\}$, notons $E_i$ le sous-espace vectoriel de $V$ engendré par les vecteurs $v, x(v), \cdots, x^i(v)$. Montrer que $x(E_n) \subset E_n$.

(b) Montrer, par récurrence sur $i$, que pour tout $y \in F$ on a

$$y(x^i(v)) - \lambda(y)x^i(v) \in E_{i-1}.$$

(c) Montrer que pour tout $y \in F$ on a $y(E_n) \subset E_n$.

(d) Montrer que si $y \in F$, alors $[x, y](E_n) \subset E_n$ et que

$$\mathrm{Tr}([x, y]_{|E_n}) = (n + 1) \cdot \lambda([x, y]).$$

(*Indication* : on pourra considérer la matrice de cet endomorphisme dans la base $v, x(v), \cdots, x^n(v)$.)

(e) Montrer d'autre part que si $y \in F$ on a $\mathrm{Tr}([x, y]_{|E_n}) = 0$.

(f) En déduire que si $y \in F$ on a $\lambda([x, y]) = 0$.

(g) Conclure.

(2) Le but de cette question est de montrer que si $V$ est un $\Bbbk$-espace vectoriel non nul de dimension finie et si $E \subset \mathrm{End}(V)$ est une sous-algèbre de Lie résoluble, alors il existe un vecteur $v \in V \smallsetminus \{0\}$ qui est vecteur propre pour tout $x \in E$. On procédera par récurrence sur $\dim(E)$.

(a) Vérifier le résultat quand $\dim(E) = 0$.

(b) On fixe maintenant un entier $n$, et on suppose le résultat connu quand $\dim(E) \leq n$. On fixe un espace vectoriel non nul $V$ de dimension finie et une sous-algèbre de Lie résoluble $E \subset \mathrm{End}(V)$ de dimension $n + 1$. Montrer qu'il existe un hyperplan de $E$ contenant $\mathscr{D}(E)$, et que tout tel hyperplan est un idéal de $E$.

(c) On fixe un hyperplan $F \subset E$ contenant $\mathscr{D}(E)$, et un endomorphisme $x \in E$ tel que $E = F \oplus \Bbbk \cdot x$. Montrer (en appliquant l'hypothèse de récurrence) qu'il existe une forme linéaire $\lambda : F \to \Bbbk$ telle que

$$W := \{v \in V \mid \forall y \in F,\, y(v) = \lambda(y) \cdot v\}$$

est non nul.

(d) En utilisant la question (1), montrer qu'il existe $v \in W$ qui est vecteur propre de $x$.

(e) Montrer que $v$ est vecteur propre de tout endomorphisme de $E$, et conclure.

(3) Démontrer le théorème de Lie par récurrence sur $\dim(V)$.

Référence : `https://lmbp.uca.fr/~riche/alg-Lie-total.pdf`, p. 51–53.