Chemins confinés dans un quadrant

Thèse réalisée sous la direction d'Irina Kurkova

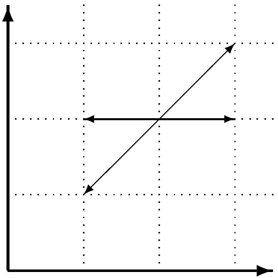
Kilian Raschel

CNRS & Université de Tours & Fédération Denis Poisson

Journées MAS 2012—29/31 août 2012

Motivations nombreuses et variées

- Analyse complexe
- Combinatoire
- Finance
- Biologie des populations
- Probabilités
- Files d'attente
- Etc.

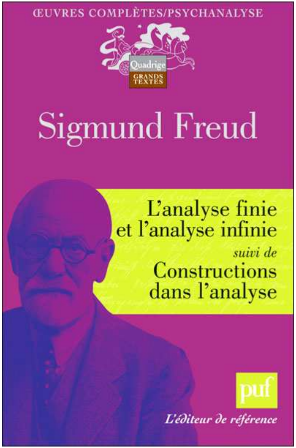


Analyse complexe

L'inclusion $\mathbf{Z}_+^2 \subset \mathbf{C}$ est parfaite pour appliquer et développer des méthodes issues de l'analyse complexe :

- surfaces de Riemann,
- fonctions elliptiques de Weierstrass,
- problèmes frontière,
- représentations conformes,
- etc.

✎ O. Boxma, J. Cohen, G. Fayolle, R. Iasnogorodski, I. Kurkova, V. Malyshev, . . .



Combinatoire

Beaucoup d'objets combinatoires

- cartes,
- permutations,
- arbres,
- tableaux de Young,
- etc.,

sont codés par des marches sur des réseaux, en particulier par des marches sur un quart de plan.

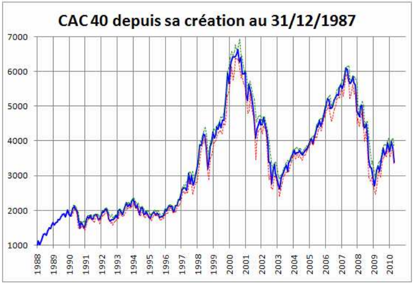
✎ A. Bostan, M. Bousquet-Mélou, G. Fayolle, M. Kauers, I. Kurkova, M. Mishna, A. Rechnitzer, B. Salvy, . . .

Finance

Par exemple car la dynamique de certains

- carnet d'ordres markovien

peut être approchée par des marches aléatoires dans un quart de plan.



✎ R. Cont, A. de Larrard, ...

Biologie des populations

En effet, le quart de plan est l'espace naturel pour paramétrer toute population à deux dimensions. On peut alors s'intéresser à :

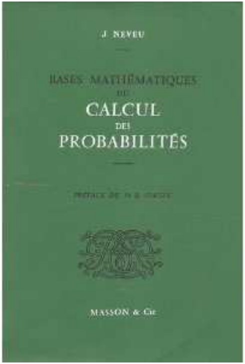
- probabilité d'extinction/de survie d'une population donnée,
- toute autre caractéristique du modèle.

✎ S. Billiard, P. Lafitte-Godillon, V.C. Tran, . . .

Probabilités

Les marches dans des cônes sont très populaires :

- marches aléatoires quantiques,
- marches aléatoires non collisionnantes,
- valeurs propres de matrices aléatoires,
- transformées de Doob,
- etc.



✎ P. Biane, D. Denisov, G. Fayolle, R. Garbit, R. Iasnogorodski, I. Ignatiouk-Robert, W. König, I. Kurkova, V. Malyshev, M. Peigné, V. Wachtel, . . .

Files d'attente

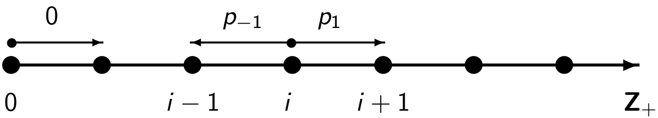
Files d'attente à deux queues :

- récurrence/transience,
- probabilités stationnaires,
- temps de relaxation,
- etc.

✎ I. Adan, O. Boxma, J. Cohen, L. Flatto, J. van Leeuwaarden, P. Robert, . . .

Ruine du joueur

Processus aléatoire 1-dimensionnel, $(X(n))_{n\geqslant 0}$, où un joueur ayant une fortune finie joue (équitablement ou non) à pile ou face contre un adversaire à fortune infinie.



But : trouver la probabilité de ruine $\mathbf{P}_{i_0}[\inf\{n\geqslant 1 : X(n)=0\}<\infty]=q_{i_0}$.

Résoudre la ruine du joueur, selon Feller

Étape 1 : trouver une équation fonctionnelle

$$(p_1x^2 - x + p_{-1})Q_{i_0}(x) = q_{i_0} - x^{i_0},$$

où $Q_{i_0}(x) = \sum_{i\geqslant 1, n\geqslant 0} \mathbf{P}_{i_0}[X(n) = i]x^{i-1}$.

Résoudre la ruine du joueur, selon Feller

Étape 1 : trouver une équation fonctionnelle

$$(p_1x^2 - x + p_{-1})Q_{i_0}(x) = q_{i_0} - x^{i_0},$$

où $Q_{i_0}(x) = \sum_{i\geqslant 1, n\geqslant 0} \mathbf{P}_{i_0}[X(n) = i]x^{i-1}$.

Étape 2 : évaluer l'équation en une valeur de x bien choisie, et trouver l'inconnue du membre de droite

Notons $\widetilde{x}$ la plus petite solution positive de $p_1x^2 - x + p_{-1} = 0$. Si on évalue l'équation en $\widetilde{x}$, on trouve $q_{i_0} = \widetilde{x}^{i_0}$.

Résoudre la ruine du joueur, selon Feller

Étape 1 : trouver une équation fonctionnelle

$$(p_1x^2 - x + p_{-1})Q_{i_0}(x) = q_{i_0} - x^{i_0},$$

où $Q_{i_0}(x) = \sum_{i\geqslant 1, n\geqslant 0} \mathbf{P}_{i_0}[X(n) = i]x^{i-1}$.

Étape 2 : évaluer l'équation en une valeur de x bien choisie, et trouver l'inconnue du membre de droite

Notons $\widetilde{x}$ la plus petite solution positive de $p_1x^2 - x + p_{-1} = 0$. Si on évalue l'équation en $\widetilde{x}$, on trouve $q_{i_0} = \widetilde{x}^{i_0}$.

Étape 3 : revenir à l'équation, et trouver la dernière inconnue

$$Q_{i_0}(x) = \frac{\widetilde{x}^{i_0} - x^{i_0}}{x[p_1x + p_{-1}x^{-1} - 1]}.$$

Différents types de résultats

Résultats quantitatifs

- Expressions explicites pour les quantités inconnues (expressions sous forme close, utilisables ?)

Différents types de résultats

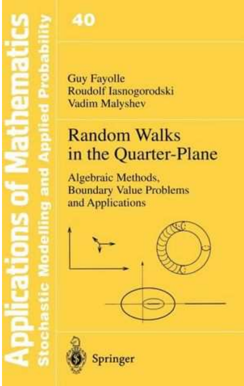
Résultats quantitatifs

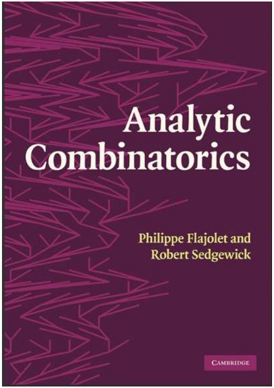
- Expressions explicites pour les quantités inconnues (expressions sous forme close, utilisables ?)

Résultats qualitatifs

- Développements asymptotiques (si expressions explicites non utilisables : parfois plus facile et suffisant)
- Nature des séries génératrices (rationnelles, algébriques, D-finies) (classifier des objets, faciliter la recherche d'une éventuelle expression close, de l'asymptotique)

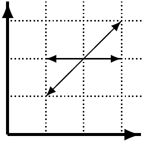
Inspirations





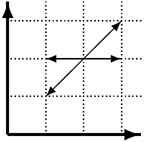
Contexte

Soit **S** un sous-ensemble des huit plus proches voisins ; par exemple :



Contexte

Soit **S** un sous-ensemble des huit plus proches voisins ; par exemple :

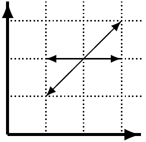


Soit $q(i, j; n)$ le nombre de chemins

- construits avec n pas de **S**,
- confinés dans le quart de plan $\mathbf{Z}_+^2$,
- partant de $(0, 0)$ et arrivant en (i, j).

Contexte

Soit **S** un sous-ensemble des huit plus proches voisins ; par exemple :



Soit $q(i, j; n)$ le nombre de chemins

- construits avec n pas de **S**,
- confinés dans le quart de plan $\mathbf{Z}_+^2$,
- partant de $(0, 0)$ et arrivant en (i, j).

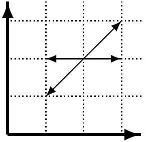
Exemple

Pour l'ensemble de sauts de Gessel ci-dessus

2001 : conjecture $q(0, 0; 2n) = 16^n \dfrac{(5/6)_n(1/2)_n}{(2)_n(5/3)_n}$ ✎ I. Gessel

Contexte

Soit **S** un sous-ensemble des huit plus proches voisins ; par exemple :



Soit $q(i, j; n)$ le nombre de chemins

- construits avec n pas de **S**,
- confinés dans le quart de plan $\mathbf{Z}_+^2$,
- partant de $(0, 0)$ et arrivant en (i, j).

Exemple

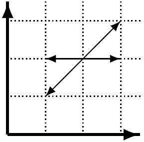
Pour l'ensemble de sauts de Gessel ci-dessus

2001 : conjecture $q(0, 0; 2n) = 16^n \dfrac{(5/6)_n (1/2)_n}{(2)_n (5/3)_n}$ ✎ I. Gessel

2009 : preuve par ordinateur ✎ M. Kauers, C. Koutschan, D. Zeilberger

Contexte

Soit **S** un sous-ensemble des huit plus proches voisins ; par exemple :



Soit $q(i, j; n)$ le nombre de chemins

- construits avec n pas de **S**,
- confinés dans le quart de plan $\mathbf{Z}_+^2$,
- partant de $(0, 0)$ et arrivant en (i, j).

Exemple

Pour l'ensemble de sauts de Gessel ci-dessus

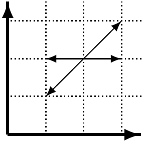
2001 : conjecture $q(0, 0; 2n) = 16^n \dfrac{(5/6)_n(1/2)_n}{(2)_n(5/3)_n}$ ✎ I. Gessel

2009 : preuve par ordinateur ✎ M. Kauers, C. Koutschan, D. Zeilberger

2009 : algébricité de $\sum_{n\geqslant 0} q(0, 0; 2n)t^{2n}$ ✎ A. Bostan, M. Kauers

Contexte

Soit **S** un sous-ensemble des huit plus proches voisins ; par exemple :

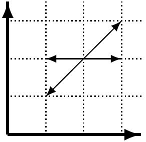


Soit $q(i, j; n)$ le nombre de chemins

- construits avec n pas de **S**,
- confinés dans le quart de plan $\mathbf{Z}_+^2$,
- partant de $(0, 0)$ et arrivant en (i, j).

Contexte

Soit **S** un sous-ensemble des huit plus proches voisins ; par exemple :



Soit $q(i, j; n)$ le nombre de chemins

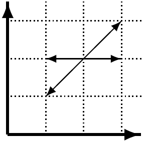
- construits avec n pas de **S**,
- confinés dans le quart de plan $\mathbf{Z}_+^2$,
- partant de $(0, 0)$ et arrivant en (i, j).

Leur série génératrice est

$$Q(x, y; t) = \sum_{i,j,n \geqslant 0} q(i, j; n) x^i y^j t^n.$$

Contexte

Soit **S** un sous-ensemble des huit plus proches voisins ; par exemple :



Soit $q(i, j; n)$ le nombre de chemins

- construits avec n pas de **S**,
- confinés dans le quart de plan $\mathbf{Z}_+^2$,
- partant de $(0, 0)$ et arrivant en (i, j).

Leur série génératrice est

$$Q(x, y; t) = \sum_{i,j,n\geqslant 0} q(i, j; n) x^i y^j t^n.$$

But

1. Expression explicite de $Q(x, y; t)$,
2. Dépendance de $Q(x, y; t)$ relativement à **S** (e.g., sa nature),
3. Asymptotique de certains nombres de marches (e.g., $q(0, 0; n)$).

Méthode pour trouver $Q(x, y; t)$

Étape 1 : trouver une équation fonctionnelle

$$K(x, y; t)Q(x, y; t) =$$
$$K(x,0; t)Q(x,0; t) + K(0, y; t)Q(0, y; t) - K(0,0; t)Q(0,0; t) - xy,$$

où $K(x, y; t) = xyt(\sum_{(i,j)\in \mathbf{S}} x^i y^j - 1/t)$.

Méthode pour trouver $Q(x, y; t)$

Étape 1 : trouver une équation fonctionnelle

$$K(x, y; t)Q(x, y; t) =$$
$$K(x,0;t)Q(x,0;t) + K(0,y;t)Q(0,y;t) - K(0,0;t)Q(0,0;t) - xy,$$

où $K(x, y; t) = xyt(\sum_{(i,j)\in \mathbf{S}} x^i y^j - 1/t)$.

Étape 2 : évaluer l'équation en une valeur de x bien choisie, et trouver l'inconnue du membre de droite

Méthode pour trouver $Q(x, y; t)$

Étape 1 : trouver une équation fonctionnelle

$$K(x, y; t)Q(x, y; t) =$$
$$K(x,0; t)Q(x,0; t) + K(0, y; t)Q(0, y; t) - K(0,0; t)Q(0,0; t) - xy,$$

où $K(x, y; t) = xyt(\sum_{(i,j)\in \mathbf{S}} x^i y^j - 1/t)$.

Étape 2 : évaluer l'équation en une valeur de x, y bien choisie, et trouver l'inconnue du membre de droite

Méthode pour trouver $Q(x, y; t)$

Étape 1 : trouver une équation fonctionnelle

$$K(x, y; t)Q(x, y; t) =$$
$$K(x,0;t)Q(x,0;t) + K(0,y;t)Q(0,y;t) - K(0,0;t)Q(0,0;t) - xy,$$

où $K(x, y; t) = xyt(\sum_{(i,j)\in \mathbf{S}} x^i y^j - 1/t)$.

Étape 2 : évaluer l'équation en des valeurs de x, y bien choisies, et trouver les inconnues du membre de droite

Méthode pour trouver $Q(x, y; t)$

Étape 1 : trouver une équation fonctionnelle

$$K(x,y;t)Q(x,y;t) =$$
$$K(x,0;t)Q(x,0;t) + K(0,y;t)Q(0,y;t) - K(0,0;t)Q(0,0;t) - xy,$$

où $K(x,y;t) = xyt(\sum_{(i,j)\in\mathbf{S}} x^i y^j - 1/t)$.

Étape 2 : évaluer l'équation en des valeurs de x, y bien choisies, et trouver les inconnues du membre de droite

- Problèmes frontière de Riemann-Hilbert
- Prolongement analytique
- Variable t

Méthode pour trouver $Q(x, y; t)$

Étape 1 : trouver une équation fonctionnelle

$$K(x, y; t)Q(x, y; t) =$$
$$K(x,0;t)Q(x,0;t) + K(0,y;t)Q(0,y;t) - K(0,0;t)Q(0,0;t) - xy,$$

où $K(x, y; t) = xyt(\sum_{(i,j)\in \mathbf{S}} x^i y^j - 1/t)$.

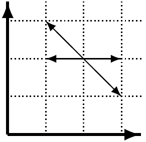
Étape 2 : évaluer l'équation en des valeurs de x, y bien choisies, et trouver les inconnues du membre de droite

- Problèmes frontière de Riemann-Hilbert
- Prolongement analytique
- Variable t

Étape 3 : revenir à l'équation, et trouver la dernière inconnue

Contexte

Soit **S** un sous-ensemble des huit plus proches voisins ; par exemple :



Soit $q(i, j; k)$ le nombre de chemins

- construits avec k pas de **S**,
- confinés dans le quart de plan $\mathbf{Z}_+^2$,
- partant de $(0, 0)$ et arrivant en (i, j).

Leur série génératrice est

$$Q(x, y; t) = \sum_{i,j,n\geqslant 0} q(i, j; n)x^i y^j t^n.$$

But

1. Expression explicite de $Q(x, y; t)$,
2. Dépendance de $Q(x, y; t)$ relativement à **S** (e.g., sa nature),
3. Asymptotique de certains nombres de marches (e.g., $q(0, 0; n)$).

Chemins confinés dans un quadrant

Thèse réalisée sous la direction d'Irina Kurkova

Kilian Raschel

CNRS & Université de Tours & Fédération Denis Poisson

Journées MAS 2012—29/31 août 2012