UFR MATHÉMATIQUES
Université Clermont Auvergne

MÉMOIRE DE STAGE

Résolutions pour les produits tensoriels tordus d'algèbres

NGUYEN Thi Hoa

Étudiante en Master 2 Mathématiques

Sous la supervision de Mme. Rachel TAILLEFER

Maître de conférences

2022-2023

Table des matières

"I am always doing that which I can not do,
in order that I may learn how to do it"

-Vincent Van Gogh-

Introduction

Soient k un corps et A une k-algèbre. Une résolution d'un A-module M est une suite exacte de A-modules, de la forme

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+1}} P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0.$$

qui sert à définir des invariants caractérisant la structure d'un A-module. Généralement, les objets de la suite sont souvent caractérisés par une propriété par exemple être projectif (ou libre). On parle alors de résolution projective (ou libre). En particulier, chaque module a des résolutions libres, des résolutions projectives. Ces résolutions sont des résolutions composées respectivement de modules libres, de modules projectifs.

Si M et N sont des modules sur les k-algèbres A et B, respectivement, compatibles avec une application de **twist** $\tau : B \otimes A \to A \otimes B$, alors $M \otimes N$ adopte une structure de module sur $A \otimes_\tau B$ que l'on dit le module sur les produits tensoriels tordus d'algèbres.

Le but de ce stage est de comprendre une construction élégante de résolution pour les produits tensoriels tordus d'algèbres, qui est proposée par Anne Shepler et Sarah Witherspoon dans l'acticle : "Resolutions for twisted tensor products" [7]. Cette construction permet de retrouver de manière systématique un grand nombre de résolutions classiques et d'en construire de nouvelles. Elles ont découvert une méthode générale pour tordre ensemble une résolution d'un A-module M et une résolution d'un B-module N afin de construire une résolution du $(A \otimes_\tau B)$-module $M \otimes N$. Une méthode similaire fonctionne pour les bimodules. En particulier, nous tordons ensemble des résolutions d'algèbres sur un corps pour obtenir une résolution pour un produit tensoriel tordu d'algèbres comme un bimodule sur lui-même.

Ce mémoire est divisé en quatre parties : dans le premier chapitre, nous donnons des définitions et quelques résultats préliminaires.

Ensuite, le chapitre 2 introduit les conditions de compatibilité de façon à pouvoir munir le produit tensoriel $M \otimes N$ d'un A-bimodule et d'un B-bimodule d'une structure de $(A \otimes_\tau B)$-bimodule.

Les produits tordus de résolutions pour les bimodules sont construits dans le chapitre 3 et nous montrons qu'ils donnent des résolutions projectives dans le théorème 3.6. Nous donnons aussi des applications à certains types d'extensions de Ore dans le chapitre 4.

Enfin, nous construisons les complexes qui sont les produits tensoriels tordus pour les modules dans le chapitre 5, et nous montrons que ces complexes sont des résolutions projectives dans le théorème 5.10. Les applications aux extensions de Ore apparaissent au chapitre 6. L'application au cacul de $\mathrm{Ext}^n_{R\#\mathbb{K}G}(\mathbb{K},\mathbb{K})$ où G est un groupe cyclique qui agit sur une algèbre de Nichols R est dans le chapitre 7.

Tous les produits tensoriels sont sur k, sauf indication contraire, i.e, $\otimes = \otimes_k$.

Je tiens à remercier vivement ma tutrice de stage, Mme Rachel TAILLEFER, de m'avoir proposé ce sujet, pour le temps passé ensemble et le partage de son expertise au quotidien. Grâce à sa confiance j'ai pu accomplir mes missions. Elle fut toujours d'une aide précieuse dans les moments les plus délicats.

Chapitre 1

Quelques définitions importantes

Rappelons les difinitions et résutats suivants (sans les démontrer) qui seront utiles tout au long de ce mémoire :

1.1 Algèbres sur un anneau

Définition 1.1. Soit k un anneau associatif, commutatif, unitaire. On dit que A est une k-algèbre si :

(i). A est un k-module,

(ii). A est un anneau associatif unitaire tel que la multiplication $m_A : A \times A \to A$ est une application k-bilinéaire.

Définition 1.2. Soit A une k-algèbre et m_A la multiplication de A.
On définit l'algèbre opposée à A, notée A^{op}, comme le k-module A muni de la multiplication définie par $a \cdot_{op} b = ba$ pour tous $a, b \in A$.

Définition 1.3. Soit A une k-algèbre. On définit l'algèbre enveloppante de A, notée A^e, comme le k-espace vectoriel $A \otimes A^{op}$ muni de la multiplication $\mu^e : A^e \times A^e \to A^e$ donnée par :

$$\mu^e((a_1 \otimes b_1), (a_2 \otimes b_2)) = a_1 a_2 \otimes b_2 b_1$$

pour tous $a_1, a_2, b_1, b_2 \in A$.

1.2 Modules et bimodules sur une algèbre

Définition 1.4. Soit A une k-algèbre. Un A-bimodule est un A-module M à gauche et à droite qui vérifie :

$$\forall a, b \in A, \forall m \in M, (am)b = a(mb).$$

Les morphismes de A-bimodules sont les morphismes de A-modules à gauche et à droite.

Remarque 1.5. Il y a une équivalence entre le A-bimodule M et le A^e-module M à gauche (ou à droite), où on définit :

$$\begin{aligned} \forall a, b \in A, \forall m \in M, (a \otimes b).m = amb \quad & \text{ou} \\ m.(a \otimes b) = bma. & \end{aligned}$$

Notons que A est un A^e-module à gauche sous l'action définie par :

$$\forall a, b, c \in A, (a \otimes b).c = acb.$$

Plus généralement, soit $A^{\otimes n} = A \otimes \cdots \otimes A$ (n facteurs de A), pour $n \geq 1$. C'est un A^e-module (A-bimodule) sous l'action définie par :

$$\forall a, b, c_1, \cdots, c_n \in A,\ (a \otimes b).(c_1 \otimes c_2 \otimes \cdots \otimes c_{n-1} \otimes c_n) = ac_1 \otimes c_2 \otimes \cdots \otimes c_{n-1} \otimes c_n b.$$

Définition 1.6. Soient A et B deux k-algèbres. On dit que M est un A-B-bimodule si M est un A-module à gauche et un B-module à droite tel que pour tout $(a, b, m) \in A \times B \times M$:

$$a.(m.b) = (a.m).b.$$

Proposition 1.7.
Soit A une k-algèbre. On a un isomorphisme de A^e-modules à gauche :

$$A^{\otimes(n+2)} \cong A^e \otimes A^{\otimes n}$$

Démonstration.
Soit $\phi : A^{\otimes(n+2)} \to A^e \otimes A^{\otimes n}$ définie par :

$$\phi(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) = (a_0 \otimes a_{n+1}) \otimes (a_1 \otimes \cdots \otimes a_n)$$

pour tous $a_0, \cdots, a_{n+1} \in A$. Remarquons que $A^e \otimes A^{\otimes n}$ est bien un A^e-module à gauche pour l'action définie par :

$$(a \otimes b).\big((a_0 \otimes a_1) \otimes (a_2 \otimes \cdots \otimes a_{n+1})\big) = (aa_0 \otimes a_1 b) \otimes (a_2 \otimes \cdots \otimes a_{n+1})$$

pour tous $a, b, a_0, \cdots, a_{n+1} \in A$.
C'est clair que ϕ est un morphisme de k-espaces vectoriels. On a aussi,

$$\begin{aligned}\phi((a \otimes b).(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+1})) &= \phi(aa_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}b)\\ &= (aa_0 \otimes a_{n+1}b) \otimes (a_1 \otimes \cdots \otimes a_n)\\ &= (a \otimes b).\phi(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}).\end{aligned}$$

Donc ϕ est un morphisme de A^e-modules.
Posons maintenant,

$$\begin{aligned}\psi : A^e \otimes A^{\otimes n} &\longrightarrow A^{\otimes(n+2)}\\ (a \otimes b) \otimes (a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) &\mapsto a \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes b\end{aligned}$$

On voit facilement que ϕ est un isomorphisme de A^e-modules d'inverse ψ. $\square$

1.3 Résolutions projectives

Soit R un anneau unitaire. Dans la suite, des R-modules sont souvent des R-modules à gauche sauf les cas spécifiés.

1.3.1 Complexes

Définition 1.8. Un **complexe de chaînes** (ou simplement un **complexe**) de R-modules est un couple $\mathbf{C} = (C_\bullet, d_\bullet)$, où $C_\bullet$ est un R-module $\mathbb{Z}$-gradué et $d_\bullet : C_\bullet \to C_\bullet$ est une application R-linéaire de degré -1, appelée **différentielle** telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $d_n \circ d_{n+1} = 0$ (c'est-à-dire $\mathrm{Im}(d_{n+1}) \subset \mathrm{Ker}(d_n)$).

$$\mathbf{C} : \cdots C_{n+2} \xrightarrow{d_{n+2}} C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \cdots$$

Définition 1.9. Soit $\mathbf{C} = (C_\bullet, d_\bullet)$ un complexe de R-modules. On pose, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

(i) $Z_n(\mathbf{C}) = \mathrm{Ker}(d_n) \subset C_n$ (n-cycles),

(ii) $B_n(\mathbf{C}) = \mathrm{Im}(d_{n+1}) \subset C_n$ (n-bords),

(iii) $H_n(\mathbf{C}) = Z_n(\mathbf{C})/B_n(\mathbf{C})$ (n-cocycles). $H_n(\mathbf{C})$ est appelé le **n-ième R-module d'homologie de C**.

Définition 1.10. Soient $\mathbf{C} = (C_\bullet, d_\bullet^C)$ et $\mathbf{D} = (C_\bullet, d_\bullet^D)$ deux complexes de R-modules. Un **morphisme de complexes** $f : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ est une application R-linéaire de degré 0 qui commute aux différentielles : le diagramme

$$\begin{tikzcd} C_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "d_n^C"'] & D_n \arrow[d, "d_n^D"] \\ C_{n-1} \arrow[r, "f_{n-1}"] & D_{n-1} \end{tikzcd}$$

commute.

Définition 1.11. (Sous-complexes) Soit $\mathbf{C} = (C_\bullet, d_\bullet)$ un complexe de R-modules. On dit que $\mathbf{C}'$ est un sous-complexe de $\mathbf{C}$ si pour tout $n \in \mathbb{Z}$, C'_n est un sous-module de C_n et $d_n(C'_n) \subset C'_{n-1}$.
Dans ce cas, $(C'_\bullet, d_\bullet)$ est aussi un complexe et l'inclusion $C'_\bullet \hookrightarrow C_\bullet$ donnée par l'inclusion naturelle de C'_n dans C_n pour chaque $n \in \mathbb{Z}$ est un morphisme de chaînes.

Définition 1.12. (**Homotopies**) Soient $\mathbf{C} = (C_\bullet, d_\bullet^C)$ et $\mathbf{D} = (C_\bullet, d_\bullet^D)$ deux complexes de R-modules et soient $f, g : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ des morphismes de complexes. Une **homotopie** de f à g est une application R-linéaire $h : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ de degré $+1$ telle que $\forall n \in \mathbb{Z}$, on a $d_{n+1}^D \circ h_n + h_{n-1} \circ d_n^C = g_n - f_n$.

$$\begin{tikzcd} C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}^C"] & C_n \arrow[r, "d_n^C"] \arrow[dl, "h_n"'] \arrow[d, shift right, "g_n"'] \arrow[d, shift left, "f_n"] & C_{n-1} \arrow[dl, "h_{n-1}"] \\ D_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}^D"] & D_n \arrow[r, "d_n^D"] & D_{n-1}. \end{tikzcd}$$

On dit que f et g sont **homotopes** s'il existe une homotopie de f à g. Si id_C est homotope à zéro via h, on dit parfois que h est une homotopie contractante.

Théorème 1.13.
Soient $\boldsymbol{C} = (C_\bullet, d_\bullet^C)$ et $\boldsymbol{D} = (C_\bullet, d_\bullet^D)$ deux complexes de R-modules et soient $f, g : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{D}$ des morphimses de complexes. Si f et g sont homotopes, alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $H_n(f) = H_n(g)$.

1.3.2 Bicomplexes

Définition 1.14. Un bicomplexe de R-modules est un ensemble $B = \{B_{i,j}\}_{i,j\in\mathbb{Z}}$ de R-modules $B_{i,j}$ avec des applications linéaires

$$d^h_{i,j} : B_{i,j} \to B_{i-1,j} \text{ et } d^v_{i,j} : B_{i,j} \to B_{i,j-1},$$

appelées **différentielles horizontales et verticales** respectivement, telles que $d^h_{i,j} \circ d^h_{i+1,j} = 0$, $d^v_{i,j} \circ d^v_{i,j+1} = 0$ et $d^v \circ d^h + d^h \circ d^v = 0$.

Le complexe total du bicomplexe B est donné par $Tot(B)_n = \bigoplus_{i+j=n} B_{i,j}$ pour chaque n, et la n-ième différentielle est $d_n = \sum_{i+j=n} d_{i,j}$, où $d_{i,j} = d^h_{i,j} + d^v_{i,j}$.

Théorème 1.15. ***(Produit tensoriel de complexes)***
Soient $\boldsymbol{C} = (C_\bullet, d^C_\bullet)$ et $\boldsymbol{D} = (C_\bullet, d^D_\bullet)$ des complexes de R-modules à droite et R-modules à gauche, respectivement. Soit $B_{i,j} = C_i \otimes_R D_j$ avec

$$d^h_{i,j} = d^C_i \otimes 1 \text{ et } d^v_{i,j} = (-1)^i \otimes d^D_j.$$

Alors $B_{\bullet,\bullet}$ est un bicomplexe de $\mathbb{Z}$-modules.

1.3.3 Modules projectifs

Définition 1.16. Un R-module P est dit projectif si le foncteur covariant $Hom_R(P, -)$ est exact, i.e pour toute suite exacte courte de R-modules

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow V \longrightarrow W \longrightarrow 0$$

la suite de groupes abéliens

$$0 \longrightarrow Hom_R(P, U) \longrightarrow Hom_R(P, V) \longrightarrow Hom_R(P, W) \longrightarrow 0$$

est exacte.

Proposition 1.17.
Soit P un R-module. On a une équivalence entre :

(i) P est projectif.

*(ii) Pour tout morphisme **surjectif** $\phi : U \to V$ de R-modules et tout morphisme $f : P \to V$ de R-modules, il existe un morphisme $\tilde{f} : P \to U$ de R-modules tel que $\phi \circ \tilde{f} = f$:*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\exists \tilde{f}"'] \arrow[d, "\forall f"] & \\ U \arrow[r, "\forall \phi"] & V \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

(iii) Il existe un R module X tel que $P \oplus X$ soit un R-module libre.

Théorème 1.18.
Tout R-module est un quotient d'un R-module libre donc projectif.

1.3.4 Résolutions projectives

Définition 1.19. Soit M un R-module. Une résolution projective (resp. libre) de M est une suite exacte de R-modules de la forme

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+1}} P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0.$$

dans laquelle tous les P_n sont projectifs (resp.libres). Cela signifie que d_0 est surjectif et que pour tout $n \geq 1$, on a $\mathrm{Im}(d_{n+1}) = \mathrm{Ker}(d_n)$.

Remarque 1.20. Notons que tout R-module M admet une résolution libre, et donc une résolution projective (en utilisant le théorème 1.18 et la proposition 1.17).

Théorème 1.21. ***(Théorème de comparaison)***
*Soit $(P_\bullet, d_\bullet)$ une résolution projective de M et soit $f : M \to N$ un morphisme de A-modules. Alors pour toute résolution $(Q_\bullet, \delta_\bullet)$ de N, il existe un morphisme de chaînes $\phi_\bullet : P_\bullet \to Q_\bullet$ qui est un **relèvement** de f, au sens où $\delta_0 \circ \phi_0 = f \circ d_0$. De plus, le morphisme de chaînes ϕ est unique à équivalence homotopique près.*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, "\exists\phi_2"] & P_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "\exists\phi_1"] & P_0 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "\exists\phi_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & Q_2 \arrow[r, "\delta_2"] & Q_1 \arrow[r, "\delta_1"] & Q_0 \arrow[r, "\delta_0"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

1.3.5 Tor

Supposons maintenant que M est un R-module à droite et N est un R-module à gauche. Soit $P_\bullet$ une résolution projective (de R-module à droite) de M. En appliquant $- \otimes_R N$ à cette résolution, on obtient un complexe de $\mathbb{Z}$-modules :

$$\cdots \longrightarrow P_2 \otimes_R N \xrightarrow{d_2 \otimes 1} P_1 \otimes_R N \xrightarrow{d_1 \otimes 1} P_0 \otimes_R N \longrightarrow 0.$$

on définit $\mathrm{Tor}_n^R(M, N)$ l'homologie de ce complexe : pour tout $n \geq 0$,

$$\mathrm{Tor}_n^R(M, N) = H_n(P_\bullet \otimes_R N) = \mathrm{Ker}(d_n \otimes 1) \;/\; \mathrm{Im}\;(d_{n+1} \otimes 1)$$

et

$$\mathrm{Tor}_\bullet^R(M, N) = \textstyle\bigoplus_{n \geq 0} \mathrm{Tor}_n^R(M, N).$$

Par le théorème de comparaison, $\mathrm{Tor}_n^R(M, N)$ ne dépend pas du choix de résolutions projectives de M. De même, on peut définir $\mathrm{Tor}_n^R(M, N)$ via une résolution projective (de R-modules à gauche) de N.

1.3.6 Résolution Bar

Soit A une k-algèbre. Considérons une suite de A^e-modules (à gauche) :

$$\mathbb{B} : \quad \cdots \xrightarrow{d_3} A^{\otimes 4} \xrightarrow{d_2} A^{\otimes 3} \xrightarrow{d_1} A \otimes A \xrightarrow{m_A} A \longrightarrow 0$$

avec pour tous $a_0, \cdots, a_{n+1} \in A$,

$$d_n(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) = \textstyle\sum_{i=0}^{n} (-1)^i a_0 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+1}$$

C'est un complexe de A^e-modules.

Proposition 1.22.
Le complexe $\mathbb{B}$ admet une homotopie contractante $h_n : A^{\otimes(n+2)} \to A^{\otimes(n+3)}$ définie par :

$$h_n(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) = 1 \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}$$

pour tous $a_0, \cdots, a_{n+1} \in A$ et $n \geq -1$.

Démonstration.
Soient $a_0, \cdots, a_{n+1} \in A$ et $n \geq -1$, on a :

$$\begin{aligned} d_{n+1} \circ h_n(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) &= d_{n+1}(1 \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) \\ &= a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+1} - \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+1} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} h_{n-1} \circ d_n(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) &= h_{n-1}\Big(\sum_{i=0}^{n} (-1)^i a_0 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+1}\Big) \\ &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+1} \end{aligned}$$

Ainsi, $(h_{n-1} \circ d_n + d_{n+1} \circ h_n)(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) = a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}$.
Donc h est bien une homotopie contractante. □

Comme h est une homotopie contractante, c'est-à-dire $id_{\mathbb{B}}$ est homotope à zéro, en utilisant le théorème 1.13, on voit facilement que $H_n(\mathbb{B}) = \{0\}$ pour tout $n \geq -1$. D'où $\mathbb{B}$ est une suite exacte.

Définition 1.23. Soit A une k-algèbre. On définit le complexe *Bar* de A, le complexe tronqué associé à $\mathbb{B}$:

$$Bar_\bullet(A) : \quad \cdots \xrightarrow{d_3} A^{\otimes 4} \xrightarrow{d_2} A^{\otimes 3} \xrightarrow{d_1} A \otimes A \longrightarrow 0$$

avec $Bar_n(A) = A^{\otimes(n+2)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

D'après la proposition 1.7, on peut voir que si A est un k-module libre alors les termes dans le complexe $Bar_\bullet(A)$ sont libres comme A^e-modules. En effet, si $\{\alpha_i, i \in I\}$ est une k-base de $A^{\otimes n}$, alors $A^{\otimes n} \cong \bigoplus_{i \in I} k\alpha_i$, donc

$$A^{(n+2)} \cong A^e \otimes A^n \cong \bigoplus_{i\in I} A^e(1\otimes 1\otimes \alpha_i).$$

Dans ce cas, le complexe $Bar_\bullet(A)$ est une résolution libre. C'est pour cela, dans la suite on prendra k comme un corps.

On identifie k avec le sous-module $k.1_A$ de la k-algèbre A et on écrit $\bar{A} = A/k$ le k-module quotient.

Proposition 1.24.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, soit

$$\overline{Bar}_n(A) = A\otimes \bar{A}^{\otimes n} \otimes A. \tag{1.1}$$

Soit $\pi_n : Bar_n(A) \to \overline{Bar}_n(A)$ la surjection canonique. Alors les $Ker(\pi_n)$ forment un sous-complexe de $Bar_\bullet(A)$ et donc on obtient un complexe quotient $\overline{Bar}_\bullet(A)$.

Démonstration.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Ker}(\pi_n)$ est un sous-module de A. On a $\overline{Bar}_n(A) = A\otimes(A/k)^{\otimes n}\otimes A$. Soit $a_0, \cdots, a_{n+1} \in A$, on a $\pi_n(a_0\otimes\cdots\otimes a_{n+1}) = 0$ s'il existe certains $i \in \{1,\cdots,n\}$ tels que les a_i sont des scalaires multiples de 1_A. Soit maintenant $a_0,\cdots,a_{n+1} \in A$ et supposons que $a_i \in k.1_A$ pour un i fixé dans $\{1,\cdots,n\}$,

$$\begin{aligned}
&\pi_{n-1}\circ d_n(a_0\otimes a_1\otimes\cdots\otimes a_n\otimes a_{n+1})\\
&= \pi_{n-1}\Big(\sum_{j=1}^{i-2}(-1)^j a_0\otimes\cdots\otimes a_ja_{j+1}\otimes a_i\otimes\cdots\otimes a_{n+1}\\
&+ \sum_{j=i+1}^{n}(-1)^j a_0\otimes\cdots\otimes a_i\otimes\cdots\otimes a_ja_{j+1}\otimes\cdots\otimes a_{n+1}\\
&+ (-1)^{i-1}a_0\otimes\cdots\otimes a_{i-1}a_i\otimes a_{i+1}\otimes\cdots\otimes a_{n+1} + (-1)^i a_0\otimes\cdots\otimes a_{i-1}\otimes a_ia_{i+1}\otimes\cdots\otimes a_{n+1}\Big)\\
&= \pi_{n-1}\big((-1)^{i-1}a_0\otimes\cdots\otimes a_{i-1}\otimes a_ia_{i+1}\otimes\cdots\otimes a_{n+1} + (-1)^i a_0\otimes\cdots\otimes a_{i-1}\otimes a_ia_{i+1}\otimes\cdots\otimes a_{n+1}\big)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad(\text{car } a_i \text{ est un scalaire})\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, $d_n(\mathrm{Ker}(\pi_n)) \subset \mathrm{Ker}(\pi_{n-1})$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. D'où les $\mathrm{Ker}(\pi_n)$ forment un sous-complexe de $Bar_\bullet(A)$.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}(\pi_n) \arrow[r, hook] \arrow[d] & Bar_n(A) \arrow[r, two heads, "\pi_n"] \arrow[d, "d_n"] & \overline{Bar}_n(A) \arrow[d, "\bar{d}_n"] \\
\mathrm{Ker}(\pi_{n-1}) \arrow[r, hook] & Bar_{n-1}(A) \arrow[r, two heads, "\pi_{n-1}"] & \overline{Bar}_{n-1}(A).
\end{tikzcd}$$

De plus, d'après le théorème de factorisation, il existe un unique morphisme de A^e-modules $\bar{d}_n : \overline{Bar}_n(A) \to \overline{Bar}_{n-1}(A)$ tel que $\bar{d}_n\circ\pi_n = \pi_{n-1}\circ d_n$. Ce morphisme satisfait $\bar{d}_{n-1}\circ\bar{d}_n = 0$ car $d_{n-1}\circ d_n = 0$. On obtient donc le complexe $\overline{Bar}_\bullet(A)$ avec les différentielles $\bar{d}_n$.

Remarquons aussi que $\pi_\bullet$ est donc un morphisme de complexes. $\square$

De même, on peut montrer l'existence d'une homotopie contractante en composant l'homotopie de la proposition 1.22 avec $\pi_\bullet$. Ce qui implique que $\overline{Bar_\bullet}(A)$ est une résolution libre de A^e-modules de A si A est un k-module libre.

Définition 1.25. Soit A un k-module libre. La résolution bar réduite (ou résolution bar normalisée) est $\overline{Bar_\bullet}(A)$ donnée à chaque degré par (1.1), qui est une résolution libre du A^e-module A.

Chapitre 2

Produits tensoriels tordus d'algèbres et la compatibilité de résolutions

On fixe k un corps quelconque. Soient A et B des k-algèbres associatives. Soient $m_A : A \otimes A \to A$ et $m_B : B \otimes B \to B$ leurs applications multiplications respectives et 1_A, 1_B leurs unités. On écrit 1 pour l'application identité et $1_n = 1 \otimes \cdots \otimes 1$ (n facteurs de 1).

2.1 Produits tensoriels tordus d'algèbres

Définition 2.1. Soit $\tau : B \otimes A \to A \otimes B$ une application k-linéaire bijective telle que $\tau(1_B \otimes a) = a \otimes 1_B$ et $\tau(b \otimes 1_A) = 1_A \otimes b$ pour tous $a \in A$ et $b \in B$, et

$$\tau \circ (m_B \otimes m_A) = (m_A \otimes m_B) \circ (1 \otimes \tau \otimes 1) \circ (\tau \otimes \tau) \circ (1 \otimes \tau \otimes 1) \tag{2.1}$$

comme applications $B \otimes B \otimes A \otimes A \to A \otimes B$. τ est appelée une application de twist ou un twist.

Définition 2.2. Soit τ une application de twist. Le produit tensoriel tordu $A \otimes_\tau B$ d'algèbres est une algèbre, dont l'espace vectoriel sous-jacent est $A \otimes B$ et la multiplication est donnée par l'application

$$m_\tau = (m_A \otimes m_B) \circ (1 \otimes \tau \otimes 1) \tag{2.2}$$

sur $A \otimes B \otimes A \otimes B$.

On note aussi que puisque τ est bijective, τ^{-1} existe bien et il existe un isomorphisme naturel de k-algèbres $\tau : B \otimes_{\tau^{-1}} A \to A \otimes_\tau B$ (en utilisant (2.1)).

Corollaire 2.3.
Soit $\tau : B \otimes A \to A \otimes B$ une application telle que $\tau(1_B \otimes a) = a \otimes 1_B$ et $\tau(b \otimes 1_A) = 1_A \otimes b$ pour tous $a \in A$ et $b \in B$, alors (2.1) est équivalente à

$$\tau(m_B \otimes 1) = (1 \otimes m_B)(\tau \otimes 1)(1 \otimes \tau) \tag{2.3}$$

$$\text{et} \quad \tau(1 \otimes m_A) = (m_A \otimes 1)(1 \otimes \tau)(\tau \otimes 1). \tag{2.4}$$

Démonstration.

- (2.1) $\Rightarrow$ (2.3) : Soit $(b_1, b_2, a) \in B^2 \times A$.
  D'une part,

$$
\begin{aligned}
&\tau(m_B \otimes 1)(b_1 \otimes b_2 \otimes a) = \tau(m_B \otimes m_A)(b_1 \otimes b_2 \otimes a \otimes 1) \\
&= (m_A \otimes m_B)(1 \otimes \tau \otimes 1)(\tau \otimes \tau)(1 \otimes \tau \otimes 1)(b_1 \otimes b_2 \otimes a \otimes 1) \quad \big(\text{par } (2.1)\big) \\
&= (m_A \otimes m_B)(1 \otimes \tau \otimes 1)(\tau \otimes \tau)\big(\sum b_1 \otimes a' \otimes b' \otimes 1\big) \quad \big(\text{en posant } \tau(b_2 \otimes a) = \sum a' \otimes b'\big) \\
&= (m_A \otimes m_B)(1 \otimes \tau \otimes 1)\big(\sum a'' \otimes b'' \otimes 1 \otimes b'\big) \qquad \big(\text{en posant } \tau(b_1 \otimes a') = \sum a'' \otimes b''\big) \\
&= (m_A \otimes m_B)\big(\sum a'' \otimes 1 \otimes b'' \otimes b'\big) \\
&= \sum a'' \otimes b''b'.
\end{aligned}
$$

  D'autre part,

$$
\begin{aligned}
(1 \otimes m_B)(\tau \otimes 1)(1 \otimes \tau)(b_1 \otimes b_2 \otimes a) &= (1 \otimes m_B)(\tau \otimes 1)\big(\sum b_1 \otimes a' \otimes b'\big) \\
&= (1 \otimes m_B)\big(\sum a'' \otimes b'' \otimes b'\big) \\
&= \sum a'' \otimes b''b'
\end{aligned}
$$

  En utilisant la relation (2.1) on voit bien que $\tau(m_B \otimes 1) = (1 \otimes m_B)(\tau \otimes 1)(1 \otimes \tau)$.

  (2.1) $\Rightarrow$ (2.4) : De même.
- (2.3) et (2.4) $\Rightarrow$ (2.1). On regarde le diagramme suivant :

$$
\begin{tikzcd}
B \otimes B \otimes A \otimes A \arrow[rrr, "m_B \otimes m_A"] \arrow[drr, "m_B \otimes 1 \otimes 1"] \arrow[dd, "1 \otimes \tau \otimes 1"] & & & B \otimes A \arrow[dddd, "\tau"] \\
& & B \otimes A \otimes A \arrow[ur, "1 \otimes m_A"] \arrow[d, "\tau \otimes 1"] & \\
B \otimes A \otimes B \otimes A \arrow[r, "\tau \otimes 1 \otimes 1"] \arrow[dd, "\tau \otimes \tau"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft\ (2.3)"] & A \otimes B \otimes B \otimes A \arrow[r, "1 \otimes m_B \otimes 1"] \arrow[ddl, "1 \otimes 1 \otimes \tau"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft\ (2.3)"] & A \otimes B \otimes A \arrow[d, "1 \otimes \tau"] \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft\ (2.4)"] & \\
& & A \otimes A \otimes B \arrow[dr, "m_A \otimes 1"] & \\
A \otimes B \otimes A \otimes B \arrow[r, "1 \otimes \tau \otimes 1"] & A \otimes A \otimes B \otimes B \arrow[ur, "1 \otimes 1 \otimes m_B"] \arrow[rr, "m_A \otimes m_B"] & & A \otimes B
\end{tikzcd}
$$

En utilisant (2.3) et (2.4), tous les diagrammes intérieurs commutent, donc le grand aussi. En effet :

$$\begin{aligned}
\tau(m_B \otimes m_A) &= \tau(1 \otimes m_A)(m_B \otimes 1 \otimes 1) \\
&= (m_A \otimes 1)(1 \otimes \tau)(\tau \otimes 1)(m_B \otimes 1 \otimes 1) && \text{(par (2.4))} \\
&= (m_A \otimes 1)(1 \otimes \tau)(1 \otimes m_B \otimes 1)(\tau \otimes 1)(1 \otimes \tau \otimes 1) && \text{(par (2.3))} \\
&= (m_A \otimes 1)(1 \otimes 1 \otimes m_B)(1 \otimes \tau \otimes 1)(1 \otimes 1 \otimes \tau)(\tau \otimes 1 \otimes 1)(1 \otimes \tau \otimes 1) && \text{(par (2.3))} \\
&= (m_A \otimes m_B)(1 \otimes \tau \otimes 1)(\tau \otimes \tau)(1 \otimes \tau \otimes 1).
\end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve. □

2.2 Bimodules sur les produits tensoriels tordus

Soit A et B deux k-algèbres, on fixe une application de twist $\tau : B \otimes A \to A \otimes B$.

Définition 2.4. Soit M un A-bimodule. On dit que M est compatible avec τ s'il existe une application k-linéaire bijective $\tau_{B,M} : B \otimes M \to M \otimes B$ qui commute avec la multiplication de B et la structure de bimodule de M, i.e, comme applications sur $B \otimes B \otimes M$ et sur $B \otimes A \otimes M \otimes A$ respectivement, on a :

$$\tau_{B,M}(m_B \otimes 1) = (1 \otimes m_B)(\tau_{B,M} \otimes 1)(1 \otimes \tau_{B,M}) \qquad \text{et} \tag{2.5}$$
$$\tau_{B,M}(1 \otimes \rho_{A,M}) = (\rho_{A,M} \otimes 1)(1 \otimes 1 \otimes \tau)(1 \otimes \tau_{B,M} \otimes 1)(\tau \otimes 1 \otimes 1) \tag{2.6}$$

où $\rho_{A,M} : A \otimes M \otimes A \to M$ est la structure de A-bimodule sur M.

Remarque 2.5.

1. Notons que la définition ci-dessus s'applique aussi aux B-bimodules en inversant le rôle de A et B. En effet, on applique la définition à l'algèbre B, au produit tensoriel tordu $B \otimes_{\tau^{-1}} A$, et à l'application de twist τ^{-1} pour obtenir les conditions d'un B-bimodule N compatible avec τ^{-1}. On peut réécrire ces conditions en utilisant le notation commode $\tau_{N,A} = (\tau^{-1}_{A,N})^{-1}$. On obtient une version équivalente de ce qui précède : un B-bimodule N donné est compatible avec τ^{-1} s'il existe une application k-linéaire bijective $\tau_{N,A} : N \otimes A \to A \otimes N$ satisfaisant

$$\tau_{N,A}(1 \otimes m_A) = (m_A \otimes 1)(1 \otimes \tau_{N,A})(\tau_{N,A} \otimes 1) \qquad \text{et} \tag{2.7}$$
$$\tau_{N,A}(\rho_{B,N} \otimes 1) = (1 \otimes \rho_{B,N})(\tau \otimes 1 \otimes 1)(1 \otimes \tau_{N,A} \otimes 1)(1 \otimes 1 \otimes \tau), \tag{2.8}$$

   où $\rho_{B,N} : B \otimes N \otimes B \to N$ est la structure de B-bimodule sur N. Donc, on dira qu'un bimodule est compatible avec τ lorsqu'il est un A-bimodule compatible avec τ ou un B-bimodule compatible avec τ^{-1}.

2. Un A-bimodule M est compatible avec τ s'il existe une application k-linéaire bijective

$$\tau_{B,M} : B \otimes M \to M \otimes B$$

   telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
B \otimes B \otimes M \arrow[r, "1\otimes\tau_{B,M}"] \arrow[d, "m_B\otimes 1"] & B \otimes M \otimes B \arrow[r, "\tau_{B,M}\otimes 1"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft\ (2.5)"] & M \otimes B \otimes B \arrow[d, "1\otimes m_B"] \\
B \otimes M \arrow[rr, "\tau_{B,M}"] & & M \otimes B \\
B \otimes A \otimes M \otimes A \arrow[u, "1\otimes\rho_{A,M}"] \arrow[d, "\tau\otimes 1\otimes 1"] & {} \arrow[u, phantom, "\circlearrowleft\ (2.6)"] & A \otimes M \otimes A \otimes B \arrow[u, "\rho_{A,M}\otimes 1"'] \\
A \otimes B \otimes M \otimes A \arrow[rr, "1\otimes\tau_{B,M}\otimes 1"] & & A \otimes M \otimes B \otimes A \arrow[u, "1\otimes 1\otimes\tau"']
\end{tikzcd}$$

3. Notons également que nous pouvons considérer séparément l'action à gauche et l'action à droite, ce qui sera étudié plus en détail dans le chapitre 5 et que les relations de compatibilité (2.5) et (2.6) deviennent (5.1) et (5.2).

Lemme 2.6.

Le A-bimodule A (resp.B-bimodule B) via la mutiplication est compatible avec τ via $\tau_{B,A} = \tau$ (resp. $\tau_{A,B} = \tau^{-1}$).

Démonstration.

Lorsque $M = A$, $\tau_{B,A} = \tau$, on obtient la condition (2.5) directement d'après (2.3). On voit aussi que $\rho_{A,M} = m_A(1 \otimes m_A)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
&(\rho_{A,M} \otimes 1)(1 \otimes 1 \otimes \tau)(1 \otimes \tau_{B,M} \otimes 1)(\tau \otimes 1 \otimes 1) \\
&= (m_A \otimes 1)(1 \otimes m_A \otimes 1)(1 \otimes 1 \otimes \tau)(1 \otimes \tau \otimes 1)(\tau \otimes 1 \otimes 1) \\
&= (m_A \otimes 1)(1 \otimes \tau)(1 \otimes 1 \otimes m_A)(\tau \otimes 1 \otimes 1) && \text{(d'après 2.4)} \\
&= (m_A \otimes 1)(1 \otimes \tau)(\tau \otimes 1)(1 \otimes 1 \otimes m_A) \\
&= \tau(1 \otimes m_A)(1 \otimes 1 \otimes m_A) && \text{(d'après 2.4)} \\
&= \tau(1 \otimes \rho_{A,M}).
\end{aligned}$$

On fait le même raisonnement pour la compatibilité du B-bimodule B. □

Théorème 2.7.

Soient M un A-bimodule et N un B-bimodule via $\rho_{A,M}$ et $\rho_{B,N}$ qui sont compatibles avec τ via $\tau_{B,M}$ et $\tau_{N,A}$ respectivement, alors $\rho_{A\otimes_\tau B}$ défini ci-dessous munit $M \otimes N$ naturellement d'une structure de $A \otimes_\tau B$-bimodule,

$$\begin{tikzcd}
A \otimes_\tau B \otimes M \otimes N \otimes A \otimes_\tau B \arrow[r, "\rho_{A\otimes_\tau B}"] \arrow[d, "1\otimes\tau_{B,M}\otimes\tau_{N,A}\otimes 1"'] & M \otimes N \\
A \otimes M \otimes B \otimes A \otimes N \otimes B \arrow[r, "1\otimes 1\otimes\tau\otimes 1\otimes 1"] & A \otimes M \otimes A \otimes B \otimes N \otimes B. \arrow[u, "\rho_{A,M}\otimes\rho_{B,N}"']
\end{tikzcd}$$

Démonstration.

D'abord, montrons que $M \otimes N$ est un $(A \otimes_\tau B)$-module à gauche. Pour cela, on doit vérifier la relation

$$\rho^l_{A\otimes_\tau B} \circ (m_\tau \otimes 1_2) = \rho^l_{A\otimes_\tau B} \circ (1_2 \otimes \rho^l_{A\otimes_\tau B}),$$

c'est-à dire

$$\begin{aligned}&\big((\rho^l_{A,M} \otimes \rho^l_{B,N}) \circ (1 \otimes \tau_{B,M} \otimes 1)\big) \circ \big((m_A \otimes m_B \otimes 1_2) \circ (1 \otimes \tau \otimes 1_3)\big)\\ &\qquad = \big((\rho^l_{A,M} \otimes \rho^l_{B,N}) \circ (1 \otimes \tau_{B,M} \otimes 1)\big) \circ \big((1_2 \otimes \rho^l_{A,M} \otimes \rho^l_{B,N}) \circ (1_3 \otimes \tau_{B,M} \otimes 1)\big)\end{aligned}$$

où $\rho^l_{A\otimes_\tau B}$, $\rho^l_{A,M}$ et $\rho^l_{B,N}$ sont des structures de $(A \otimes_\tau B)$-module à gauche sur $M \otimes N$, de A-module à gauche sur M et de B-module à gauche sur N respectivement. On regarde donc le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
A \otimes_\tau B \otimes A \otimes_\tau B \otimes M \otimes N \arrow[r, "1\otimes\tau\otimes 1_3"] \arrow[d, "1_3\otimes\tau_{B,M}\otimes 1"] & A \otimes A \otimes B \otimes B \otimes M \otimes N \arrow[r, "m_A\otimes m_B\otimes 1_2"] \arrow[d, "1_3\otimes\tau_{B,M}\otimes 1"] & A \otimes B \otimes M \otimes N \arrow[dd, "1\otimes\tau_{B,M}\otimes 1"] \\
A \otimes B \otimes A \otimes M \otimes B \otimes N \arrow[r, "1\otimes\tau\otimes 1_3"] \arrow[d, "1_2\otimes\rho^l_{A,M}\otimes\rho^l_{B,N}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft \; (5.2)"] & A \otimes A \otimes B \otimes M \otimes B \otimes N \arrow[d, "1_2\otimes\tau_{B,M}\otimes 1_2"] \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft \; (5.1)"] & \\
A \otimes B \otimes M \otimes N \arrow[d, "1\otimes\tau_{B,M}\otimes 1"] & A \otimes A \otimes M \otimes B \otimes B \otimes N \arrow[r, "m_A\otimes 1\otimes m_B\otimes 1"] \arrow[dl, "1\otimes\rho^l_{A,M}\otimes 1\otimes\rho^l_{B,N}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft \; (*)"] & A \otimes M \otimes B \otimes N \arrow[dl, "\rho^l_{A,M}\otimes\rho^l_{B,N}"] \\
A \otimes M \otimes B \otimes N \arrow[r, "\rho^l_{A,M}\otimes\rho^l_{B,N}"'] & M \otimes N. &
\end{tikzcd}$$

Comme M est un A-module à gauche et N est un B-module à gauche, le diagramme $(*)$ commute, les autres diagrammes à l'intérieur commutent car M est compatible avec τ. Ainsi, le grand diagramme commute. De la même manière, on peut aussi montrer que $M \otimes N$ est un $(A \otimes_\tau B)$-module à droite en utilisant la compatibilité de N avec τ^{-1}.

Ensuite, pour voir que $M \otimes N$ est un $(A \otimes_\tau B)$-bimodule, il nous reste à vérifier que

$$\rho^l_{A\otimes_\tau B} \circ (1_2 \otimes \rho^r_{A\otimes_\tau B}) = \rho^r_{A\otimes_\tau B} \circ (\rho^l_{A\otimes_\tau B} \otimes 1_2),$$

c'est-à-dire,

$$\begin{aligned}&\big((\rho^l_{A,M} \otimes \rho^l_{B,N})(1 \otimes \tau_{B,M} \otimes 1)\big)\big((1_2 \otimes \rho^r_{A,M} \otimes \rho^r_{B,N})(1_3 \otimes \tau_{N,A} \otimes 1)\big)\\ &\qquad = \big((\rho^r_{A,M} \otimes \rho^r_{B,N})(1 \otimes \tau_{N,A} \otimes 1)\big)\big((\rho^l_{A,M} \otimes \rho^l_{B,N} \otimes 1_2)(1 \otimes \tau_{B,M} \otimes 1_3)\big).\end{aligned}$$

Ou bien,

$$\begin{aligned}&(\rho^l_{A,M} \otimes 1)(1_2 \otimes \rho^l_{B,N})(1 \otimes \tau_{B,M} \otimes 1)(1_2 \otimes \rho^r_{A,M} \otimes 1)(1_4 \otimes \rho^r_{B,N})(1_3 \otimes \tau_{N,A} \otimes 1)\\ &\qquad = (\rho^r_{A,M} \otimes 1)(1_2 \otimes \rho^r_{B,N})(1 \otimes \tau_{N,A} \otimes 1)(1 \otimes \rho^l_{B,N} \otimes 1_2)(\rho^l_{A,M} \otimes 1_4)(1 \otimes \tau_{B,M} \otimes 1_3)\end{aligned}$$

où $\rho^r_{A\otimes_\tau B}$, $\rho^r_{A,M}$ et $\rho^r_{B,N}$ sont des structures de $(A \otimes_\tau B)$-module à droite sur $M \otimes N$, de A-module à droite sur M et de B-module à droite sur N respectivement. En effet, le diagramme ci-dessous commute en utilisant le fait que M est un A-bimodule, N est un B-bimodule et la compatibilité de M et N avec τ.

$$\begin{tikzcd}
AMBNAB \arrow[d, "\rho^l_{A,M}\otimes 1_4"] \arrow[dr, "1_3\otimes\tau_{N,A}\otimes 1"] & ABMNAB \arrow[l, "1\otimes\tau_{B,M}\otimes 1_3"'] \arrow[rr, "1_3\otimes\tau_{N,A}\otimes 1"] & & ABMAN\otimes B \arrow[dll, "1\otimes\tau_{B,M}\otimes 1_3"] \arrow[d, "1_4\otimes\rho^r_{B,N}"] \\
MBNAB \arrow[d, "1\otimes\rho^l_{B,N}\otimes 1_2"] & AMBANB \arrow[d, "1_2\otimes\tau\otimes 1_2"] & \overset{\circlearrowleft}{(5.4)} & ABMAN \arrow[d, "1_2\otimes\rho^r_{A,M}\otimes 1"] \\
MNAB \arrow[d, "1\otimes\tau_{N,A}\otimes 1"] \arrow[dr, phantom, "\overset{\circlearrowleft}{(5.6)}"] & AMABNB \arrow[r, "1\otimes\rho^r_{A,M}\otimes 1_3"] \arrow[d, "1_3\otimes\rho^l_{B,N}\otimes 1"] & AMBNB \arrow[dr, "1_3\otimes\rho^r_{B,N}"] \arrow[d, phantom, "\overset{\circlearrowleft}{(N \text{ est un } B\text{-bimodule})}"] & ABMN \arrow[d, "1\otimes\tau_{B,M}\otimes 1"] \\
MANB \arrow[d, "1_2\otimes\rho^r_{B,N}"] & AMANB \arrow[l, "\rho^l_{A,M}\otimes 1_3"] \arrow[r, "1_3\otimes\rho^r_{B,N}"] \arrow[dr, phantom, "\overset{\circlearrowleft}{(M \text{ est un } A\text{-bimodule})}"] & AMAN \arrow[dr, "1\otimes\rho^r_{A,M}\otimes 1"] & AMBN \arrow[d, "1_2\otimes\rho^l_{B,N}"] \\
MAN \arrow[r, "\rho^r_{A,M}\otimes 1"'] & MN & & AMN \arrow[ll, "\rho^l_{A,M}\otimes 1"]
\end{tikzcd}$$

(Pour simplifier, dans ce diagramme, on a noté AB à la place de $A \otimes B$, etc.)
Finalement, $M \otimes N$ est bien un $(A \otimes_\tau B)$-bimodule. □

2.3 Compatibilités de résolutions

Soient $P_\bullet(M)$ une résolution projective du A^e-module M et $P_\bullet(N)$ une résolution projective du B^e-module N :

$$(P_\bullet(M)) \qquad \dots P_2(M) \longrightarrow P_1(M) \longrightarrow P_0(M) \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

$$(P_\bullet(N)) \qquad \dots P_2(N) \longrightarrow P_1(N) \longrightarrow P_0(N) \longrightarrow N \longrightarrow 0.$$

Considérons les complexes $P_\bullet(M) \otimes B, B \otimes P_\bullet(M), P_\bullet(N) \otimes A$ et $A \otimes P_\bullet(N)$, on les regarde simplement comme des suites exactes de k-espaces vectoriels. Elles sont projectives, donc d'après le théorème de comparaison, les applications k-linéaires $\tau_{N,A} : N \otimes A \to A \otimes N$ et $\tau_{B,M} : B \otimes M \to M \otimes B$ admettent des relèvements, respectivement :

$$\begin{aligned} &\tau_{P_\bullet(N),A} : P_\bullet(N) \otimes A \to A \otimes P_\bullet(N) \qquad \text{et} \\ &\tau_{B,P_\bullet(M)} : B \otimes P_\bullet(M) \to P_\bullet(M) \otimes B. \end{aligned}$$

Dans la suite, pour simplifier, on note souvent $\tau_{B,i} := \tau_{B,P_i(M)}$ et $\tau_{i,A} := \tau_{P_i(N),A}$.

Définition 2.8. Soit M un A-bimodule compatible avec τ. Une résolution projective de A-bimodules $P_\bullet(M)$ est compatible avec l'application de twist τ si chaque $P_i(M)$ est compatible avec τ via l'application

$$\tau_{B,i} : B \otimes P_i(M) \to P_i(M) \otimes B,$$

où $\tau_{B,\bullet}$ est un morphisme de chaînes qui est un relèvement de $\tau_{B,M}$.

Remarque 2.9. Soit N un B-bimodule compatible avec τ. De manière analogue, on peut définir une résolution projective de B-bimodules $P_\bullet(N)$ de N qui est compatible avec τ si chaque $P_i(N)$ est compatible avec τ via l'application

$$\tau_{i,A} : P_i(N) \otimes A \to A \otimes P_i(N)$$

où $\tau_{\bullet,A}$ est un morphisme de chaînes qui est un relèvement de $\tau_{N,A}$. Donc, on dit qu'une résolution est compatible avec τ si c'est soit une résolution de A-bimodules soit une résolution de B-bimodules compatible avec τ.

Remarque 2.10. Notons que la compatibilité est préservée par un plongement de résolutions. Supposons que

$$\phi_\bullet : Q_\bullet(A) \hookrightarrow P_\bullet(A)$$

est un plongement de résolutions d'algèbres A, et $P_\bullet(A)$ est compatible avec le twist $\tau : B \otimes A \to A \otimes B$ via le morphisme de chaînes

$$\tau_{B,i} : B \otimes P_i(A) \to P_i(A) \otimes B.$$

Si $\tau_{B,i}$ préserve le plongement au sens où chaque $\tau_{B,i}$ est restreinte à une application surjective $B\otimes$ $\mathrm{Im}(\phi) \twoheadrightarrow \mathrm{Im}(\phi)$ $\otimes B$, alors $Q_\bullet(A)$ est compatible avec τ via ces restrictions.

Proposition 2.11.

Soient A et B deux k-algèbres. Soit $\tau : B \otimes A \to A \otimes B$ une application de twist. Alors,

(1) *La résolution bar $Bar_\bullet(A)$ est compatible avec τ.*

(2) *La résolution bar réduite $\overline{Bar}_\bullet(A)$ est compatible avec τ.*

Définition 2.12. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on définit une application $\tau_{B,n} : B \otimes A^{\otimes(n+2)} \to A^{\otimes(n+2)} \otimes B$ récursivement de la manière suivante :

$$\tau_{B,0} = (1 \otimes \tau) \circ (\tau \otimes 1)$$
$$\tau_{B,n} = (1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes \tau)(1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes \tau \otimes 1) \cdots (1 \otimes \tau \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1)(\tau \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1).$$

Remarque 2.13. Notons que, de manière équivalente, on a :

$$\begin{aligned} & \tau_{B,n} = (1_{n+1} \otimes \tau) \circ (\tau_{B,n-1} \otimes 1) \\ \text{ou} \quad & \tau_{B,n} = (1 \otimes \tau_{B,n-1}) \circ (\tau \otimes 1_{n+1}) \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Nous devons donc montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Bar_n(A) = A^{\otimes(n+2)}$ est compatible avec τ via $\tau_{B,n}$. Commençons donc par le lemme suivant :

Lemme 2.14.
L'application $\tau_{B,n}$ définie ci-dessus satisfait :

$$(m_A \otimes 1_n \otimes 1) \circ \tau_{B,n} = \tau_{B,n-1} \circ (1 \otimes m_A \otimes 1_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Démonstration.
On montre ce lemme par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

- Si $n = 0$, on a : $(m_A \otimes 1) \circ \tau_{B,0} = \tau \circ (1 \otimes m_A)$, c'est évident, comme d'après la condition (2.4) : $(m_A \otimes 1) \circ (1 \otimes \tau) \circ (\tau \otimes 1) = \tau \circ (1 \otimes m_A)$.
- Soit $n > 0$ tel que le résultat soit vrai au rang $n-1$, le diagramme ci-dessous commute par hypothèse de récurrence. En effet :

$$\begin{aligned}
(m_A \otimes 1_n \otimes 1)\tau_{B,n} &= (m_A \otimes 1_n \otimes 1)(1_{n+1} \otimes \tau)(\tau_{B,n-1} \otimes 1) \text{ (d'après la remarque 2.13)}\\
&= (1_n \otimes \tau)(m_A \otimes 1_{n-1} \otimes 1 \otimes 1)(\tau_{B,n-1} \otimes 1)\\
&= (1_n \otimes \tau)(\tau_{B,n-2} \otimes 1)(1 \otimes m_A \otimes 1_{n-1} \otimes 1) \text{ (hypothèse de récurrence)}\\
&= \tau_{B,n-1}(1 \otimes m_A \otimes 1_n) \qquad \text{(d'après la remarque 2.13).}
\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
B \otimes A^{\otimes n+2} \arrow[rr, "\tau_{B,n}"] \arrow[dr, "\tau_{B,n-1}\otimes 1"] \arrow[ddd, "(1\otimes m_A \otimes 1_{n-1})\otimes 1"'] & & A^{\otimes n+2} \otimes B \arrow[ddd, "m_A \otimes 1_n \otimes 1"] \\
& A^{\otimes n+1} \otimes B \otimes A \arrow[ur, "1_{n+1}\otimes\tau"'] \arrow[d, "(m_A\otimes 1_{n-1}\otimes 1)\otimes 1"] & \\
\arrow[r, phantom, "\circlearrowleft\ \textit{récurrence}"] & A^{\otimes n} \otimes B \otimes A \arrow[dr, "1_n\otimes\tau"] & \\
B \otimes A^{\otimes n+1} \arrow[rr, "\tau_{B,n-1}"] \arrow[ur, "\tau_{B,n-2}\otimes 1"] & & A^{\otimes n+1} \otimes B
\end{tikzcd}$$

- Conclusion : par le principe de récurrence on a bien

$$(m_A \otimes 1_n \otimes 1) \circ \tau_{B,n} = \tau_{B,n-1} \circ (1 \otimes m_A \otimes 1_n)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

Démonstration. (**de la proposition** 2.11)
(1) Remarquons d'abord que A est un A-bimodule compatible avec τ via $\tau_{B,n} = \tau$ d'après le lemme 2.6. Montrons maintenant que $\tau_{B,\bullet}$ est un morphisme de chaînes. Pour cela, on regarde le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "1\otimes d_{n+1}"] & B \otimes A^{\otimes n+2} \arrow[r, "1\otimes d_n"] \arrow[d, "\tau_{B,n}"] & B \otimes A^{\otimes n+1} \arrow[r, "1\otimes d_{n-1}"] \arrow[d, "\tau_{B,n-1}"] & \cdots \arrow[r] & B \otimes A \arrow[r] \arrow[d, "\tau"] & 0 \\
\cdots \arrow[r, "d_{n+1}\otimes 1"] & A^{\otimes n+2} \otimes B \arrow[r, "d_n\otimes 1"] & A^{\otimes n+1} \otimes B \arrow[r, "d_{n-1}\otimes 1"] & \cdots \arrow[r] & A \otimes B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où $d_n : A^{\otimes n+2} \to A^{\otimes n+1}$ est définie par :

$$\begin{aligned} d_n(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i a_0 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+1} \\ &= m_A \otimes 1_n - 1 \otimes d_{n-1}. \end{aligned}$$

On voit que $\tau_{B,n-1} \circ (1 \otimes 1 \otimes d_{n-1}) = (1 \otimes d_{n-1} \otimes 1) \circ \tau_{B,n}$ (***) par récurrence. En effet :

- ◇ Pour $n = 1, d_0 = m_A$, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
B \otimes A^{\otimes 3} \arrow[rrr, "\tau_{B,1}"] \arrow[dr, "\tau\otimes 1\otimes 1"] \arrow[ddd, "1\otimes 1\otimes m_A"'] & & & A^{\otimes 3} \otimes B \arrow[ddd, "1\otimes m_A\otimes 1"] \\
& A \otimes B \otimes A^{\otimes 2} \arrow[r, "1\otimes\tau\otimes 1"] \arrow[d, "1\otimes 1\otimes m_A"] & A^{\otimes 2} \otimes B \otimes A \arrow[ur, "1\otimes 1\otimes\tau"] & \\
\circlearrowleft\ \textit{Évident} & A \otimes B \otimes A \arrow[drr, "1\otimes\tau"] & \circlearrowleft\ 2.4 & \\
B \otimes A^{\otimes 2} \arrow[ur, "\tau\otimes 1"] \arrow[rrr, "\tau_{B,0}"] & & & A^{\otimes 2} \otimes B
\end{tikzcd}$$

commute en utilisant (2.4) :

$$\begin{aligned} \tau_{B,0}(1 \otimes 1 \otimes m_A) &= (1 \otimes \tau)(\tau \otimes 1)(1 \otimes 1 \otimes m_A) \\ &= (1 \otimes \tau)(1 \otimes 1 \otimes m_A)(\tau \otimes 1 \otimes 1) \\ &= (1 \otimes m_A \otimes 1)(1 \otimes 1 \otimes \tau)(1 \otimes \tau \otimes 1)(\tau \otimes 1 \otimes 1) \quad \text{(par (2.4))} \\ &= (1 \otimes m_A \otimes 1)(1 \otimes 1 \otimes \tau)(\tau_{B,0} \otimes 1) \\ &= (1 \otimes m_A \otimes 1)\tau_{B,1}. \end{aligned}$$

- ◇ Supposons que l'égalité (***) est vrai au rang $n - 1$, on regarde le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
B \otimes A^{\otimes n+2} \arrow[rr, "\tau_{B,n}"] \arrow[dr, "\tau \otimes 1_{n+1}"] \arrow[ddd, "1 \otimes 1 \otimes d_{n-1}"'] & & A^{\otimes n+2} \otimes B \arrow[ddd, "1 \otimes d_{n-1} \otimes 1"] \\
\arrow[d, phantom, "\circlearrowleft\ \textit{évident}"] & A \otimes B \otimes A^{\otimes n+1} \arrow[ur, "1 \otimes \tau_{B,n-1}"] \arrow[d, "1 \otimes 1 \otimes d_{n-1}"] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft\ \textit{récurrence}"] \\
 & A \otimes B \otimes A^{\otimes n} \arrow[dr, "1 \otimes \tau_{B,n-2}"] & \\
B \otimes A^{\otimes n+1} \arrow[ur, "\tau \otimes 1_n"] \arrow[rr, "\tau_{B,n-1}"] & & A^{\otimes n+1} \otimes B
\end{tikzcd}$$

Le petit diagramme à droite est commutatif par récurrence car :

$$\begin{aligned}
&(1 \otimes d_{n-1} \otimes 1)(1 \otimes \tau_{B,n-1}) \\
&\qquad = (1 \otimes (m_A \otimes 1_{n-1} - 1 \otimes d_{n-2}) \otimes 1)(1 \otimes \tau_{B,n-1}) \\
&\qquad = (1 \otimes m_A \otimes 1_{n-1} \otimes 1)(1 \otimes \tau_{B,n-1}) - (1 \otimes 1 \otimes d_{n-2} \otimes 1)(1 \otimes \tau_{B,n-1}) \\
&\qquad = (1 \otimes \tau_{B,n-2})(1 \otimes 1 \otimes m_A \otimes 1_{n-1}) - (1 \otimes \tau_{B,n-2})(1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes d_{n-2}) \\
&\qquad \text{(par le lemme 2.14 et hypthèse de récurrence)} \\
&\qquad = (1 \otimes \tau_{B,n-2})(1 \otimes 1 \otimes (m_A \otimes 1_{n-1} - 1 \otimes d_{n-2})) \\
&\qquad = (1 \otimes \tau_{B,n-2})(1 \otimes 1 \otimes d_{n-1}).
\end{aligned}$$

Ainsi, le grand diagramme commute comme tous les diagrammes à l'intérieur sont commutatifs. On obtient bien :

$$(1 \otimes d_{n-1} \otimes 1) \circ \tau_{B,n} = \tau_{B,n-1} \circ (1 \otimes 1 \otimes d_{n-1}).$$

En combinant avec le lemme 2.14, on a :

$$\tau_{B,n-1} \circ (1 \otimes m_A \otimes 1_n - 1 \otimes 1 \otimes d_{n-1}) = (m_A \otimes 1_n \otimes 1 - 1 \otimes d_{n-1} \otimes 1) \circ \tau_{B,n}$$

et finalement,

$$\tau_{B,n-1} \circ (1 \otimes d_n) = (d_n \otimes 1) \circ \tau_{B,n}.$$

Montrons ensuite que pour chaque $n \in \mathbb{N}, \tau_{B,n}$ commute avec la multiplication de B, on veut donc avoir :

$$\tau_{B,n}(m_B \otimes 1_{n+2}) = (1_{n+2} \otimes m_B)(\tau_{B,n} \otimes 1)(1 \otimes \tau_{B,n}).$$

Pour cela, on raisonne aussi par récurrence sur n :

◇ Pour $n = 0$, on a $\tau_{B,0} = (1 \otimes \tau)(\tau \otimes 1)$ et le diagramme suivant commute par (2.3) :

$$
\begin{tikzcd}
B \otimes B \otimes A^{\otimes 2} \arrow[rr, "m_B \otimes 1_2"] \arrow[dddd, "1 \otimes \tau_{B,0}"'] \arrow[ddr, "1 \otimes \tau \otimes 1"] & & B \otimes A^{\otimes 2} \arrow[rr, "\tau_{B,0}"] \arrow[dr, "\tau \otimes 1"] & & A^{\otimes 2} \otimes B \\
& & \underset{(2.3)}{\circlearrowleft} & A \otimes B \otimes A \arrow[ur, "1 \otimes \tau"] & \\
& B \otimes A \otimes B \otimes A \arrow[r, "\tau \otimes 1 \otimes 1"] \arrow[ddl, "1 \otimes 1 \otimes \tau"] & A \otimes B \otimes B \otimes A \arrow[ur, "1 \otimes m_B \otimes 1"] \arrow[d, "1 \otimes 1 \otimes \tau"] & \underset{(2.3)}{\circlearrowleft} & \\
& & A \otimes B \otimes A \otimes B \arrow[drr, "1 \otimes \tau \otimes 1"] & & \\
B \otimes A^{\otimes 2} \otimes B \arrow[urr, "\tau \otimes 1 \otimes 1"] \arrow[rrrr, "\tau_{B,0} \otimes 1"'] & & & & A^{\otimes 2} \otimes B \otimes B. \arrow[uuuu, "1 \otimes 1 \otimes m_B"']
\end{tikzcd}
$$

Donc,

$$
\begin{aligned}
&(1 \otimes 1 \otimes m_B)(\tau_{B,0} \otimes 1)(1 \otimes \tau_{B,0}) \\
&\qquad = (1 \otimes 1 \otimes m_B)\big((1 \otimes \tau \otimes 1)(\tau \otimes 1 \otimes 1)\big)\big((1 \otimes 1 \otimes \tau)(1 \otimes \tau \otimes 1)\big) \\
&\qquad = (1 \otimes 1 \otimes m_B)(1 \otimes \tau \otimes 1)(1 \otimes 1 \otimes \tau)(\tau \otimes 1 \otimes 1)(1 \otimes \tau \otimes 1) \\
&\qquad = (1 \otimes \tau)(1 \otimes m_B \otimes 1)(\tau \otimes 1 \otimes 1)(1 \otimes \tau \otimes 1) && \text{(par (2.3))} \\
&\qquad = (1 \otimes \tau)(\tau \otimes 1)(m_B \otimes 1 \otimes 1) && \text{(par (2.3))} \\
&\qquad = \tau_{B,0}(m_B \otimes 1 \otimes 1).
\end{aligned}
$$

◇ Supposons que le résultat est vrai au rang $n-1$, on regarde maintenant le diagramme :

$$
\begin{tikzcd}
B \otimes B \otimes A^{\otimes n+2} \arrow[rrr, "1\otimes\tau_{B,n}"] \arrow[dr, "1\otimes\tau_{B,n-1}\otimes 1"] \arrow[dddd, "m_B\otimes 1_{n+2}"'] & & & B \otimes A^{\otimes n+2} \otimes B \arrow[ddl, "\tau_{B,n-1}\otimes 1\otimes 1"'] \arrow[dd, "\tau_{B,n}\otimes 1"] \\
{} \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft\ \textit{récurrence}"] & B \otimes A^{\otimes n+1} \otimes B \otimes A \arrow[urr, "1\otimes 1_{n+1}\otimes\tau"] \arrow[d, "\tau_{B,n-1}\otimes 1\otimes 1"] & & \\
{} & A^{\otimes n+1} \otimes B \otimes B \otimes A \arrow[r, "1_{n+1}\otimes 1\otimes\tau"] \arrow[d, "1_{n+1}\otimes m_B\otimes 1"] & A^{\otimes n+1} \otimes B \otimes A \otimes B \arrow[r, "1_{n+1}\otimes\tau\otimes 1"] & A^{\otimes n+2} \otimes B \otimes B \arrow[dd, "1_{n+2}\otimes m_B"] \\
& A^{\otimes n+1} \otimes B \otimes A \arrow[drr, "1_{n+1}\otimes\tau"] & {} \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft\ (2.3)"] & {} \\
B \otimes A^{\otimes n+2} \arrow[ur, "\tau_{B,n-1}\otimes 1"] \arrow[rrr, "\tau_{B,n}"'] & & & A^{\otimes n+2} \otimes B.
\end{tikzcd}
$$

Les diagrammes à l'intérieur commutent donc le grand aussi. Ou bien,

$$
\begin{aligned}
&\tau_{B,n}(m_B \otimes 1_2) = (1_{n+1} \otimes \tau)(\tau_{B,n-1} \otimes 1)(m_B \otimes 1_{n+2}) \\
&= (1_{n+1} \otimes \tau)(1_{n+1} \otimes m_B \otimes 1)(\tau_{B,n-1} \otimes 1 \otimes 1)(1 \otimes \tau_{B,n-1} \otimes 1) \qquad \text{(hypothèse de récurrence)} \\
&= (1_{n+1} \otimes 1 \otimes m_B)(1_{n+1} \otimes \tau \otimes 1)(1_{n+1} \otimes 1 \otimes \tau)(\tau_{B,n-1} \otimes 1 \otimes 1)(1 \otimes \tau_{B,n-1} \otimes 1) \text{ (d'après (2.3))} \\
&= (1_{n+2} \otimes m_B)(1_{n+1} \otimes \tau \otimes 1)(\tau_{B,n-1} \otimes 1 \otimes 1)(1 \otimes 1_{n+1} \otimes \tau)(1 \otimes \tau_{B,n-1} \otimes 1) \\
&= (1_{n+2} \otimes m_B)(\tau_{B,n} \otimes 1)(1 \otimes \tau_{B,n}) \qquad \text{(d'après la remarque 2.13).}
\end{aligned}
$$

On montre finalement que pour chaque $n \in \mathbb{N}, \tau_{B,n}$ commute avec la structure de A-bimodule, c'est-à-dire :

$$\tau_{B,n}(1 \otimes \rho_{A,n}) = (\rho_{A,n} \otimes 1)(1 \otimes 1_{n+2} \otimes \tau)(1 \otimes \tau_{B,n} \otimes 1)(\tau \otimes 1_{n+2} \otimes 1)$$

où $\rho_{A,n} : A \otimes A^{\otimes n+2} \otimes A \to A^{\otimes n+2}$ est la structure de A-bimodule sur $Bar_n(A) = A^{\otimes n+2}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le diagramme ci-dessous commute en utilisant à nouveau la relation (2.4) et la remarque 2.13 :

$$
\begin{tikzcd}
B \otimes A \otimes A^{\otimes n+2} \otimes A \arrow[rr, "\tau\otimes 1_{n+2}\otimes 1"] \arrow[ddd, "1\otimes\rho_{A,n}"'] \arrow[ddr, "1\otimes m_A\otimes 1_{n+2}"] \arrow[ddrr, phantom, "\circlearrowleft\ (2.4)"] & & A \otimes B \otimes A^{\otimes n+3} \arrow[rr, "1\otimes\tau_{B,n}\otimes 1"] \arrow[d, "1\otimes\tau\otimes 1_{n+2}"] \arrow[dr, "1\otimes\tau_{B,n-1}\otimes 1_2"] & & A^{\otimes n+3} \otimes B \otimes A \arrow[ddddddd, "1\otimes 1_{n+2}\otimes\tau"] \\
 & & A^{\otimes 2} \otimes B \otimes A^{\otimes n+2} \arrow[d, "m_A\otimes 1\otimes 1_{n+2}"] & A \otimes A^{\otimes n+1} \otimes B \otimes A^{\otimes 2} \arrow[ur, "1_{n+2}\otimes\tau\otimes 1"'] \arrow[dddl, bend left, "m_A\otimes 1_n\otimes 1\otimes 1_2"] \arrow[dddd, phantom, "\circlearrowleft\ (\acute{e}vident)"] & \\
 & B \otimes A^{\otimes n+2} \otimes A \arrow[r, "\tau\otimes 1_{n+2}"] \arrow[dl, "1\otimes 1_{n+1}\otimes m_A"] \arrow[ddr, phantom, "\circlearrowleft\ (remarque\ 2.13)"] & A \otimes B \otimes A^{n+2} \arrow[dd, "1\otimes\tau_{B,n-2}\otimes 1_2"] & & \\
B \otimes A^{\otimes n+2} \arrow[dr, "\tau_{B,n-1}\otimes 1"] \arrow[dddd, "\tau_{B,n}"'] & & & & \\
 & A^{\otimes n+1} \otimes B \otimes A \arrow[dddl, "1_{n+1}\otimes\tau"] \arrow[ddr, phantom, "\circlearrowleft\ (2.4)"] & A^{\otimes n+1} \otimes B \otimes A^{\otimes 2} \arrow[l, "1_{n+2}\otimes m_A"] \arrow[d, "1_{n+1}\otimes\tau\otimes 1"] & & \\
 & & A^{\otimes n+2} \otimes B \otimes A \arrow[d, "1_{n+2}\otimes\tau"] & & \\
 & & A^{\otimes n+2} \otimes A \otimes B \arrow[dll, "1_{n+1}\otimes m_A\otimes 1"] & & \\
A^{\otimes n+2} \otimes B & & & & A^{\otimes n+3} \otimes A \otimes B \arrow[llll, "\rho_{A,n}\otimes 1"] \arrow[ull, "m_A\otimes 1_{n+3}"']
\end{tikzcd}
$$

On obtient :

$$
\begin{aligned}
&(\rho_{A,n} \otimes 1)(1 \otimes 1_{n+2} \otimes \tau)(1 \otimes \tau_{B,n} \otimes 1)(\tau \otimes 1_{n+2} \otimes 1) \\
&= \big((1_{n+1} \otimes m_A \otimes 1)(m_A \otimes 1_{n+3})\big)(1 \otimes 1_{n+2} \otimes \tau)\big(1_{n+2} \otimes \tau \otimes 1)(1 \otimes \tau_{B,n-1} \otimes 1_2)(\tau \otimes 1_{n+2} \otimes 1) \\
&= (1_{n+1} \otimes m_A \otimes 1)(1_{n+2} \otimes \tau)(1_{n+1} \otimes \tau \otimes 1)(m_A \otimes 1_{n+3})(1 \otimes \tau_{B,n-1} \otimes 1_2)(\tau \otimes 1_{n+2} \otimes 1) \\
&= (1_{n+1} \otimes \tau)(1_{n+2} \otimes m_A)(m_A \otimes 1_{n+3})(1 \otimes \tau_{B,n-1} \otimes 1_2)(\tau \otimes 1_{n+2} \otimes 1) \qquad \text{(d'après (2.4))} \\
&= (1_{n+1} \otimes \tau)(1_{n+2} \otimes m_A)(m_A \otimes 1_{n+3})(1_2 \otimes \tau_{B,n-2} \otimes 1_2)(1 \otimes \tau \otimes 1_{n+2})(\tau \otimes 1_{n+2} \otimes 1) \\
&\hspace{24em} \text{(par remarque 2.13)} \\
&= (1_{n+1} \otimes \tau)(1_{n+2} \otimes m_A)(1 \otimes \tau_{B,n-2} \otimes 1_2)(m_A \otimes 1_{n+3})(1 \otimes \tau \otimes 1_{n+2})(\tau \otimes 1_{n+2} \otimes 1) \\
&= (1_{n+1} \otimes \tau)(1_{n+2} \otimes m_A)(1 \otimes \tau_{B,n-2} \otimes 1_2)(\tau \otimes 1_{n+2})(1 \otimes m_A \otimes 1_{n+2}) \qquad \text{(d'après (2.4))}
\end{aligned}
$$

$= (1_{n+1} \otimes \tau)(1_{n+2} \otimes m_A)(\tau_{B,n-1} \otimes 1_2)(1 \otimes m_A \otimes 1_{n+2})$ (par remarque 2.13)
$= (1_{n+1} \otimes \tau)(\tau_{B,n-1} \otimes 1)(1_{n+2} \otimes m_A)(1 \otimes m_A \otimes 1_{n+2})$
$= \tau_{B,n}(1 \otimes \rho_{A,n})$ (par définition de $\rho_{A,n}$ et remarque 2.13)

ce qui fallait démontrer.

Conclusion, la résolution $Bar_\bullet(A)$ est compatible avec τ via $\tau_{B,\bullet}$.

(2) Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\pi_n : Bar_n(A) \to \overline{Bar}_n(A)$ la surjection canonique. On a déjà vu d'après la propostion 1.24 que les $\mathrm{Ker}(\pi_n)$ forment un sous-complexe de $Bar_\bullet(A)$ et $\overline{Bar}_\bullet(A) \cong Bar_\bullet(A)/\mathrm{Ker}(\pi_\bullet)$. Par définition de τ, on sait que pour tout $b \in B$, $\tau(b \otimes 1_A) = 1_A \otimes b$. Donc par linéarité, on obtient facilement que $\tau_{B,n}(B \otimes \mathrm{Ker}(\pi_n)) = \mathrm{Ker}(\pi_n) \otimes B$ (avec $\tau_{B,n}$ définie dans la partie 1). D'après le théorème de passage au quotient, il existe donc une unique application k-linéaire :

$$\bar{\tau}_{B,n} : B \otimes \overline{Bar}_n(A) \to \overline{Bar}_n(A) \otimes B.$$

telle que $\overline{\tau}_{B,n} \circ (1 \otimes \pi_n) = (\pi_n \otimes 1) \circ \tau_{B,n}$. Ainsi, $\overline{Bar}_\bullet(A)$ est aussi compatible avec τ via $\bar{\tau}_{B,n}$. □

Chapitre 3

Produits tordus de résolutions pour les bimodules

On fixe à nouveau deux k-algèbres A et B avec l'application de twist $\tau : B \otimes A \to A \otimes B$ et considérons un A-bimodule M et un B-bimodule N. Dans ce chapitre, on construira une résolution projective de $M \otimes N$ comme $(A \otimes_\tau B)$-bimodule à partir des résolutions $P_\bullet(M)$ et $P_\bullet(N)$ sous des conditions de compatibilité.

Lemme 3.1.

Soient M un A-bimodule compatible avec τ et N un B-bimodule compatible avec τ. Soient $P_\bullet(M)$ et $P_\bullet(N)$ deux résolutions projectives de M et N, respectivement, qui sont compatibles avec τ. Pour tout $i, j \geq 0$, soit

$$X_{i,j} = P_i(M) \otimes P_j(N),$$

un $(A \otimes_\tau B)$-bimodule pour la structure définie dans le théorème 2.7. Alors $X_{\bullet,\bullet}$ est un bicomplexe de $(A \otimes_\tau B)$-bimodules avec les différentielles horizontales et verticales données respectivement par :

$$d^h_{i,j} = d_i \otimes 1 \text{ et } d^v_{i,j} = (-1)^i \otimes d_j$$

où d_i et d_j sont les différentielles de $P_\bullet(M)$ et $P_\bullet(N)$, respectivement.

Démonstration.

On regarde le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
\cdots \arrow[r, "d^h_{3,2}"] & X_{2,2} \arrow[r, "d^h_{2,2}"] \arrow[d, "d^v_{2,2}"] & X_{1,2} \arrow[r, "d^h_{1,2}"] \arrow[d, "d^v_{1,2}"] & X_{0,2} \arrow[d, "d^v_{0,2}"] \\
\cdots \arrow[r, "d^h_{3,1}"] & X_{2,1} \arrow[r, "d^h_{2,1}"] \arrow[d, "d^v_{2,2}"] & X_{1,1} \arrow[r, "d^h_{1,1}"] \arrow[d, "d^v_{1,1}"] & X_{0,1} \arrow[d, "d^v_{0,1}"] \\
\cdots \arrow[r, "d^h_{3,0}"] & X_{2,0} \arrow[r, "d^h_{2,0}"] & X_{1,0} \arrow[r, "d^h_{1,0}"] & X_{0,0}.
\end{tikzcd}$$

Comme k-espaces vectoriels les $X_{i,j}$ forment un bicomplexe avec les différentielles données pour tous $i, j \geq 0$. Il nous reste donc à montrer que pour tous $i, j \geq 0$, $d^v_{i,j}$ et $d^h_{i,j}$ sont bien des morphismes de $(A \otimes_\tau B)$-bimodules. Pour cela, on vérifie d'abord que

$$d^v_{i,j} \circ \rho_{X_{i,j}} = \rho_{X_{i,j-1}} \circ (1_2 \otimes d^v_{i,j} \otimes 1_2)$$

où $\rho_{X_{i,j}} = (\rho_{A,i} \otimes \rho_{B,j})(1_2 \otimes \tau \otimes 1_2)(1 \otimes \tau_{B,i} \otimes \tau_{j,A} \otimes 1)$ est la structure de $(A \otimes_\tau B)$-bimodule sur $X_{i,j}$ avec

$$\begin{aligned} &\rho_{A,i} : A \otimes P_i(M) \otimes A \to P_i(M) \qquad \text{et} \\ &\rho_{B,j} : B \otimes P_j(N) \otimes B \to P_j(N) \end{aligned}$$

sont des structures de A-bimodule sur $P_i(M)$ et de B-bimodule sur $P_j(N)$ respectivement.

On a vu que $\tau_{B,\bullet}$ (resp. $\tau_{\bullet,A}$) est un morphisme de chaînes qui est un relèvement de τ (resp.τ^{-1}). On a donc pour tous $i, j \geq 0$:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes P_i(M) \otimes B \otimes A \otimes P_j(N) \otimes B \arrow[rr, "1_2\otimes\tau\otimes 1_2"] \arrow[dr, "1\otimes(-1)^i\otimes 1_2\otimes d_j\otimes 1"] & & A \otimes P_i(M) \otimes A \otimes B \otimes P_j(N) \otimes B \arrow[ddl, "1\otimes(-1)^i\otimes 1_2\otimes d_j\otimes 1"'] \arrow[dd, "\rho_{A,i}\otimes\rho_{B,j}"] \\
& A \otimes P_i(M) \otimes B \otimes A \otimes P_{j-1} \otimes B \arrow[d, "1_2\otimes\tau\otimes 1_2"] & \\
A \otimes_\tau B \otimes X_{i,j} \otimes A \otimes_\tau B \arrow[uu, "1\otimes(\tau_{B,i}\otimes\tau_{j,A})\otimes 1"] \arrow[d, "1_2\otimes(-1)^i\otimes d_j\otimes 1_2"] & A \otimes P_i(M) \otimes A \otimes B \otimes P_{j-1}(N) \otimes B \arrow[dr, "\rho_{A,i}\otimes\rho_{B,j-1}"'] & X_{i,j} \arrow[d, "(-1)^i\otimes d_j"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft\ (*)"] \\
A \otimes_\tau B \otimes X_{i,j-1} \otimes A \otimes_\tau B \arrow[d, "1\otimes\tau_{B,i}\otimes\tau_{j-1,A}\otimes 1"] \arrow[rr, phantom, "\circlearrowleft\ (**)"] & & X_{i,j-1} \\
A \otimes P_i(M) \otimes B \otimes A \otimes P_{j-1}(N) \otimes B \arrow[rr, "1_2\otimes\tau\otimes 1_2"'] & & A \otimes P_i(M) \otimes A \otimes B \otimes P_{j-1}(N) \otimes B \arrow[u, "\rho_{A,i}\otimes\rho_{B,j-1}"']
\end{tikzcd}$$

Le petit diagramme $(*)$ commute car d_j est un morphisme de B-bimodules et le diagramme $(**)$ commute du fait que $(1 \otimes d_j) \circ \tau_{j,A} = \tau_{j-1,A} \circ (d_j \otimes 1)$ car $\tau_{\bullet,A}$ est un morphisme de chaînes. Donc,

$$\begin{aligned}
d^v_{i,j} \circ\ \rho_{X_{i,j}} &= (-1)^i \otimes d_j)\big((\rho_{A,i} \otimes \rho_{B,j})(1_2 \otimes \tau \otimes 1_2)(1 \otimes \tau_{B,i} \otimes \tau_{j,A} \otimes 1)\big) \\
&= (\rho_{A,i} \otimes \rho_{B,j-1})(1 \otimes (-1)^i \otimes 1_2 \otimes d_j \otimes 1)(1_2 \otimes \tau \otimes 1_2)(1 \otimes \tau_{B,i} \otimes \tau_{j,A} \otimes 1) \\
&\text{(car } d_j \text{ est morphisme de } B\text{-bimodules)} \\
&= (\rho_{A,i} \otimes \rho_{B,j-1})(1_2 \otimes \tau \otimes 1_2)(1 \otimes (-1)^i \otimes 1_2 \otimes d_j \otimes 1)(1 \otimes \tau_{B,i} \otimes \tau_{j,A} \otimes 1) \\
&= (\rho_{A,i} \otimes \rho_{B,j-1})(1_2 \otimes \tau \otimes 1_2)(1 \otimes \tau_{B,i} \otimes \tau_{j-1,A} \otimes 1)(1_2 \otimes (-1)^i \otimes d_j \otimes 1_2) \\
&\text{(car } \tau_{\bullet,A} \text{ est morphisme de chaînes)} \\
&= \rho_{X_{i,j-1}} \circ (1_2 \otimes d^v_{i,j} \otimes 1_2).
\end{aligned}$$

Ainsi, $d^v_{i,j} = (-1)^i \otimes d_j$ est bien un morphismes de $(A \otimes_\tau B)$-bimodules. Par un raisonnement similaire, en utilisant le fait que $\tau_{B,\bullet}$ est un morphisme de chaînes et d_i est un morphisme de A-modules, on aura aussi que $d^h_{i,j}$ est un morphisme de $(A \otimes_\tau B)$-bimodules. Finalement, $X_{\bullet,\bullet}$ est bien un bicomplexe de $(A \otimes_\tau B)$-bimodules. $\square$

Définition 3.2. Le produit tordu de complexes $X_\bullet$ est le complexe total de $X_{\bullet,\bullet}$, i.e c'est le complexe :

$$\cdots \to X_2 \to X_1 \to X_0 \to M \otimes N \to 0 \tag{3.1}$$

avec $X_n = \bigoplus_{i+j=n} X_{i,j}$, et la n-ième différentielle est $d_n = \sum_{i+j=n} d_{i,j}$, où

$$d_{i,j} = d_i \otimes 1 + (-1)^i \otimes d_j.$$

Lemme 3.3.
Le produit tordu de complexes (3.1) *est une suite exacte.*

Démonstration.
D'après le théorème de Künneth (formule pour l'homologie)[3, Théorème 3.6.3], on sait qu'il existe une suite exacte pour chaque $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i+j=n} H_i(P_\bullet(M)) \otimes H_j(P_\bullet(N)) \longrightarrow H_n(P_\bullet(M) \otimes P_\bullet(N))$$
$$\longrightarrow \bigoplus_{i+j=n-1} \operatorname{Tor}_1^k(H_i(P_\bullet(M)) \otimes H_j(P_\bullet(N))) \longrightarrow 0.$$

On sait que $P_\bullet(M)$ et $P_\bullet(N)$ sont des résolutions projectives donc $H_i(P_\bullet(M)) = 0$ pour tout $i > 0$ et $H_j(P_\bullet(N)) = 0$ pour tout $j > 0$. Comme k est un corps, $H_i(P_\bullet(M))$ est un module libre donc c'est un module plat et donc $\operatorname{Tor}_1^k(H_i(P_\bullet(M)) \otimes H_j(P_\bullet(N))) = 0$ pour tous $i, j \geq 0$. De plus, la suite ci-dessus est exacte donc $H_n(P_\bullet(M) \otimes P_\bullet(N)) = 0$ pour tout $n > 0$. On obtient donc la suite exacte :

$$0 \longrightarrow H_0(P_\bullet(M)) \otimes H_0(P_\bullet(N)) \xrightarrow{f} H_0(P_\bullet(M) \otimes P_\bullet(N)) \longrightarrow 0$$

Par l'exactitude, f est injective et surjective donc

$$H_0(P_\bullet(M) \otimes P_\bullet(N)) \cong H_0(P_\bullet(M)) \otimes H_0(P_\bullet(N)).$$

Regardons maintenant la résolution projective de M,

$$P_\bullet(M) : \qquad \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0$$

et

$$\cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} 0$$

est un complexe donc :

$$H_0(P_\bullet(M)) = P_0/\operatorname{Im}(d_1) = P_0/\operatorname{Ker}(\epsilon) \cong M.$$

De même, $H_0(P_\bullet(N)) \cong N$. D'où, $H_0(P_\bullet(M)) \otimes H_0(P_\bullet(N)) \cong M \otimes N$.

Reprenons maintenant le complexe (3.1) :

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X_2 \arrow[r, "\delta_2"] & X_1 \arrow[r, "\delta_1"] & X_0 \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\delta_0"] \arrow[rr, bend right, "\varepsilon"] & H_0(P_\bullet(M)\otimes P_\bullet(N)) \arrow[r, "\sim"] & M\otimes N \arrow[r] & 0. \\
& & & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

Comme $H_i(P_\bullet(M)) = H_j(P_\bullet(N)) = 0$ pour tous $i, j > 0$, $H_n(X_\bullet) = 0$ et donc $\mathrm{Ker}(\delta_n) = \mathrm{Im}\,(\delta_{n+1})$ pour tout $n > 0$. On a aussi :

$$X_0/\mathrm{Im}(\delta_1) = \mathrm{Ker}(\delta_0)/\mathrm{Im}(\delta_1) = H_0(P_\bullet(M)\otimes P_\bullet(N)) \cong X_0/\mathrm{Ker}(\pi).$$

Ainsi, $\mathrm{Im}(\delta_1) = \mathrm{Ker}(\varepsilon)$ et ε est surjectif. Finalement, (3.1) est bien une suite exacte. $\square$

Dans la pratique, on peut souvent montrer directement que chaque $X_{i,j}$ est un $(A\otimes_\tau B)$-bimodule projectif, on va voir un exemple dans le dernier chapitre lorsqu'on travaille avec les résolutions bars ou les résolutions de Koszul. Pour le cas général, on aura besoin d'une condition de compatibilité supplémentaire qu'on expliquera dans la suite. Rappelons que chaque $P_i(N)$ est un B-bimodule projectif, il se plonge donc dans le B-bimodule libre $(B^e)^{\oplus J}$ pour un ensemble d'indices J.

Définition 3.4. Soit $\tau_{i,A} : P_i(N)\otimes A \to A\otimes P_i(N)$ un morphisme de chaînes. On dit qu'il est compatible avec un plongement $P_i(N) \hookrightarrow (B^e)^{\oplus J}$ si le diagramme correspondant commute :

$$\begin{tikzcd}
P_i(N)\otimes A \arrow[r, hook] \arrow[d, "\tau_{i,A}"'] & (B^e)^{\oplus J}\otimes A \arrow[d, "((\tau\otimes 1)(1\otimes\tau))^{\oplus J}"] \\
A\otimes P_i(N) \arrow[r, hook] & A\otimes (B^e)^{\oplus J}
\end{tikzcd}$$

De même, l'application $\tau_{B,i}$ est compatible avec un plongement de $P_i(M)$ dans le A-bimodule libre $(A^e)^{\oplus I}$ pour un ensemble d'indices I si le diagramme correspondant est commutatif, i.e si $\tau_{B,i}$ est la restriction de l'application $((1\otimes\tau)(\tau\otimes 1))^{\oplus I}$ à $B\otimes P_i(M)$.

Lemme 3.5.
Si $\tau_{B,i}$ et $\tau_{j,A}$ sont compatibles avec les plongements choisis de $P_i(M)$ et $P_j(N)$ dans les modules libres, alors $X_{i,j} = P_i(M)\otimes P_j(N)$ est un $(A\otimes_\tau B)$-bimodule projectif.

Démonstration.

◇ Premier cas : Si $P_i(M) = A^e$, $P_j(N) = B^e$ (des modules libres de rang 1) et les plongements sont les applications identité. Dans ce cas, on a

$$X_{i,j} = A^e\otimes B^e = A\otimes A^{op}\otimes B\otimes B^{op}.$$

Vérifions que $1\otimes\tau\otimes 1 : A\otimes B\otimes (A\otimes B)^{op} \to A\otimes A^{op}\otimes B\otimes B^{op}$ est un isomorphisme de $(A\otimes_\tau B)^e$-modules. C'est clair que $1\otimes\tau\otimes 1$ est une application k-linéaire. Le grand diagramme ci-dessous commute en utilisant la relation (2.1) et la définition de l'action de $(A \otimes_\tau B)$-bimodule donné dans le théorème 2.7. On obtient donc

$$
\begin{aligned}
&(1 \otimes \tau \otimes 1) \circ (m_\tau \otimes m_\tau) \\
&= (1 \otimes \tau \otimes 1)\big((1_2 \otimes m_A \otimes m_B)(1_3 \otimes \tau \otimes 1)\big)\big((m_A \otimes m_B \otimes 1_4)(1 \otimes \tau \otimes 1_5)\big) \\
&= (1 \otimes \tau \otimes 1)(1_2 \otimes m_A \otimes m_B)(m_A \otimes m_B \otimes 1_4)(1_5 \otimes \tau \otimes 1)(1 \otimes \tau \otimes 1_5) \\
&= (1 \otimes \tau \otimes 1)(m_A \otimes 1_2 \otimes m_B)(1_2 \otimes m_A \otimes m_B \otimes 1_2)(1_5 \otimes \tau \otimes 1)(1 \otimes \tau \otimes 1_5) \\
&= (m_A \otimes 1_2 \otimes m_B)(1_2 \otimes \tau \otimes 1_2)(1_2 \otimes m_A \otimes m_B \otimes 1_2)(1_5 \otimes \tau \otimes 1)(1 \otimes \tau \otimes 1_5) \\
&= (m_A \otimes 1_2 \otimes m_B)(1_2 \otimes m_A \otimes m_B \otimes 1_2)(1_3 \otimes \tau \otimes 1_3)(1_2 \otimes \tau \otimes \tau \otimes 1_2) \\
&\qquad\qquad (1_3 \otimes \tau \otimes 1_3)(1_5 \otimes \tau \otimes 1)(1 \otimes \tau \otimes 1_5) \qquad \text{(d'après (2.1))} \\
&= (m_A \otimes 1_2 \otimes m_B)(1_2 \otimes m_A \otimes m_B \otimes 1_2)(1_3 \otimes \tau \otimes 1_3)(1_2 \otimes \tau \otimes \tau \otimes 1_2) \\
&\qquad\qquad (1 \otimes \tau \otimes \tau \otimes \tau \otimes 1) \\
&= (m_A \otimes 1_2 \otimes m_B)(1_2 \otimes m_A \otimes m_B \otimes 1_2)(1_3 \otimes \tau \otimes 1_3)(1_2 \otimes \tau \otimes \tau \otimes 1_2) \\
&\qquad\qquad (1_5 \otimes \tau \otimes 1)(1 \otimes \tau \otimes 1_5)(1_3 \otimes \tau \otimes 1_3) \\
&= (\rho_{A,A^e} \otimes \rho_{B,B^e})(1_3 \otimes \tau \otimes 1_3)(1 \otimes \tau_{B,A^e} \otimes \tau_{B^e,A} \otimes 1)(1_3 \otimes \tau \otimes 1_3) \\
&= \rho_{(A \otimes_\tau B),(A^e \otimes B^e)} \circ (1_3 \otimes \tau \otimes 1_3)
\end{aligned}
$$

où $\rho_{(A \otimes_\tau B),(A^e \otimes B^e)}$ est l'action de $(A \otimes_\tau B)$-bimodule sur $A^e \otimes B^e$, ρ_{A,A^e} et ρ_{B,B^e} sont des actions de A-bimodule sur A^e et de B-bimodule sur B^e respectivement.

Donc $1 \otimes \tau \otimes 1$ est bien un morphisme de $(A \otimes_\tau B)$-bimodules, il est bien bijectif car τ l'est. De plus, $A \otimes B \otimes (A \otimes B)^{op}$ est un $(A \otimes_\tau B)^e$-libre ainsi, $X_{i,j} = A^e \otimes B^e$ l'est aussi.

$$
\begin{tikzcd}
AABBA^{op}B^{op}AB \arrow[dd, "m_A\otimes m_B\otimes 1_4"] \arrow[ddr, "1_5\otimes\tau\otimes 1"] & ABABA^{op}B^{op}AB \arrow[l, "1\otimes\tau\otimes 1_5"'] \arrow[r, "1_3\otimes\tau\otimes 1_3"] & ABAA^{op}BB^{op}AB \arrow[r, "1\otimes\tau_{B,A^e}\otimes\tau_{B^e,A}\otimes 1"'] \arrow[d, "1\otimes\tau\otimes 1_5"] & AAA^{op}BABB^{op}B \arrow[dddd, "1_3\otimes\tau\otimes 1_3"] \\
 & & AABA^{op}BB^{op}AB \arrow[d, "1_5\otimes\tau\otimes 1"] & \\
ABA^{op}B^{op}AB \arrow[dd, "1_3\otimes\tau\otimes 1"] & AABBA^{op}AB^{op}B \arrow[r, "1_3\otimes\tau\otimes 1_3"] \arrow[d, "1_2\otimes m_A\otimes m_B\otimes 1_2"] & AABA^{op}BAB^{op}B \arrow[uur, "1_2\otimes\tau\otimes\tau\otimes 1_2"'] \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft\ (2.1)"] & \\
 & AABA^{op}B^{op}B \arrow[r, "1_2\otimes\tau\otimes 1_2"] \arrow[d, "m_A\otimes 1_2\otimes m_B"] & AAA^{op}BB^{op}B \arrow[d, "m_A\otimes 1_2\otimes m_B"] & \\
ABA^{op}AB^{op}B \arrow[r, "1_2\otimes m_A\otimes m_B"] & ABA^{op}B^{op} \arrow[r, "1\otimes\tau\otimes 1"] & AA^{op}BB^{op} & AAA^{op}ABBB^{op}B. \arrow[l, "\rho_{A,A^e}\otimes\rho_{B,B^e}"] \arrow[ul, "1_2\otimes m_A\otimes m_B\otimes 1_2"']
\end{tikzcd}
$$

(Pour simplifier, dans ce diagramme, on a noté AB à la place de $A \otimes B$, etc.)

- $\diamond$ Deuxième cas : Si $P_i(M)$ et $P_j(N)$ sont des modules libres et si le plongement est l'identité, i.e $P_i(M) = (A^e)^{\oplus I}$ est un A^e-module libre de rang $|I|$ et $P_j(N) = (B^e)^{\oplus J}$ est un B^e-module libre de rang $|J|$, où I et J sont des ensembles d'indices. On a bien :

$$(A^e)^{\oplus I} \otimes (B^e)^{\oplus J} \cong (A^e \otimes B^e)^{\oplus I \times J}$$

et en utilisant l'isomorphisme $1 \otimes \tau \otimes 1$, on obtient

$$((A \otimes B)^e)^{\oplus I \times J} \cong (A^e \otimes B^e)^{\oplus I \times J}$$

Ainsi, $X_{i,j} = P_i(M) \otimes P_j(N)$ est un $(A \otimes_\tau B)$-bimodule libre, donc projectif.

- $\diamond$ Cas général : Si $P_i(M)$ et $P_j(N)$ sont projectifs, alors il existe un A^e-module X tel que $P_i(M) \oplus X \cong (A^e)^{\oplus I}$. De même, il existe un B^e-module Y tel que $P_j(N) \oplus Y \cong (B^e)^{\oplus J}$. D'après les deux premiers cas, on a

$$\begin{aligned}(P_i(M) \oplus X) \otimes (P_j(N) \oplus Y) &\cong (A^e)^{\oplus I} \otimes (B^e)^{\oplus J}\\ &\cong (A^e \otimes B^e)^{\oplus I \times J}\\ &\cong ((A \otimes B)^e)^{\oplus I \times J}.\end{aligned}$$

Posons

$$\alpha : P_i(M) \hookrightarrow (A^e)^{\oplus I} \text{ et } \beta : P_j(N) \hookrightarrow (B^e)^{\oplus J}$$

deux plongements tels que $\tau_{B,i}$ et $\tau_{j,A}$ sont compatibles avec α et β respectivement. On voit que $\alpha \otimes \beta$ est un morphisme de $(A \otimes_\tau B)$-module à gauche :

$$\begin{tikzcd}
A \otimes_\tau B \otimes P_i(M) \otimes P_j(N) \arrow[rr, hook, "1_2 \otimes \alpha \otimes \beta"] \arrow[dr, hook, "1_2 \otimes \alpha"] \arrow[dd, "1 \otimes \tau_{B,i} \otimes 1"'] \arrow[ddr, phantom, "\circlearrowleft\ \textit{compatibilité}"] & & A \otimes_\tau B \otimes (A^e)^{\oplus I} \otimes (B^e)^{\oplus J} \arrow[dd, "1 \otimes ((1 \otimes \tau)(\tau \otimes 1))^{\oplus I} \otimes 1_{2J}"] \\
& A \otimes B \otimes (A^e)^{\oplus I} \otimes P_j(N) \arrow[ur, hook, "1_2 \otimes 1_{2I} \otimes \beta"'] \arrow[d, "1 \otimes ((1 \otimes \tau)(\tau \otimes 1))^{\oplus I} \otimes 1"] & \\
A \otimes P_i(M) \otimes B \otimes P_j(N) \arrow[r, hook, "1 \otimes \alpha \otimes 1_2"] \arrow[d, "\rho_{A,i} \otimes 1_2"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft\ (*)"] & A \otimes (A^e)^{\oplus I} \otimes B \otimes P_j(N) \arrow[d, "\rho^l_{A,(A^e)^{\oplus I}} \otimes 1_2"] & A \otimes (A^e)^{\oplus I} \otimes B \otimes (B^e)^{\oplus J} \arrow[d, "\rho^l_{A,(A^e)^{\oplus I}} \otimes 1 \otimes 1_{2J}"] \\
P_i(M) \otimes B \otimes P_j(N) \arrow[r, hook, "\alpha \otimes 1_2"] \arrow[d, "1 \otimes \rho_{B,j}"'] & (A^e)^{\oplus I} \otimes B \otimes P_j(N) \arrow[r, hook, "1_{2I} \otimes \beta"] \arrow[d, "1_{2I} \otimes \rho_{B,j}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft\ (**)"] & (A^e)^{\oplus I} \otimes B \otimes (B^e)^{\oplus J} \arrow[d, "1_{2I} \otimes \rho^l_{B,(B^e)^{\oplus J}}"] \\
P_i(M) \otimes P_j(N) \arrow[r, hook, "\alpha \otimes 1"] \arrow[rr, bend right, "\alpha \otimes \beta"'] & (A^e)^{\oplus I} \otimes P_j(N) \arrow[r, hook, "1_{2I} \otimes \beta"] & (A^e)^{\oplus I} \otimes (B^e)^{\oplus J}
\end{tikzcd}$$

Les deux petits diagrammes $(*)$ et $(**)$ sont commutatifs par le fait que α et β sont des morphismes de A-bimodules et B-bimodules respectivement. Les autres diagrammes à l'intérieur commutent de manière évidente. Donc

$$\begin{aligned}&(\alpha\otimes\beta)\big((1\otimes\rho_{B,j})(\rho_{A,i}\otimes 1_2)(1\otimes\tau_{B,i}\otimes 1)\big)\\ &\qquad\qquad = \big((1_{2I}\otimes\rho_{B,B^e})(\rho_{A,A^e}\otimes 1_2)(1\otimes((1\otimes\tau)(\tau\otimes 1))^{\oplus I}\otimes 1_{2J})\big)(1_2\otimes\alpha\otimes\beta),\end{aligned}$$

et donc

$$(\alpha\otimes\beta)\rho^l_{X_{i,j}} = \rho^l_{(A^e)^{\oplus I}\otimes(B^e)^{\oplus J}}(1_2\otimes\alpha\otimes\beta)$$

où $\rho^l_{X_{i,j}}$ et $\rho^l_{(A^e)^{\oplus I}\otimes(B^e)^{\oplus J}}$ sont les actions à gauche de $A\otimes_\tau B$ sur $X_{i,j}=P_i(M)\otimes P_j(N)$ et sur $(A^e)^{\oplus I}\otimes(B^e)^{\oplus J}$ respectivement. Ainsi, $\alpha\otimes\beta$ est un plongement de $(A\otimes_\tau B)$-modules à gauche. En utilisant un raisonnement similaire, on peut aussi montrer que $\alpha\otimes\beta$ est un morphisme de $(A\otimes_\tau B)$-modules à droite et donc il est bien un plongement de $(A\otimes_\tau B)$-bimodules. D'après la première partie de la démonstration, on a

$$(A^e)^{\oplus I}\otimes(B^e)^{\otimes J}\cong((A\otimes B)^e)^{\oplus I\times J}.$$

On obtient finalement un plongement de $(A\otimes_\tau B)$-bimodules

$$P_i(M)\otimes P_j(N)\hookrightarrow((A\otimes B)^e)^{\oplus I\times J}.$$

D'où $P_i(M)\otimes P_j(N)$ est un $(A\otimes_\tau B)$-bimodule projectif. □

Théorème 3.6.
Soient A,B deux k-algèbres et $\tau: B\otimes A\to A\otimes B$ une application de twist. Soient M un A-bimodule et N un B-bimodule avec les résolutions projectives $P_\bullet(M)$ et $P_\bullet(N)$ respectivement. Supposons que $M,N,P_\bullet(M)$ et $P_\bullet(N)$ sont compatibles avec τ et pour tout $i,j>0$, les applications correspondantes $\tau_{B,i}$ et $\tau_{j,A}$ sont compatibles avec les plongements choisis de $P_i(M)$ et $P_j(N)$ dans des modules libres. Alors le produit tordu de complexes :

$$\cdots\longrightarrow X_2\longrightarrow X_1\longrightarrow X_0\longrightarrow M\otimes N\longrightarrow 0$$

est une résolution projective du $(A\otimes_\tau B)$-bimodule $M\otimes N$, où

$$X_n=\textstyle\bigoplus_{i+j=n}X_{i,j}\ \text{avec}\ X_{i,j}=P_i(M)\otimes P_j(N).$$

Démonstration.
La preuve découle directement des lemmes 3.1, 3.3 et 3.5. □

Chapitre 4

Résolutions de bimodules sur les extensions de Ore

De nombreuses algèbres d'intérêt sont des extensions de Ore d'autres algèbres. Nous allons voir comment on tord les résolutions de bimodules pour de telles extensions dans cette section.

4.1 Extensions de Ore comme produits tensoriels tordus

Définition 4.1. Soient R une k-algèbre, $\sigma \in Aut_k(R)$ et $\delta : R \to R$ une application k-linéaire telle que :

$$\delta(rs) = \delta(r)s + \sigma(r)\delta(s) \text{ pour tous } r, s \in R,$$

que l'on appelle une σ-dérivation. Alors l'extension de Ore de R est le R-module à gauche libre de base $\{x^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ avec la multiplication définie de manière unique par les conditions suivantes :

1. La relation de Ore $xr = \sigma(r)x + \delta(r)$, pour tous $r, s \in R$, est vérifiée.
2. Les inclusions naturelles $R \hookrightarrow R[x; \sigma, \delta]$ et $k[x] \hookrightarrow R[x; \sigma, \delta]$ sont des morphismes d'algèbres.

Lemme 4.2.
Soient $A = R$ et $B = k[x]$ et l'application de twist $\tau : B \otimes A \to A \otimes B$ définie par : $\tau(x \otimes r) = \sigma(r) \otimes x + \delta(r) \otimes 1$. Alors l'extension de Ore définie comme ci-dessus $R[x; \sigma, \delta]$ est isomorphe au produit tensoriel tordu d'algèbres $A \otimes_\tau B$.

Démonstration.
Posons

$$f : R[x; \sigma, \delta] \longrightarrow R \otimes_\tau k[x]$$
$$\sum_{i=0}^{n} r_i x^i \longmapsto \sum_{i=0}^{n} r_i \otimes x^i.$$

f est bien un morphisme de R-modules à gauche. Il nous reste à vérifier que f est un morphisme d'anneaux. Pour cela, il suffit de vérifier que :

$$f((rx^i)(sx^j)) = f(rx^i).\_\tau f(sx^j) \text{ pour tous } r, s \in R \text{ et } 0 \leq i, j \leq n.$$

Montrons donc par récurence sur $i \in [\![0, n]\!]$:

* Pour $i = 0$ et $j \in [\![0, n]\!]$, c'est évident.
* Pour $i = 1$ et pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, on a :

$$\begin{aligned} f((rx)(sx^j)) &= f(r(\sigma(s)x + \delta(s))x^j) \\ &= f(r\sigma(s)x^{1+j}) + f(r\delta(s)x^j) \\ &= r\sigma(s) \otimes x^{1+j} + r\delta(s) \otimes x^j, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f(rx).\_\tau f(sx^j) &= (r \otimes x).\_\tau(s \otimes x^j) \\ &= r\sigma(s) \otimes x^{1+j} + r\delta(s) \otimes x^j. \end{aligned}$$

Ainsi, $f((rx)(sx^j)) = f(rx).\_\tau f(sx^j)$ pour tous $r, s \in R$ et $0 \leq j \leq n$.

* Supposons que le résultat est vrai au rang $i - 1$. On a :

$$\begin{aligned} f((rx^i)(sx^j)) &= f(rx^{i-1}(xs)x^j) \\ &= f(rx^{i-1}(\sigma(s)x + \delta(s))x^j) \\ &= f(rx^{i-1}.\sigma(s)x^{1+j}) + f(rx^{i-1}.\delta(s)x^j) \\ &= f(rx^{i-1}).\_\tau f(\sigma(s)x^{1+j}) + f(rx^{i-1}).\_\tau f(\delta(s)x^j) \quad \text{(hypothèse de récurrence)} \\ &= f(rx^{i-1}).\_\tau(f(\sigma(s)x^{1+j}) + f(\delta(s)x^j)) \\ &= f(rx^{i-1}).\_\tau f(xsx^j) \\ &= f(rx^{i-1}).\_\tau f(x).\_\tau f(sx^j) \\ &= f(rx^i).\_\tau f(sx^j) \quad \text{(hypothèse de récurrence).} \end{aligned}$$

Donc, on obtient bien le résultat désiré d'après le principe de récurrence et f est bien un morphisme de k-algèbres. De plus, on voit facilement que $R[x; \sigma, \delta]$ et $R \otimes_\tau k[x]$ sont des R-modules à gauche libres de bases $\{x^i, 0 \leq i \leq n-1\}$ et $\{1 \otimes x^i, 0 \leq i \leq n-1\}$ respectivement, en envoyant une base sur une autre base, f est ainsi un isomorphisme de k-algèbres. □

4.2 Résolutions libres d'extensions de Ore itérées

Dans cette section, pour simplifier, nous nous limitons au cas où l'automorphisme sur R est l'identité ($\sigma = 1_R$). La relation de Ore s'écrit : $xr = rx + \delta(r)$. Ainsi, le commutateur $xr - rx$ est un élément de R.

Nous considérons maintenant une extension de Ore itérée

$$S = (\ldots(k[x_1][x_2; 1, \delta_2])\ldots)[x_t; 1, \delta_t]$$

définie de la manière suivante :

Pour $R = k[x_1]$ et $\delta_2 : R \to R$ une dérivation, on définit $R[x_2; 1, \delta_2] = k[x_1][x_2; 1, \delta_2]$. Soit ensuite, $\delta_3 : R[x_2; 1, \delta_2] \to R[x_2; 1, \delta_2]$ une dérivation et on définit aussi $R[x_3; 1, \delta_3] = R[x_2; 1, \delta_2][x_3; 1, \delta_3] = (k[x_1][x_2; 1, \delta_2])[x_3; 1, \delta_3]$; etc ... On écrit donc

$$S = k[x_1, \ldots, x_t; \delta_2, \ldots, \delta_t] = k\langle x_1, \ldots, x_t\rangle / (x_j x_i - x_i x_j - \delta_j(x_i) : 1 \leq i < j \leq t)$$

avec $S \cong k[x_1, \ldots, x_t]$ comme k-espace vectoriel. On suppose que S est une algèbre filtrée avec $deg(x_i) = 1$ pour tout i. Alors δ_j est une application filtrée, i.e

$$\delta_j(x_i) \in k \bigoplus Vect_k\{x_1, \ldots, x_t\}$$

pour tout $i < j$.

Théorème 4.3.
Considérons une extension de Ore itérée $S = k[x_1, \ldots, x_t; \delta_2, \ldots, \delta_t]$ avec l'automorphisme identité $\sigma_i = 1$ pour tout i, et une dérivation filtrée δ_i. Soit $V = Vect_k\{x_1, \ldots, x_t\}$, alors il existe un produit tordu itéré de résolutions $K_\bullet$ qui est une résolution libre de S comme S-bimodule :

$$K_n = S \otimes \bigwedge^n V \otimes S$$

avec les différentielles données par :
$d_n(1 \otimes x_{l_1} \wedge \cdots \wedge x_{l_n} \otimes 1)$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} (x_{l_i} \otimes x_{l_1} \wedge \cdots \wedge \hat{x}_{l_i} \wedge \cdots \wedge x_{l_n} \otimes 1 - 1 \otimes x_{l_1} \wedge \cdots \wedge \hat{x}_{l_i} \wedge \cdots \wedge x_{l_n} \otimes x_{l_i})$$

$$+ \sum_{1 \leq i < j \leq n} (-1)^j \otimes x_{l_1} \wedge \cdots \wedge x_{l_{i-1}} \wedge \bar{\delta}_j(x_{l_i}) \wedge x_{l_{i+1}} \wedge \cdots \wedge \hat{x}_{l_j} \wedge \cdots \wedge x_{l_n} \otimes 1,$$

où $1 \leq l_1 < \cdots < l_n \leq t$ et $\bar{\delta}_j(x_{l_i})$ est l'image de $\delta_j(x_{l_i})$ par la projection $k \oplus V \twoheadrightarrow V$.

Démonstration.
Remarquons d'abord que pour chaque i, la résolution de Koszul de $k[x_i]$

$$(\mathbf{Kos}) : \qquad 0 \longrightarrow k[x_i] \otimes Vect_k\{x_i\} \otimes k[x_i] \xrightarrow{d_1} k[x_i] \otimes k[x_i] \xrightarrow{m} k[x_i] \longrightarrow 0$$

où $d_1(1 \otimes x_i \otimes 1) = x_i \otimes 1 - 1 \otimes x_i$ et m est la multiplication, est plongée dans la résolution bar réduite de $k[x_i]$.

On raisonne par récurrence sur t :

1. Pour $t = i = 1$, le complexe **Kos** est bien une résolution libre de $S = k[x_1]$ satisfaisant l'énoncé du théorème.
2. Supposons maintenant que $t \geq 2$ et que le résultat est vrai au rang $t - 1$, i.e que l'extension de Ore itérée

$$A = k[x_1, \ldots, x_{t-1}; \delta_2, \ldots, \delta_{t-1}]$$

a une résolution libre $P_\bullet(A)$ de A-bimodules comme énoncée. Soient $B = k[x_t]$ et $P_\bullet(B)$ la résolution de Koszul (**Kos**) avec $i = t$. Alors $S \cong A \otimes_\tau B$ d'après le lemme 4.2, où

$$\tau(x_t \otimes a) = a \otimes x_t + \delta_t(a) \otimes 1 \text{ pour tout } a \in A.$$

◇ On plonge maintenant $P_\bullet(A)$ dans la résolution bar réduite $\overline{Bar}_\bullet(A)$ et on définira ensuite une application de twist via ce plongement. Pour cela, soit $\phi_n : P_n(A) \to A^{\otimes n+2}$ l'antisymétrisation standard définie par :

$$\phi_n(1 \otimes x_{l_1} \otimes \wedge \cdots \wedge x_{l_n} \otimes 1) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \otimes x_{l_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \otimes x_{l_{\sigma(n)}} \otimes 1$$

pour tous $1 \leq l_1 \leq \cdots \leq l_n \leq t-1$.
Notons $\pi_\bullet : Bar_\bullet(A) \to \overline{Bar}_\bullet(A)$ le morphisme de chaînes quotient. En composant avec $\phi_\bullet$, on obtient donc un morphisme de chaînes (cf. Annexe)

$$\overline{\phi}_\bullet : P_\bullet(A) \to \overline{Bar}_\bullet(A).$$

On voit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\{1 \otimes x_{l_1} \wedge \cdots \wedge x_{l_n} \otimes 1 \mid 1 \leq l_1 < \cdots < l_n \leq t-1\}$ est une base de $P_n(A)$ comme A^e-module libre. Soit $x \in P_n(A)$ tel que $\bar{\phi}_n(x) = 0$. En notant $\underline{l} = (l_1, \cdots, l_n)$ pour $1 \leq l_1 < \cdots < l_n \leq t-1$, on a donc

$$x = \sum_{\underline{l}} (a_{\underline{l}} \otimes b_{\underline{l}}).\big(1 \otimes x_{l_1} \wedge \cdots \wedge x_{l_n} \otimes 1\big),$$

et donc

$$\pi_n \circ \phi_n(x) = \sum_{\underline{l}} (a_{\underline{l}} \otimes b_{\underline{l}}).\big(\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)(1 \otimes \bar{x}_{l_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \otimes \bar{x}_{l_{\sigma(n)}} \otimes 1)\big) = 0.$$

pour tous $a_{\underline{l}} \otimes b_{\underline{l}} \in A$.
Or, les $\bar{x}_{l_i}$ sont non nuls et linérairement indépendants dans A/k pour tout $1 \leq i \leq n$. Ainsi, $\pi_n \circ \phi_n(x) = 0$ si et seulement si $\varepsilon(\sigma)(a_{\underline{l}} \otimes b_{\underline{l}}) = 0$ pour tous $\underline{l}$ et $\sigma \in S_n$. D'où $x = 0$.
$\overline{\phi}_\bullet$ est bien injectif et est donc un plongement de $P_\bullet(A)$ dans la résolution libre $\overline{Bar}_\bullet(A)$.

◇ **L'application de twist itérée** : La résolution bar réduite est compatible avec τ via le morphisme de chaînes

$$\bar{\tau}_{B,\bullet} : B \otimes \overline{Bar}_\bullet(A) \to \overline{Bar}_\bullet(A) \otimes B$$

par la proposition 2.11. On prétend que $\bar{\tau}_{B,\bullet}$ se restreint à une application surjective

$$\tilde{\tau}_{B,\bullet} : B \otimes P_\bullet(A) \to P_\bullet(A) \otimes B$$

en vérifiant qu'elle préserve l'image de $\bar{\phi}_\bullet$. Pour cela, on montre d'abord, par récurrence sur n, que

$$\begin{aligned}
&\bar{\tau}_{B,n}\big(x_t \otimes \bar{\phi}_n(a_0 \otimes y_1 \wedge \cdots \wedge y_n \otimes a_{n+1})\big) \\
&= \bar{\tau}_{B,n}\Big(\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)(x_t \otimes a_0 \otimes y_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes y_{\sigma(n)} \otimes a_{n+1})\Big) \\
&= \Big(\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_0 \otimes y_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes y_{\sigma(n)} \otimes a_{n+1}\Big) \otimes x_t \\
&+ \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\delta_t(a_0) \otimes y_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes y_{\sigma(n)} \otimes a_{n+1} \otimes 1 \\
&+ \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{1 \leq i \leq n} \varepsilon(\sigma) a_0 \otimes y_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \bar{\delta}_t(y_{\sigma(i)}) \otimes y_{\sigma(i+1)} \otimes \cdots \otimes y_{\sigma(n)} \otimes a_{n+1} \otimes 1 \\
&+ \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_0 \otimes y_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes y_{\sigma(n)} \otimes \delta_t(a_{n+1}) \otimes 1.
\end{aligned}$$

pour certains $a_0, a_{n+1} \in A$, (on utilise ici les mêmes notations pour les éléments dans A et leur images dans $\bar{A}$).

⋆ Pour $n=1, \bar{\tau}_{B,1} = (1\otimes 1\otimes \bar{\tau})(1\otimes\bar{\tau}\otimes 1)(\bar{\tau}\otimes 1\otimes 1)$. On a donc :

$$
\begin{aligned}
&\bar{\tau}_{B,1}(x_t\otimes a_0\otimes y_1\otimes a_2)\\
&= (1\otimes 1\otimes \bar{\tau})(1\otimes\bar{\tau}\otimes 1)(a_0\otimes x_t\otimes y_1\otimes a_2 + \delta_t(a_0)\otimes 1\otimes y_1\otimes a_2)\\
&= (1\otimes 1\otimes \bar{\tau})(a_0\otimes y_1\otimes x_t\otimes a_2 + a_0\otimes \bar{\delta}_t(y_1)\otimes 1\otimes a_2 + \delta_t(a_0)\otimes y_1\otimes 1\otimes a_2)\\
&= (a_0\otimes y_1\otimes a_2\otimes x_t) + (a_0\otimes y_1\otimes \delta_t(a_2)\otimes 1) + (a_0\otimes \bar{\delta}_t(y_1)\otimes a_2\otimes 1)\\
&\qquad\qquad + (\delta_t(a_0)\otimes y_1\otimes a_2\otimes 1).
\end{aligned}
$$

⋆ Soit $n>1$ tel que la formule est vraie au rang $n-1$. Ainsi :

$$
\begin{aligned}
&\bar{\tau}_{B,n}\Big(\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)(x_t\otimes a_0\otimes y_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes y_{\sigma(n)}\otimes a_{n+1})\Big)\\
&= (1_{n+1}\otimes\bar{\tau})(\bar{\tau}_{B,n-1}\otimes 1)\Big(\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)(x_t\otimes a_0\otimes y_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes y_{\sigma(n)}\otimes a_{n+1})\Big)\\
&= (1_{n+1}\otimes\bar{\tau})\Big(\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\big[(a_0\otimes y_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes y_{\sigma(n)})\otimes x_t\\
&+ (\delta_t(a_0)\otimes y_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes y_{\sigma(n)}\otimes 1)\\
&+ \Big(\sum_{1\le i\le n-1} a_0\otimes y_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes \bar{\delta}_t(y_{\sigma(i)})\otimes y_{\sigma(i+1)}\otimes\cdots\otimes y_{\sigma(n)}\otimes 1\Big)\\
&+ (a_0\otimes y_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes\bar{\delta}_t(y_{\sigma(n)})\otimes 1)\big]\otimes a_{n+1}\Big) \quad \text{(par hypothèse de récurrence)}\\
&= \sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)(a_0\otimes y_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes y_{\sigma(n)})\otimes(a_{n+1}\otimes x_t + \delta_t(a_{n+1})\otimes 1)\\
&+ \sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\delta_t(a_0)\otimes y_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes y_{\sigma(n)}\otimes a_{n+1}\otimes 1\\
&+ \sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\sum_{1\le i\le n-1}(a_0\otimes y_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes\bar{\delta}_t(y_{\sigma(i)})\otimes y_{\sigma(i+1)}\otimes\cdots\otimes y_{\sigma(n)}\otimes a_{n+1}\otimes 1)\\
&+ \sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)a_0\otimes y_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes\bar{\delta}_t(y_{\sigma(n)})\otimes a_{n+1}\otimes 1.
\end{aligned}
$$

On obtient bien le résultat par le principe de récurrence.

Or,

$$\Big(\textstyle\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)a_0\otimes y_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes y_{\sigma(n)}\otimes a_{n+1}\Big)\otimes x_t \in Im(\bar{\phi}_n)\otimes B$$

et

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\delta_t(a_0)\otimes y_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes y_{\sigma(n)}\otimes a_{n+1}\otimes 1\\
&\qquad + \sum_{\sigma\in S_n}\sum_{1\le i\le n}\varepsilon(\sigma)a_0\otimes y_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes\bar{\delta}_t(y_{\sigma i})\otimes y_{\sigma(i+1)}\otimes\cdots\otimes y_{\sigma(n)}\otimes a_{n+1}\otimes 1\\
&\qquad + \sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)a_0\otimes y_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes y_{\sigma(n)}\otimes\delta_t(a_{n+1})\otimes 1\\
&= \bar{\phi}_n\big(\delta_t(a_0)\otimes y_1\otimes\cdots\otimes y_n\otimes a_{n+1}\big)\otimes 1 + \bar{\phi}_n\big(a_0\otimes y_1\otimes\cdots\otimes y_n\otimes\delta_t(a_{n+1})\big)\otimes 1\\
&\qquad + \sum_{1\le i\le n}\bar{\phi}_n\big(a_0\otimes y_1\otimes\cdots\otimes\bar{\delta}_t(i)\otimes y_{i+1}\otimes\cdots\otimes y_n\otimes a_{n+1}\big)\otimes 1 \in Im(\bar{\phi}_n)\otimes B.
\end{aligned}
$$

Ainsi, $\bar{\tau}_{B,n}\big(x_t \otimes \bar{\phi}_n(a_0 \otimes y_1 \wedge \cdots \wedge y_n \otimes a_{n+1})\big) \in Im(\bar{\phi}_n) \otimes B$, pour certains $a_0, a_{n+1} \in A$.
Soit $m > 1$ et supposons que pour tout $l < m$, on a :

$$\bar{\tau}_{B,n}\big(x_t^l \otimes \bar{\phi}_n(a_0 \otimes y_1 \wedge \cdots \wedge y_n \otimes a_{n+1})\big) \in Im(\bar{\phi}_n) \otimes B.$$

On a maintenant :

$$\begin{aligned}
&\bar{\tau}_{B,n}\big(x_t^m \otimes \bar{\phi}_n(a_0 \otimes y_1 \wedge \cdots \wedge y_n \otimes a_{n+1})\big)\\
&= \bar{\tau}_{B,n}(m_B \otimes 1)\big(x_t^k \otimes x_t^l \otimes \bar{\phi}_n(a_0 \otimes y_1 \wedge \cdots \wedge y_n \otimes a_{n+1})\big) \qquad \text{(pour } k, l < m\text{)}\\
&= (1 \otimes m_B)(\bar{\tau}_{B,n} \otimes 1)(1 \otimes \bar{\tau}_{B,n})\big(x_t^k \otimes x_t^l \otimes \bar{\phi}_n(a_0 \otimes y_1 \wedge \cdots \wedge y_n \otimes a_{n+1})\big)\\
&\qquad \text{(par la proprosition 2.11, } \overline{Bar}_\bullet(A) \text{ est compatible avec } \tau\text{)}\\
&= (1 \otimes m_B)\,(\bar{\tau}_{B,n} \otimes 1)\underbrace{\big(x_t^k \otimes \underbrace{\bar{\tau}_{B,n}(x_t^l \otimes \bar{\phi}_n(a_0 \otimes y_1 \wedge \cdots \wedge y_n \otimes a_{n+1}))}_{\in Im(\bar{\phi}_n)\otimes B}\big)}_{\in Im(\bar{\phi}_n)\otimes B \otimes B}
\end{aligned}$$

par hypothèse de récurrence sur l et sur k.

Finalement, on a bien

$$\bar{\tau}_{B,n}\big(x_t^m \otimes \bar{\phi}_n(a_0 \otimes y_1 \wedge \cdots \wedge y_n \otimes a_{n+1})\big) \in Im(\bar{\phi}_n) \otimes B.$$

De même, on peut aussi montrer que

$$\bar{\tau}_{B,n}^{-1}\big(\bar{\phi}_n(a_0 \otimes y_1 \wedge \cdots \wedge y_n \otimes a_{n+1}) \otimes x_t^m\big) \in B \otimes Im(\bar{\phi}_n),$$

et donc le morphisme de chaînes $\bar{\tau}_{B,\bullet}$ préserve l'image de $\bar{\phi}_\bullet$ et restreint à une application surjective $\tilde{\tau}_{B,\bullet} : B \otimes P_\bullet(A) \to P_\bullet(A) \otimes B$.

◇ **La compatibilité de** $P_\bullet(A)$: Comme la résolution bar réduite $\overline{Bar}_\bullet(A)$ est compatible avec τ via $\bar{\tau}_{B,\bullet}$ et on vient de voir que $\bar{\tau}_{B,\bullet}$ préserve le plongement

$$\bar{\phi}_\bullet : P_\bullet(A) \to \overline{Bar}_\bullet(A),$$

$P_\bullet(A)$ est donc compatible avec τ via la restriction $\tilde{\tau}_{B,\bullet}$ de $\bar{\tau}_{B,\bullet}$ d'après la remarque 2.10.

◇ **La compatiblité de** $P_\bullet(B)$ **:** On définit une application $\tau_{\bullet,A} : P_\bullet(B) \otimes A \to A \otimes P_\bullet(B)$ de la manière suivante :
On pose

$$\begin{aligned}
&\tau_{0,A} = (\tau \otimes 1)(1 \otimes \tau)\\
\text{et}\quad &\tau_{1,A}((1 \otimes x_t \otimes 1) \otimes x_i) = x_i \otimes (1 \otimes x_t \otimes 1).
\end{aligned}$$

puis on peut étendre $\tau_{1,A}$ à $P_1(B) \otimes A$ en exigeant que les conditions de compatibilité (2.7) et (2.8) soient satisfaites. Par exemple, par (2.7), pour tous $1 \leq i, j \leq t-1$, on a :

$$\begin{aligned}
&\tau_{1,A}((1 \otimes x_t \otimes 1) \otimes x_i x_j) = \tau_{1,A}(1 \otimes m_A)((1 \otimes x_t \otimes 1) \otimes x_i \otimes x_j)\\
&= (m_A \otimes 1)(1 \otimes \tau_{1,A})(\tau_{1,A} \otimes 1)((1 \otimes x_t \otimes 1) \otimes x_i \otimes x_j)\\
&= (m_A \otimes 1)(1 \otimes \tau_{1,A})(x_i \otimes (1 \otimes x_t \otimes 1) \otimes x_j)\\
&= (m_A \otimes 1)(x_i \otimes x_j \otimes (1 \otimes x_t \otimes 1))\\
&= x_i x_j \otimes (1 \otimes x_t \otimes 1).
\end{aligned}$$

Supposons que $\tau_{1,A}((1\otimes x_t\otimes 1)\otimes x_{i_1}\cdots x_{i_n}) = x_{i_1}\cdots x_{i_n}\otimes(1\otimes x_t\otimes 1)$ où $1\leq i_1 < \cdots < i_n \leq t-1$, on a maintenant

$$\begin{aligned}
&\tau_{1,A}((1\otimes x_t\otimes 1)\otimes x_{i_1}\cdots x_{i_n})\\
&= \tau_{1,A}(1\otimes m_A)((1\otimes x_t\otimes 1)\otimes x_{i_1}\otimes x_{i_2}\cdots x_{i_n})\\
&= (m_A\otimes 1)(1\otimes \tau_{1,A})(\tau_{1,A}\otimes 1)((1\otimes x_t\otimes 1)\otimes x_{i_1}\otimes x_{i_2}\cdots x_{i_n})\\
&= (m_A\otimes 1)(1\otimes \tau_{1,A})(x_{i_1}\otimes(1\otimes x_t\otimes 1)\otimes x_{i_2}\cdots x_{i_n})\\
&= (m_A\otimes 1)(x_{i_1}\otimes x_{i_2}\cdots x_{i_n}\otimes(1\otimes x_t\otimes 1)) \quad \text{(par hypothèse)}\\
&= x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}\otimes(1\otimes x_t\otimes 1).
\end{aligned}$$

En utilisant la relation (2.8), on a maintenant :

$$\begin{aligned}
&\tau_{1,A}(x_t\otimes x_t\otimes x_t\otimes x_i) = \tau_{1,A}(\rho_{B,1}\otimes 1)\big(x_t\otimes(1\otimes x_t\otimes 1)\otimes x_t\otimes x_i\big)\\
&= (1\otimes\rho_{B,1})(\tau\otimes 1\otimes 1)(1\otimes\tau_{1,A}\otimes 1)(1\otimes 1\otimes\tau)\big(x_t\otimes(1\otimes x_t\otimes 1)\otimes x_t\otimes x_i\big)\\
&= (1\otimes\rho_{B,1})(\tau\otimes 1\otimes 1)(1\otimes\tau_{1,A}\otimes 1)\big(x_t\otimes(1\otimes x_t\otimes 1)\otimes x_i\otimes x_t\\
&\qquad\qquad + x_t\otimes(1\otimes x_t\otimes 1)\otimes\delta_t(x_i)\otimes 1\big)\\
&= (1\otimes\rho_{B,1})(\tau\otimes 1\otimes 1)\big(x_t\otimes x_i\otimes(1\otimes x_t\otimes 1)\otimes x_t + x_t\otimes\delta_t(x_i)\otimes(1\otimes x_t\otimes 1)\otimes 1\big)\\
&= (1\otimes\rho_{B,1})\big(x_i\otimes x_t\otimes(1\otimes x_t\otimes 1)\otimes x_t + \delta_t(x_i)\otimes 1\otimes(1\otimes x_t\otimes 1)\otimes x_t\big)\\
&\quad + (1\otimes\rho_{B,1})\big(\delta_t(x_i)\otimes x_t\otimes(1\otimes x_t\otimes 1)\otimes 1 + \delta_t^2(x_i)\otimes 1\otimes(1\otimes x_t\otimes 1)\otimes 1\big)\\
&= x_i\otimes(x_t\otimes x_t\otimes x_t) + \delta_t(x_i)\otimes(1\otimes x_t\otimes x_t) + \delta_t(x_i)\otimes(x_t\otimes x_t\otimes 1)\\
&\qquad\qquad + \delta_t^2(x_i)\otimes(1\otimes x_t\otimes 1).
\end{aligned}$$

Ainsi, par récurrence, on peut avoir la formule générale de $\tau_{1,A}$ sur $P_1(B)\otimes A$. On voit facilement que $\tau_{1,A}$ est bijectif et donc $P_1(B)$ est compatible avec τ via $\tau_{1,A}$. C'est clair que $P_0(B)$ est compatible avec τ via $\tau_{0,A}$.

$\tau_{\bullet,A}$ est un morphisme de chaînes. En effet, vérifions que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & k[x_t]\otimes Vect\{x_t\}\otimes k[x_t]\otimes A \arrow[r, "d_1\otimes 1"] \arrow[d, "\tau_{1,A}"] & k[x_t]\otimes k[x_t]\otimes A \arrow[r, "m_A\otimes 1"] \arrow[d, "\tau_{0,A}"] & k[x_t]\otimes A \arrow[r] \arrow[d, "\tau"] & 0\\
0 \arrow[r] & A\otimes k[x_t]\otimes Vect\{x_t\}\otimes k[x_t] \arrow[r, "1\otimes d_1"] & A\otimes k[x_t]\otimes k[x_t] \arrow[r, "1\otimes m_A"] & A\otimes k[x_t] \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

commute. D'abord, $\tau(m_A\otimes 1) = (1\otimes m_A)\tau_{0,A}$ est évident d'après la relation (2.4). Ensuite, on remarque que A est un A-bimodule compatible avec τ, et $P_1(B)$ est un B-bimodule compatible avec τ. Donc par le théorème 2.7, $A\otimes P_1(B) = A\otimes k[x_t]\otimes Vect\{x_t\}\otimes k[x_t]$ est un $(A\otimes_\tau B)$-bimodule. De même, $P_1(B)\otimes A$ est aussi un $(B\otimes_{\tau^{-1}} A)$-bimodule et donc un $(A\otimes_\tau B)$-bimodule. En utilisant (2.5) et (2.6), on voit facilement que $\tau_{0,A}$ et $\tau_{1,A}$ sont des morphismes de $(A\otimes_\tau B)$-bimodules, il nous suffit donc de vérifier que $\tau_{0,A}\circ(d_1\otimes 1) = (1\otimes d_1)\circ\tau_{1,A}$ sur les éléments de la forme $1\otimes x_t\otimes 1\otimes x_i$.

D'une part,

$$\begin{aligned}\tau_{0,A}(d_1\otimes 1)(1\otimes x_t\otimes 1\otimes x_i) &= \tau_{0,A}\big(1\otimes x_t\otimes x_i - x_t\otimes 1\otimes x_i\big)\\ &= (\tau\otimes 1)(1\otimes\tau)\big(1\otimes x_t\otimes x_i - x_t\otimes 1\otimes x_i\big)\\ &= (\tau\otimes 1)(1\otimes x_i\otimes x_t + 1\otimes\delta(x_i)\otimes 1) - (\tau\otimes 1)(x_t\otimes x_i\otimes 1)\\ &= x_i\otimes 1\otimes x_t + \delta(x_i)\otimes 1\otimes 1 - (x_i\otimes x_t\otimes 1 + \delta(x_i)\otimes 1\otimes 1)\\ &= x_i\otimes 1\otimes x_t - x_i\otimes x_t\otimes 1.\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}(1\otimes d_1)(\tau_{1,A})((1\otimes x_t\otimes 1)\otimes x_i) &= (1\otimes d_1)(x_i\otimes(1\otimes x_t\otimes 1))\\ &= x_i\otimes 1\otimes x_t - x_i\otimes x_t\otimes 1.\end{aligned}$$

Ainsi, la résolution $P_\bullet(B)$ est bien compatible avec τ.
Par définitions, $\tau_{0,A}$ et $\tau_{1,A}$ sont compatibles avec les plongements (les identités) dans la résolution $\overline{Bar_\bullet}(A)$ réduite.

◇ **Produit tordu de résolutions** : D'après le théorème 3.6 on obtient une résolution projective de $(A\otimes_\tau B)$-bimodules $X_\bullet$, où $X_n = \bigoplus_{i+j=n} X_{i,j}$ avec

$$\begin{aligned}X_{i,j} &= P_i(A)\otimes P_j(B)\\ &= A\otimes \bigwedge^i Vect\{x_1,\cdots,x_{t-1}\}\otimes A\otimes B\otimes\bigwedge^j Vect\{x_t\}\otimes B.\end{aligned}$$

Or, on a déjà vu que $S\cong A\otimes_\tau B$, et

$$\begin{array}{c} A\otimes\bigwedge^i Vect_k\{x_1,\cdots,x_{t-1}\}\otimes A\otimes B\otimes\bigwedge^j Vect_k\{x_t\}\otimes B\\ \big\downarrow\wr\\ A\otimes B\otimes\bigwedge^i Vect_k\{x_1,\cdots,x_{t-1}\}\otimes\bigwedge^j Vect_k\{x_t\}\otimes A\otimes B,\end{array}$$

comme S-bimodules pour $j=0,1$. Cet isomorphisme est obtenu en appliquant τ^{-1} récursivement pour chaque facteur et la manière de démonstration est similaire à celle du lemme 3.5.

3. Conclusion : On remarque que

$$\bigoplus_{i+j=n}\big(\bigwedge^i Vect_k\{x_1,\cdots,x_{t-1}\}\otimes\bigwedge^j Vect_k\{x_t\}\big)\cong\bigwedge^n Vect_k\{x_1,\cdots,x_t\}$$

par [5, Chapitre III.84, Proposition 10]. Ainsi, par construction, on a obtenu une résolution libre $K_\bullet$ de S-bimodules où $K_n = S\otimes\bigwedge^n Vect_k\{x_1,\cdots,x_t\}\otimes S$.
Il nous reste à vérifier les formules des différentielles :
Pour $j=0$, la différentielle est celle de $P_n(A)$ (la différentielle horizontale).

Pour $i = n-1$ et $j = 1$, en écrivant $x_{l_i} = y_i$ pour $1 \leq l_1 \leq \cdots \leq l_n \leq t-1$:

$$\begin{aligned}
&d_{n-1,1}(1 \otimes y_1 \wedge \cdots \wedge y_{n-1} \otimes 1 \otimes 1 \otimes x_t \otimes 1) \quad \text{(et d'après la définition 7.3 :)} \\
&= (d^A_{n-1} \otimes 1 + (-1)^{n-1} \otimes d^B_1)(1 \otimes y_1 \wedge \cdots \wedge y_{n-1} \otimes 1 \otimes 1 \otimes x_t \otimes 1) \\
&= \Big(\sum_{1 \leq i \leq n-1} (-1)^{i+1} \big(y_i \otimes y_1 \wedge \cdots \wedge \hat{y}_i \wedge \cdots \wedge y_{n-1} \otimes 1 \\
&\qquad\qquad - 1 \otimes y_1 \wedge \cdots \wedge \hat{y}_i \wedge \cdots \wedge y_{n-1} \otimes y_i\big) \\
&+ \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} (-1)^j \otimes y_1 \wedge \cdots \wedge \bar{\delta}_j(y_i) \wedge \cdots \wedge \hat{y}_j \wedge \cdots \wedge y_{n-1} \otimes 1 \Big) \otimes (1 \otimes x_t \otimes 1) \\
&+ (-1)^{n-1}(1 \otimes y_1 \wedge \cdots \wedge y_{n-1} \otimes 1) \otimes (x_t \otimes 1 - 1 \otimes x_t),
\end{aligned}$$

$$= \sum_{1 \leq i \leq n-1} (-1)^{i+1} y_i \otimes y_1 \wedge \cdots \wedge \hat{y}_i \wedge \cdots \wedge y_{n-1} \otimes 1 \otimes 1 \otimes x_t \otimes 1 \tag{4.1}$$

$$- \sum_{1 \leq i \leq n-1} (-1)^{i+1} \otimes y_1 \wedge \cdots \wedge \hat{y}_i \wedge \cdots \wedge y_{n-1} \otimes y_i \otimes 1 \otimes x_t \otimes 1 \tag{4.2}$$

$$+ \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} (-1)^j \otimes y_1 \wedge \cdots \wedge \bar{\delta}_j(y_i) \wedge \cdots \wedge \hat{y}_j \wedge \cdots \wedge y_{n-1} \otimes 1 \otimes 1 \otimes x_t \otimes 1 \tag{4.3}$$

$$+ (-1)^n \otimes y_1 \wedge \cdots \wedge y_{n-1} \otimes 1 \otimes 1 \otimes x_t + (-1)^{n-1} \otimes y_1 \wedge \cdots \wedge y_{n-1} \otimes 1 \otimes x_t \otimes 1. \tag{4.4}$$

En composant avec l'isomorphisme précédent, on a :

$$\begin{aligned}
&= \sum_{1 \leq i \leq n-1} (-1)^{i+1} y_i \otimes y_1 \wedge \cdots \wedge \hat{y}_i \wedge \cdots \wedge y_{n-1} \otimes x_t \otimes 1 \\
&\quad - \sum_{1 \leq i \leq n-1} (-1)^{i+1} \otimes y_1 \wedge \cdots \wedge \hat{y}_i \wedge \cdots \wedge y_{n-1} \otimes \big(x_t \otimes y_i - 1 \otimes \bar{\delta}_t(y_i)\big) \\
&\quad + \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} (-1)^j \otimes y_1 \wedge \cdots \wedge \bar{\delta}_j(y_i) \wedge \cdots \wedge \hat{y}_j \wedge \cdots \wedge y_{n-1} \otimes x_t \otimes 1 \\
&\quad + (-1)^{n-1} x_t \otimes y_1 \wedge \cdots \wedge y_{n-1} \otimes 1 + (-1)^n \sum_{1 \leq i \leq n-1} 1 \otimes y_1 \wedge \cdots \wedge \bar{\delta}_t(y_i) \wedge \cdots \wedge y_{n-1} \otimes 1 \\
&\quad + (-1)^n \otimes y_1 \wedge \cdots \wedge y_{n-1} \otimes x_t.
\end{aligned}$$

Vérifions ces deux dernières lignes : en appliquant $(1_n \otimes \tau \otimes 1)$ à (4.4), on a :

$$(-1)^n \otimes y_1 \wedge \cdots \wedge y_{n-2} \wedge y_{n-1} \otimes 1 \otimes 1 \otimes x_t + (-1)^{n-1} \otimes y_1 \wedge \cdots \wedge y_{n-1} \otimes x_t \otimes 1 \otimes 1.$$

Appliquons ensuite $(1_{n-1} \otimes \tau^{-1} \otimes 1_2)$, en remarquant que $\tau^{-1}(x_i \otimes x_j) = x_j \otimes x_i - 1 \otimes \delta_j(x_i)$ pour $i < j$, on obtient :

$$\begin{aligned}
(-1)^n \otimes y_1 \wedge \cdots \wedge y_{n-2} \wedge 1 \otimes y_{n-1} \otimes 1 \otimes x_t + (-1)^{n-1} \otimes y_1 \wedge \cdots \wedge x_t \otimes y_{n-1} \otimes 1_{A \otimes_\tau B} \\
+ (-1)^n \otimes y_1 \wedge \cdots \wedge y_{n-2} \wedge 1 \otimes \bar{\delta}_t(y_{n-1}).
\end{aligned}$$

Ainsi, en appliquant les τ^{-1} récursivement, (4.4) devient :

$$\begin{aligned}
&(-1)^n \otimes y_1 \wedge \cdots \wedge y_{n-1} \otimes x_t + (-1)^{n-1} x_t \otimes y_1 \wedge \cdots \wedge y_{n-1} \otimes 1 \\
&+ (-1)^n \sum_{1 \leq i \leq n-1} 1 \otimes y_1 \wedge \cdots \wedge \bar{\delta}_t(y_i) \wedge \cdots \wedge y_{n-1} \otimes 1.
\end{aligned}$$

En posant $y_n = x_t$ et en identifiant $y_1 \wedge \cdots \wedge y_{n-1} \otimes x_t$ avec $y_1 \wedge \cdots \wedge y_{n-1} \wedge x_t$ grâce à [2], on obtient la formule de la différentielle dans l'énoncé :

$$\begin{aligned}
&\sum_{1\leq i\leq n} (-1)^{i+1} y_i \otimes y_1 \wedge \cdots \wedge \hat{y}_i \wedge \cdots \wedge y_{n-1} \otimes y_n \otimes 1 \\
&\qquad - \sum_{1\leq i\leq n} (-1)^{i+1} \otimes y_1 \wedge \cdots \wedge \hat{y}_i \wedge \cdots \wedge y_{n-1} \otimes y_n \otimes y_i \\
&\qquad + \sum_{1\leq i<j\leq n} (-1)^{j} \otimes y_1 \wedge \cdots \wedge \bar{\delta}_j(y_i) \wedge \cdots \wedge \hat{y}_j \wedge \cdots \wedge y_{n-1} \otimes y_n \otimes 1
\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration. □

Chapitre 5

Produits tordus de résolutions pour les modules (à gauche)

Nous considérons maintenant le produit tordu de résolutions de modules à gauche au lieu de bimodules. Nous donnons la version pour les modules à gauche des constructions que nous avons fait pour les bimodules dans les sections 2 et 3. Encore une fois, nous fixons deux k-algèbres A et B avec une application de twist $\tau : B \otimes A \to A \otimes B$. Dans les constructions ci-dessous, nous considérons la compatibilité des A-modules, mais notons que nous pouvons aussi commencer par celles des B-modules au lieu des A-modules en utilisant l'application de twist inverse τ^{-1} au lieu de τ afin d'avoir des modules (à gauche) sur $A \otimes B \cong B \otimes_{\tau^{-1}} A$.

Soit M un A-module avec la structure à gauche $\rho^l_{A,M} : A \otimes M \to M$ et soit $m_B : B \otimes B \to B$ l'application multiplication de B.

Définition 5.1. Soit $A \otimes_\tau B$ un produit tensoriel tordu d'algèbres. Un A-module à gauche M est compatible avec τ s'il existe une application k-linéaire bijective $\tau_{B,M} : B \otimes M \to M \otimes B$ qui commute avec la structure de module de M et la multiplication dans B. C'est-à-dire $\tau_{B,M}$ satisfait les relations

$$\tau_{B,M}(m_B \otimes 1) = (1 \otimes m_B)(\tau_{B,M} \otimes 1)(1 \otimes \tau_{B,M}) \qquad \text{et} \tag{5.1}$$
$$\tau_{B,M}(1 \otimes \rho^l_{A,M}) = (\rho^l_{A,M} \otimes 1)(1 \otimes \tau_{B,M})(\tau \otimes 1) \tag{5.2}$$

comme applications sur $B \otimes B \otimes M$ et sur $B \otimes A \otimes M$, respectivement.

Remarque 5.2.

1. Notons que la définition ci-dessus s'applique aussi aux A-modules à droite : un A-module à droite M est compatible avec τ s'il existe une application k-linéaire bijective $\tau_{B,M}$: $B \otimes M \to M \otimes B$, qui satisfait les relations

$$\tau_{B,M}(m_B \otimes 1) = (1 \otimes m_B)(\tau_{B,M} \otimes 1)(1 \otimes \tau_{B,M}) \qquad \text{et} \tag{5.3}$$
$$\tau_{B,M}(1 \otimes \rho^r_{A,M}) = (\rho^r_{A,M} \otimes 1)(1 \otimes \tau)(\tau_{B,M} \otimes 1) \tag{5.4}$$

   où $\rho^r_{A,M}$ est la structure de A-module à droite sur M.

2. Notons également qu'on a une définition similaire pour un B-module à gauche N et l'application de twist τ^{-1} : un B-module à gauche N est compatible avec τ^{-1} s'il existe

une application k-linéaire bijective $\tau_{N,A} : N \otimes A \to A \otimes N$ satisfaisant

$$\tau_{N,A}(1 \otimes m_A) = (m_A \otimes 1)(1 \otimes \tau_{N,A})(\tau_{N,A} \otimes 1) \quad \text{et} \tag{5.5}$$

$$\tau_{N,A}(\rho^l_{B,N} \otimes 1) = (1 \otimes \rho^l_{B,N})(\tau \otimes 1)(1 \otimes \tau_{N,A}) \tag{5.6}$$

où $\rho^l_{B,N}$ est la structure de B-module à gauche sur N. De même, on a aussi une définition pour un B-module à droite qui est compatible avec τ^{-1}.

Théorème 5.3.
Soient M un A-module compatible avec τ et N un B-module. L'application $\rho^l_{A\otimes_\tau B}$ définie ci-dessous munit $M \otimes N$ d'une structure de $(A \otimes_\tau B)$-module,

$$\begin{tikzcd} A \otimes_\tau B \otimes M \otimes N \arrow[r, "1\otimes\tau_{B,M}\otimes 1"] \arrow[rr, bend right, "\rho^l_{A\otimes_\tau B}"'] & A \otimes M \otimes B \otimes N \arrow[r, "\rho^l_{A,M}\otimes\rho^l_{B,N}"] & M \otimes N. \end{tikzcd}$$

où $\rho^l_{B,N}$ et $\rho^l_{A,M}$ sont les structures de B-module et A-module à gauche sur M et N respectivement.

Démonstration.
La preuve découle directement de la démonstration du théorème 2.7. □

On a également la définition de la compatibilité avec τ pour les résolutions de modules :

Définition 5.4. Soient M un A-module compatible avec τ et $P_\bullet(M)$ la résolution projective de M. La résolution $P_\bullet(M)$ est dite compatible avec τ s'il existe une application k-linéaire de chaînes $\tau_{B,\bullet} : B \otimes P_\bullet(M) \to P_\bullet(M) \otimes B$ qui est un relèvement de τ telle que chaque $P_i(M)$ soit compatible avec τ via $\tau_{B,i} : B \otimes P_i(M) \to P_i(M) \otimes B$.

Définition 5.5. Soient M un A-module compatible avec τ et $P_\bullet(M)$ une résolution projective de M qui est compatible avec τ. Soit N un B-module. Le produit tordu de complexes $Y_\bullet$ est le complexe total du bicomplexe $Y_{\bullet,\bullet}$ définie par : pour chaque $i, j \geq 0$,

$$Y_{i,j} = P_i(M) \otimes P_j(N), \tag{5.7}$$

avec la structure de $(A \otimes_\tau B)$-module donnée dans la définition 5.3, les différentielles horizontales et verticales sont données respectivement par

$$d^h_{i,j} = d_i \otimes 1 \text{ et } d^v_{i,j} = (-1)^i \otimes d_j.$$

Autrement dit, $Y_n = \bigoplus_{i+j=n} Y_{i,j}$ avec $d_n = \sum_{i+j=n} d_{i,j}$ où $d_{i,j} = d^h_{i,j} + d^h_{i,j}$.

Lemme 5.6.
Supposons que M et $P_\bullet(M)$ sont compatibles avec τ. Alors le produit tordu de complexes $Y_\bullet$ est un complexe de $(A \otimes_\tau B)$-modules.

Démonstration.

On sait que pour chaque $i, j \geq 0$, $Y_{i,j}$ est un $(A \otimes_\tau B)$-module avec la structure donnée dans la définition 5.3. Remarquons que, comme k-espaces vectoriels, les $Y_{i,j}$ forment un bicomplexe avec les différentielles données dans la définition 5.5. Il nous reste donc à vérifier que pour tous $i, j \geq 0$, $d^h_{i,j}$ et $d^v_{i,j}$ sont des morphismes de $A \otimes_\tau B$-modules. Pour cela, on regarde le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
A \otimes_\tau B \otimes P_i(M) \otimes P_j(N) \arrow[r, "1_2 \otimes d_i \otimes 1"] \arrow[d, "1 \otimes \tau_{B,i} \otimes 1"'] & A \otimes_\tau B \otimes P_{i-1}(M) \otimes P_j(N) \arrow[d, "1 \otimes \tau_{B,i-1} \otimes 1"] \\
A \otimes P_i(M) \otimes B \otimes P_j(N) \arrow[r, "1 \otimes d_i \otimes 1_2"] \arrow[d, "\rho_{A,i} \otimes \rho_{B,j}"'] & A \otimes P_{i-1}(M) \otimes B \otimes P_j(N) \arrow[d, "\rho_{A,i-1} \otimes \rho_{B,j}"] \\
P_i(M) \otimes P_j(N) \arrow[r, "d^h_{i,j}"] & P_{i-1}(M) \otimes P_j(N).
\end{tikzcd}$$

Les deux diagrammes à l'intérieur sont commutatifs du fait que $\tau_{B,\bullet}$ est un morphisme de chaînes et d_i est un morphisme de A-modules donc le grand diagramme commute :

$$\begin{aligned}
d^h_{i,j} \circ \rho^l_{(A \otimes_\tau B), Y_{i,j}} &= (d_i \otimes 1)\big((\rho^l_{A,i} \otimes \rho^l_{B,j})(1 \otimes \tau_{B,i} \otimes 1)\big) \\
&= (\rho^l_{A,i-1} \otimes \rho^l_{B,j})(1 \otimes d_i \otimes 1 \otimes 1)(1 \otimes \tau_{B,i} \otimes 1) \quad \text{(car } d_i \text{ est un morphisme de } A\text{-modules)} \\
&= (\rho^l_{A,i-1} \otimes \rho^l_{B,j})(1 \otimes \tau_{B,i-1} \otimes 1)(1 \otimes 1 \otimes d_i \otimes 1) \quad \text{(car } \tau_{B,\bullet} \text{ est un morphisme de chaînes)} \\
&= \rho^l_{A \otimes_\tau B, Y_{i-1,j}}(1 \otimes 1 \otimes d_i \otimes 1)
\end{aligned}$$

où $\rho^l_{A,i}$, $\rho^l_{B,j}$ et $\rho^l_{A \otimes_\tau B, Y_{i,j}}$ sont les structures de A-module, B-module et $(A \otimes_\tau B)$-module à gauche sur $P_i(M), P_j(N)$ et $Y_{i,j} = P_i(M) \otimes P_j(N)$ respectivement. Ainsi, $d^h_{i,j}$ est bien un morphisme de $A \otimes_\tau B$-modules.

Par un raisonnement similaire, on peut facilement montrer que $d^v_{i,j}$ est aussi un morphisme de $(A \otimes_\tau B)$-modules, ce qui achève la preuve. $\square$

Lemme 5.7.

Le produit tordu de complexes

$$\cdots \to Y_2 \to Y_1 \to Y_0 \to M \otimes N \to 0$$

est une suite exacte.

Démonstration.

Comme dans le lemme 3.3, on utilise le théorème de Künneth pour obtenir $H_n(Y) = 0$ pour tout $n > 0$ et $H_0(Y_\bullet) \cong M \otimes N$. $\square$

On veut montrer en général que les modules $Y_{i,j}$ sont projectifs, donc comme dans le cas de bimodules, on ajoute une hypothèse supplémentaire dans le lemme suivant. Puisque $P_\bullet(M)$ est une résolution projective de M comme A-module, chaque $P_i(M)$ se plonge dans un A-module libre $A^{\oplus I}$.

Définition 5.8. Pour chaque $i \geq 0$, l'application $\tau_{B,i}$ est compatible avec le plongement choisi $P_i(M) \hookrightarrow A^{\oplus I}$ (pour un ensemble d'indices I) si le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} B \otimes P_i(M) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\tau_{B,i}"'] & B \otimes A^{\oplus I} \arrow[d, "\tau^{\oplus I}"] \\ P_i(M) \otimes B \arrow[r, hook] & A^{\oplus I} \otimes B. \end{tikzcd}$$

Dans plusieurs contextes, on peut montrer directement que les $Y_{i,j}$ sont projectifs (on va voir un exemple dans le chapitre 6) et dans ce cas, on n'a besoin ni de cette condition de compatibilité supplémentaire, ni du lemme suivant.

Lemme 5.9.
Pour $i \geq 0$, si $\tau_{B,i}$ est compatible avec un plongement de $P_i(M)$ dans un A-module libre, alors $Y_{i,j} = P_i(M) \otimes P_j(N)$ est un $(A \otimes_\tau B)$-module projectif.

Démonstration.
La preuve est similaire à celle du lemme 3.5 □

On combine les lemmes 5.6, 5.7 et 5.9 pour obtenir le théorème suivant :

Théorème 5.10.
Soient A et B deux k-algèbres avec l'application de twist $\tau : B \otimes A \to A \otimes B$. Soient $P_\bullet(M)$ une résolution projective du A-module M et $P_\bullet(N)$ une résolution projective du B-module N. Supposons que M et $P_\bullet(M)$ sont compatibles avec τ et que l'application $\tau_{B,i}$ est compatible avec un plongement choisi de $P_i(M)$ dans un A-module libre. Alors le produit tordu de complexes $Y_\bullet$ avec

$$Y_n = \bigoplus_{i+j=n} Y_{i,j} \text{ pour } Y_{i,j} = P_i(M) \otimes P_j(N)$$

est une résolution projective du $(A \otimes_\tau B)$-module $M \otimes N$:

$$\cdots \to Y_2 \to Y_1 \to Y_0 \to M \otimes N \to 0.$$

Chapitre 6

Résolutions de modules (à gauche) sur les extensions de Ore

Dans le chapitre 4, nous avons considéré les résolutions d'une algèbre d'extension de Ore comme un bimodule sur lui-même. Ici, nous considérons les modules (à gauche) sur une extension de Ore et nous verrons comment construire des résolutions projectives de ces modules en considérant l'extension de Ore comme un produit tensoriel tordu. Étant donné M, un module à gauche sur une extension de Ore $R[x; \sigma, \delta]$, on souhaite construire une résolution projective pour M à partir d'une résolution de M comme R-module à gauche (par restriction). Nous devons montrer que, lors de la restriction à un R-module à gauche, M est compatible avec l'application de twist associée τ. Enfin, en utilisant une résolution de M comme R-module à gauche on construira une résolution de M comme un $R[x; \sigma, \delta]$-module.

Gopalakrishnan et Sridharan [4] ont étudié les extensions de Ore $R[x; \sigma, \delta]$ dans le cas où σ est l'identité. Ils ont montré que si M est un $R[x; 1, \delta]$-module (à gauche), alors une résolution projective de R-modules de M admet un relèvement à une résolution projective de $R[x\ ; 1, \delta]$-modules. Dans ce chapitre, nous prenons des automorphismes arbitraires σ de R et donnons des conditions sous lesquelles une résolution projective de R-modules d'un $R[x; \sigma, \delta]$-module M se relève en une résolution projective de $R[x; \sigma, \delta]$-modules.

Soient R une k-algèbre et σ un automorphisme de k-algèbre de R. Soit δ une σ-dérivation (à gauche) de R et considérons l'extension de Ore $R[x; \sigma, \delta]$. Soit $A = R, B = k[x]$, et $\tau : B \otimes A \to A \otimes B$ l'application de twist définie par $\tau(x \otimes r) = \sigma(r) \otimes x + \delta(r) \otimes 1$ pour tout $r \in R$, comme dans le chapitre 4, de sorte que $R[x; \sigma, \delta]$ est le produit tensoriel tordu $A \otimes_\tau B$.

6.1 Modules sur les extensions de Ore

Considérons un $R[x; \sigma, \delta]$-module M. On définit M^σ le k-espace vectoriel M équipé d'une action de R-module donnée par $r._\sigma m = \sigma(r).m$ pour tout $r \in R$ et $m \in M$. Maintenant supposons que lors de la restriction à R, il existe un isomorphisme de R-modules

$$\phi : M \to M^\sigma$$

Pour montrer que M est compatible avec τ, on construit une application k-linéaire bijective $\tau_{B,M} : B \otimes M \to M \otimes B$, telle que pour tout $m \in M$,

$$\tau_{B,M}(1 \otimes m) = m \otimes 1$$

$$\tau_{B,M}(x \otimes m) = \phi(m) \otimes x + x.m \otimes 1$$

et telle que (5.1) soit vérifiée. Ensuite, comme l'algèbre $B = k[x]$ est un k-module libre de base $\{x^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, pour chaque $m \in M$, on peut utiliser la relation (5.1) pour définir $\tau_{B,M}(x^n \otimes m)$ récursivelent en appliquant (5.1) à $x \otimes x^{n-1} \otimes m$.

On vérifie maintenant que $\tau_{B,M}$ commute avec la structure de R-module. Puisque $\tau, \tau_{B,M}$ et $\rho_{R,M}$ sont tous k-linéaires, afin de prouver que la relation (5.2) est vérifiée il suffit de montrer qu'elle est vérifiée sur les éléments de la forme $x^n \otimes r \otimes m$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $r \in R, m \in M$. On raisonne donc par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

⋆ Pour $n = 1$, on a

$$\begin{aligned}
&(\rho_{R,M} \otimes 1)(1 \otimes \tau_{B,M})(\tau \otimes 1)(x \otimes r \otimes m)\\
&= (\rho_{R,M} \otimes 1)(1 \otimes \tau_{B,M})(\sigma(r) \otimes x \otimes m + \delta(r) \otimes 1 \otimes m)\\
&= (\rho_{R,M} \otimes 1)(\sigma(r) \otimes \phi(m) \otimes x + \sigma(r) \otimes x.m \otimes 1 + \delta(r) \otimes m \otimes 1)\\
&= \sigma(r).\phi(m) \otimes x + \sigma(r).(x.m) \otimes 1 + \delta(r).m \otimes 1\\
&= r._\sigma\phi(m) \otimes x + (\sigma(r)x + \delta(r)).m \otimes 1\\
&= \phi(r.m) \otimes x + xr.m \otimes 1\\
&= \tau_{B,M}(x \otimes (r.m))\\
&= \tau_{B,M}(1 \otimes \rho_{R,M})(x \otimes r \otimes m).
\end{aligned}$$

⋆ Soit $n > 1$ et supposons donc que pour tout $l < n$, on a

$$(\rho_{R,M} \otimes 1)(1 \otimes \tau_{B,M})(\tau \otimes 1)(x^l \otimes r \otimes m) = \tau_{B,M}(1 \otimes \rho_{R,M})(x^l \otimes r \otimes m).$$

D'une part,

$$\begin{aligned}
&(\rho_{R,M} \otimes 1)(1 \otimes \tau_{B,M})(\tau \otimes 1)(x^n \otimes r \otimes m)\\
&= (\rho_{R,M} \otimes 1)(1 \otimes \tau_{B,M})(\tau \otimes 1)(m_B \otimes 1 \otimes 1)(x^k \otimes x^l \otimes r \otimes m) \qquad \text{(pour } k, l < n)\\
&= (\rho_{R,M} \otimes 1)(1 \otimes \tau_{B,M})(1 \otimes m_B \otimes 1)(\tau \otimes 1 \otimes 1)(1 \otimes \tau \otimes 1)(x^k \otimes x^l \otimes r \otimes m) \quad \text{(d'après (2.3))}\\
&= (\rho_{R,M} \otimes 1)(1 \otimes 1 \otimes m_B)(1 \otimes \tau_{B,M} \otimes 1)(1 \otimes 1 \otimes \tau_{B,M})(\tau \otimes 1 \otimes 1)(1 \otimes \tau \otimes 1)(x^k \otimes x^l \otimes r \otimes m)\\
&\qquad \text{(d'après la condition (5.1))}
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
&\tau_{B,M}(1 \otimes \rho_{R,M})(x^n \otimes r \otimes m)\\
&= \tau_{B,M}(1 \otimes \rho_{R,M})(m_B \otimes 1 \otimes 1)(x^k \otimes x^l \otimes r \otimes m) \qquad \text{(pour } k, l < n)\\
&= \tau_{B,M}(m_B \otimes 1)(1 \otimes 1 \otimes \rho_{R,M})(x^k \otimes x^l \otimes r \otimes m)\\
&= (1 \otimes m_B)(\tau_{B,M} \otimes 1)(1 \otimes \tau_{B,M})(1 \otimes 1 \otimes \rho_{R,M})(x^k \otimes x^l \otimes r \otimes m) \quad \text{(d'après 5.1)}\\
&= (1 \otimes m_B)(\tau_{B,M} \otimes 1)(1 \otimes \rho_{R,M} \otimes 1)(1 \otimes 1 \otimes \tau_{B,M})(1 \otimes \tau \otimes 1)(x^k \otimes x^l \otimes r \otimes m)\\
&\qquad \text{(par hypothèse de récurrence sur } l)\\
&= (1 \otimes m_B)(\rho_{R,M} \otimes 1 \otimes 1)(1 \otimes \tau_{B,M} \otimes 1)(\tau \otimes 1 \otimes 1)\\
&\quad (1 \otimes 1 \otimes \tau_{B,M})(1 \otimes \tau \otimes 1)(x^k \otimes x^l \otimes r \otimes m) \quad \text{(par hypothèse de récurrence sur } k)
\end{aligned}$$

Comme $(1 \otimes m_B)(\rho_{R,M} \otimes 1 \otimes 1) = (\rho_{R,M} \otimes 1)(1 \otimes 1 \otimes m_B)$, on retrouve bien l'égalité souhaitée. Ainsi, $\tau_{B,M}$ vérifie la condition (5.2) et elle satisfait la relation (5.1) par construction, M est bien compatible avec τ.

6.2 Résolutions tordues pour une extension de Ore

Soit $P_\bullet(M)$ une résolution projective de M comme A-module à gauche :

$$(P_\bullet(M)) : \qquad \cdots \xrightarrow{d_2} P_1(M) \xrightarrow{d_1} P_0(M) \xrightarrow{\mu} M \longrightarrow 0$$

Notre prochaine étape dans la construction consiste à prendre cette résolution et à montrer qu'elle est compatible avec τ. Pour cela, nous construisons une autre résolution projective de M en utilisant la résolution $P_\bullet(M)$ ci-dessus

$$(P^\sigma_\bullet(M)) : \qquad \cdots \xrightarrow{d_2} P^\sigma_1(M) \xrightarrow{d_1} P^\sigma_0(M) \xrightarrow{\phi^{-1}\mu} M \longrightarrow 0$$

en utilisant l'action de module $a._\sigma m = \sigma(a).m$ et en posant $P^\sigma_i(M) = (P_i(M))^\sigma$ pour chaque i. Ensuite, par le théorème de comparaison, il existe un morphisme de chaînes de R-module de $P_\bullet(M)$ à $P^\sigma_\bullet(M)$ qui est un relèvement de l'identité de M. On peut voir ce morphisme comme une application k-linéaire de chaînes

$$\sigma_\bullet : P_\bullet(M) \to P_\bullet(M) \tag{6.1}$$

et notons que $\sigma_i(r.z) = \sigma(r).\sigma_i(z)$ pour tout $i \geq 0, r \in R$, et $z \in P_i(M)$.

Avant de construire notre morphisme de chaînes $\tau_{B,\bullet}$, nous devons d'abord définir une action de $R[x;\sigma,\delta]$-module à gauche sur les R-modules projectifs $P_\bullet(M)$. Nous commençons donc par les deux lemmes suivants : le premier lemme nous donne une méthode pour étendre l'action de R-module à une action de $R[x;\sigma,\delta]$-module et le seconde lemme nous donne l'existence du morphisme de chaînes $\delta_\bullet$ dont nous avons besoin pour définir $\tau_{B,\bullet}$. On va supposer aussi que pour chaque i, σ_i est bijectif.

Lemme 6.1.
Soit P un R-module projectif. Il existe une structure de $R[x;\sigma,\delta]$-module sur P qui étend l'action de R.

Démonstration.
On commence d'abord par prendre P comme le R-module libre R. On définit aussi une action de $R[x\ ;\sigma,\delta]$-module en faisant agir x sur R par $x.a = \delta(a)$ pour tout $a \in A = R$. On a

$$\begin{aligned}(xr).r' &= x.(r.r') = x.(rr') = \delta(rr') \\ &= \delta(r)r' + \sigma(r)\delta(r') \\ &= \delta(r)r' + \sigma(r)(x.r') \\ &= (\sigma(r)x + \delta(r)).r'\end{aligned}$$

pour tous r, r' dans R.

Ensuite, si P est un R-module libre arbitraire alors $P \cong R^{\oplus I}$ pour un ensemble d'indices I et ainsi on laisse x agir sur chaque copie de la manière indiquée ci-dessus. Aussi, puisque x agit dans chaque copie il est trivial de montrer que xr agit comme $\sigma(r)x+\delta(r)$ sur P pour tout $r \in R$. Donc tout R-module libre P a aussi une structure de $R[x;\sigma,\delta]$-module qui prolonge l'action de R.

Finalement, en général, si P est un module projectif quelconque, il existe un R-module N tel que $P \oplus N = F$ où F est un R-module libre. Soit $i : P \to F$ et $\pi : F \to P$ des morphismes de R-modules tels que $\pi i = 1_P$. Définissons $x.p = \pi(x.i(p))$ pour tout $p \in P$, où l'action de x sur $i(p)$ est donnée précédemment comme celle d'un module libre. On a donc

$$\begin{aligned} xr.p = x.(r.p) &= \pi(x.i(r.p)) \\ &= \pi(x.(r.i(p))) \\ &= \pi((xr).i(p)) \\ &= \pi((\sigma(r)x + \delta(r)).i(p)) \quad \text{(d'après le cas d'un module libre)} \\ &= (\sigma(r)x + \delta(r)).p \end{aligned}$$

Ainsi, P est bien un $R[x; \sigma, \delta]$-module. $\square$

Soit $f : M \to M$ l'application donnée par l'action de x sur le $R[x; \sigma, \delta]$-module M.

Lemme 6.2.
Il existe une application k-linéaire de chaînes $\delta_\bullet : P_\bullet(M) \to P^\sigma_\bullet(M)$ qui est un relèvement de $f : M \to M$ tel que pour tout $i \geq 0$, $\delta_i(rz) = \sigma(r)\delta_i(z) + \delta(r)z$ pour tout $r \in R$ et $z \in P_i(M)$.

Démonstration.
On raisonne par récurrence sur $i \in \mathbb{N}$.

- Si $i = 0$, soit δ'_0 l'action de x sur $P_0(M)$ définie comme dans le lemme (6.1), c'est-à-dire $\delta'_0(z) = x.z$ pour tout $z \in P_0(M)$. On a donc

$$\begin{aligned} \delta'_0(rz) = x.(rz) &= (xr).z \\ &= (\sigma(r)x + \delta(r)).z \\ &= \sigma(r)\delta'_0(z) + \delta(r)z \end{aligned}$$

pour $r \in R$ et $z \in P_0(M)$.

Considérons maintenant l'application $\mu\delta'_0 - f\mu : P_0(M) \to M^\sigma$, on peut voir aussi que c'est un morphisme de R-module. En effet :

C'est clair que $\mu\delta'_0 - f\mu$ est un morphisme d'espaces vectoriels, ensuite,

$$\begin{aligned} (\mu\delta'_0 - f\mu)(r.z) = \mu\delta'_0(r.z) - (f\mu)(r.z) &= \mu(x.(r.z)) - x.(\mu(r.z)) \\ &= \mu(xr.z) - x.(r.\mu(z)) \\ &= \mu((\sigma(r)x + \delta(r)).z) - (\sigma(r)x + \delta(r)).\mu(z) \\ &= \mu(\sigma(r)x.z + \delta(r).z) - \sigma(r)x.\mu(z) - \delta(r).\mu(z) \\ &= \sigma(r).\mu(x.z) + \delta(r).\mu(z) - \sigma(r).(x.\mu(z)) - \delta(r).\mu(z) \\ &= r._\sigma\mu(x.z) - r._\sigma(x.\mu(z)) \\ &= r._\sigma(\mu\delta'_0)(z) - r._\sigma(f\mu)(z) \\ &= r._\sigma(\mu\delta'_0 - f\mu)(z) \end{aligned}$$

pour tous $r \in R$ et $z \in P_0(M)$. Comme $P_0(M)$ est projectif, μ étant surjective il existe donc un morphisme de R-modules $\delta''_0 : P_0(M) \to P^\sigma_0(M)$ tel que $\mu\delta'_0 - f\mu = \mu\delta''_0$.

$$\begin{tikzcd} & P_0(M) \arrow[dl, dashed, "\delta''_0"'] \arrow[d, "\mu\delta'_0 - f\mu"] & \\ P_0(M)^\sigma \arrow[r, "\mu"] & M^\sigma \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Posons $\delta_0 = \delta_0' - \delta_0''$. On a bien

$$\begin{aligned}\mu\delta_0 &= \mu(\delta_0' - \delta_0'')\\ &= \mu(\delta_0') - \mu(\delta_0'')\\ &= f\mu\end{aligned}$$

Ainsi, δ_0 est bien un relèvement de f, et on a aussi :

$$\begin{aligned}\delta_0(rz) &= (\delta_0' - \delta_0'')(rz)\\ &= \delta_0'(rz) - \delta_0''(rz)\\ &= \sigma(r)\delta_0'(z) + \delta(r)z - \sigma(r)\delta_0''(z)\\ &= \sigma(r)(\delta_0'(z) - \delta_0''(z)) + \delta(r)z\\ &= \sigma(r)\delta_0(z) + \delta(r)z\end{aligned}$$

pour tout $r \in R$ et $z \in P_0(M)$.

- Soit $i > 0$, supposons qu'il existe une application k-linéaire $\delta_j : P_j(M) \to P_j(M)$ telle que $\delta_j(rz) = \sigma(r)\delta_j(z) + \delta(r)z$ et $d_j\delta_j = \delta_{j-1}d_j$ pour tout j avec $0 \leq j < i$, et $r \in R, z \in P_j(M)$.

  Comme avant, on définit l'application $\delta_i' : P_i(M) \to P_i(M)$ l'action de x sur $P_i(M)$ donnée par le lemme 6.1. Donc

$$\begin{aligned}\delta_i'(rz) &= x.rz = (xr).z\\ &= (\sigma(r)x + \delta(r)).z\\ &= \sigma(r)\delta_i'(z) + \delta(r)z\end{aligned}$$

  pour tout $r \in R$ et $z \in P_i(M)$.

  Considérons ensuite l'application

$$d_i\delta_i' - \delta_{i-1}d_i : P_i(M) \to P_i^\sigma(M).$$

  On vérifie de même que cette application est bien un morphisme de R-modules :

$$\begin{aligned}d_i\delta_i' - \delta_{i-1}d_i(rz) &= d_i\delta_i'(rz) - \delta_{i-1}(rd_i(z))\\ &= d_i(\sigma(r)\delta_i'(z) + \delta(r)z) - \delta_{i-1}(\sigma(r)d_i(z)) - \delta(r)d_i(z)\\ &\qquad \text{(par hypothèse de récurrence)}\\ &= \sigma(r)d_i(\delta_i'(z)) + \delta(r)d_i(z) - \sigma(r)\delta_{i-1}(d_i(z)) - \delta(r)d_i(z)\\ &= \sigma(r)d_i(\delta_i'(z)) - \sigma(r)\delta_{i-1}(d_i(z))\\ &= r._\sigma(d_i\delta_i' - \delta_{i-1}d_i)(z)\end{aligned}$$

  pour tout $r \in R$ et $z \in P_i(M)$. Par hypothèse de récurrence, δ_{i-1} est un morphisme de chaînes, on a

$$\begin{aligned}d_{i-1}(d_i\delta_i' - \delta_{i-1}d_i) &= d_{i-1}d_i\delta_i' - d_{i-1}\delta_{i-1}d_i\\ &= -\delta_{i-2}d_{i-1}d_i\\ &= 0.\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Im}(d_i\delta'_i - \delta_{i-1}d_i) \subset \mathrm{Ker}(d_{i-1}) = \mathrm{Im}\,(d_i)$. Comme $P_i(M)$ est un R-module projectif, il existe un morphisme $\delta''_i : P_i(M) \to P_i^\sigma(M)$ tel que $d_i\delta'_i - \delta_{i-1}d_i = d_i\delta''_i$. Posons $\delta_i = \delta'_i - \delta''_i$, par construction, δ_i est bien k-linéaire et

$$\begin{aligned} d_i\delta_i &= d_i(\delta'_i - \delta''_i) \\ &= d_i\delta'_i - d_i\delta''_i \\ &= d_i\delta'_i - (d_i\delta'_i - \delta_{i-1}d_i) \\ &= \delta_{i-1}d_i. \end{aligned}$$

D'où $\delta_\bullet$ est bien une application k-linéaire de chaînes. Enfin, pour tout $r \in R$ et $z \in P_i(M)$:

$$\begin{aligned} \delta_i(rz) &= \delta'_i(rz) - \delta''_i(rz) \\ &= \sigma(r)\delta'_i(z) + \delta(r)z - \sigma(r)\delta''_i(z) \\ &= \sigma(r)(\delta'_i - \delta''_i)(z) + \delta(r)z \\ &= \sigma(r)\delta_i(z) + \delta(r)z. \end{aligned}$$

□

Lemme 6.3.
Soit $\sigma_\bullet$ le morphisme de chaînes défini en (6.1) *tels que, pour tout $i \geq 0$, les σ_i soient bijectifs, et soit $\delta_\bullet$ le morphisme de chaînes construit dans le lemme* 6.2. *Alors la résolution $P_\bullet(M)$ est compatible avec τ.*

Démonstration.
On définit une application k-linéaire $\tau_{B,i} : B \otimes P_i(M) \to P_i(M) \otimes B$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \tau_{B,i}(1 \otimes z) &= z \otimes 1 \\ \tau_{B,i}(x \otimes z) &= \sigma_i(z) \otimes x + \delta_i(z) \otimes 1 \end{aligned}$$

pour tout $z \in P_i(M)$. On étend ensuite l'application en imposant qu'elle satisfasse à la relation (5.1) comme avant pour obtenir $\tau_{B,i}(x^n \otimes z)$ et on vérifie que $\tau_{B,i}$ satisfait la condition (5.2). Pour cela, on raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $r \in R$ et $z \in P_i(M)$, on a :

◇ Pour $n = 1$, d'une part,

$$\begin{aligned} \tau_{B,i}(1 \otimes \rho_{R,i})(x \otimes r \otimes z) &= \tau_{B,i}(x \otimes rz) \\ &= \sigma_i(rz) \otimes x + \delta_i(rz) \otimes 1 \\ &= \sigma(r)\sigma_i(z) \otimes x + \sigma_i(r)\delta_i(z) \otimes 1 + \delta(r)z \otimes 1. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} &(\rho_{R,i} \otimes 1)(1 \otimes \tau_{B,i})(\tau \otimes 1)(x \otimes r \otimes z) \\ &\qquad = (\rho_{R,i} \otimes 1)(1 \otimes \tau_{B,i})(\sigma(r) \otimes x \otimes z + \delta(r) \otimes 1 \otimes z) \\ &\qquad = (\rho_{R,i} \otimes 1)(\sigma(r) \otimes \sigma_i(z) \otimes x + \sigma(r) \otimes \delta_i(z) \otimes 1 + \delta(r) \otimes z \otimes 1) \\ &\qquad = \sigma(r)\sigma_i(z) \otimes x + \sigma(r)\delta_i(z) \otimes 1 + \delta(r)z \otimes 1). \end{aligned}$$

◇ Soit $n > 1$ tel que pour tout $1 < k < n$, on a

$$\tau_{B,i}(1 \otimes \rho_{R,i})(x^k \otimes r \otimes z) = (\rho_{R,i} \otimes 1)(1 \otimes \tau_{B,i})(\tau \otimes 1)(x^k \otimes r \otimes z)$$

un raisonnement similaire à la démonstration dans la section 6.1 montre que

$$\tau_{B,i}(1 \otimes \rho_{R,i})(x^n \otimes r \otimes z) = (\rho_{R,i} \otimes 1)(1 \otimes \tau_{B,i})(\tau \otimes 1)(x^n \otimes r \otimes z)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Comme σ_i est bijectif, posons maintenant

$$\begin{aligned} \tau_{i,B} : P_i(M) \otimes B &\longrightarrow B \otimes P_i(M) \\ z \otimes x &\longmapsto x \otimes \sigma_i^{-1}(z) - 1 \otimes \delta_i(\sigma_i^{-1}(z)). \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} \tau_{B,i} \circ \tau_{i,B}(z \otimes x) &= \tau_{B,i}(x \otimes \sigma_i^{-1}(z) - 1 \otimes \delta_i(\sigma_i^{-1}(z))) \\ &= z \otimes x + \delta_i(\sigma_i^{-1}(z)) \otimes 1 - \delta_i(\sigma_i^{-1}(z)) \otimes 1 \\ &= z \otimes x. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \tau_{i,B} \circ \tau_{B,i}(x \otimes z) &= \tau_{i,B}(\sigma_i(z) \otimes x + \delta_i(z) \otimes 1) \\ &= x \otimes z - 1 \otimes \delta_i(z) + 1 \otimes \delta_i(z) \\ &= x \otimes z. \end{aligned}$$

En utilisant les conditions de compatibilité, on a donc $\tau_{i,B} \circ \tau_{B,i}(x^m \otimes z) = x^m \otimes z$ et $\tau_{B,i} \circ \tau_{i,B}(z \otimes x^m) = z \otimes x^m$, pour tous $z \in P_i(M)$ et $m \in \mathbb{N}$. Ainsi, $\tau_{B,i}$ est bien une application k-linéaire bijective d'inverse $\tau_{i,B}$ et pour chaque $i \geq 0$, $P_i(M)$ est compatible avec τ via $\tau_{B,i}$, ce qui achève la preuve. $\square$

Nous avons donc montré que : étant donné un $R[x;\sigma,\delta]$-module M tel que $M \cong M^\sigma$ et une résolution projective $P_\bullet(M)$ de M comme R-module à gauche, nous pouvons construire des applications $\tau_{B,M}, \tau_{B,\bullet}$ tels que M et $P_\bullet(M)$ soient compatibles avec τ. Nous construisons maintenant une résolution projective de M comme $R[x;\sigma,\delta]$-module en prenant le produit tordu de deux résolutions : la résolution projective $P_\bullet(M)$ de M comme R-module et la résolution de Koszul de k comme B-module avec $B = k[x]$,

$$(P_\bullet(B)) \qquad 0 \longrightarrow k[x] \xrightarrow{x.} k[x] \xrightarrow{\epsilon} k \longrightarrow 0$$

où $\epsilon(x) = 0$.

Théorème 6.4.
Soit $R[x\,;\sigma,\delta]$ une extension de Ore. Soit M un $R[x\,;\sigma,\delta]$-module pour lequel $M^\sigma \cong M$ comme R-modules. Considérons une résolution projective $P_\bullet(M)$ de M comme R-module et supposons que chaque application $\sigma_i : P_i(M) \to P_i(M)$ de (6.1) est bijective. Pour chaque $i \geq 0$, posons

$$Y_{i,0} = Y_{i,1} = P_i(M) \otimes k[x] \text{ et } Y_{i,j} = 0 \text{ pour tout } j > 1$$

comme dans le lemme 5.8. Alors $Y_\bullet$ est une résolution projective de M en tant que $R[x\,;\sigma,\delta]$ -module.

Démonstration.

On a déjà vu que M et $P_\bullet(M)$ sont compatibles avec τ d'après la section 6.1 et le lemme 6.3, le complexe $\cdots \to Y_1 \to Y_0 \to M \to 0$ est une suite exacte de $R[x\,;\sigma,\delta]$-modules d'après le lemme 5.7. On vérifie directement que $Y_{i,j}$ est un module projectif : pour chaque $i \geq 0$ et $j = 0, 1$,

$$Y_{i,j} \cong R[x\,;\sigma,\delta] \otimes_R P_i(M). \tag{6.2}$$

En effet : d'abord, on remarque que $k[x] \otimes P_i(M)$ est un $(k[x] \otimes_{\tau^{-1}} R) = (B \otimes_{\tau_{-1}} A)$-module à gauche. $k[x]$ est bien un B-module qui est compatible avec τ^{-1} via τ^{-1}. De plus, on sait que $P_i(M)$ est un A-module à gauche qui est compatible avec τ via $\tau_{B,i}$ donc :

$$\begin{aligned}
&\tau_{B,i}(m_B \otimes 1) = (1 \otimes m_B)(\tau_{B,i} \otimes 1)(1 \otimes \tau_{B,i})\\
\Leftrightarrow\ &(m_B \otimes 1) = \tau_{i,B}(1 \otimes m_B)(\tau_{B,i} \otimes 1)(1 \otimes \tau_{B,i})\\
\Leftrightarrow &(m_B \otimes 1)(1 \otimes \tau_{i,B}) = \tau_{i,B}(1 \otimes m_B)(\tau_{B,i} \otimes 1)\\
\Leftrightarrow &(m_B \otimes 1)(1 \otimes \tau_{i,B})(\tau_{i,B} \otimes 1) = \tau_{i,B}(1 \otimes m_B),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&(\rho_{A,i} \otimes 1)(1 \otimes 1 \otimes \tau)(1 \otimes \tau_{B,i} \otimes 1)(\tau \otimes 1 \otimes 1) = \tau_{B,i}(1 \otimes \rho_{A,i})\\
\Leftrightarrow\ &\tau_{i,B}(\rho_{A,i} \otimes 1)(1 \otimes 1 \otimes \tau)(1 \otimes \tau_{B,i} \otimes 1) = (1 \otimes \rho_{A,i})(\tau^{-1} \otimes 1 \otimes 1)\\
\Leftrightarrow\ &\tau_{i,B}(\rho_{A,i} \otimes 1)(1 \otimes 1 \otimes \tau) = (1 \otimes \rho_{A,i})(\tau^{-1} \otimes 1 \otimes 1)(1 \otimes \tau_{i,B} \otimes 1)\\
\Leftrightarrow\ &\tau_{i,B}(\rho_{A,i} \otimes 1) = (1 \otimes \rho_{A,i})(\tau^{-1} \otimes 1 \otimes 1)(1 \otimes \tau_{i,B} \otimes 1)(1 \otimes 1 \otimes \tau^{-1}).
\end{aligned}$$

Donc $P_i(M)$ est aussi compatible avec τ^{-1} via $\tau_{i,B}$ et par conséquent, $k[x] \otimes P_i(M)$ est bien un $(B \otimes_{\tau^{-1}} A)$-module sous l'action donnée par :

$$\begin{tikzcd}
B \otimes_{\tau^{-1}} A \otimes B \otimes P_i(M) \arrow[r, "1\otimes\tau^{-1}\otimes 1"] \arrow[rr, bend right, "\rho^l_{B\otimes_{\tau^{-1}}A}"'] & B \otimes B \otimes A \otimes P_i(M) \arrow[r, "m_B\otimes\rho^l_{A,i}"] & B \otimes P_i(M).
\end{tikzcd}$$

Posons,

$$\begin{aligned}
f : k[x]\otimes_{\tau^{-1}} R \otimes_R P_i(M) &\longrightarrow k[x] \otimes P_i(M)\\
x^n \otimes_\tau r \otimes_R z &\longmapsto x^n \otimes r.z
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
g : k[x] \otimes P_i(M) &\longrightarrow k[x] \otimes_{\tau^{-1}} R \otimes_R P_i(M)\\
x^n \otimes z &\longmapsto x^n \otimes 1_R \otimes_R z.
\end{aligned}$$

Notons que $R \otimes_R P_i(M)$ est le quotient de $R \otimes P_i(M)$ comme k-modules. Soit $\pi : R \otimes P_i(M) \to R \otimes_R P_i(M)$ la surjection canonique, par passage au quotient, il existe donc une unique application k-linéaire $\bar{\rho}^l_{A,i}$ telle que $\bar{\rho}^l_{A,i} \circ \pi = \rho^l_{A,i}$: (rappelons que $A = R$)

$$\begin{tikzcd}
R \otimes P_i(M) \arrow[rr, "\rho^l_{A,i}"] \arrow[d, "\pi"] & & P_i(M) \\
R \otimes_R P_i(M) \arrow[urr, "\bar{\rho}^l_{A,i}"'] & &
\end{tikzcd}$$

et on voit facilement que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
R \otimes R \otimes_R P_i(M) \arrow[r, "1\otimes\bar{\rho}^l_{A,i}"] \arrow[d, "m_R\otimes 1"] & R \otimes P_i(M) \arrow[r, "\rho^l_{A,i}"] & P_i(M) \\
R \otimes_R P_i(M) \arrow[urr, "\bar{\rho}^l_{A,i}"'] & &
\end{tikzcd}.$$

On remarque maintenant que $f = 1 \otimes \bar{\rho}^l_{A,i}$ et donc f est un morphisme de $(k[x] \otimes_{\tau^{-1}} R)$-modules : soient $s, r \in R$, $z \in P_i(M)$ et $m, n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
&f((x^m \otimes_{\tau^{-1}} s).(x^n \otimes_{\tau^{-1}} r \otimes_R z)) = f((x^m \otimes_{\tau^{-1}} s)._{\tau^{-1}}(x^n \otimes_\tau r) \otimes_R z) \\
&\quad = f(m_B \otimes m_A \otimes 1)(1 \otimes \tau^{-1} \otimes 1_2)(x^m \otimes s \otimes x^n \otimes r \otimes_R z) \\
&\quad = (1 \otimes \bar{\rho}^l_{A,i})(m_B \otimes m_A \otimes 1)(1 \otimes \tau^{-1} \otimes 1_2)(x^m \otimes s \otimes x^n \otimes r \otimes_R z) \\
&\quad = (1 \otimes \bar{\rho}^l_{A,i})(1 \otimes m_A \otimes 1)(m_B \otimes 1_3)(1 \otimes \tau^{-1} \otimes 1_2)(x^m \otimes s \otimes x^n \otimes r \otimes_R z) \\
&\quad = (1 \otimes \rho^l_{A,i})(1_2 \otimes \bar{\rho}^l_{A,i})(m_B \otimes 1_3)(1 \otimes \tau^{-1} \otimes 1_2)(x^m \otimes s \otimes x^n \otimes r \otimes_R z) \\
&\quad = (1 \otimes \rho^l_{A,i})(m_B \otimes 1_2)(1 \otimes \tau^{-1} \otimes 1)(1_3 \otimes \bar{\rho}^l_{A,i})(x^m \otimes s \otimes x^n \otimes r \otimes_R z) \\
&\quad = (m_B \otimes \rho^l_{A,i})(1 \otimes \tau^{-1} \otimes 1)(x^m \otimes s \otimes x^n \otimes r.z) \\
&\quad = (x^m \otimes_{\tau^{-1}} s).f(x^n \otimes r.z).
\end{aligned}$$

On voit aussi que

$$\begin{aligned}
g \circ f(x^n \otimes_{\tau^{-1}} r \otimes_R z) &= g(x^n \otimes r.z) \\
&= x^n \otimes 1_R \otimes_R r.z \\
&= x^n \otimes r \otimes_R z
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
f \circ g(x^n \otimes z) &= f(x^n \otimes 1_R \otimes_R z) \\
&= x^n \otimes z.
\end{aligned}$$

Or $R \otimes_\tau k[x] \cong k[x] \otimes_{\tau^{-1}} R$, on en déduit ainsi que f est un isomorphisme de $(R \otimes_\tau k[x])$-modules d'inverse g.
Ensuite, on voit aussi que pour tout $i \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\tau_{B,i} : k[x]\otimes P_i(M) &\longrightarrow P_i(M) \otimes k[x] \\
x \otimes z &\longmapsto \sigma_i(z) \otimes x + \delta_i(z) \otimes 1 \\
1 \otimes z &\longmapsto z \otimes 1
\end{aligned}$$

est bien un morphisme de $(R \otimes_\tau k[x]) = (A \otimes_\tau B)$-modules car le diagramme ci-dessous commute comme $P_i(M)$ est compatible avec τ :

$$\begin{tikzcd}
A \otimes_\tau B \otimes B \otimes P_i(M) \arrow[rr, "1_2 \otimes \tau_{B,i}"] \arrow[d, "1 \otimes m_B \otimes 1"'] & \circlearrowleft\ (5.1) & A \otimes_\tau B \otimes P_i(M) \otimes B \arrow[d, "1 \otimes \tau_{B,i} \otimes 1"] \\
A \otimes B \otimes P_i(M) \arrow[d, "\tau^{-1} \otimes 1"'] \arrow[rrd, "1 \otimes \tau_{B,i}"] & & A \otimes P_i(M) \otimes B \otimes B \arrow[d, "1_2 \otimes m_B"] \\
B \otimes A \otimes P_i(M) \arrow[d, "1 \otimes \rho^l_{A,i}"'] & \circlearrowleft\ (5.2) & A \otimes P_i(M) \otimes B \arrow[d, "\rho^l_{A,i} \otimes 1"] \\
B \otimes P_i(M) \arrow[rr, "\tau_{B,i}"] & & P_i(M) \otimes B
\end{tikzcd}$$

donc

$$\tau_{B,i}(1 \otimes \rho^l_{A,i})(\tau^{-1} \otimes 1)(1 \otimes m_B \otimes 1) = (\rho^l_{A,i} \otimes 1)(1_2 \otimes m_B)(1 \otimes \tau_{B,i} \otimes 1)(1_2 \otimes \tau_{B,i})$$

et donc

$$\tau_{B,i} \circ \rho^l_{(A \otimes_\tau B),(B \otimes P_i(M))} = \rho^l_{(A \otimes_\tau B),(P_i(M) \otimes B)}(1_2 \otimes \tau_{B,i}).$$

On a déja vu que $\tau_{B,i}$ est une application k-linéaire bijective donc $\tau_{B,i}$ est un isomorphisme de $(R \otimes_\tau k[x])$-modules. Or $R[x;\sigma,\delta] \cong R \otimes_\tau k[x]$, c'est donc un isomorphisme de $R[x\ ;\sigma,\delta]$-modules.

Conclusion : On a finalement

$$R[x;\sigma,\delta] \otimes_R P_i(M) \cong R \otimes_\tau B \otimes_R P_i(M) \cong B \otimes P_i(M) \cong P_i(M) \otimes B = Y_{i,j}.$$

Posons maintenant $R' = R[x;\sigma,\delta]$ et soit N un R'-module (qui est aussi un R-module par restriction), pour tout $i \geq 0$,

$$\begin{aligned}\Phi : Hom_{R'}(R' \otimes_R P_i(M), N) &\longrightarrow Hom_R(P_i(M), N)\\ f &\longmapsto (z \mapsto f(1 \otimes z))\end{aligned}$$

est un isomorphisme de groupes abéliens. En effet : soient $f, g \in Hom_{R'}(R' \otimes_R P_i(M), N)$, pour tout $z \in P_i(M)$, on a :

$$\begin{aligned}\Phi(f+g)(z) = (f+g)(1 \otimes z) &= f(1 \otimes z) + g(1 \otimes z)\\ &= \Phi(f)(z) + \Phi(g)(z)\\ &= (\Phi(f) + \Phi(g))(z)\end{aligned}$$

Donc, Φ est un morphisme de groupes abéliens. Soit

$$\begin{aligned}\Psi : Hom_R(P_i(M), N) &\longrightarrow Hom_{R'}(R' \otimes_R P_i(M), N)\\ g &\longmapsto (u \otimes z \mapsto u.g(z))\end{aligned}$$

et pour tout $g \in Hom_R(P_i(M), N)$, on a :

$$\Phi \circ \Psi(g)(z) = \Psi(g)(1 \otimes z) = g(z)$$

et

$$\begin{aligned} \Psi \circ \Phi(f)(u \otimes z) = u.\Phi(f)(z) &= u.f(1 \otimes z) \\ &= f(u \otimes z) \end{aligned}$$

Ainsi, Φ est bien un isomorphisme de groupes abéliens d'inverse Ψ.

Comme $P_i(M)$ est un R-module projectif, le foncteur $Hom_R(P_i(M), -)$ est exact et donc $Hom_{R'}(R' \otimes_R P_i(M), -)$ l'est aussi. Finalement, $Y_{i,j} = R[x; \sigma, \delta] \otimes_R P_i(M) = R' \otimes_R P_i(M)$ est un $R[x; \sigma, \delta]$-module projectif, ce qui achève la démonstration. $\square$

Chapitre 7

Résolution tordue pour une algèbre de Nichols et sa bosonisation

Soient $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique $p > 2$ et $G := \langle g \rangle \cong \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ un groupe cyclique d'ordre q qui est divisible par p. Dans ce chapitre, nous appliquons la construction de résolutions pour les produits tensoriels tordus, introduite dans le chapitre 5, à une algèbre de Nichols R et à sa bosonisation $R\#\mathbb{K}G$ qui seront définies dans la Section 7.1. Cette application a été étudié par Van C. Nguyen, Xingting Wang et Sarah Witherspoon dans l'acticle : "Finite generation of some cohomology rings via twisted tensor product and Anick resolutions" [6].

7.1 Algèbre de Nichols de rang 2 et sa bosonisation

Proposition 7.1. *Considérons*

$$R := \mathbb{K}\langle x, y\rangle \Big/ \Big(x^p, y^p, yx - xy - \frac{1}{2}x^2\Big),$$

Alors R est une algèbre de dimension p^2, dont une base est $\{x^i y^j \mid 0 \leq i, j \leq p-1\}$.

Démonstration.

Montrons que $\mathcal{B} = \{x^i y^j \mid 0 \leqslant i, j < p\}$ est une $\mathbb{K}$-base de R :

- $\star$ D'abord, on voit que la relation

$$yx = xy + \frac{1}{2}x^2$$

assure que tout élément de R est une combinaison linéaire des $x^i y^j$ pour $0 \leq i, j < p$.

- $\star$ Il nous reste maintenant à voir que ces éléments sont linéairement indépendants. Pour cela on construit une représentation concrète de R. Soit V l'espace vectoriel de base les $e_{(i,j)}$ pour $0 \leq i, j \leq p-1$. Par convention, on pose $e_{(p,j)} = 0 = e_{(i,p)}$ pour tous $0 \leq i, j \leq p-1$. Soient σ, γ les éléments de $End_{\mathbb{K}}(V)$ définis par

$$\sigma(e_{(i,j)}) = e_{(i+1,j)} \,\text{si}\, 0 \leq i \leq p-1$$

et

$$\gamma(e_{(i,j)}) = e_{(i,j+1)} + \frac{i}{2} e_{(i+1,j)} \,\text{si}\, 0 \leq i, j \leq p-1.$$

On a donc : $\sigma^p(e_{(i,j)}) = 0 = \gamma^p(e_{(i,j)})$ et pour tous $0 \leq i, j < p$,

$$\begin{aligned}\gamma \circ \sigma(e_{(i,j)}) &= \gamma(e_{(i+1,j)}) \\ &= e_{(i+1,j+1)} + \frac{i+1}{2} e_{(i+2,j)},\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sigma \circ \gamma(e_{(i,j)}) &= \sigma\big(e_{(i,j+1)} + \frac{i}{2} e_{(i+1,j)}\big) \\ &= e_{(i+1,j+1)} + \frac{i}{2} e_{(i+2,j)} \\ &= \gamma \circ \sigma(e_{(i,j)}) - \frac{1}{2} e_{(i+2,j)} \\ &= \gamma \circ \sigma(e_{(i,j)}) - \frac{1}{2}\sigma^2(e_{(i,j)}).\end{aligned}$$

Les endomorphismes σ, γ satisfont les relations qui définissent R. Donc il existe un unique morphisme d'algèbres

$$\begin{aligned}\phi : R &\to End_{\mathbb{K}}(V) \\ x &\mapsto \sigma \\ y &\mapsto \gamma\end{aligned}$$

On vérifie maintenant que les $\sigma^i \gamma^j$, pour $0 \leq i, j < p$ sont des éléments linéairement indépendants de $End_{\mathbb{K}}(V)$. Pour cela, soit $\lambda_{i,j} \in k$ tels que $\sum \lambda_{i,j} \sigma^i \gamma^j = 0$, donc

$$\begin{aligned}&\sum \lambda_{i,j} \sigma^i \gamma^j (e_{(0,0)}) = 0 \\ \text{donc} &\sum \lambda_{i,j} \sigma^i (e_{(0,j)}) = 0 \\ \text{donc} &\sum \lambda_{i,j} e_{(i,j)} = 0 \\ \text{donc}\, &\lambda_{i,j} = 0 \quad \text{pour tous}\, 0 \leq i, j < p.\end{aligned}$$

Ainsi, les éléments $x^i y^j$ sont linéairement indépendants. □

Observons que R est une algèbre de Nichols associée au module de Yetter-Drinfeld $V = \mathbb{K}x + \mathbb{K}y$ de rang 2 sur G, où la G-action sur V est donnée par

$$^g x = x \quad et \quad ^g y = x + y.$$

Soit $R\#\mathbb{K}G$ la bosonisation de R et $\mathbb{K}G$. C'est l'algèbre de Hopf pointée de dimension $p^2 q$, dont l'espace vectoriel est $R \otimes \mathbb{K}G$, la multiplication est définie par $(r\#g)(s\#h) = r(g.s)\#gh$ pour tous $r, s \in R$ et $g, h \in G$; la structure de cogèbre et l'antipode sont donnés par

$$\begin{array}{lll}\Delta(x) = x \otimes 1 + g \otimes x, & \Delta(y) = y \otimes 1 + y \otimes y, & \Delta(g) = g \otimes g, \\ \varepsilon(x) = 0, & \varepsilon(y) = 0, & \varepsilon(g) = 1, \\ S(x) = -g^{-1}x, & S(y) = -g^{-1}y, & S(g) = g^{-1},\end{array}$$

où Δ est le coproduit, ε est la counité et S est l'antipode de $R\#\mathbb{K}G$.

7.2 Résolution pour l'algèbre de Nichols R

On munit $\mathbb{K}$ d'une structure de R-module ou de $(R\#\mathbb{K}G)$-module via ε. On construira une résolution libre de $\mathbb{K}$ comme R-module dans cette section et comme $(R\#\mathbb{K}G)$-module dans la section 7.3 via les constructions de produits tensoriels tordus. On construit d'abord une résolution libre du R-module trivial $\mathbb{K}$.

Lemme 7.2. *Soient $A := \mathbb{K}[x]/(x^p)$ et $B := \mathbb{K}[y]/(y^p)$. Alors $R \cong A \otimes_\tau B$ avec $\tau : B \otimes A \to A \otimes B$ l'application de twist définie par*

$$\tau(y^r \otimes x^\ell) = \sum_{t=0}^{r} \binom{r}{t} \frac{1}{2^t} [\ell]^{[t]} x^{\ell+t} \otimes y^{r-t},$$

où par convention,

$$[\ell]^{[t]} = \ell(\ell+1)\cdots(\ell+t-1), \quad et \quad [\ell]^{[0]} = 1.$$

pour tout ℓ.

Démonstration.

D'abord, on montre par récurrence sur r que

$$y^r x^\ell = \sum_{t=0}^{r} \binom{r}{t} \frac{[\ell]^{[t]}}{2^t} x^{\ell+t} y^{r-t},$$

pour tout r.

- ⋆ Pour $r = 0$, c'est évident.
- ⋆ Pour $r = 1$, $yx^\ell = x^\ell y + \frac{\ell}{2} x^{\ell+1}$ par récurrence sur ℓ.
- ⋆ Supposons que le résultat est vrai au rang r, on a

$$\begin{aligned}
y^{r+1}x^\ell = y(y^r x^l) &= \sum_{t=0}^{r} \binom{r}{t} \frac{[\ell]^{[t]}}{2^t} y x^{\ell+t} y^{r-t} \\
&= \sum_{t=0}^{r} \binom{r}{t} \frac{[\ell]^{[t]}}{2^t} \left(x^{\ell+t}y + \frac{\ell+t}{2} x^{\ell+t+1}\right) y^{r-t} \\
&= \sum_{t=0}^{r} \binom{r}{t} \frac{[\ell]^{[t]}}{2^t} x^{\ell+t} y^{r+1-t} + \sum_{t=0}^{r} \binom{r}{t} \frac{[\ell]^{[t+1]}}{2^{t+1}} x^{\ell+t+1} y^{r-t} \\
&= \sum_{t=0}^{r} \binom{r}{t} \frac{[\ell]^{[t]}}{2^t} x^{\ell+t} y^{r+1-t} + \sum_{k=1}^{r+1} \binom{r}{k-1} \frac{[\ell]^{[k]}}{2^k} x^{\ell+k} y^{r+1-k} \\
&= \sum_{t=1}^{r} \binom{r+1}{t} \frac{[\ell]^{[t]}}{2^t} x^{\ell+t} y^{r+1-t} + x^\ell y^{r+1} + \frac{[\ell]^{[r+1]}}{2^{r+1}} x^{\ell+r+1} \\
&= \sum_{t=0}^{r+1} \binom{r+1}{t} \frac{[\ell]^{[t]}}{2^t} x^{\ell+t} y^{r+1-t}.
\end{aligned}$$

Posons ensuite,

$$\begin{aligned} i_A : A &\hookrightarrow R \\ x^i &\mapsto x^i \end{aligned} \qquad et \qquad \begin{aligned} i_B : B &\hookrightarrow R \\ y^j &\mapsto y^j \end{aligned}$$

Ce sont des morphismes d'algèbres injectifs. Soit

$$\begin{aligned}\varphi : A \otimes B &\to R\\ a \otimes b &\mapsto i_A(a).i_B(b)\\ x^i \otimes y^j &\mapsto x^i y^j\end{aligned}$$

On sait que $\{x^i y^j \mid 0 \leq i, j \leq p-1\}$ est une base de R d'après la proposition 7.1, donc φ est bien un isomorphisme linéaire en envoyant une base sur une autre base. Enfin, par définition, R est un produit tensoriel tordu d'algèbres de A et B avec le twist défini par

$$\begin{array}{rccccc}\tau : B \otimes A & \to & R & \to & A \otimes B\\ y^r \otimes x^\ell & \mapsto & y^r x^\ell & \mapsto & \varphi^{-1}(y^r x^\ell).\end{array}$$

On retrouve bien $\tau(y^r \otimes x^\ell) = \sum_{t=0}^{r} \binom{r}{t} \frac{[\ell]^{[t]}}{2^t} x^{\ell+t} y^{r-t}$ qui est une application de twist. □

Soient $P_\bullet^A(\mathbb{K})$ et $P_\bullet^B(\mathbb{K})$ deux résolutions libres de $\mathbb{K}$ comme A-module et B-module respectivement :

$$P_\bullet^A(\mathbb{K}) : \quad \cdots \xrightarrow{x^{p-1}.} A \xrightarrow{x.} A \xrightarrow{x^{p-1}.} A \xrightarrow{x.} A \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{K} \longrightarrow 0$$

$$P_\bullet^B(\mathbb{K}) : \quad \cdots \xrightarrow{y^{p-1}.} B \xrightarrow{y.} B \xrightarrow{y^{p-1}.} B \xrightarrow{y.} B \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{K} \longrightarrow 0.$$

Considérons maintenant le complexe total

$$K_\bullet := Tot(P_\bullet^A(\mathbb{K}) \otimes P_\bullet^B(\mathbb{K}))$$

et montrons que c'est une résolution libre du R-module $\mathbb{K}$. Pour cela, on vérifie d'abord les conditions de compatibilités de $\mathbb{K}$ et $P_\bullet^A(\mathbb{K})$. Ensuite, on montrera dans le lemme 7.5 que les applications τ_i définies ci-dessous munissent chaque $P_i^A(\mathbb{K}) \otimes P_j^B(\mathbb{K}) = A \otimes B$ d'une structure de R-module libre.

Lemme 7.3. *Pour chaque $i \geq 0$, soit $\tau_i : B \otimes A \to A \otimes B$ l'application $\mathbb{K}$-linéaire définie par :*

$$\tau_i(y^r \otimes x^\ell) = \begin{cases} \tau(y^r \otimes x^\ell), & \text{si } i \text{ est pair}\\ \sum_{t=0}^{r} \binom{r}{t} \frac{1}{2^t} [\ell+1]^{[t]} x^{\ell+t} \otimes y^{r-t} & \text{si } i \text{ est impair.}\end{cases}$$

Alors

(1) τ_i est bijective d'inverse

$$\tau_i^{-1}(x^\ell \otimes y^r) = \begin{cases} \sum_{t=0}^{r} \binom{r}{t} \dfrac{1}{(-2)^t} [\ell]^{[t]} y^{r-t} \otimes x^{\ell+t}, & \text{si } i \text{ est pair}\\ \sum_{t=0}^{r} \binom{r}{t} \frac{1}{(-2)^t} [\ell+1]^{[t]} y^{r-t} \otimes x^{\ell+t} & \text{si } i \text{ est impair.}\end{cases}$$

(2) τ_i sastisfait les conditions suivantes :

$$\tau_i \circ (m_B \otimes 1) = (1 \otimes m_B) \circ (\tau_i \otimes 1) \circ (1 \otimes \tau_i) \quad \text{et} \tag{7.1}$$

$$\tau_i \circ (1 \otimes m_A) = (m_A \otimes 1) \circ (1 \otimes \tau_i) \circ (\tau \otimes 1). \tag{7.2}$$

comme applications sur $B \otimes B \otimes A$ et sur $B \otimes A \otimes A$ respectivement.

(3) $\tau_\bullet$ est un morphisme de chaînes qui est un relèvement de τ.

Par conséquent, $\mathbb{K}$ et $P_\bullet^A(\mathbb{K})$ sont compatibles avec τ.

Pour le démontrer on a besoin du lemme suivant :

Lemme 7.4. *Pour tous $a, b, t \in \mathbb{N}$, on a*

$$[a+b]^{[t]} = \sum_{k=0}^{t} \binom{t}{k} [a]^{[k]} [b]^{[t-k]}$$

.

Démonstration.
On montre ce lemme par récurrence sur t :

- ⋆ Si $t = 0$ et $t = 1$, c'est évident.
- ⋆ Supposons que le résultat est vrai au rang t, on a donc

$$\begin{aligned}
[a+b]^{[t+1]} &= [a+b]^{[t]}(a+b+t) \\
&= \Big(\sum_{k=0}^{t} \binom{t}{k} [a]^{[k]} [b]^{[t-k]}\Big)(a+b+t) \\
&== \Big(\sum_{k=0}^{t} \binom{t}{k} [a]^{[k]} [b]^{[t-k]}\Big)(a+b+k+t-k) \\
&= \sum_{k=0}^{t} \binom{t}{k} [a]^{[k]} [b]^{[t-k]}(a+k) + \sum_{k=0}^{t} \binom{t}{k} [a]^{[k]} [b]^{[t-k]}(b+t-k) \\
&= \sum_{k=0}^{t} \binom{t}{k} [a]^{[k+1]} [b]^{[t-k]} + \sum_{k=0}^{t} \binom{t}{k} [a]^{[k]} [b]^{[t+1-k]} \\
&= \sum_{k=1}^{t+1} \binom{t}{k-1} [a]^{[k]} [b]^{[t-k+1]} + \sum_{k=0}^{t} \binom{t}{k} [a]^{[k]} [b]^{[t+1-k]} \\
&= \sum_{k=1}^{t} [a]^{[k]} [b]^{[t-k+1]} \left[\binom{t}{k-1} + \binom{t}{k}\right] + [a]^{[t+1]} + [b]^{[t+1]} \\
&= \sum_{k=1}^{t} \binom{t+1}{k} [a]^{[k]} [b]^{[t-k+1]} + [a]^{[t+1]} + [b]^{[t+1]} \\
&= \sum_{k=0}^{t+1} \binom{t+1}{k} [a]^{[k]} [b]^{[t-k+1]}.
\end{aligned}$$

□

Démonstration. (**du lemme 7.3**)
(1) Il nous faut vérifier que $\tau_i \circ \tau_i^{-1} = 1_{A \otimes B}$ et $\tau_i^{-1} \circ \tau_i = 1_{B \otimes A}$.
Si i est pair :

$$\begin{aligned}
\tau_i \circ \tau_i^{-1}(x^\ell \otimes y^r) &= \tau_i\Big(\sum_{t=0}^{r} \binom{r}{t} \frac{1}{(-2)^t} [\ell]^{[t]} y^{r-t} \otimes x^{\ell+t}\Big) \\
&= \sum_{t=0}^{r} \binom{r}{t} \frac{1}{(-2)^t} [\ell]^{[t]} \tau\big(y^{r-t} \otimes x^{\ell+t}\big)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{t=0}^{r}\sum_{i=0}^{r-t}\binom{r}{t}\binom{r-t}{i}\frac{(-1)^t}{2^{t+i}}[\ell]^{[t]}[\ell+t]^{[i]}x^{\ell+t+i}\otimes y^{r-t-i}$$
$$= \sum_{k=0}^{r}\left(\sum_{i+t=k}\binom{r}{t}\binom{r-t}{i}\frac{(-1)^t}{2^{i+t}}[\ell]^{[t]}[\ell+t]^{[i]}\right)x^{\ell+k}\otimes y^{r-k}$$
$$= x^\ell\otimes y^r + \sum_{k=1}^{r}\left(\sum_{t=0}^{k}\binom{r}{t}\binom{r-t}{k-t}\frac{(-1)^t}{2^{k}}[\ell]^{[t]}[\ell+t]^{[k-t]}\right)x^{\ell+k}\otimes y^{r-k}.$$

Pour tout $k\geq 1$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{t=0}^{k}\binom{r}{t}\binom{r-t}{k-t}\frac{(-1)^t}{2^k}[\ell]^{[t]}[\ell+t]^{[k-t]}x^{\ell+k}\otimes y^{r-k} &= \sum_{t=0}^{k}\binom{r}{t}\binom{r-t}{k-t}\frac{(-1)^t}{2^k}[\ell]^{[k]}x^{\ell+k}\otimes y^{r-k}\\
&= \frac{[\ell]^{[k]}}{2^k}\sum_{t=0}^{k}\frac{r!}{t!(r-k)!(k-t)!}(-1)^t x^{\ell+k}\otimes y^{r-k}\\
&= \frac{[\ell]^{[k]}}{2^k}\binom{r}{k}\Big[\sum_{t=0}^{k}\binom{k}{t}(-1)^t\Big]x^{\ell+k}\otimes y^{r-k}\\
&= \frac{[\ell]^{[k]}}{2^k}\binom{r}{k}(1-1)^k x^{\ell+k}\otimes y^{r-k}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\tau_i\circ\tau_i^{-1} = 1_{A\otimes B}$. De même on a aussi $\tau_i^{-1}\circ\tau_i = 1_{B\otimes A}$.

Si i est impair, on a

$$\begin{aligned}
\tau_i^{-1}\circ\tau_i(y^r\otimes x^\ell) &= \tau_i^{-1}\Big(\sum_{t=0}^{r}\binom{r}{t}\frac{1}{2^t}[\ell+1]^{[t]}x^{\ell+t}\otimes y^{r-t}\Big)\\
&= \sum_{t=0}^{r}\sum_{s=0}^{r-t}\binom{r}{t}\binom{r-t}{s}\frac{(-1)^s}{2^{t+s}}[\ell+1]^{[t]}[\ell+t+1]^{[s]}x^{\ell+t+s}\otimes y^{r-t-s}\\
&= \sum_{k=0}^{r}\left(\sum_{s+t=k}\binom{r}{t}\binom{r-t}{s}\frac{(-1)^s}{2^{t+s}}[\ell+1]^{[t]}[\ell+t+1]^{[s]}\right)x^{\ell+k}\otimes y^{r-k}\\
&= x^\ell\otimes y^r + \sum_{k=1}^{r}\left(\sum_{t=0}^{k}\binom{r}{t}\binom{r-t}{k-t}\frac{(-1)^{k-t}}{2^k}[\ell+1]^{[k]}\right)x^{\ell+k}\otimes y^{r-k}.
\end{aligned}$$

Pour tout $k>0$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{t=0}^{k}\binom{r}{t}\binom{r-t}{k-t}\frac{(-1)^{k-t}}{2^k}[\ell+1]^{[k]}x^{\ell+k}\otimes y^{r-k} &= \frac{[\ell+1]^{[k]}}{2^k}\sum_{t=0}^{k}\binom{r}{t}\binom{r-t}{k-t}(-1)^{k-t}x^{\ell+k}\otimes y^{r-k}\\
&= \frac{[\ell+1]^{[k]}}{2^k}\binom{r}{k}\Big[\sum_{t=0}^{k}\binom{k}{t}(-1)^{k-t}\Big]x^{\ell+k}\otimes y^{r-k}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Donc, $\tau_i^{-1}\circ\tau_i = 1_{B\otimes A}$. De même, on a aussi $\tau_i\circ\tau_i^{-1} = 1_{A\otimes B}$. D'où τ_i est bien bijective.
(2) Vérifions maintenant que τ_i satisfait les conditions (7.1) et (7.2) : d'abord, remarquons

que si i est pair alors les deux conditions sont bien vérifiées comme τ est un twist. Si i est impair, on a d'une part,

$$\begin{aligned}\tau_i(m_B\otimes 1)(y^{r_1}\otimes y^{r_2}\otimes x^\ell) &= \tau_i(y^{r_1+r_2}\otimes x^\ell)\\ &= \sum_{t=0}^{r_1+r_2}\binom{r_1+r_2}{t}\frac{1}{2^t}[\ell+1]^{[t]}x^{\ell+t}\otimes y^{r_1+r_2-t}.\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}&(1\otimes m_B)(\tau_i\otimes 1)(1\otimes\tau_i)(y^{r_1}\otimes y^{r_2}\otimes x^\ell)\\ &= (1\otimes m_B)(\tau_i\otimes 1)\Big(y^{r_1}\otimes\sum_{k=0}^{r_2}\binom{r_2}{k}\frac{1}{2^k}[\ell+1]^{[k]}x^{\ell+k}\otimes y^{r_2-k}\Big)\\ &= (1\otimes m_B)\Big(\sum_{k=0}^{r_2}\sum_{s=0}^{r_1}\binom{r_2}{k}\binom{r_1}{s}\frac{1}{2^{k+s}}[\ell+1]^{[k]}[\ell+k+1]^{[s]}x^{\ell+k+s}\otimes y^{r_1-s}\otimes y^{r_2-k}\Big)\\ &= \sum_{k=0}^{r_2}\sum_{s=0}^{r_1}\binom{r_2}{k}\binom{r_1}{s}\frac{1}{2^{k+s}}[\ell+1]^{[k]}[\ell+k+1]^{[s]}x^{\ell+k+s}\otimes y^{r_1-s+r_2-k}\\ &= \sum_{t=0}^{r_1+r_2}\Big[\sum_{s+k=t}\binom{r_2}{k}\binom{r_1}{s}\frac{1}{2^{s+k}}[\ell+1]^{[k]}[\ell+k+1]^{[s]}\Big]x^{\ell+t}\otimes y^{r_1+r_2-t}\\ &= \sum_{t=0}^{r_1+r_2}\Big[\sum_{k=0}^{t}\binom{r_2}{k}\binom{r_1}{t-k}\frac{1}{2^t}[\ell+1]^{[k]}[\ell+k+1]^{[t-k]}\Big]x^{\ell+t}\otimes y^{r_1+r_2-t}.\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}[\ell+1]^{[k]}[\ell+k+1]^{[s]} &= \prod_{i=0}^{k-1}(\ell+1+i).\prod_{j=0}^{s-1}(\ell+k+1+j)\\ &= \prod_{i=0}^{k-1}(\ell+1+i).\prod_{i=k}^{s+k-1}(\ell+i+1)\\ &= \prod_{i=0}^{s+k-1}(\ell+i+1)\\ &= [\ell+1]^{[k+s]}.\end{aligned}$$

On vérifie ensuite que $\sum_{k=0}^{t}\binom{r_2}{k}\binom{r_1}{t-k} = \binom{r_2+r_1}{t}$ par récurrence sur r_1. Par convention, $\binom{n}{k}=0$ si $k<0$ ou $k>n$,

- $\star$ Si $r_1=0$, c'est évident.
- $\star$ Si $r_1=1$, on a

$$\binom{r_2}{t}+\binom{r_2}{t-1}=\binom{r_2+1}{t}\quad\text{(formule de Pascal)}$$

- $\star$ Supposons que le résultat est vrai au rang $r_1\geq 1$. On a

$$
\begin{aligned}
\binom{r_1+r_2+1}{t} &= \binom{r_1+r_2}{t} + \binom{r_1+r_2}{t-1} \\
&= \sum_{k=0}^{t} \binom{r_2}{k}\binom{r_1}{t-k} + \sum_{k=0}^{t-1} \binom{r_2}{k}\binom{r_1}{t-k-1} \quad \text{(hypothèse de récurrence)} \\
&= \sum_{k=0}^{t-1} \binom{r_2}{k}\left[\binom{r_1}{t-k} + \binom{r_1}{t-k-1}\right] + \binom{r_2}{t} \\
&= \sum_{k=0}^{t-1} \binom{r_2}{k}\binom{r_1+1}{t-k} + \binom{r_2}{t} \\
&= \sum_{k=0}^{t} \binom{r_2}{k}\binom{r_1+1}{t-k}.
\end{aligned}
$$

Ainsi,

$$
(1\otimes m_B)(\tau_i\otimes 1)(1\otimes\tau_i)(y^{r_1}\otimes y^{r_2}\otimes x^{\ell}) = \sum_{t=0}^{r_1+r_2} \binom{r_1+r_2}{t}\frac{1}{2^t}[\ell+1]^{[t]}x^{\ell+t}\otimes y^{r_1+r_2-t}
$$

et donc la condition (7.1) est bien vérifiée.

On vérifie maintenant la condition (7.2) : d'abord,

$$
\begin{aligned}
\tau_i(1\otimes m_A)(y^r\otimes x^{\ell_1}\otimes x^{\ell_2}) &= \tau_i(y^r\otimes x^{\ell_1+\ell_2}) \\
&= \sum_{t=0}^{r}\binom{r}{t}\frac{1}{2^t}[\ell_1+\ell_2+1]^{[t]}x^{\ell_1+\ell_2+t}\otimes y^{r-t}.
\end{aligned}
$$

Ensuite,

$$
\begin{aligned}
&(m_A\otimes 1)(1\otimes\tau_i)(\tau\otimes 1)(y^r\otimes x^{\ell_1}\otimes x^{\ell_2}) \\
&= (m_A\otimes 1)(1\otimes\tau_i)\Big(\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}\frac{1}{2^k}[\ell_1]^{[k]}x^{\ell_1+k}\otimes y^{r-k}\otimes x^{\ell_2}\Big) \\
&= (m_A\otimes 1)\Big(\sum_{k=0}^{r}\sum_{s=0}^{r-k}\binom{r}{k}\binom{r-k}{s}\frac{1}{2^{k+s}}[\ell_1]^{[k]}[\ell_2+1]^{[s]}x^{\ell_1+k}\otimes x^{\ell_2+s}\otimes y^{r-k-s}\Big) \\
&= \sum_{t=0}^{r}\Big[\sum_{s+k=t}\binom{r}{k}\binom{r-k}{s}\frac{1}{2^{s+k}}[\ell_1]^{[k]}[\ell_2+1]^{[s]}\Big]x^{\ell_1+\ell_2+t}\otimes y^{r-t} \\
&= \sum_{t=0}^{r}\Big[\sum_{k=0}^{t}\binom{r}{k}\binom{r-k}{t-k}\frac{1}{2^t}[\ell_1]^{[k]}[\ell_2+1]^{[t-k]}\Big]x^{\ell_1+\ell_2+t}\otimes y^{r-t}.
\end{aligned}
$$

Pour t fixé, on a alors que

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{t}\binom{r}{k}\binom{r-k}{t-k}[\ell_1]^{[k]}[\ell_2+1]^{[t-k]} &= \sum_{k=0}^{t}\frac{r!}{k!(r-t)!(t-k)!}[\ell_1]^{[k]}[\ell_2+1]^{[t-k]} \\
&= \binom{r}{t}\sum_{k=0}^{t}\binom{t}{k}[\ell_1]^{[k]}[\ell_2+1]^{[t-k]} \\
&= \binom{r}{t}[\ell_1+\ell_2+1]^{[t]} \quad \text{(d'après le lemme 7.4).}
\end{aligned}
$$

Ainsi, la condition (7.2) est bien vérifiée.
(3) On regarde le diagramme suivant :

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & \xrightarrow{1\otimes x.} & B\otimes A & \xrightarrow{1\otimes x^{p-1}.} & B\otimes A & \xrightarrow{1\otimes x.} & B\otimes A & \xrightarrow{1\otimes\varepsilon} & B\otimes k & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\tau_2} & & \downarrow{\scriptstyle\tau_1} & & \downarrow{\scriptstyle\tau_0=\tau} & & \downarrow{\scriptstyle\cong} & & \\
\cdots & \xrightarrow{x.\otimes 1} & A\otimes B & \xrightarrow{x^{p-1}.\otimes 1} & A\otimes B & \xrightarrow{x.\otimes 1} & A\otimes B & \xrightarrow{\varepsilon\otimes 1} & k\otimes B & \longrightarrow & 0.
\end{array}
$$

- Si i est pair alors $i+1$ est impair, on a donc

$$
\begin{aligned}
\tau_i(1\otimes x.)(y^r\otimes x^\ell) &= \tau(y^r\otimes x^{\ell+1})\\
&= \sum_{t=0}^{r}\frac{1}{2^t}\binom{r}{t}[\ell+1]^{[t]}x^{\ell+t+1}\otimes y^{r-t},
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
(x.\otimes 1)\tau_{i+1}(y^r\otimes x^\ell) &= (x.\otimes 1)\Big(\sum_{t=0}^{r}\frac{1}{2^t}\binom{r}{t}[\ell+1]^{[t]}x^{\ell+t}\otimes y^{r-t}\Big)\\
&= \sum_{t=0}^{r}\frac{1}{2^t}\binom{r}{t}[\ell+1]^{[t]}x^{\ell+t+1}\otimes y^{r-t}.
\end{aligned}
$$

- Si i est impair alors $i+1$ est pair, on a donc

$$
\begin{aligned}
\tau_i(1\otimes x^{p-1}.)(y^r\otimes x^\ell) &= \tau_i(y^r\otimes x^{\ell+p-1})\\
&= \begin{cases} 0, & \text{si } \ell\geq 1\\ \sum_{t=0}^{r}\binom{r}{t}\frac{1}{2^t}[p]^{[t]}x^{p-1+t}\otimes y^{r-t} & \text{si } \ell=0.\end{cases}\\
&= \begin{cases} 0, & \text{si } \ell\geq 1\\ x^{p-1}\otimes y^r & \text{si } \ell=0.\end{cases}
\end{aligned}
$$

(les termes dans la somme sont nuls, sauf lorsque $t=0$)

et

$$
\begin{aligned}
(x^{p-1}.\otimes 1)\tau_{i+1}(y^r\otimes x^\ell) &= (x^{p-1}.\otimes 1)\Big(\sum_{t=0}^{r}\frac{1}{2^t}\binom{r}{t}[\ell]^{[t]}x^{\ell+t}\otimes y^{r-t}\Big)\\
&= \begin{cases} 0, & \text{si } \ell\geq 1\\ x^{p-1}\otimes y^r & \text{si } \ell=0.\end{cases}
\end{aligned}
$$

Finalement, le diagramme ci-dessus est bien commutatif donc $\tau_\bullet$ est un morphisme de chaînes qui est un relèvement de τ. Ce qui achève la preuve. □

Lemme 7.5. *L'espace vectoriel $P_i^A(\mathbb{K})\otimes P_j^B(\mathbb{K}) = A\otimes B$ est un $(A\otimes_\tau B)$-module libre de rang 1, engendré par $1\otimes 1$.*

Démonstration.

Soit $\varphi : A \otimes_\tau B \to A \otimes B = P_i^A(\mathbb{K}) \otimes P_j^B(\mathbb{K})$ définie par :

$$\varphi(x^l \otimes y^r) = \begin{cases} x^l \otimes y^r & \text{si } i \text{ est pair} \\ \sum_{t=0}^r \binom{r}{t} \frac{t!}{2^t} x^{l+t} \otimes y^{r-t} & \text{si } i \text{ est impair.} \end{cases}$$

Alors φ est un morphisme de $(A \otimes_\tau B)$-modules. En effet, remarquons que

$$x^a \otimes y^b = (x \otimes 1)^a (1 \otimes y)^b$$

pour tous $a, b \in \mathbb{N}$. D'abord, on a

$$\begin{aligned} \varphi\big((x \otimes 1).(x^\ell \otimes y^r)\big) &= \varphi(x^{\ell+1} \otimes y^r) \\ &= \begin{cases} x^{\ell+1} \otimes y^r & \text{si } i \text{ est pair} \\ \sum_{t=0}^r \binom{r}{t} \frac{t!}{2^t} x^{\ell+t+1} \otimes y^{r-t} & \text{si } i \text{ est impair,} \end{cases} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (x \otimes 1).\varphi(x^\ell \otimes y^r) &= \begin{cases} (x \otimes 1).(x^\ell \otimes y^r) & \text{si } i \text{ est pair} \\ (x \otimes 1).\big(\sum_{t=0}^r \binom{r}{t} \frac{t!}{2^t} x^{\ell+t} \otimes y^{r-t}\big) & \text{si } i \text{ est impair} \end{cases} \\ &= \begin{cases} x^{\ell+1} \otimes y^r & \text{si } i \text{ est pair} \\ \sum_{t=0}^r \binom{r}{t} \frac{t!}{2^t} x^{\ell+t+1} \otimes y^{r-t} & \text{si } i \text{ est impair.} \end{cases} \\ &= \varphi\big((x \otimes 1).(x^\ell \otimes y^r)\big). \end{aligned}$$

Ensuite, comme $\tau(y \otimes x^\ell) = x^\ell \otimes y + \frac{\ell}{2} x^{\ell+1} \otimes 1$, si i est pair alors

$$\begin{aligned} (1 \otimes y).\varphi(x^\ell \otimes y^r) &= (1 \otimes y).(x^\ell \otimes y^r) \\ &= x^\ell \otimes y^{r+1} + \frac{\ell}{2} x^{\ell+1} \otimes y^r, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \varphi\big((1 \otimes y).(x^\ell \otimes y^r)\big) &= \varphi(x^\ell \otimes y^{r+1} + \frac{\ell}{2} x^{\ell+1} \otimes y^r) \\ &= x^\ell \otimes y^{r+1} + \frac{\ell}{2} x^{\ell+1} \otimes y^r \\ &= (1 \otimes y).\varphi(x^\ell \otimes y^r). \end{aligned}$$

Si i est impair alors

$$\begin{aligned} \varphi\big((1 \otimes y).(x^\ell \otimes y^r)\big) &= \varphi\big(x^\ell \otimes y^{r+1} + \frac{\ell}{2} x^{\ell+1} \otimes y^r\big) \\ &= \sum_{t=0}^{r+1} \binom{r+1}{t} \frac{t\,!}{2^t} x^{\ell+t} \otimes y^{r-t+1} + \sum_{t=0}^{r} \binom{r}{t} \frac{\ell\, t\,!}{2^{t+1}} x^{\ell+1+t} \otimes y^{r-t}, \end{aligned}$$

et

$$
\begin{aligned}
&(1\otimes y).\varphi(x^\ell\otimes y^r) = (1\otimes y).\big(\sum_{t=0}^{r}\binom{r}{t}\frac{t\,!}{2^t}x^{\ell+t}\otimes y^{r-t}\big)\\
&=\sum_{t=0}^{r}\binom{r}{t}\frac{t\,!}{2^t}\big(x^{\ell+t}\otimes y^{r-t+1}+\frac{\ell+t+1}{2}x^{\ell+t+1}\otimes y^{r-t}\big)\\
&=\sum_{t=0}^{r}\binom{r}{t}\frac{t\,!}{2^t}x^{\ell+t}\otimes y^{r-t+1}+\sum_{t=0}^{r}\binom{r}{t}\frac{t\,!}{2^t}\frac{(\ell+t+1)}{2}x^{\ell+t+1}\otimes y^{r-t}\\
&=\sum_{t=0}^{r}\binom{r}{t}\frac{t\,!}{2^t}x^{\ell+t}\otimes y^{r-t+1}+\sum_{t=0}^{r}\binom{r}{t}\frac{\ell\,t\,!}{2^{t+1}}x^{\ell+t+1}\otimes y^{r-t}+\sum_{t=0}^{r}\binom{r}{t}\frac{(t+1)\,!}{2^{t+1}}x^{\ell+t+1}\otimes y^{r-t}\\
&=\sum_{t=1}^{r}\binom{r}{t}\frac{t\,!}{2^t}x^{\ell+t}\otimes y^{r-t+1}+\sum_{t=0}^{r}\binom{r}{t}\frac{\ell\,t\,!}{2^{t+1}}x^{\ell+t+1}\otimes y^{r-t}+\sum_{t=1}^{r}\binom{r}{t-1}\frac{t!}{2^t}x^{\ell+t}\otimes y^{r-t+1}\\
&\qquad\qquad +x^l\otimes y^{r+1}+\frac{(r+1)!}{2^{r+1}}x^{\ell+r+1}\otimes 1\\
&=\sum_{t=1}^{r}\binom{r+1}{t}\frac{t\,!}{2^t}x^{\ell+t}\otimes y^{r-t+1}+\sum_{t=0}^{r}\binom{r}{t}\frac{\ell\,t\,!}{2^{t+1}}x^{\ell+t+1}\otimes y^{r-t}+x^l\otimes y^{r+1}+\frac{(r+1)!}{2^{r+1}}x^{\ell+r+1}\otimes 1\\
&=\sum_{t=0}^{r+1}\binom{r+1}{t}\frac{t\,!}{2^t}x^{\ell+t}\otimes y^{r-t+1}+\sum_{t=0}^{r}\binom{r}{t}\frac{\ell\,t\,!}{2^{t+1}}x^{\ell+t+1}\otimes y^{r-t}\\
&=\varphi\big((1\otimes y).(x^\ell\otimes y^r)\big).
\end{aligned}
$$

Donc φ est un morphisme de $(A\otimes_\tau B)$-modules.

Posons $\varphi^{-1}: A\otimes B\to A\otimes_\tau B$ définie par

$$
\varphi^{-1}(x^l\otimes y^r)=\begin{cases} x^l\otimes y^r & \text{si } i \text{ est pair}\\ x^l\otimes y^r-\frac{r}{2}x^{\ell+1}\otimes y^{r-1} & \text{si } i \text{ est impair.}\end{cases}
$$

- ⋆ Si i est pair, c'est clair que $\varphi\circ\varphi^{-1}=id=\varphi^{-1}\circ\varphi$. Donc φ est bijective.
- ⋆ Si i est impair, alors

$$
\begin{aligned}
\varphi\circ\varphi^{-1}(x^\ell\otimes y^r) &= \varphi\big(x^\ell\otimes y^r-\frac{r}{2}x^{\ell+1}\otimes y^{r-1}\big)\\
&=\sum_{t=0}^{r}\binom{r}{t}\frac{t!}{2^t}x^{\ell+t}\otimes y^{r-t}-\frac{r}{2}\sum_{k=0}^{r-1}\binom{r-1}{k}\frac{k!}{2^k}x^{\ell+1+k}\otimes y^{r-1-k}\\
&=\sum_{t=0}^{r}\binom{r}{t}\frac{t!}{2^t}x^{\ell+t}\otimes y^{r-t}-\frac{r}{2}\sum_{k=1}^{r}\binom{r-1}{k-1}\frac{(k-1)!}{2^{k-1}}x^{\ell+k}\otimes y^{r-k}\\
&=x^\ell\otimes y^r+\sum_{t=1}^{r}\Big[\binom{r}{t}t-\binom{r-1}{t-1}r\Big]\frac{(t-1)!}{2^t}x^{\ell+k}\otimes y^{r-k}\\
&=x^\ell\otimes y^r+\sum_{t=1}^{r}\Big[\frac{r!}{(t-1)!(r-t)!}-\frac{r!}{(t-1)!(r-t)!}\Big]\frac{(t-1)!}{2^t}x^{\ell+k}\otimes y^{r-k}\\
&=x^\ell\otimes y^r.
\end{aligned}
$$

Ainsi, φ est bien bijective et donc un isomorphisme de $(A \otimes_\tau B)$-modules. Le complexe $K_\bullet$ est donc une résolution libre de $\mathbb{K}$ comme $(A \otimes_\tau B)$-module. Pour chaque $i, j \geq 0$, notons $\phi_{i,j} = 1 \otimes 1$ le générateur de $P_i^A(\mathbb{K}) \otimes P_j^B(\mathbb{K})$ comme $A \otimes_\tau B$-module. Alors comme R-module on a :

$$K_n = \bigoplus_{i+j=n} P_i^A(\mathbb{K}) \otimes P_j^B(\mathbb{K}) \cong \bigoplus_{i+j=n} R\phi_{i,j}.$$

□

Remarque 7.6. D'après la formule de φ^{-1}, en particulier, on a

$$\varphi^{-1}(1 \otimes y) = \begin{cases} 1 \otimes y & \text{si } i \text{ est pair} \\ 1 \otimes y^r - \frac{1}{2} x \otimes 1 & \text{si } i \text{ est impair.} \end{cases}$$

$$\varphi^{-1}(1 \otimes y^{p-1}) = \begin{cases} 1 \otimes y^{p-1} & \text{si } i \text{ est pair} \\ 1 \otimes y^{p-1} + \frac{1}{2} x \otimes y^{p-2} & \text{si } i \text{ est impair.} \end{cases}$$

et pour tout i,

$$\varphi^{-1}(x \otimes 1) = x \otimes 1$$
$$\varphi^{-1}(x^{p-1} \otimes 1) = x^{p-1} \otimes 1.$$

Rappelons que les différentielles de ce complexe total sont les $d_n = \sum_{i+j=n} \big(d_i \otimes 1 + (-1)^i 1 \otimes d_j\big)$. Comme $P_i^A(\mathbb{K}) \otimes P_j^B(\mathbb{K})$ est un $A \otimes_\tau B$-module libre de générateur $\phi_{i,j}$ (il est libre de rang 1), on peut écrire l'image de $\phi_{i,j}$ sous les différentielles via l'action de $A \otimes_\tau B$ sur $\phi_{i,j}$, utilisant le φ^{-1} défini précédemment. On a donc :

$$d = \varphi^{-1} \circ \Big(\sum_{i+j=n} d_i \otimes 1 + (-1)^i \otimes d_j \Big) \circ \varphi$$

et

$$d(\phi_{i,j}) = \varphi^{-1} \circ \big(d_i \otimes 1 + (-1)^i \otimes d_j\big) \circ \varphi(\phi_{i,j}).$$

- ◇ Si i, j sont pairs : φ est identité, donc $d(\phi_{i,j}) = x^{p-1}\phi_{i-1,j} + y^{p-1}\phi_{i,j-1}$.
- ◇ Si i, j sont impairs :

$$\begin{aligned} d(\phi_{i,j}) &= \varphi^{-1}\left(x\phi_{i-1,j} - y\phi_{i,j-1}\right) \\ &= x\phi_{i-1,j} - (y - \frac{1}{2}x)\phi_{i,j-1}. \end{aligned}$$

- ◇ Si i est pair et j est impair :

$$\begin{aligned} d(\phi_{i,j}) &= \varphi^{-1}\left(x^{p-1}\phi_{i-1,j} + y\phi_{i,j-1}\right) \\ &= x^{p-1}\phi_{i-1,j} + y\phi_{i,j-1}. \end{aligned}$$

- ◇ Si i est impair et j est pair :

$$\begin{aligned} d(\phi_{i,j}) &= \varphi^{-1}\left(x\phi_{i-1,j} - y^{p-1}\phi_{i,j-1}\right) \\ &= x\phi_{i-1,j} - (y^{p-1} - \frac{1}{2}xy^{p-2})\phi_{i,j-1}. \end{aligned}$$

Conclusion : on obtient finalement,

$$d(\phi_{i,j}) = \begin{cases} x^{p-1}\phi_{i-1,j} + y^{p-1}\phi_{i,j-1} & \text{si } i, j \text{ sont pairs} \\ x^{p-1}\phi_{i-1,j} + y\phi_{i,j-1} & \text{si } i \text{ est pair et } j \text{ est impair} \\ x\phi_{i-1,j} - (y^{p-1} + \frac{1}{2}xy^{p-2})\phi_{i,j-1} & \text{si } i \text{ est impair et } j \text{ est pair} \\ x\phi_{i-1,j} - (y - \frac{1}{2}x)\phi_{i,j-1} & \text{si } i \text{ et } j \text{ sont impairs.} \end{cases}$$

7.3 Résolution pour la bosonisation $R\#KG$

7.3.1 L'action de G sur la résolution pour R

Nous reprenons $\mathbb{K}$ comme un corps de caractéristique $p > 2$ et R, G comme décrits dans la section 7.2. Pour le groupe $G = \langle g \rangle \cong \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$, où q est divisible par p, nous définissons une action de G sur le complexe $K_\bullet$ construit dans la section 7.2, dans le but de former une résolution du produit tensoriel tordu de $K_\bullet$ avec une résolution de $\mathbb{K}$ en tant que $\mathbb{K}G$-module. L'action du groupe nous donnera une application de twist sous laquelle $R\#\mathbb{K}G$ peut être considéré comme un produit tensoriel tordu de R et $\mathbb{K}G$, et nous permettra de former une résolution $Y_\bullet$ du $(R\#\mathbb{K}G)$-module trivial $\mathbb{K}$.

Soit $R = A \otimes_\tau B$ le produit tensoriel tordu avec $A := \mathbb{K}[x]/(x^p)$, $B := \mathbb{K}[y]/(y^p)$ et $\tau : B \otimes A \to A \otimes B$ défini précédemment.

Lemme 7.7. *L'algèbre*

$$\Lambda := \mathbb{K}\langle x, y\rangle \Big/ \left(x^p, y^p, yx - xy - \frac{1}{2}x^2\right)$$

est intègre.

Démonstration.

Posons $\delta : \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}[x]$ l'application $\mathbb{K}$-linéaire définie par

$$\delta(x^\ell) = \ell x^{\ell+1}$$

pour tout $\ell \in \mathbb{N}$. On a, pour tous $\ell, m \in \mathbb{N}$:

$$\delta(x^\ell x^m) = \delta(x^{\ell+m}) = (\ell + m)x^{\ell+m+1}$$

et

$$x^\ell \delta(x^m) + \delta(x^\ell)x^m = mx^\ell x^{m+1} + \ell x^{\ell+1}x^m = (\ell + m)x^{\ell+m+1}.$$

Donc δ est une dérivation en prolongeant par $\mathbb{K}$-linéarité.

On obtient donc une extension de Ore $\mathbb{K}[x][y, id, \delta]$ qui est un $\mathbb{K}[x]$-module libre de base $\{y^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ et le produit vérifie : $yx = xy + x^2$.

Posons ensuite

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \Lambda = \mathbb{K}\langle a, b \mid ba - ab - a^2\rangle & \to & \mathbb{K}[x][y, id, \delta] \\ a & \mapsto & x \\ b & \mapsto & y \end{array}$$

l'unique morphisme d'algèbres obtenu par la propriété universelle. On sait que $\mathbb{K}[x][y, id, \delta]$ est le $\mathbb{K}[x]$-module libre de base $\{y^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ donc $\{x^\ell y^n \mid \ell \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}$ est une $\mathbb{K}$-base.

On voit facilement que les $a^\ell b^n, \ell \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$ engendrent Λ comme $\mathbb{K}$-espace vectoriel. De plus, $\{a^\ell b^n, \ell \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}$ est libre donc $\{a^\ell b^n, \ell \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}$ aussi. Ainsi, $\{a^\ell b^n, \ell \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}$ est une $\mathbb{K}$-base de Λ. Donc φ est un isomorphisme en envoyant une base sur une autre base. Finalement, $\mathbb{K}[x]$ est intègre par [[5], Corollaire I.7.4(b)], donc Λ est intègre. $\square$

Dans notre contexte où $p > 2$ et la relation $yx = xy + \frac{1}{2}x^2$ dans R, on travaillera dans l'algèbre $\Lambda = \mathbb{K}\langle x, y\rangle \Big/ \Big(x^p, y^p, yx - xy - \frac{1}{2}x^2\Big)$ qui est intègre. On a alors les lemmes suivantes dans Λ donc dans R (ici, on enlève le symbole tensoriel $\otimes$ et on écrive xy à la place de $x \otimes y$ dans R) :

Lemme 7.8. *(1) Pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, on a $yx^\ell = x^\ell y + \frac{\ell}{2}x^{\ell+1}$.*

(2) Pour tout $\ell, r \in \mathbb{N}$, on a $y^r x^\ell = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} \frac{[\ell]^{[i]}}{2^i} x^{\ell+i} y^{r-i}$.

(3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \frac{(i+1)!}{2^i} x^i y^{n-i}$.

Démonstration.
1. Montrons que $yx^\ell = x^\ell y + \frac{\ell}{2}x^{\ell+1}$ par récurrence sur ℓ :
   - ⋆ Si $\ell = 0$, c'est trivial. Si $\ell = 1$ on retrouve bien la relation dans R.
   - ⋆ Supposons que le résultat est vrai au rang ℓ, on a maintenant

$$\begin{aligned} yx^{\ell+1} = yx^\ell x &= (x^\ell y + \frac{\ell}{2}x^{\ell+1})x \quad \text{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= x^\ell yx + \frac{\ell}{2}x^{\ell+2} \\ &= x^\ell(xy + \frac{1}{2}x^2) + \frac{\ell}{2}x^{\ell+2} \\ &= x^{\ell+1}y + \frac{\ell+1}{2}x^{\ell+2}. \end{aligned}$$

   Donc on obtient bien le résultat par le principe de récurrence.
2. On montre maintenant que $y^r x^\ell = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} \frac{[\ell]^{[i]}}{2^i} x^{\ell+i} y^{r-i}$ par récurrence sur r :
   - ⋆ Pour $r = 0$, c'est évident. Pour $r = 1$, on retrouve bien la relation (1).
   - ⋆ Supposons que le résultat est vrai au rang r pour tout $\ell \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} y^{r+1}x^l = y(y^r x^l) &= y\Big(\sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} \frac{[\ell]^{[i]}}{2^i} x^{\ell+i} y^{r-i}\Big) \quad \text{(par HDR)} \\ &= \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} \frac{[\ell]^{[i]}}{2^i} yx^{\ell+i} y^{r-i} \\ &= \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} \frac{[\ell]^{[i]}}{2^i} (x^{\ell+i}y + \frac{(\ell+i)}{2} x^{\ell+i+1}) y^{r-i} \quad \text{(par (1))} \\ &= \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} \frac{[\ell]^{[i]}}{2^i} x^{\ell+i} y^{r-i+1} + \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} \frac{[\ell]^{[i]}}{2^i} \frac{(\ell+i)}{2} x^{\ell+i+1} y^{r-i} \\ &= \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} \frac{[\ell]^{[i]}}{2^i} x^{\ell+i} y^{r-i+1} + \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} \frac{[\ell]^{[i+1]}}{2^{i+1}} x^{\ell+i+1} y^{r-i} \\ &= \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} \frac{[\ell]^{[i]}}{2^i} x^{\ell+i} y^{r-i+1} + \sum_{i=1}^{r+1} \binom{r}{i-1} \frac{[\ell]^{[i]}}{2^i} x^{\ell+i} y^{r-i+1} \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \binom{r}{i} \frac{[\ell]^{[i]}}{2^i} x^{\ell+i} y^{r-i+1} + x^\ell y^{r+1} + \frac{[\ell]^{[r+1]}}{2^{r+1}} x^{\ell+r+1}$$
$$= \sum_{i=0}^{r+1} \binom{r}{i} \frac{[\ell]^{[i]}}{2^i} x^{\ell+i} y^{r-i+1}.$$

D'où le résultat.

3. Montrons aussi que $(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \frac{(i+1)!}{2^i} x^i y^{n-i}$ par récurrence sur n :
   - ⋆ Si $n = 0$ et $n = 1$, c'est trivial.
   - ⋆ Supposons que le résultat est vrai au rang n, on a

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)(x+y)^n = (x+y)\Big(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \frac{(i+1)!}{2^i} x^i y^{n-i}\Big) \quad \text{(par HDR)}$$
$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \frac{(i+1)!}{2^i} x^{i+1} y^{n-i} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \frac{(i+1)!}{2^i} y x^i y^{n-i}$$
$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \frac{(i+1)!}{2^i} x^{i+1} y^{n-i} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \frac{(i+1)!}{2^i} (x^i y + \frac{i}{2} x^{i+1}) y^{n-i} \quad \big(\text{par (1)}\big)$$
$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \frac{(i+1)!}{2^i} \frac{i+2}{2} x^{i+1} y^{n-i} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \frac{(i+1)!}{2^i} x^i y^{n-i+1}$$
$$= \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} \frac{(i+1)!}{2^i} x^i y^{n-i+1} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \frac{(i+1)!}{2^i} x^i y^{n-i+1}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left[\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i}\right] \frac{(i+1)!}{2^i} x^i y^{n-i+1} + \frac{(n+2)!}{2^{n+2}} x^{n+1} + y^{n+1}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \binom{n+1}{i} \frac{(i+1)!}{2^i} x^i y^{n-i+1} + \frac{(n+2)!}{2^{n+2}} x^{n+1} + y^{n+1}$$
$$= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} \frac{(i+1)!}{2^i} x^i y^{n-i+1}.$$

Ainsi, on obtient bien le résultat désiré par le principe de récurrence. □

Lemme 7.9. *On définit*

$$\alpha := -y^{p-2} + \sum_{i=1}^{p-2} (-1)^{i+1} \frac{(i+1)!}{2^{i+1}} x^i y^{p-2-i} \in R.$$

Alors α satisfait les relations suivantes :

(a) $x\alpha = (x+y)^{p-1} - y^{p-1} + \frac{1}{2}x[(x+y)^{p-2} - y^{p-2}]$,

(b) $(x+y)\alpha = -y^{p-1} - \frac{1}{2}xy^{p-2}$,

(c) $\alpha x = (x+y)^{p-1} - y^{p-1}$,

(d) $\alpha(y - \frac{1}{2}x) = -(x+y)^{p-1}$.

Démonstration.
(a) On a :

$$\begin{aligned}
&(x+y)^{p-1} - y^{p-1} + \frac{1}{2}x[(x+y)^{p-2} - y^{p-2}] \\
&= \sum_{i=0}^{p-1} \binom{p-1}{i} \frac{(i+1)!}{2^i} x^i y^{p-1-i} - y^{p-1} + \frac{1}{2}x\Big[\sum_{i=0}^{p-2} \binom{p-2}{i} \frac{(i+1)!}{2^i} x^i y^{p-2-i} - y^{p-2}\Big] \\
&= \sum_{i=1}^{p-1} \binom{p-1}{i} \frac{(i+1)!}{2^i} x^i y^{p-1-i} + \frac{1}{2}x\Big[\sum_{i=1}^{p-2} \binom{p-2}{i} \frac{(i+1)!}{2^i} x^i y^{p-2-i}\Big] \\
&= \sum_{i=1}^{p-1} \binom{p-1}{i} \frac{(i+1)!}{2^i} x^i y^{p-1-i} + \sum_{i=1}^{p-2} \binom{p-2}{i} \frac{(i+1)!}{2^{i+1}} x^{i+1} y^{p-2-i} \\
&= \sum_{i=0}^{p-2} \binom{p-1}{i+1} \frac{(i+2)!}{2^{i+1}} x^{i+1} y^{p-2-i} + \sum_{i=1}^{p-2} \binom{p-2}{i} \frac{(i+1)!}{2^{i+1}} x^{i+1} y^{p-2-i} \\
&= x\left(-y^{p-2} + \sum_{i=1}^{p-2} \Big[\binom{p-1}{i+1} \frac{(i+2)!}{2^{i+1}} + \binom{p-2}{i} \frac{(i+1)!}{2^{i+1}}\Big] x^i y^{p-2-i}\right) \\
&= x\left(-y^{p-2} + \sum_{i=1}^{p-2} \Big[\frac{(p-1)!(i+2)}{(p-i-2)!2^{i+1}} + \frac{(p-2)!(i+1)}{(p-2-i)!2^{i+1}}\Big] x^i y^{p-2-i}\right) \\
&= x\left(-y^{p-2} + \sum_{i=1}^{p-2} \frac{(p-1)!(i+2) - (p-2)!(i+1)(p-1)}{(p-i-2)!2^{i+1}} x^i y^{p-2-i}\right) \quad (\mathrm{car}(\mathbb{K}) = p) \\
&= x\left(-y^{p-2} + \sum_{i=1}^{p-2} \frac{(p-1)!}{(p-i-2)!2^{i+1}} x^i y^{p-2-i}\right) \\
&= x\left(-y^{p-2} + \sum_{i=1}^{p-2} \frac{(p-1)\cdots(p-(i+1))}{2^{i+1}} x^i y^{p-2-i}\right) \\
&= x\left(-y^{p-2} + \sum_{i=1}^{p-2} (-1)^{i+1} \frac{(i+1)!}{2^{i+1}} x^i y^{p-2-i}\right) \\
&= x\alpha.
\end{aligned}$$

(b) On a

$$\begin{aligned}
&(x+y)\alpha = (x+y)\big(-y^{p-2} + \sum_{i=1}^{p-2} (-1)^{i+1} \frac{(i+1)!}{2^{i+1}} x^i y^{p-2-i}\big) \\
&= -xy^{p-2} + \sum_{i=1}^{p-2} (-1)^{i+1} \frac{(i+1)!}{2^{i+1}} x^{i+1} y^{p-2-i} - y^{p-1} + \sum_{i=1}^{p-2} (-1)^{i+1} \frac{(i+1)!}{2^{i+1}} y x^i y^{p-2-i} \\
&= -xy^{p-2} + \sum_{i=1}^{p-2} (-1)^{i+1} \frac{(i+1)!}{2^{i+1}} x^{i+1} y^{p-2-i} - y^{p-1} + \sum_{i=1}^{p-2} (-1)^{i+1} \frac{(i+1)!}{2^{i+1}} (x^i y + \frac{i}{2} x^{i+1}) y^{p-2-i} \\
&= -xy^{p-2} + \sum_{i=1}^{p-2} (-1)^{i+1} \frac{(i+1)!(i+2)}{2^{i+2}} x^{i+1} y^{p-2-i} + \sum_{i=1}^{p-2} (-1)^{i+1} \frac{(i+1)!}{2^{i+1}} x^i y^{p-i-1} - y^{p-1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -xy^{p-2} + \sum_{i=1}^{p-2}(-1)^{i+1}\frac{(i+2)!}{2^{i+2}}x^{i+1}y^{p-2-i} + \sum_{i=1}^{p-2}(-1)^{i+1}\frac{(i+1)!}{2^{i+1}}x^{i}y^{p-i-1} - y^{p-1}\\
&= -xy^{p-2} + \sum_{i=2}^{p-1}(-1)^{i}\frac{(i+1)!}{2^{i+1}}x^{i}y^{p-1-i} + \sum_{i=1}^{p-2}(-1)^{i+1}\frac{(i+1)!}{2^{i+1}}x^{i}y^{p-i-1} - y^{p-1}\\
&= -xy^{p-2} + \frac{1}{2}xy^{p-2} - y^{p-1}\\
&= -y^{p-1} - \frac{1}{2}xy^{p-2}.
\end{aligned}
$$

(c) D'abord on a,

$$
\begin{aligned}
(x+y)\big((x+y)^{p-1} - y^{p-1}\big) &= (x+y)^p - xy^{p-1} - y^p\\
&= \sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}\frac{(i+1)!}{2^i}x^i y^{p-i} - xy^{p-1} - y^p\\
&= y^p - xy^{p-1} - y^p\\
&= -xy^{p-1}.
\end{aligned}
$$

Ensuite,

$$
\begin{aligned}
(x+y)\alpha x &= \big(-y^{p-1} - \frac{1}{2}xy^{p-2}\big)x \quad \text{(d'après (b))}\\
&= -y^{p-1}x - \frac{1}{2}xy^{p-2}x\\
&= -\sum_{i=0}^{p-1}\binom{p-1}{i}\frac{[1]^{[i]}}{2^i}x^{1+i}y^{p-1-i} - \frac{1}{2}x\Big[\sum_{i=0}^{p-2}\binom{p-2}{i}\frac{[1]^{[i]}}{2^i}x^{1+i}y^{p-2-i}\Big]\\
&= -\sum_{i=0}^{p-1}\binom{p-1}{i}\frac{i!}{2^i}x^{1+i}y^{p-1-i} - \sum_{i=0}^{p-2}\binom{p-2}{i}\frac{i!}{2^{i+1}}x^{2+i}y^{p-2-i}\Big]\\
&= -\sum_{i=0}^{p-1}\binom{p-1}{i}\frac{i!}{2^i}x^{1+i}y^{p-1-i} - \sum_{i=1}^{p-1}\binom{p-2}{i-1}\frac{(i-1)!}{2^{i}}x^{1+i}y^{p-1-i}\Big]\\
&= -xy^{p-1} - \sum_{i=1}^{p-1}\Big[\binom{p-1}{i}i! + \binom{p-2}{i-1}(i-1)!\Big]\frac{1}{2^i}x^{i+1}y^{p-i-1}\\
&= -xy^{p-1} - \sum_{i=1}^{p-1}\Big[\frac{(p-1)!}{(p-1-i)!} + \frac{(p-2)!}{(p-i-1)!}\Big]\frac{1}{2^i}x^{i+1}y^{p-i-1}\\
&= -xy^{p-1} - \sum_{i=1}^{p-1}\Big[\frac{(p-1)!}{(p-1-i)!} - \frac{(p-2)!(p-1)}{(p-i-1)!}\Big]\frac{1}{2^i}x^{i+1}y^{p-i-1}\\
&= -xy^{p-1}.
\end{aligned}
$$

Ainsi, $(x+y)\alpha x = (x+y)\big((x+y)^{p-1} - y^{p-1}\big)$ dans $\mathbb{K}\langle x, y\rangle/(yx - xy - \frac{1}{2}x^2)$ qui est intègre. Donc $\alpha x = (x+y)^{p-1} - y^{p-1}$ dans R.

(d) D'une part,

$$\begin{aligned}
(x+y)\alpha(y-\frac{1}{2}x) &= (-y^{p-1}-\frac{1}{2}xy^{p-2})(y-\frac{1}{2}x) && \text{(d'après (b))}\\
&= -y^p-\frac{1}{2}xy^{p-1}-\frac{1}{2}\big(-y^{p-1}-\frac{1}{2}xy^{p-2}\big)x\\
&= -y^p-\frac{1}{2}xy^{p-1}+\frac{1}{2}xy^{p-1} && \text{(d'après la preuve de (c))}\\
&= -y^p.
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
-(x+y)(x+y)^{p-1} &= -(x+y)^p\\
&= -\sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}\frac{(i+1)!}{2^i}x^iy^{p-i} && \text{(d'après le lemme 7.8)}\\
&= -y^p.
\end{aligned}$$

Ainsi, $(x+y)\alpha(y-\frac{1}{2}x) = -(x+y)(x+y)^{p-1}$ dans $\mathbb{K}\langle x,y\rangle/(yx-xy-\frac{1}{2}x^2)$ qui est intègre d'où $\alpha(y-\frac{1}{2}x) = -(x+y)^{p-1}$, ce qui achève la preuve.

□

Rappelons que $G=\langle g\rangle \cong \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ agit sur $V=\mathbb{K}x+\mathbb{K}y$ par

$$^{g}x = x \quad \text{et} \quad ^{g}y = x+y.$$

G agit ensuite sur R en étendant en une action par automorphismes. Par exemple,

$$\begin{aligned}
^{g}(x^2) &= (^{g}x)(^{g}x) = x^2\\
^{g}(xy) &= (^{g}x)(^{g}y) = x(x+y).
\end{aligned}$$

On définit maintenant une action de G sur le complexe $K_\bullet$: d'abord on pose

$$^{g}\phi_{i,j} = \begin{cases} \phi_{i,j} & \text{si } i \text{ est impair}\\ \phi_{i,j}+\phi_{i+1,j-1} & \text{si } i \text{ est pair et } j \text{ est impair}\\ \phi_{i,j}+\alpha\phi_{i+1,j-1} & \text{si } i \text{ et } j \text{ sont pairs.}\end{cases}$$

Ensuite, on prolonge cette action en une action par automorphismes :

$$^{g^s}\phi_{i,j} := {}^{g}\big({}^{g}\cdots({}^{g}\phi_{i,j})\big)$$

et

$$^{g^s}(r\phi_{i,j}) = (^{g^s}r)(^{g^s}\phi_{i,j})$$

pour $r\in R$ et $0\le s<q$. Vérifions que

$$^{g^s}\phi_{i,j} = \begin{cases} \phi_{i,j} & \text{si } i \text{ est impair}\\ \phi_{i,j}+s\phi_{i+1,j-1} & \text{si } i \text{ est pair et } j \text{ est impair}\\ \phi_{i,j}+\big(\sum_{t=0}^{s-1}{}^{g^t}\alpha\big)\phi_{i+1,j-1} & \text{si } i \text{ et } j \text{ sont pairs.}\end{cases}$$

par récurrence sur s :

$\star$ Si i est pair :

$$^{g^s}\phi_{i,j} = {}^{g}\big({}^{g}\cdots({}^{g}\phi_{i,j})\big) = \phi_{i,j}.$$

$\star$ Si i est pair et j est impair : pour $s=2$, on a

$$\begin{aligned} {}^{g^2}\phi_{i,j} &= {}^{g}({}^{g}\phi_{i,j}) \\ &= {}^{g}(\phi_{i,j} + \phi_{i+1,j-1}) \\ &= \phi_{i,j} + \phi_{i+1,j-1} + \phi_{i+1,j-1} \quad \text{(car } i+1 \text{ est impair)} \\ &= \phi_{i,j} + 2\phi_{i+1,j-1}. \end{aligned}$$

Supposons que ${}^{g^{s-1}}\phi_{i,j} = \phi_{i,j} + (s-1)\phi_{i+1,j-1}$, on a

$$\begin{aligned} {}^{g^s}\phi_{i,j} &= {}^{g}\big({}^{g^{s-1}}\phi_{i,j}\big) \\ &= {}^{g}(\phi_{i,j} + (s-1)\phi_{i+1,j-1}) \quad \text{(par HDR)} \\ &= \phi_{i,j} + \phi_{i+1,j-1} + (s-1)\phi_{i+1,j-1} \quad \text{(car } i \text{ est pair et } j \text{ est impair)} \\ &= \phi_{i,j} + s\phi_{i+1,j-1}. \end{aligned}$$

$\star$ Si i et j sont pairs : Pour $s=1$, c'est évident. Pour $s=2$,

$$\begin{aligned} {}^{g^2}\phi_{i,j} &= {}^{g}({}^{g}\phi_{i,j}) \\ &= {}^{g}(\phi_{i,j} + \alpha\phi_{i+1,j-1}) \\ &= \phi_{i,j} + \alpha\phi_{i+1,j-1} + ({}^{g}\alpha)({}^{g}\phi_{i+1,j-1}) \\ &= \phi_{i,j} + \alpha\phi_{i+1,j-1} + ({}^{g}\alpha)\phi_{i+1,j-1} \quad \text{(car } i+1 \text{ est impair)} \\ &= \phi_{i,j}(\alpha + {}^{g}\alpha)\phi_{i+1,j-1}. \end{aligned}$$

Supposons que le résultat est vrai au rang s, on a maintenant,

$$\begin{aligned} {}^{g^{s+1}}\phi_{i,j} &= {}^{g}\big({}^{g^s}\phi_{i,j}\big) \\ &= {}^{g}\Big(\phi_{i,j} + \Big(\sum_{t=0}^{s-1} {}^{g^t}\alpha\Big)\phi_{i+1,j-1}\Big) \\ &= \phi_{i,j} + \alpha\phi_{i+1,j-1} + \Big(\sum_{t=0}^{s-1} {}^{g^{t+1}}\alpha\Big)({}^{g}\phi_{i+1,j-1}) \\ &= \phi_{i,j} + \alpha\phi_{i+1,j-1} + \Big(\sum_{t=1}^{s} {}^{g^t}\alpha\Big)\phi_{i+1,j-1} \\ &= \phi_{i,j} + \Big(\sum_{t=0}^{s} {}^{g^t}\alpha\Big)\phi_{i+1,j-1}. \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient bien le résultat désiré. De plus, on a aussi pour tout $1 \le s \le q$,

$$^{g^{-s}}\phi_{i,j} = \begin{cases} \phi_{i,j} & \text{si } i \text{ est impair} \\ \phi_{i,j} - s\phi_{i+1,j-1} & \text{si } i \text{ est pair et } j \text{ est impair} \\ \phi_{i,j} - \big(\sum_{t=0}^{s} {}^{g^{-t}}\alpha\big)\phi_{i+1,j-1} & \text{si } i \text{ et } j \text{ sont pairs} \end{cases}$$

comme dans tous les cas ${}^{g^s}({}^{g^{-s}}\phi_{i,j}) = \phi_{i,j} = {}^{g^{-s}}({}^{g^s}\phi_{i,j})$. Il nous reste à vérifier que ${}^{g^q}\phi_{i,j} = \phi_{i,j}$:

- ⋆ Si i est impair, c'est évident.
- ⋆ Si i est pair et j est impair, on a ${}^{g^q}\phi_{i,j} = \phi_{i,j} + q\phi_{i,j} = \phi_{i,j}$ car q est divisible par p qui est la caractéristique du corps $\mathbb{K}$.
- ⋆ Si i et j sont pairs, on doit montrer que

$$ {}^{g^q}\phi_{i,j} = \phi_{i,j} + \big(\sum_{t=0}^{q-1} {}^{g^t}\alpha\big)\phi_{i+1,j-1} = \phi_{i,j}. $$

On veut donc avoir $\sum_{t=0}^{q-1} {}^{g^t}\alpha = 0$. Or, d'après le lemme 7.9 (c), on a $\alpha x = (x+y)^{p-1} - y^{p-1}$. On a ainsi,

$$ {}^{g^s}(\alpha x) = {}^{g^s}\big((x+y)^{p-1} - y^{p-1}\big) $$

donc

$$ ({}^{g^s}\alpha)({}^{g^s}x) = \big({}^{g^s}x + {}^{g^s}y\big)^{p-1} - \big({}^{g^s}y\big)^{p-1} $$

et donc

$$ ({}^{g^s}\alpha)x = (x+y+sx)^{p-1} - (y+sx)^{p-1}. $$

Ainsi, en faisant la somme sur tous les $0 \leq s \leq q-1$, on obtient :

$$ \begin{aligned} \big(\sum_{s=0}^{q-1} {}^{g^s}\alpha\big)x &= \sum_{s=0}^{q-1} \big[(x+y+sx)^{p-1} - (y+sx)^{p-1}\big] \\ &= \sum_{s=0}^{q-1}(y+(s+1)x)^{p-1} - \sum_{s=0}^{q-1}(y+sx)^{p-1} \\ &= \sum_{s=1}^{q}(y+sx)^{p-1} - \sum_{s=0}^{q-1}(y+sx)^{p-1} \\ &= (y+qx)^{p-1} - y^{p-1} \\ &= 0. \end{aligned} $$

Donc $\big(\sum_{s=0}^{q-1} {}^{g^s}\alpha\big)x = 0$ dans $\mathbb{K}\langle x,y\rangle/(yx - xy - \frac{1}{2}x^2)$ qui est intègre et donc $\sum_{s=0}^{q-1} {}^{g^s}\alpha = 0$ dans R.

Conclusion : dans tous les cas, on a ${}^{g^q}\phi_{i,j} = \phi_{i,j}$. Donc l'action de G sur le complexe $K_\bullet$ est bien définie.

Lemme 7.10. *Le complexe $K_\bullet$ est G-équivariant.*

Démonstration.

Pour montrer que $K_\bullet$ est G-équivariant, il nous faut vérifier que $d({}^g\phi_{i,j}) = {}^g d(\phi_{i,j})$ pour tous $i, j \geq 0$.

- ⋄ Si i, j sont pairs : d'une part,

$$ \begin{aligned} d({}^g\phi_{i,j}) &= d(\phi_{i,j} + \alpha\phi_{i+1,j-1}) \\ &= x^{p-1}\phi_{i-1,j} + y^{p-1}\phi_{i,j-1} + \alpha\left(x\phi_{i,j-1} - (y - \frac{1}{2}x)\phi_{i+1,j-2}\right) \\ &= x^{p-1}\phi_{i-1,j} + (\alpha x + y^{p-1})\phi_{i,j-1} - \alpha(y - \frac{1}{2}x)\phi_{i+1,j-2} \\ &= x^{p-1}\phi_{i-1,j} + (x+y)^{p-1}(\phi_{i,j-1} + \phi_{i+1,j-2}) \quad \text{(d'après le lemme 7.9 (c) et (d)).} \end{aligned} $$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
{}^g d(\phi_{i,j}) &= {}^g\big(x^{p-1}\phi_{i-1,j} + y^{p-1}\phi_{i,j-1}\big)\\
&= ({}^g x^{p-1})({}^g\phi_{i-1,j}) + ({}^g y^{p-1})({}^g\phi_{i,j-1})\\
&= x^{p-1}\phi_{i-1,j} + (x+y)^{p-1}(\phi_{i,j-1} + \phi_{i+1,j-2}).
\end{aligned}$$

Ainsi, $d({}^g\phi_{i,j}) = {}^g d(\phi_{i,j})$ pour i, j pairs.

◇ Si i est pair et j est impair :

$$\begin{aligned}
d({}^g\phi_{i,j}) &= d\big(\phi_{i,j} + \phi_{i+1,j-1}\big)\\
&= x^{p-1}\phi_{i-1,j} + y\phi_{i,j-1} + x\phi_{i,j-1} - (y^{p-1} + \frac{1}{2}xy^{p-2})\phi_{i+1,j-2}\\
&= x^{p-1}\phi_{i-1,j} + (x+y)\phi_{i,j-1} + (x+y)\alpha\phi_{i+1,j-2} \quad \text{(par le lemme 7.9 (c))}\\
&= x^{p-1}\phi_{i-1,j}) + (x+y)(\phi_{i,j-1} + \alpha\phi_{i+1,j-2}),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
{}^g d(\phi_{i,j}) &= {}^g\big(x^{p-1}\phi_{i-1,j} + y\phi_{i,j-1}\big)\\
&= ({}^g x^{p-1})({}^g\phi_{i-1,j}) + ({}^g y)({}^g\phi_{i,j-1})\\
&= x^{p-1}\phi_{i-1,j} + (x+y)(\phi_{i,j-1} + \alpha\phi_{i+1,j-2}).
\end{aligned}$$

◇ Si i est impair et j est pair :

$$d({}^g\phi_{i,j}) = d\big(\phi_{i,j}\big) = x\phi_{i-1,j} - (y^{p-1} + \frac{1}{2}xy^{p-2})\phi_{i,j-1},$$

et

$$\begin{aligned}
{}^g d(\phi_{i,j}) &= {}^g\big(x\phi_{i-1,j} - (y^{p-1} + \frac{1}{2}xy^{p-2})\phi_{i,j-1}\big)\\
&= x({}^g\phi_{i-1,j}) - {}^g(y^{p-1} + \frac{1}{2}xy^{p-2})({}^g\phi_{i,j-1})\\
&= x(\phi_{i-1,j} + \alpha\phi_{i,j-1}) - [(x+y)^{p-1} + \frac{1}{2}x(x+y)^{p-2}]\phi_{i,j-1}\\
&= x\phi_{i-1,j} + x\alpha\phi_{i,j-1} - (x\alpha + y^{p-1} + \frac{1}{2}xy^{p-2})\phi_{i,j-1} \quad \text{(d'après le lemme 7.9 (a))}\\
&= x\phi_{i-1,j} - (y^{p-1} + \frac{1}{2}xy^{p-2})\phi_{i,j-1}.
\end{aligned}$$

◇ Si i, j sont impairs :

$$d({}^g\phi_{i,j}) = d\big(\phi_{i,j}\big) = x\phi_{i-1,j} - (y - \frac{1}{2}x)\phi_{i,j-1},$$

et

$$\begin{aligned}
{}^g d(\phi_{i,j}) &= {}^g\big(x\phi_{i-1,j} - (y - \frac{1}{2}x)\phi_{i,j-1}\big)\\
&= x(\phi_{i-1,j} + \phi_{i,j-1}) - \frac{1}{2}x\phi_{i,j-1} - y\phi_{i,j-1}\\
&= x\phi_{i-1,j} - (y - \frac{1}{2}x)\phi_{i,j-1}.
\end{aligned}$$

Ainsi, dans tous les cas, ${}^g d(\phi_{i,j}) = d({}^g\phi_{i,j})$ pour tous $i, j \geq 0$ et $g \in G$. D'où le résultat. □

7.3.2 Résolution pour la bosonisation $R\#\mathbb{K}G$

On utilise l'action définie dans la sous-section 1.4.1 pour construire un produit tensoriel tordu de résolutions de $\mathbb{K}$ comme $R\#\mathbb{K}G$-module. Rappelons que la multiplication de $R\#\mathbb{K}G$ est définie par $(r\#g)(s\#h) = r(g.s)\#gh$ pour tous $r, s \in R$ et $g, h \in G$. Le smash-produit $R\#\mathbb{K}G$ est le produit tensoriel tordu $R \otimes_{\tau'} \mathbb{K}G$, où $\tau' : \mathbb{K}G \otimes R \to R \otimes \mathbb{K}G$ est définie par : $\tau'(g^s \otimes r) = g^s.r \otimes g^s$ pour $r \in R$ et $g \in G$. En effet, posons $A = R$ et $B = \mathbb{K}G$,

$$\begin{aligned} i_A : A &\hookrightarrow R\#\mathbb{K}G \\ r &\mapsto r\#1 \end{aligned} \qquad \textit{et} \qquad \begin{aligned} i_B : B &\hookrightarrow R\#\mathbb{K}G \\ g^s &\mapsto 1\#g^s \end{aligned}$$

Ce sont des morphismes d'algèbres injectifs. Soit

$$\begin{aligned} \phi : R \otimes \mathbb{K}G &\to R\#\mathbb{K}G \\ r \otimes g^s &\mapsto i_A(r)i_B(g^s) = (r\#1)(1\#g^s) = r\#g^s \end{aligned}$$

en envoyant une base sur une autre base, ϕ est bien un isomorphisme d'espaces vectoriels (ϕ est l'identité sur les espaces vectoriels). Ainsi, $R\#\mathbb{K}G$ est un produit tensoriel tordu de R et $\mathbb{K}G$ avec le twist :

$$\tau' : \mathbb{K}G \otimes R \xrightarrow{m_{R\#\mathbb{K}G}} R\#\mathbb{K}G \xrightarrow{\phi^{-1}} R \otimes \mathbb{K}G$$

donné par $\tau'(g^s \otimes r) = \phi^{-1}\big((1\#g^s)(r\#1)\big) = {}^{g^s}r \otimes g^s$. De plus, τ' est bien bijective d'inverse τ'^{-1} défini par

$$\tau'^{-1}(r \otimes g^s) = g^s \otimes {}^{g^{-s}}r$$

pour tous $s \in [\![0, p-1]\!]$ et $r \in R$.

Théorème 7.11. *Soit $P_\bullet^{\mathbb{K}G}(\mathbb{K})$ la résolution libre du $\mathbb{K}G$-module trivial $\mathbb{K}$:*

$$P_\bullet^{\mathbb{K}G}(\mathbb{K}) : \cdots \xrightarrow{(\sum_{s=0}^{q-1} g^s).} \mathbb{K}G \xrightarrow{(g-1).} \mathbb{K}G \xrightarrow{(\sum_{s=0}^{q-1} g^s).} \mathbb{K}G \xrightarrow{(g-1).} \mathbb{K}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{K} \longrightarrow 0$$

où $\varepsilon(g) = 1$. Considérons la résolution libre $K_\bullet$ de $\mathbb{K}$ comme R-module qui a été construite dans la section 7.2. Pour tous $i, j \geq 0$, posons $Y_{i,j} = K_i \otimes P_j^{\mathbb{K}G}(\mathbb{K})$, alors $Y_\bullet := Tot(K_\bullet \otimes P_\bullet^{\mathbb{K}G}(\mathbb{K}))$ est une résolution libre du $(R\#\mathbb{K}G)$-module $\mathbb{K}$.

Pour démontrer ce théorème, commençons d'abord par le lemme suivant :

Lemme 7.12. *Soit $\tau'_n : \mathbb{K}G \otimes K_n \to K_n \otimes \mathbb{K}G$ donnée par l'action de G sur $K_\bullet$: pour $h \in \mathbb{K}G$ et $r \in R$,*

$$\tau'_{i+j}(h \otimes r\phi_{i,j}) = {}^h(r\phi_{i,j}) \otimes h \text{ et } \tau'_0 = \tau'$$

Alors $K_\bullet$ est compatible avec τ' via les τ'_n.

Démonstration.

Rappelons que les $K_n = \oplus_{i+j=n} R\phi_{i,j}$ forment une résolution libre de R-modules de $\mathbb{K}$.

D'abord, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, τ'_n commute avec la multiplication de $\mathbb{K}G$: soient $h, k \in kG$ et $r \in R$,

$$\tau'_{i+j}(m_{\mathbb{K}G} \otimes 1)(h \otimes k \otimes r\phi_{i,j}) = \tau'_{i+j}(hk \otimes r\phi_{i,j}) = {}^{hk}(r\phi_{i,j}) \otimes hk.$$

et

$$\begin{aligned}(1\otimes m_{\mathbb{K}G})(\tau'_{i+j}\otimes 1)(1\otimes \tau'_{i+j})(h\otimes k\otimes r\phi_{i,j}) &= (1\otimes m_{\mathbb{K}G})(\tau'_{i+j}\otimes 1)\big(h\otimes {}^{k}(r\phi_{i,j})\otimes k\big)\\ &= (1\otimes m_{\mathbb{K}G})\left({}^{h}({}^{k}(r\phi_{i,j}))\otimes h\otimes k\right)\\ &= {}^{hk}(r\phi_{i,j})\otimes hk.\end{aligned}$$

Ainsi, on a bien $\tau'_{i+j}(m_{\mathbb{K}G}\otimes 1) = (1\otimes m_{\mathbb{K}G})(\tau'_{i+j}\otimes 1)(1\otimes\tau'_{i+j})$ sur $\mathbb{K}G\otimes\mathbb{K}G\otimes K_n$ par linéarité.

Ensuite, τ'_n commute avec la structure de R-module sur K_n : soient $h\in\mathbb{K}G$ et $r,s\in R$,

$$\tau'_{i+j}(1\otimes\rho_{R,K_n})(h\otimes r\otimes s\phi_{i,j}) = \tau'_{i+j}(h\otimes rs\phi_{i,j}) = {}^{h}(rs\phi_{i,j})\otimes h.$$

et

$$\begin{aligned}(\rho_{R,K_n}\otimes 1)(1\otimes\tau'_{i+j})(\tau'\otimes 1)(h\otimes r\otimes s\phi_{i,j}) &= (\rho_{R,K_n}\otimes 1)(1\otimes\tau'_{i+j})({}^{h}r\otimes h\otimes s\phi_{i,j})\\ &= (\rho_{R,K_n}\otimes 1)({}^{h}r\otimes {}^{h}(s\phi_{i,j})\otimes h)\\ &= {}^{h}(rs\phi_{i,j})\otimes h.\end{aligned}$$

où ρ_{R,K_n} est la struture de R-module sur K_n.

Enfin, $\tau'_\bullet$ est un morphisme de chaînes qui est un relèvement de τ' : on peut voir facilement que K_n est un R-module compatible avec τ' et $\mathbb{K}G$ est bien un $\mathbb{K}G$-module compatible avec τ'. Donc $K_n\otimes\mathbb{K}G$ est un $R\otimes_{\tau'}\mathbb{K}G = R\#\mathbb{K}G$-module. De même, $\mathbb{K}G\otimes K_n$ est aussi un $\mathbb{K}G\otimes_{\tau'^{-1}} R$-module et donc un $(R\otimes_{\tau'}\mathbb{K}G)$-module. En utilisant (5.1) et (5.2), on voit aussi que τ'_n est un morphisme de $(R\otimes_{\tau'}\mathbb{K}G)$-modules. Ainsi, pour montrer que $\tau'_\bullet$ est un morphisme de chaînes, il nous suffit de vérifier que $\tau'_{i+j-1}(1\otimes d) = (d\otimes 1)(\tau'_{i+j})$ sur les éléments de la forme $g\otimes\phi_{i,j}$. Remarquons que

$$\tau'_{i+j}(g\otimes\phi_{i,j}) = \begin{cases}\phi_{i,j}\otimes g & \text{si } i \text{ est impair}\\ (\phi_{i,j}+\phi_{i+1,j-1})\otimes g & \text{si } i \text{ est pair et } j \text{ est impair}\\ (\phi_{i,j}+\alpha\phi_{i+1,j-1})\otimes g & \text{si } i \text{ et } j \text{ sont pairs}\end{cases}$$

pour $s\in[\![0;p-1]\!]$ et $r\in R$.

◇ Si i,j sont pairs, d'une part

$$\begin{aligned}\tau'_{i+j-1}(1\otimes d)(g\otimes\phi_{i,j}) &= \tau'_{i+j-1}(g\otimes x^{p-1}\phi_{i-1,j} + g\otimes y^{p-1}\phi_{i,j-1})\\ &= x^{p-1}\phi_{i-1,j}\otimes g + \big({}^{g}y^{p-1}\phi_{i,j-1} + {}^{g}y^{p-1}\phi_{i+1,j-2}\big)\otimes g.\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}&(d\otimes 1)\tau'_{i+j}(g\otimes\phi_{i,j}) = (d\otimes 1)\big((\phi_{i,j}+\alpha\phi_{i+1,j-1})\otimes g\big)\\ &= \big(x^{p-1}\phi_{i-1,j}+y^{p-1}\phi_{i,j-1}\big)\otimes g + \alpha\big(x\phi_{i,j-1} - (y-\frac{1}{2}x)\phi_{i+1,j-2}\big)\otimes g\\ &= \big(x^{p-1}\phi_{i-1,j}+y^{p-1}\phi_{i,j-1}\big)\otimes g + \big((x+y)^{p-1}) - y^{p-1}\big)\phi_{i,j-1}\otimes g + (x+y)^{p-1}\phi_{i+1,j-2}\otimes g\end{aligned}$$

(d'après le lemme 7.9 (c) et (d))

$$\begin{aligned}&= x^{p-1}\phi_{i-1,j}\otimes g + (x+y)^{p-1}\phi_{i,j-1}\otimes g + (x+y)^{p-1}\phi_{i+1,j-2}\otimes g\\ &= x^{p-1}\phi_{i-1,j}\otimes g + \big({}^{g}y^{p-1}\phi_{i,j-1} + {}^{g}y^{p-1}\phi_{i+1,j-2}\big)\otimes g.\end{aligned}$$

◇ Si i et j sont impairs, on a

$$\begin{aligned}\tau'_{i+j-1}(1\otimes d)(g\otimes\phi_{i,j}) &= \tau'_{i+j-1}\big(g\otimes x\phi_{i-1,j} - g\otimes(y-\frac{1}{2}x)\phi_{i,j-1}\big)\\ &= x(\phi_{i-1,j}+\phi_{i,j-1})\otimes g - \big(x+y-\frac{1}{2}x\big)\phi_{i,j-1}\otimes g\\ &= x\phi_{i-1,j}\otimes g - (y-\frac{1}{2}x)\phi_{i,j-1}\otimes g.\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}&(d\otimes 1)\tau'_{i+j}(g\otimes\phi_{i,j}) = (d\otimes 1)\big(\phi_{i,j}\otimes g\big)\\ &= x\phi_{i-1,j}\otimes g - (y-\frac{1}{2}x)\phi_{i,j-1}\otimes g.\end{aligned}$$

◇ Si i est pair et j est impair :

$$\begin{aligned}\tau'_{i+j-1}(1\otimes d)(g\otimes\phi_{i,j}) &= \tau'_{i+j-1}\big(g\otimes x^{p-1}\phi_{i-1,j} + g\otimes y\phi_{i,j-1}\big)\\ &= x^{p-1}\phi_{i-1,j}\otimes g + (x+y)\big(\phi_{i,j-1}+\alpha\phi_{i+1,j-2}\big)\otimes g.\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}&(d\otimes 1)\tau'_{i+j}(g\otimes\phi_{i,j}) = (d\otimes 1)\big((\phi_{i,j}+\phi_{i+1,j-1})\otimes g\big)\\ &= \big(x^{p-1}\phi_{i-1,j}+y\phi_{i,j-1}\big)\otimes g + \big(x\phi_{i,j-1} - (y^{p-1}+\frac{1}{2}xy^{p-2})\phi_{i+1,j-2}\big)\otimes g\\ &= \big(x^{p-1}\phi_{i-1,j}+y\phi_{i,j-1}\big)\otimes g + \big(x\phi_{i,j-1} + (x+y)\alpha\phi_{i+1,j-2}\big)\otimes g\\ &\text{(d'après le lemme 7.9 (b))}\\ &= x^{p-1}\phi_{i-1,j}\otimes g + (x+y)\big(\phi_{i,j-1}+\alpha\phi_{i+1,j-2}\big)\otimes g.\end{aligned}$$

◇ Si i est impair et j est pair :

$$\begin{aligned}\tau'_{i+j-1}(1\otimes d)(g\otimes\phi_{i,j}) &= \tau'_{i+j-1}\big(g\otimes x\phi_{i-1,j} - g\otimes(y^{p-1}+\frac{1}{2}xy^{p-2})\phi_{i,j-1}\big)\\ &= x\big(\phi_{i-1,j}+\alpha\phi_{i,j-1}\big)\otimes g - \big[(x+y)^{p-1}+\frac{1}{2}x(x+y)^{p-2}\big]\phi_{i,j-1}\otimes g\\ &= x\phi_{i-1,j}\otimes g + \big[x\alpha-(x+y)^{p-1}+\frac{1}{2}x(x+y)^{p-2}\big]\phi_{i,j-1}\otimes g\\ &= x\phi_{i-1,j}\otimes g - \big(y^{p-1}+\frac{1}{2}xy^{p-2}\big)\phi_{i,j-1}\otimes g \quad \text{(d'après le lemme 7.9 (a))}.\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}&(d\otimes 1)\tau'_{i+j}(g\otimes\phi_{i,j}) = (d\otimes 1)\big(\phi_{i,j}\otimes g\big)\\ &= x\phi_{i-1,j}\otimes g - (y^{p-1}+\frac{1}{2}xy^{p-2})\phi_{i,j-1}\otimes g.\end{aligned}$$

Conclusion : dans tous les cas, on retrouve que $\tau'_{i+j-1}(1\otimes d) = (d\otimes 1)\tau'_{i+j}$. D'où $\tau'_\bullet$ est un morphisme de chaînes et donc la résolution $K_\bullet$ est bien compatible avec τ' via τ'_n. □

Démonstration. (**du théorème 7.11**)

C'est clair que $\mathbb{K}$ est compatible avec τ' et $K_\bullet$ est compatible avec τ' d'après le lemme 7.12. Ainsi, le complexe

$$\cdots \to Y_2 \to Y_1 \to Y_0 \to \mathbb{K} \to 0$$

est une suite exacte d'après le lemme 5.7.

Notons ϕ_k le générateur du $\mathbb{K}G$-module libre $P_k^{\mathbb{K}G}(\mathbb{K}) = \mathbb{K}G$. On a, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} Y_n = \bigoplus_{l+k=n} Y_{l,k} &= \bigoplus_{l+k=n} K_l \otimes P_k^{\mathbb{K}G}(\mathbb{K}) \\ &= \bigoplus_{l+k=n} \left(\bigoplus_{i+j=l} R\phi_{i,j} \otimes \mathbb{K}G\phi_k \right) \\ &= \bigoplus_{i+j+k=n} (R \otimes_{\tau'} \mathbb{K}G)(\phi_{i,j} \otimes \phi_k). \end{aligned}$$

Donc $Y_\bullet$ est bien une résolution libre du $(R\#\mathbb{K}G)$-module $\mathbb{K}$. □

Pour chaque $i, j, k \geq 0$, notons $\phi_{i,j,k}$ le générateur $\phi_{i,j} \otimes \phi_k$ de $K_{i+j} \otimes P_k^{\mathbb{K}G}(\mathbb{K})$ comme $(R\#\mathbb{K}G)$-module. Par convention, $\phi_{i,j,k} = 0$ si un parmi i, j, k est négatif. Donc, pour tout $n \geq 0, Y_n = \bigoplus_{i+j+k=n} (R\#\mathbb{K}G)\phi_{i,j,k}$ comme $(R\#\mathbb{K}G)$-module.

On calcule maintenant les différentielles de la résolution $Y_\bullet$ obtenue : rappelons que

$$d(\phi_{i,j,k}) = d(\phi_{i,j}) \otimes \phi_k + (-1)^{i+j}\phi_{i,j} \otimes d(\phi_k)$$

où $d(\phi_{i,j})$ est trouvée dans la démonstration du lemme 7.5.
Remarquons aussi que pour $h \in kG$, $h.\phi_{i,j,k} = {}^h\phi_{i,j} \otimes h.\phi_k$.

- Si i, k sont impairs,

$$\begin{aligned} d(\phi_{i,j,k}) &= d(\phi_{i,j}) \otimes \phi_k + (-1)^{i+j}\phi_{i,j} \otimes (g-1).\phi_{k-1} \\ &= d(\phi_{i,j}) \otimes \phi_k + (-1)^{i+j}\phi_{i,j} \otimes (g.\phi_{k-1} - \phi_{k-1}) \\ &= d(\phi_{i,j}) \otimes \phi_k + (-1)^{i+j}\big(g.({}^{g^{-1}}\phi_{i,j} \otimes \phi_{k-1}) - \phi_{i,j} \otimes \phi_{k-1}\big) \\ &= d(\phi_{i,j}) \otimes \phi_k + (-1)^{i+j}(g.\phi_{i,j,k-1} - \phi_{i,j,k-1}) \quad \text{(car } i \text{ est impair)} \\ &= d(\phi_{i,j}) \otimes \phi_k + (-1)^{i+j}(g-1).\phi_{i,j,k-1} \end{aligned}$$

- Si i est pair et j, k sont impairs,

$$\begin{aligned} d(\phi_{i,j,k}) &= d(\phi_{i,j}) \otimes \phi_k + (-1)^{i+j}\phi_{i,j} \otimes (g-1).\phi_{k-1} \\ &= d(\phi_{i,j}) \otimes \phi_k + (-1)^{i+j}\big(g.({}^{g^{-1}}\phi_{i,j} \otimes \phi_{k-1}) - \phi_{i,j} \otimes \phi_{k-1}\big) \\ &= d(\phi_{i,j}) \otimes \phi_k + (-1)^{i+j}\left(g.\big((\phi_{i,j} - \phi_{i+1,j-1}) \otimes \phi_{k-1}\big) - \phi_{i,j} \otimes \phi_{k-1}\right) \\ &= d(\phi_{i,j}) \otimes \phi_k + (-1)^{i+j}\left((g-1).\phi_{i,j,k-1} - g.\phi_{i+1,j-1,k-1}\right). \end{aligned}$$

- Si i, j sont pairs et k est impair,

$$\begin{aligned} d(\phi_{i,j,k}) &= d(\phi_{i,j}) \otimes \phi_k + (-1)^{i+j}\phi_{i,j} \otimes (g-1).\phi_{k-1} \\ &= d(\phi_{i,j}) \otimes \phi_k + (-1)^{i+j}\big(g.({}^{g^{-1}}\phi_{i,j} \otimes \phi_{k-1}) - \phi_{i,j} \otimes \phi_{k-1}\big) \\ &= d(\phi_{i,j}) \otimes \phi_k + (-1)^{i+j}\left(g.\big((\phi_{i,j} - \alpha\phi_{i+1,j-1}) \otimes \phi_{k-1}\big) - \phi_{i,j} \otimes \phi_{k-1}\right) \\ &= d(\phi_{i,j}) \otimes \phi_k + (-1)^{i+j}\left((g-1).\phi_{i,j,k-1} - \alpha g.\phi_{i+1,j-1,k-1}\right). \end{aligned}$$

- Si i est impair et k est pair,

$$\begin{aligned}
d(\phi_{i,j,k}) &= d(\phi_{i,j}) \otimes \phi_k + (-1)^{i+j}\phi_{i,j} \otimes \big(\sum_{s=0}^{q-1} g^s\big).\phi_{k-1} \\
&= d(\phi_{i,j}) \otimes \phi_k + (-1)^{i+j} \left(\sum_{s=0}^{q-1} g^s.\big({}^{g^{-s}}\phi_{i,j} \otimes \phi_{k-1}\big)\right) \\
&= d(\phi_{i,j}) \otimes \phi_k + (-1)^{i+j}\big(\sum_{s=0}^{q-1} g^s\big).\phi_{i,j,k-1} \quad \text{(car } i \text{ est impair).}
\end{aligned}$$

- Si i, k sont pairs et j est impair,

$$\begin{aligned}
d(\phi_{i,j,k}) &= d(\phi_{i,j}) \otimes \phi_k + (-1)^{i+j}\phi_{i,j} \otimes \big(\sum_{s=0}^{q-1} g^s\big).\phi_{k-1} \\
&= d(\phi_{i,j}) \otimes \phi_k + (-1)^{i+j} \left(\sum_{s=0}^{q-1} g^s.\big({}^{g^{-s}}\phi_{i,j} \otimes \phi_{k-1}\big)\right) \\
&= d(\phi_{i,j}) \otimes \phi_k + (-1)^{i+j} \left(\sum_{s=0}^{q-1} g^s.\big((\phi_{i,j} - s\phi_{i+1,j-1}) \otimes \phi_{k-1}\big)\right) \\
&= d(\phi_{i,j}) \otimes \phi_k + (-1)^{i+j} \left(\big(\sum_{s=0}^{q-1} g^s\big).\phi_{i,j,k-1} - \big(\sum_{s=0}^{q-1} sg^s\big).\phi_{i+1,j-1,k-1}\right).
\end{aligned}$$

- Si i, j, k sont pairs,

$$\begin{aligned}
d(\phi_{i,j,k}) &= d(\phi_{i,j}) \otimes \phi_k + (-1)^{i+j}\phi_{i,j} \otimes \big(\sum_{s=0}^{q-1} g^s\big).\phi_{k-1} \\
&= d(\phi_{i,j}) \otimes \phi_k + (-1)^{i+j} \left(\sum_{s=0}^{q-1} g^s.\big({}^{g^{-s}}\phi_{i,j} \otimes \phi_{k-1}\big)\right) \\
&= d(\phi_{i,j}) \otimes \phi_k + (-1)^{i+j} \left(\sum_{s=0}^{q-1} g^s.\big((\phi_{i,j} - (\sum_{t=0}^{s} {}^{g^{-t}}\alpha)\phi_{i+1,j-1}) \otimes \phi_{k-1}\big)\right) \\
&= d(\phi_{i,j}) \otimes \phi_k + (-1)^{i+j} \left(\big(\sum_{s=0}^{q-1} g^s\big).\phi_{i,j,k-1} - \sum_{s=0}^{q-1} g^s.\big(\sum_{t=0}^{s} {}^{g^{-t}}\alpha\phi_{i+1,j-1,k-1}\big)\right) \\
&= d(\phi_{i,j}) \otimes \phi_k + (-1)^{i+j} \left(\big(\sum_{s=0}^{q-1} g^s\big).\phi_{i,j,k-1} - \sum_{s=0}^{q-1}\big(\sum_{t=0}^{s} {}^{g^{-t}}\alpha\big)g^s\phi_{i+1,j-1,k-1}\right).
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient :

$$d(\phi_{i,j,k}) = d(\phi_{i,j}) \otimes \phi_k$$

$$+ (-1)^{i+j} \begin{cases}
(g-1).\phi_{i,j,k-1} & \text{si } i,k \text{ sont impairs,} \\
(g-1).\phi_{i,j,k-1} - g.\phi_{i+1,j-1,k-1} & \text{si } i \text{ est pair et } j,k \text{ sont impairs,} \\
(g-1).\phi_{i,j,k-1} - \alpha g.\phi_{i+1,j-1,k-1} & \text{si } i,j \text{ sont pairs et } k \text{ est impair,} \\
\big(\sum_{s=0}^{q-1} g^s\big).\phi_{i,j,k-1} & \text{si } i \text{ est impair et } k \text{ est pair,} \\
\big(\sum_{s=0}^{q-1} g^s\big).\phi_{i,j,k-1} - \big(\sum_{s=0}^{q-1} sg^s\big).\phi_{i+1,j-1,k-1} & \text{si } i,k \text{ sont pairs et } j \text{ est impair,} \\
\big(\sum_{s=0}^{q-1} g^s\big).\phi_{i,j,k-1} - \sum_{s=0}^{q-1}(\sum_{t=0}^{s} {}^{g^{-t}}\alpha)g^s\phi_{i+1,j-1,k-1} & \text{si } i,j,k \text{ sont pairs.}
\end{cases}$$

7.3.3 Ext

On a donc trouvé une résolution libre de $\mathbb{K}$ comme $(R\#\mathbb{K}G)$-module :

$$\cdots \longrightarrow Y_2 \xrightarrow{d_2} Y_1 \xrightarrow{d_1} Y_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{K} \longrightarrow 0.$$

En appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}_{R\#\mathbb{K}G}(-,\mathbb{K})$ à la suite

$$\cdots \longrightarrow Y_2 \xrightarrow{d_2} Y_1 \xrightarrow{d_1} Y_0 \longrightarrow 0,$$

on obtient

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{R\#\mathbb{K}G}(Y_0,\mathbb{K}) \xrightarrow{d_1^*} \mathrm{Hom}_{R\#\mathbb{K}G}(Y_1,\mathbb{K}) \xrightarrow{d_2^*} \cdots$$

où $d_i^*(f) = fd_i$ pour $f \in \mathrm{Hom}_{R\#\mathbb{K}G}(Y_{i-1},\mathbb{K})$. Notons que

$$\varepsilon\big(\sum_{s=0}^{q-1} g^s\big) = 0 = \varepsilon\big(\sum_{s=0}^{q-1} sg^s\big) = \varepsilon(g-1)$$

car $\varepsilon(g) = 1$ et q est un multiple de p qui est le caractéristique du corps $\mathbb{K}$. Donc le seul terme dans la formule de $d(\phi_{i,j,k})$ dont le coefficient n'est pas dans $\mathrm{Ker}(\varepsilon)$ est $-g\phi_{i+1,j-1,k-1}$ lorsque i est pair et j,k sont impairs. Soit $u \in \mathrm{Ker}(\varepsilon)$ et $f \in \mathrm{Hom}_{R\#\mathbb{K}G}(Y_n,\mathbb{K})$:

$$f(u\phi_{i,j,k}) = \varepsilon(u)f(\phi_{i,j,k}) = 0.$$

Considérons $(\phi^*_{i,j,k})_{i+j+k=n}$ la base duale du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\oplus_{a+b+c=n}\mathbb{K}\phi_{a,b,c},\mathbb{K}) \cong \mathrm{Hom}_{R\#\mathbb{K}G}(Y_n,\mathbb{K})$, on a

$$\begin{aligned} d^*(\phi^*_{i,j,k})(\phi_{a,b,c}) &= \phi^*_{i,j,k}\big(d(\phi_{a,b,c})\big) \\ &= \phi^*_{i,j,k}\big(g(\phi_{a+1,b-1,c-1})\big) \quad \text{(lorsque } a \text{ est pair, } b,c \text{ sont impairs)} \\ &= \varepsilon(g)\phi^*_{i,j,k}\big(\phi_{a+1,b-1,c-1}\big) \\ &= \delta_{i,a+1}\delta_{j,b-1}\delta_{k,c-1}. \end{aligned}$$

On obtient donc

$$d^*(\phi^*_{i,j,k}) = \begin{cases} \phi^*_{i-1,j+1,k+1} & \text{si } i \text{ est impair et } j,k \text{ sont pairs,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{7.3}$$

Ainsi, les cobords sont toutes les combinaisons linéaires de $\phi^*_{i,j,k}$ avec i pair et j,k impairs.

Or, si $f = \sum \lambda_{i,j,k}\phi^*_{i,j,k} \in \mathrm{Ker}(d^*_{n+1})$, on a

$$\begin{aligned} 0 = d^*_{n+1}(f)(g^s\phi_{a,b,c}) &= d^*_{n+1}\left(\sum \lambda_{i,j,k}\phi^*_{i,j,k}\right)(g^s\phi_{a,b,c}) \\ &= \sum_{i \text{ impair}\,;\, j,k \text{ pairs}} \lambda_{i,j,k}\phi^*_{i-1,j+1,k+1}(g^s\phi_{a,b,c}) \quad \text{(par (7.3))} \\ &= \sum_{i \text{ impair}\,;\, j,k \text{ pairs}} \lambda_{i,j,k}\phi^*_{i-1,j+1,k+1}\varepsilon(g^s)\phi^*(\phi_{a,b,c}) \\ &= \lambda_{a+1,b-1,c-1} \quad \text{si } a \text{ est pair et } b,c \text{ sont impairs.} \end{aligned}$$

Donc $\lambda_{i,j,k} = 0$ lorsque i est impair et j, k sont pairs.

Ainsi, pour $f = \sum \lambda_{i,j,k}\phi^*_{i,j,k} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\left(\oplus_{a+b+c=n}\mathbb{K}\phi_{a,b,c}, \mathbb{K}\right)$ avec $\lambda_{i,j,k} \in \mathbb{K}$, f est un cocycle si et seulement si f est combinaison linéaire de $\phi^*_{i,j,k}$ avec i pair ou j impair ou k impair. f est un cobord si et seulement si f est combinaison linéaire de $\phi^*_{i,j,k}$ avec i pair et j, k impairs. Autrement dit,

$$\mathrm{Ker}(d^*_{n+1}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}\{\phi^*_{i,j,k} \mid i+j+k = n, \text{avec } i \text{ pair ou } j \text{ impair ou } k \text{ impair}\}$$

$$\mathrm{Im}(d^*_n) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}\{\phi^*_{i,j,k} \mid i+j+k = n, \text{avec } i \text{ pair et } j,k \text{ impairs}\}.$$

Conclusion : On a $\mathrm{Ext}^n_{R\#\mathbb{K}G}(\mathbb{K},\mathbb{K}) = \mathrm{Ker}(d^*_{n+1})/\,\mathrm{Im}(d^*_n)$.

Si n est pair et $i + j + k = n$, alors soit i, j, k sont pairs, soit i est pair et j, k sont impairs, soit i est impair et j ou k est impair. Dans tous les cas, $\phi^*_{i,j,k}$ est un cocyle, donc $\mathrm{Ker}(d^*_{n+1}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}\{\phi^*_{i,j,k} \mid i+j+k = n\}$. Ainsi,
$\mathrm{Ext}^n_{R\#\mathbb{K}G}(\mathbb{K},\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}\{\phi^*_{i,j,k} \mid i+j+k = n\} - \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}\{\phi^*_{i,j,k} \mid i \text{ est pair et } j,k \text{ sont impairs}\}$.

On peut voir aussi que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Dim}\ \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}\{\phi^*_{i,j,k} \mid i+j+k = n\} &= \#\{i,j,k \geq 0 \mid i+j+k = n\} \\
&= \#\{i,j \geq 0 \mid i+j \leq n\} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \#\{j \mid 0 \leq j \leq n-i\} \\
&= \sum_{i=0}^{n} (n-i+1) \\
&= \frac{(n+1+1)(n+1)}{2} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2},
\end{aligned}$$

Lorsque i est pair et j, k sont impairs, on remplace i, j, k par $2x$, $2y+1$ et $2z+1$ pour $x, y, z \in \mathbb{N}$. En substituant ces expressions dans l'équation $i + j + k = n$, on obtient :

$$2x + 2y + 1 + 2z + 1 = n$$

donc

$$x + y + z = \frac{n}{2} - 1$$

donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{Dim}\ \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}\{\phi^*_{i,j,k} \mid i \text{ pair, } i,k \text{ impairs}\} &= \#\{i,j \geq 0 \mid i+j \leq \frac{n}{2} - 1\} \\
&= \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \#\{j \mid 0 \leq j \leq \frac{n}{2} - 1 - i\} \\
&= \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \left(\frac{n}{2} - i\right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{(\frac{n}{2}+1)\frac{n}{2}}{2}$$
$$= \frac{n(n+2)}{8},$$

Ainsi, $\mathrm{Dim}\ \mathrm{Ext}^n_{R\#\mathbb{K}G}(\mathbb{K},\mathbb{K}) = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2} - \dfrac{n(n+2)}{8} = \dfrac{(n+2)(3n+4)}{8}$.

Si n est impair et $i+j+k=n$.

- Si i,j,k sont impairs, alors $\phi^*_{i,j,k}$ est un cocyle et il n'y a pas de cobord non nul.
- Si i est pair, alors j ou k est impair. Donc $\phi^*_{i,j,k}$ est aussi un cocycle. Comme j et k ne sont pas tous les deux impairs, il y a pas de cobords.
- Si i est impair, alors j et k sont pairs. Donc $\phi^*_{i,j,k}$ n'est pas un cocycle et il n'y a pas de cobord non nul.

Ainsi, $\mathrm{Ext}^n_{R\#\mathbb{K}G}(\mathbb{K},\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}\{\phi^*_{i,j,k} \mid i+j+k=n\}$
$- \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}\{\phi^*_{i,j,k} \mid i \text{ est impair et } j,k \text{ sont pairs}\}$.
De même, lorsque i est impair, j,k sont pairs, posons $i=2x+1, j=2y$ et $k=2z$ pour $x,y,z \in \mathbb{N}$. L'équation $i+j+k=n$ devient

$$2x+1+2y+2z=n$$

donc

$$x+y+z=\frac{n-1}{2}$$

donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{Dim}\ \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}\{\phi^*_{i,j,k} \mid i \text{ pair, } i,k \text{ impairs}\} &= \#\{i,j \geq 0 \mid i+j \leq \frac{n-1}{2}\} \\
&= \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \#\{j \mid 0 \leq j \leq \frac{n-1}{2} - i\} \\
&= \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{n-1}{2} - i + 1\right) \\
&= \frac{(\frac{n-1}{2}+1+1)(\frac{n-1}{2}+1)}{2} \\
&= \frac{(n+1)(n+3)}{8}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{Dim}\ \mathrm{Ext}^n_{R\#\mathbb{K}G}(\mathbb{K},\mathbb{K}) = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2} - \dfrac{(n+1)(n+3)}{8} = \dfrac{(n+2)(3n+5)}{8}$.

Annexe

On reprend les notations du théorème 4.3 avec $A = k[x_1, \cdots, x_{t-1}; \delta_2, \cdots, \delta_{t-1}]$ l'extension de Ore itérée qui a une résolution libre $P_\bullet(A)$ de A-modules comme dans le théorème 4.3. Soit ϕ_n l'antisymétrisation standard définie dans la démonstration de ce théorème. On veut montrer que $\bar{\phi}_\bullet(A) : P_\bullet(A) \to \overline{Bar}_\bullet(A)$ est un morphisme de chaînes.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\partial_n : \overline{Bar}_n(A) \to \overline{Bar}_{n-1}(A)$ la différentielle définie par $\partial_n = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \partial_n^i$, où

$$\begin{aligned}
&\partial_n^0(1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1) = a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1\\
&\partial_n^n(1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1) = 1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1} \otimes a_n\\
&\partial_n^i(1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1) = 1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1 \quad (1 \leq i \leq n-1)
\end{aligned}$$

pour tous $a_1, \cdots, a_n \in \bar{A}$.

Soit $u \in \bar{A}$. On définit

$$\begin{aligned}
[u, -] :\ & \bar{A} \longrightarrow \bar{A}\\
& a \longmapsto ua - au
\end{aligned}$$

et

$$ad(u) : \overline{Bar}_n(A) \longrightarrow \overline{Bar}_n(A) \text{ avec } ad(u) = \textstyle\sum_{i=1}^{n} ad_i(u), \text{ où}$$

$$ad_i(u)(1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1) = 1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{i-1} \otimes [u, a_i] \otimes a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1.$$

Soit $h_{n+1}(u) : \overline{Bar}_n(A) \longrightarrow \overline{Bar}_{n+1}(A)$ avec $h_{n+1}(u) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i h_{n+1}^i(u)$, où

$$h_{n+1}^i(u)(1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1) = 1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_i \otimes u \otimes a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1.$$

On a alors :

(i) $\partial_{n+1}^i h_{n+1}^j(u) = h_n^{j-1}(u)\partial_n^i$ **si** $0 \leq i < j \leq n$. En effet :

- $\star$ Si $i = 0$ et $j = 1$, on a :

$$\begin{aligned}
\partial_{n+1}^0 h_{n+1}^1(u)(1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1) &= \partial_{n+1}^0(1 \otimes a_1 \otimes u \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1)\\
&= a_1 \otimes u \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
h_n^0(u)\partial_n^0(1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1) &= h_n^0(u)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1)\\
&= a_1 \otimes u \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1.
\end{aligned}$$

- $\star$ Si $0 < i < j \leq n$,

$$\begin{aligned}
\partial_{n+1}^i h_{n+1}^j(u)(1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1) &= \partial_{n+1}^i(1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_j \otimes u \otimes a_{j+1} \otimes \cdots a_n \otimes 1)\\
&= 1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_j \otimes u \otimes a_{j+1} \otimes \cdots a_n \otimes 1,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
h_n^{j-1}(u)\partial_n^i(1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1) &= h_n^{j-1}(u)(1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1)\\
&= 1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_j \otimes u \otimes a_{j+1} \otimes \cdots a_n \otimes 1.
\end{aligned}$$

(a_j est en j-ème place).

(ii) $\partial^i_{n+1}h^j_{n+1}(u) = \partial^i_{n+1}h^{j-1}_{n+1}(u) - ad_i(u)$ **si** $i = j$ **et** $i = j+1$, $(1 \leq j \leq n)$**.**

$\star$ Si $i = j$,

$$\begin{aligned}
&\partial^i_{n+1}h^i_{n+1}(u)(1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1)\\
&\qquad = \partial^i_{n+1}(1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_i \otimes u \otimes a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1)\\
&\qquad = 1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_i u \otimes a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\partial^i_{n+1}h^{i-1}_{n+1}(u)(1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1)\\
&\qquad = \partial^i_{n+1}(1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{i-1} \otimes u \otimes a_i \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1)\\
&\qquad = 1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{i-1} \otimes u a_i \otimes a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1\\
&\qquad (u \text{ est en } (i+1)\text{-ème place}).
\end{aligned}$$

Ainsi,
$(\partial^i_{n+1}h^j_{n+1}(u) - \partial^i_{n+1}h^{i-1}_{n+1}(u))(1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1) = -ad_i(u)(1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1)$.

$\star$ Si $i = j+1$, de même.

(iii) $\partial^i_{n+1}h^j_{n+1}(u) = h^j_{n+1}(u)\partial^{i-1}_{n+1}$ **si** $j+1 < i \leq n+1$**.**

$\star$ Si $i = n+1$ et $j = n-1$,

$$\begin{aligned}
\partial^{n+1}_{n+1}h^{n-1}_{n+1}(u)(1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1) &= \partial^{n+1}_{n+1}(1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1} \otimes u \otimes a_n \otimes 1)\\
&= 1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1} \otimes u \otimes a_n\\
&\quad (a_n \text{ est en } (n+2)\text{-ème place}),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
h^{n-1}_{n+1}(u)\partial^n_{n+1}(1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1) &= h^{n-1}_{n+1}(u)(1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1} \otimes a_n)\\
&= 1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1} \otimes u \otimes a_n.
\end{aligned}$$

$\star$ Si $j+1 < i < n+1$,

$$\begin{aligned}
&\partial^i_{n+1}h^j_{n+1}(u)(1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1)\\
&\qquad = \partial^i_{n+1}(1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_j \otimes u \otimes a_{j+1} \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1)\\
&\qquad = 1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_j \otimes u \otimes a_{j+1} \otimes \cdots \otimes a_{i-1}a_i \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1,\\
&\qquad (a_{i-1} \text{ est en } (i+1)\text{-ème place}),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&h^j_{n+1}(u)\partial^{i-1}_{n+1}(1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1)\\
&\qquad = h^j_{n+1}(u)(1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{i-1}a_i \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1)\\
&\qquad = 1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_j \otimes u \otimes a_{j+1} \otimes \cdots \otimes a_{i-1}a_i \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1.
\end{aligned}$$

Calculons maintenant $h_n(u)\partial_n + \partial_{n+1}h_{n+1}(u)$:

$$\begin{aligned}
h_n(u)\partial_n + \partial_{n+1}h_{n+1}(u) &= \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\sum_{i=0}^{n}(-1)^i h_n^j(u)\partial_n^i + \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\partial_{n+1}^i h_{n+1}^j(u)\\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i+j}h_n^j(u)\partial_n^i + \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^{i+j}\partial_{n+1}^i h_{n+1}^j(u)\\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i+j}h_n^j(u)\partial_n^i + \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=j+2}^{n+1}(-1)^{i+j}\partial_{n+1}^i h_{n+1}^j(u)\\
&+ \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{j-1}(-1)^{i+j}\partial_{n+1}^i h_{n+1}^j(u) + \sum_{j=0}^{n}\partial_{n+1}^j h_{n+1}^j(u) - \sum_{j=0}^{n}\partial_{n+1}^{j+1}h_{n+1}^j(u).
\end{aligned}$$

On a d'abord,

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{n}\partial_{n+1}^j h_{n+1}^j(u) - \sum_{j=0}^{n}\partial_{n+1}^{j+1}h_{n+1}^j(u) = \sum_{j=0}^{n}\partial_{n+1}^j h_{n+1}^j(u) - \sum_{j=1}^{n+1}\partial_{n+1}^j h_{n+1}^{j-1}(u)\\
&= \sum_{j=1}^{n}(\partial_{n+1}^j h_{n+1}^j(u) - \partial_{n+1}^j h_{n+1}^{j-1}(u)) + \partial_{n+1}^0 h_{n+1}^0(u) - \partial_{n+1}^{n+1}h_{n+1}^n(u)\\
&= -ad(u) + \partial_{n+1}^0 h_{n+1}^0(u) - \partial_{n+1}^{n+1}h_{n+1}^n(u) \quad \text{(d'après (ii))}.
\end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i+j}h_n^j(u)\partial_n^i + \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=j+2}^{n+1}(-1)^{i+j}\partial_{n+1}^i h_{n+1}^j(u) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{j-1}(-1)^{i+j}\partial_{n+1}^i h_{n+1}^j(u)\\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i+j}h_n^j(u)\partial_n^i + \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=j+2}^{n+1}(-1)^{i+j}h_n^j(u)\partial_n^{i-1} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{j-1}(-1)^{i+j}h_n^{j-1}(u)\partial_n^i\\
&\qquad \text{(d'après (i) et (iii))}\\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i+j}h_n^j(u)\partial_n^i + \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=j+1}^{n}(-1)^{i+j+1}h_n^j(u)\partial_n^i + \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{j}(-1)^{i+j+1}h_n^j(u)\partial_n^i\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Enfin, pour tous $a_1, \cdots, a_n \in A$,

$$\begin{aligned}
&h_n(u)\partial_n + \partial_{n+1}h_{n+1}(u)(1\otimes a_1\otimes\cdots\otimes a_n\otimes 1)\\
&= (-ad(u) + \partial_{n+1}^0 h_{n+1}^0(u) - \partial_{n+1}^{n+1}h_{n+1}^n(u))(1\otimes a_1\otimes\cdots\otimes a_n\otimes 1) \quad (*)\\
&= -ad(u)(1\otimes a_1\otimes\cdots\otimes a_n\otimes 1) + (u\otimes a_1\otimes\cdots\otimes a_n\otimes 1 - 1\otimes a_1\otimes\cdots\otimes a_n\otimes u). \quad (**)
\end{aligned}$$

On écrit maintenant
$d_n(1\otimes x_{l_1}\wedge\cdots\wedge x_{l_n}\otimes 1)$

$$= \textstyle\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}(x_{l_i}\otimes x_{l_1}\wedge\cdots\wedge\hat{x}_{l_i}\wedge\cdots\wedge x_{l_n}\otimes 1 - 1\otimes x_{l_1}\wedge\cdots\wedge\hat{x}_{l_i}\wedge\cdots\wedge x_{l_n}\otimes x_{l_i})$$

$$+\sum_{1\leq i<j\leq n}(-1)^j \otimes x_{l_1}\wedge\cdots\wedge x_{l_{i-1}}\wedge\overline{[x_{l_j},x_{l_i}]}\wedge x_{l_{i+1}}\wedge\cdots\wedge\hat{x}_{l_j}\wedge\cdots\wedge x_{l_n}\otimes 1,$$

où $1\leq l_1<\cdots<l_n\leq t$ et on veut donc avoir $\partial_n\circ\bar{\phi}_n=\bar{\phi}_{n-1}\circ d_n$, pour tout $n\in\mathbb{N}$. Pour cela, on raisonne par récurrence sur n.

- $\star$ Pour $n=1$, $\bar{\phi}_0=id$. C'est évident.
- $\star$ Soit $n>1$ tel que $\partial_n\circ\bar{\phi}_n=\bar{\phi}_{n-1}\circ d_n$. Posons $\dot{x}=x_{l_1}\wedge\cdots\wedge x_{l_n}$ et pour tout $u\in\bar{A}$, on remarque aussi que $\bar{\phi}_{n+1}(1\otimes\dot{x}\wedge u\otimes 1)=(-1)^n h_{n+1}(u)(\bar{\phi}_n(1\otimes\dot{x}\otimes 1))$ (***). En effet :

Pour tout $0\leq i\leq n$, posons

$$\alpha_i=(n+1\ \cdots\ i+1)\text{ et}$$
$$S_{n,i}=\left\{\text{bijections : }[\![1;n+1]\!]\backslash\{i+1\}\to[\![1;n]\!]\right\}$$

On voit donc $S_{n+1}=\coprod_{i=0}^n S_{n,i}$. Soient

$$\begin{aligned}\Phi_i : S_n &\longrightarrow S_{n,i}\\ \sigma &\longmapsto \sigma\alpha_i\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\Psi_i : S_{n,i} &\longrightarrow S_n\\ \gamma &\longmapsto \Psi_i(\gamma) : j\mapsto\begin{cases}\gamma(j)\text{ si }j\leq i\\ \gamma(j+1)\text{ si }j>i\end{cases}\end{aligned}$$

On a donc : pour tout $\sigma\in S_n$,

- $\diamond$ Si $j\leq i$: $\Psi_i\circ\Phi_i(\sigma)(j)=\Phi_i(\sigma)(j)=\sigma\alpha_i(j)=\sigma(j)$;
- $\diamond$ Si $j>i$: $\Psi_i\circ\Phi_i(\sigma)(j)=\Phi_i(\sigma(j+1)=\sigma\alpha_i(j+1)=\sigma(j)$.

Ainsi, $\Psi_i\circ\Phi_i=Id_{S_n}$. De même, $\Phi_i\circ\Psi_i=Id_{S_{n,i}}$ et donc S_n et $S_{n,i}$ sont isomorphes. On a maintenant :

$$\begin{aligned}\bar{\phi}_{n+1}(1\otimes\dot{x}\wedge x_{l_{n+1}}\otimes 1) &= \sum_{\gamma\in S_{n+1}}\varepsilon(\gamma)\big(1\otimes x_{l_{\gamma(1)}}\otimes\cdots\otimes x_{l_{\gamma(n+1)}}\otimes 1\big)\\ &=\sum_{i=0}^n\sum_{\sigma\alpha_i\in S_{n,i}}\varepsilon(\sigma\alpha_i)\big(1\otimes x_{l_{\sigma\alpha_i(1)}}\otimes\cdots\otimes x_{l_{\sigma\alpha_i(n+1)}}\otimes 1\big)\\ &=\sum_{i=0}^n\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{n+i}\varepsilon(\sigma)\big(1\otimes x_{l_{\sigma(1)}}\otimes\cdots\otimes x_{l_{\sigma(i)}}\otimes x_{l_{n+1}}\otimes x_{l_{\sigma(i+1)}}\otimes\otimes\cdots\otimes x_{l_n}\otimes 1\big)\\ &\qquad\qquad(\text{car }\sigma\alpha_i(i+1)=n+1)\\ &=(-1)^n h_{n+1}(x_{n+1})\big(\bar{\phi}_n(1\otimes\dot{x}\otimes 1)\big).\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
&\partial_{n+1}\bar{\phi}_{n+1}(1\otimes \dot{x}\wedge u\otimes 1) = (-1)^n\partial_{n+1}h_{n+1}(u)\bar{\phi}_n(1\otimes \dot{x}\otimes 1) && \text{par (***)}\\
&\quad = (-1)^n\big(-ad(u)+\partial^0_{n+1}h^0_{n+1}(u)-\partial^{n+1}_{n+1}h^n_{n+1}(u)-h_n(u)\partial_n\big)(1\otimes \dot{x}\otimes 1) && \text{par (*)}\\
&\quad = (-1)^{n+1}ad(u)\bar{\phi}_n(1\otimes \dot{x}\otimes 1)+(-1)^{n+1}h_n(u)\partial_n\bar{\phi}_n(1\otimes \dot{x}\otimes 1)\\
&\qquad + (-1)^n\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\big(u\otimes x_{l_{\sigma(1)}}\otimes\cdots\otimes x_{l_{\sigma(n)}} - 1\otimes x_{l_{\sigma(1)}}\otimes\cdots\otimes x_{l_{\sigma(n)}}\otimes u\big) && \text{par (**)}\\
&\quad = (-1)^{n+1}ad(u)\bar{\phi}_n(1\otimes \dot{x}\otimes 1)+(-1)^{n+1}h_n(u)\bar{\phi}_{n-1}d_n(1\otimes \dot{x}\otimes 1)\\
&\qquad + (-1)^n\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\big(u\otimes x_{l_{\sigma(1)}}\otimes\cdots\otimes x_{l_{\sigma(n)}} - 1\otimes x_{l_{\sigma(1)}}\otimes\cdots\otimes x_{l_{\sigma(n)}}\otimes u\big)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(par hypothèse de récurrence)}\\
&\quad = (-1)^{n+1}ad(u)\bar{\phi}_n(1\otimes \dot{x}\otimes 1)+\bar{\phi}_n(1\otimes \tilde{x}\wedge u\otimes 1) && \text{par (***)}\\
&\qquad + (-1)^n\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\big(u\otimes x_{l_{\sigma(1)}}\otimes\cdots\otimes x_{l_{\sigma(n)}} - 1\otimes x_{l_{\sigma(1)}}\otimes\cdots\otimes x_{l_{\sigma(n)}}\otimes u\big)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad (\text{où } 1\otimes\tilde{x}\otimes 1 = d_n(1\otimes \dot{x}\otimes 1))\\
&\quad = \bar{\phi}_n d_{n+1}(1\otimes \dot{x}\wedge u\otimes 1).
\end{aligned}$$

Vérifions cette dernière égalité : pour $\sigma\in S_n$, on note

$$\begin{gathered}
{}^{\sigma}(1\otimes x_{l_1}\wedge\cdots\wedge x_{l_n}\otimes 1) = 1\otimes x_{l_{\sigma(1)}}\wedge\cdots\wedge x_{l_{\sigma(n)}}\otimes 1\\
{}^{\sigma}(1\otimes x_{l_1}\otimes\cdots\otimes x_{l_n}\otimes 1) = 1\otimes x_{l_{\sigma(1)}}\otimes\cdots\otimes x_{l_{\sigma(n)}}\otimes 1
\end{gathered}$$

On a donc

$${}^{\sigma}(ad_i(u)(1\otimes \dot{x}\otimes 1)) = ad_{\sigma^{-1}(i)}(u)\big({}^{\sigma}(1\otimes \dot{x}\otimes 1)\big),$$

et donc

$${}^{\sigma}\big(ad(u)(1\otimes \dot{x}\otimes 1)\big) = ad(u)\big({}^{\sigma}(1\otimes \dot{x}\otimes 1)\big).$$

$$\begin{aligned}
&\bar{\phi}_n\circ d_{n+1}(1\otimes \dot{x}\wedge u\otimes 1) - \bar{\phi}_n(1\otimes \tilde{x}\wedge u\otimes 1)\\
&\quad = (-1)^{n+1}\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\big(1\otimes x_{l_1}\otimes\cdots\otimes x_{l_n}\otimes u - u\otimes x_{l_1}\otimes\cdots\otimes x_{l_n}\otimes 1\big)\\
&\qquad + (-1)^{n+1}\bar{\phi}_n\big(ad(u)(1\wedge \dot{(x)}\otimes 1)\big)\\
&\quad = (-1)^{n+1}\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\big(1\otimes x_{l_1}\otimes\cdots\otimes x_{l_n}\otimes u - u\otimes x_{l_1}\otimes\cdots\otimes x_{l_n}\otimes 1\big)\\
&\qquad + (-1)^{n+1}\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\ {}^{\sigma}\big(ad(u)(1\otimes \dot{x}\otimes 1)\big)\\
&\quad = (-1)^{n+1}\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\big(1\otimes x_{l_1}\otimes\cdots\otimes x_{l_n}\otimes u - u\otimes x_{l_1}\otimes\cdots\otimes x_{l_n}\otimes 1\big)\\
&\qquad + (-1)^{n+1}\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)ad(u)\big({}^{\sigma}(1\otimes \dot{x}\otimes 1)\big)\\
&\quad = (-1)^{n+1}\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\big(1\otimes x_{l_1}\otimes\cdots\otimes x_{l_n}\otimes u - u\otimes x_{l_1}\otimes\cdots\otimes x_{l_n}\otimes 1\big)\\
&\qquad + (-1)^{n+1}ad(u)\big(\bar{\phi}_n(1\otimes \dot{x}\otimes 1)\big).
\end{aligned}$$

Donc, la dernière égalité des calculs de $\partial_{n+1}\bar{\phi}_{n+1}$ est bien assurée.
Conclusion, par principe de récurrence, on obtient bien : $\partial_n\bar{\phi}_n = \bar{\phi}_{n-1}d_n$ et $\bar{\phi}_\bullet$ est bien un morphisme de chaînes.

$\smile$ *The end* $\smile$

Bibliographie

[1] J. Bichon, R. Taillefer. *Algèbre Homologique.* cours de M2, 2020-2021.

[2] N. Bourbaki. *Eléments de mathématique. Algèbre. Chapitres 1 à 3.* Paris, 1970.

[3] A. Čap, H. Schichl and J. Vanžura. *On twisted tensor products of algebras.* Comm. Algebra 23 (1995), no. 12, 4701 - 4735.

[4] N. S. Gopalakrshnan and R. Sridharan. *Homological dimension of Ore-extensions.* Pacific J. Math. 19 (1966), 67-75.

[5] Christian Kassel. *Quantum Groups.* Springer (1995).

[6] V.C. Nguyen, X. Wang, S. Witherspoon. *Finite generation of some cohomology rings via twisted tensor product and Anick resolutions.* Journal of Pure and Applied Algebra 223(2019) 316-339.

[7] A. V. Shepler and S. Witherspoon. *Resolutions for twisted tensor products.* Pacific J. Math. 298 (2019), no. 2, 445 -469.

[8] C. A. Weibel. *An Introduction to Homological Algebra.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, volume 38, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[9] S. Witherspoon. *Hochschild cohomology for algebras.* Graduate Studies in Mathematics, 204. American Mathematical Society, 2019.