

Schémas compacts d'ordre élevé dans le domaine de la finance

Michel Fournié & Bertram Düring

Institut de Mathématiques de Toulouse - France & Sussex University, Brighton - Angleterre



Whorkshop - Schémas aux différences

27 Novembre 2013 (ENSAM)

- 1 Introduction
- 2 Black-Scholes non-linéaire
- 3 Le modèle de Heston
- 4 Maillage non uniforme et schéma compact d'ordre élevé - Heston
- 5 Méthodes ADI et schéma compact d'ordre élevé
- 6 Conclusion

Positionnement du travail

Modélisation	Difficultés	Construction schéma	Analyse numérique
BS Linéaire	Solution initiale	Schémas d'ordre 2	Bien connue
BS Non Linéaire	Non linéarité	HOC	CV sol. de viscosité
Heston	2D	HOC + ∂_{xy} Maillage Non Uniforme	Hors de portée \forall paramètres
Autres	Dim. > 2	ADI + HOC	En cours

La boîte à outils autour des schémas compacts d'ordre élevé

$$\begin{aligned}
 \text{Idée fondatrice : } -u'' = f &\implies -\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta_x^2} = f_i - \frac{h^2}{12} \underbrace{u^{(4)}}_{(u'')''} + O(\Delta_x^4) = f_i + \frac{h^2}{12} f'' + O(\Delta_x^4) \\
 &\implies -\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta_x^2} = f_i + \frac{h^2}{12} \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta_x^2} \quad (\text{Stencil à 3 points})
 \end{aligned}$$

Les mathématiques appliquées en finance

Dans les années 70

- apparition de marchés et produits nouveaux
- déréglementation
- les taux d'intérêt deviennent volatiles et instables
- arrivée d'investissements massifs

Outils mathématiques utilisés par les institutions financières

- probabilités (mouvement Brownien, calcul stochastique, méthodes de simulation de Monte-Carlo ...)
- statistiques (estimations de paramètres ...)
- **analyse numérique** (E.D.P. linéaires ou non linéaires ..., problèmes inverses ...) **Schémas aux différences finies**

Finance de marché

L'**option d'achat (call)** est l'un des produits financiers le plus utilisé.

- ce contrat confère à son **acheteur** le **droit** (mais pas l'obligation)
 - d'acheter un actif risqué (action, obligation, taux de change, matière première ...)
 - à un cours E fixé à la signature du contrat (E est appelé **prix d'exercice - strike**)
 - à la date future T (appelée **échéance**).
- Notons S_t son cours à l'instant t
A la date T , l'acheteur aura en **gain** $\max(S_T - E, 0)$
- en échange, il a l'**obligation** de verser au **vendeur** à cette date **une prime** C_0

Un problème bien posé

Partant d'une richesse initiale C_0 (**prime à déterminer**), le **vendeur** de l'option recherche une stratégie lui permettant dans tous les scénarios d'évolution du marché ω :

- d'honorer ses engagements envers l'acheteur
- d'atteindre une richesse souhaitée à la date T

Les travaux de **Black et Scholes** mais aussi **Merton** publiés en 1973 répondent à cette question en s'appuyant sur une gestion dynamique de portefeuille.

[Merton & Scholes] Prix Nobel d'économie 1997



Gestion dynamique de portefeuille

- **Le modèle de Black Scholes linéaire** est un modèle à 2 actifs
 - l'un risqué (action sous-jacente à l'option)
 - l'autre sans risque (une obligation)

On note à l'instant t

- S_t : le prix de l'action en nombre : ψ_t
- R_t : le prix de l'obligation en nombre : φ_t

- **La valeur du portefeuille** est alors $V_t = \varphi_t R_t + \psi_t S_t$

Le couple (φ, ψ) appelé **stratégie de financement**

... expression de conditions portant sur (φ, ψ) ...

- **Originalité des résultats**
 - il existe une solution unique au problème posé (cible aléatoire)
 - cette solution est explicite et facile à calculer

Modèle de Black Scholes linéaire

Le modèle suppose que

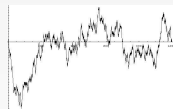
- Pour l'obligation ($r_t \geq 0$: taux d'intérêt instantané)

$$dR_t = r_t R_t dt \text{ d'où } R_t = R_0 e^{\int_0^t r_s ds} \text{ (on suppose } R_0 = 1)$$

- Pour l'action : Equation Différentielle **Stochastique**

$$dS_t = S_t(\mu_t dt + \sigma_t dW_t), \quad S_0 > 0 \text{ donné}$$

- μ_t : paramètre réel
- $\sigma_t \geq 0$: volatilité σ grand \longleftrightarrow gain possible + risque de perte importants, indicateur de la fluidité du marché, quantification du risque de rendement et de prix, traduit l'ampleur des variations du cours d'un actif
- $\{W_t\}_{t \geq 0}$: **mouvement Brownien standard**



En utilisant la **formule d'Itô** on montre que

$$S_t = S_0 \exp \left\{ \int_0^t \sigma_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_s^2 ds \right\} \exp \left\{ \int_0^t \mu_s ds \right\}$$

Lien avec les E.D.P

Cadre abstrait : (sous certaines hypothèses) [D. Lamberton, B. Lapeyre (97)]

Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ solution de $dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$

Comment calculer

$$V_t = \mathbf{E}(e^{-\int_t^T r(s, X_s)ds} f(X_T) | F_t) = F(t, X_t)$$

Pour Black-Scholes, V_t représente la **valeur de l'option**

$f(x) = \max(x - E, 0)$ (call) ou $f(x) = \max(E - x, 0)$ (put)

Son calcul se ramène au calcul de la fonction F

Théorème : F est l'unique solution de l'E.D.P.

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, u(T, x) = f(x) \\ \left(\frac{\partial u}{\partial t} + A_t u - ru \right) (t, x) = 0, \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{où}$$

$$(A_t f)(x) = \frac{\sigma^2(t, x)}{2} f''(x) + b(t, x) f'(x)$$

Modélisation basée sur Black-Scholes

Modélisation plus fine avec prise en compte de :

- r : taux d'intérêt sans risque
- τ_0 : échéance (maturité)
- μ : coût de transaction proportionnel
- γ : facteur d'aversion de risque
pour un nombre N d'options à vendre ($a = \mu\sqrt{\gamma N}$)

Introduction de la volatilité $\sigma \rightarrow$ non-linéarité

- $\sigma = \sigma_0(1 + cA)^{\frac{1}{2}}$, $A = \frac{\mu}{\sigma_0\sqrt{\Delta t}}$
- $\sigma = \sigma_0(1 + A \text{sign}(V_{SS}))^{\frac{1}{2}} \dots$
- Barles, Soner (98) :
$$\sigma(V_{SS}) = \sigma_0 \left(1 + \Psi \left[\exp(r(\tau_0 - \tau))a^2 S^2 V_{SS}\right]\right)$$

Hiérarchie de modèles - Positionnement du travail

Black-Scholes linéaire \longrightarrow Black-Scholes non linéaire \longrightarrow Heston
 \longrightarrow Extensions (plus de paramètres \dots)

- Recherche de schémas spécifiques efficaces :
 - Plus performant que les méthodes classiques
 - Temps de calcul réduit
 - Prise en compte de la non linéarité
 - Fiabilité des résultats (Précision - Stabilité - Convergence)
- Y-a-t-il de bons candidats ? (pas de problème de géométrie)

Schémas Compacts d'ordre élevé

d'ordre (2,4) : 2 en temps et 4 en espace

Modèle de Black-Scholes non-linéaire

[Int. J. Theor. Appl. Finance 2003]

On cherche le prix de l'option $V(S, \tau)$ vérifiant
 ($S \geq 0$: prix de l'actif sous-jacent, $\tau \in [0, \tau_0]$: temps)

$$V_\tau + \frac{1}{2}\sigma(V_{SS})^2 S^2 V_{SS} + rSV_S - rV = 0$$

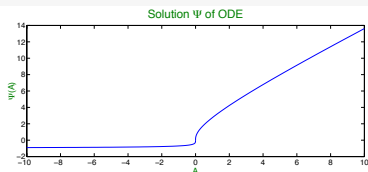
L'expression de la volatilité non-linéaire

$$\sigma(V_{SS}) = \sigma_0 (1 + \Psi [\exp(r(\tau_0 - \tau))a^2 S^2 V_{SS}])$$

La fonction Ψ est solution du problème non-linéaire suivant

$$\Psi'(A) = \frac{\Psi(A) + 1}{2\sqrt{A\Psi(A)} - A}, \quad A \neq 0$$

$$\Psi(0) = 0$$



Conditions initiales et conditions aux limites

- Conditions finales (pour $\tau = \tau_0$) avec $V_0(S) = \max(S - E, 0)$

Pour des options européennes d'achats (call)

$$V(S, \tau_0) = V_0(S), \quad S \geq 0$$

- Conditions aux "limites", $\forall \tau \in [0, \tau_0]$

$$V(0, \tau) = 0,$$

$$V(S, \tau) \sim S - Ee^{r(\tau-\tau_0)} \quad (S \rightarrow \infty)$$

Changement de variables

- Changement de variables

$$x(S) = \ln\left(\frac{S}{E}\right), \quad t(\tau) = \frac{1}{2}\sigma_0^2(\tau_0 - \tau), \quad u = \exp(-x)\frac{V}{E}$$

$$u_t - (1 + \Psi[\exp(Kt + x)a^2 E(u_{xx} + u_x)])(u_{xx} + u_x) - Ku_x = 0$$

- Domaine d'étude

$$x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq t \leq T = \frac{\sigma_0^2 \tau_0}{2}, \quad K = \frac{2r}{\sigma_0^2}$$

- Conditions initiales et les conditions aux limites

$$u(x, 0) = u_0(x) = \max(1 - \exp^{-x}, 0)$$

$$u(x, t) = 0 \quad (x \rightarrow -\infty)$$

$$u(x, t) \sim 1 \quad (x \rightarrow +\infty)$$

Formulation classique - Problème de convection diffusion

- Après changement de variables, le problème peut s'écrire

$$u_t = \beta u_{xx} - \lambda u_x \text{ avec}$$

$$\beta = 1 + \Psi [\exp(Kt + x)a^2 E(u'' + u')]$$

$$\lambda = 1 + \Psi [\exp(Kt + x)a^2 E(u'' + u')] + K$$

- Condition initiale : lissée par interpolation (spline d'ordre 4)
- Les non-linéarités apparaissent dans β et γ
 - Traitement explicite des termes non linéaires
 - Evite un traitement coûteux en temps
- Préservation du caractère compact de la discrétisation

Schémas aux différences finies

- Les schémas classiques d'ordre 2

- Forward-Time Central-Space (FTCS)
- Backward-Time Central-Space (BTCS)
- Crank-Nicolson (CN)

Pas de discrétisation

$$\Delta_x = h \text{ (espace)}$$

$$\Delta_t = k \text{ (temps)}$$

- Les schémas compacts d'ordre 4

- R3A, R3B [Rigal JCP-94]

- Le terme non linéaire nécessite

- approximations centrées à 5 points : $u'' \approx \frac{U_{i-2}^n - 2U_i^n + U_{i+2}^n}{4h^2}$
- traitement spécifique de conditions aux limites (analyse hors de portée !)

- Construction d'un nouveau schéma à 3 points R3C

- approche de type **équation modifiée**
- analyse possible ($\forall \beta, \forall \lambda$)

Schéma Compact d'Ordre Elevé

- Le schéma R3C est cherché sous la forme

$$\delta_t^+ U_j^n = \beta \left(\frac{1}{2} + A_1 \right) \delta_x^2 U_j^n + \beta \left(\frac{1}{2} + A_2 \right) \delta_x^2 U_j^{n+1} \\ - \lambda \left(\frac{1}{2} + B_1 \right) \delta_x U_j^n - \lambda \left(\frac{1}{2} + B_2 \right) \delta_x U_j^{n+1}$$

$$\text{où } \delta_t^n U_j^n = \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{k}, \quad \delta_x^2 U_j^n = \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{h^2}, \quad \delta_x U_j^n = \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2h}$$

- On exprime **l'erreur de troncature** associée
 - Par construction le schéma est compact
 - Les termes faisant apparaître des **dérivations en temps** sont exprimés en fonction de relations déduites par

dérivation formelle du problème continu $u_t = \beta u_{xx} - \lambda u_x$

Erreur de troncature

- L'erreur de troncature s'exprime

$$E_u(k, h) = \sum_{j=1}^4 e_j \partial_x^j u + \text{Dérivées d'Ordre Supérieur}$$

avec

$$e_1 = \lambda(B_2 + B_1)$$

$$e_2 = -\beta(A_2 + A_1) - k\lambda^2 B_2$$

$$e_3 = \frac{1}{12} \lambda (2h^2 + 2h^2 B_2 + 6\lambda^2 k^2 B_2 + k^2 \lambda^2 + 12k\beta A_2 + 2h^2 B_1 + 12k\beta B_2)$$

$$e_4 = -\frac{1}{24} (1 + 4B_2) \lambda^4 k^3 - \frac{1}{4} (2A_2 + 4B_2 + 1) \beta \lambda^2 k^2 - \frac{1}{12} (\lambda^2 h^2 + 12\beta^2 A_2 + 2\lambda^2 h^2 B_2) k - \frac{1}{12} (1 + A_1 + A_2) \beta h^2$$

Stratégie pour définir le schéma

- $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ sont cherchés en imposant :
 - $= 0$
 - ≈ 0 (d'ordre 2 en temps et 4 en espace)
- Pour $e_1 = e_2 = e_3$, on se ramène à une indéterminée B_2

$$B_1 = -B_2$$

$$A_1 = -\frac{1}{12k\beta}(-2h^2 + 6\lambda^2 k^2 B_2 - k^2 \lambda^2 - 12k\beta B_2)$$

$$A_2 = -\frac{1}{12k\beta}(2h^2 + 6\lambda^2 k^2 B_2 + k^2 \lambda^2 + 12k\beta B_2)$$

$$\text{avec } e_4 = \frac{1}{12}k(-\lambda^2 h^2 + k^2 \lambda^4 + 12\beta^2)B_2 - \frac{1}{12}\beta(-h^2 + 2k^2 \lambda^2)$$

- Prise en compte d'autres critères
 - Stabilité
 - Non oscillation
 - Diffusion numérique positive

Propriétés requises

Ecriture matricielle associée au schéma compact

$$A_n U^{n+1} = B_n U^n$$

où A_n and B_n matrices tridiagonales

$$A_n = [a_{-1}, a_0, a_1], \quad B_n = [b_{-1}, b_0, b_1]$$

- stabilité $\iff \begin{cases} (a_1 - a_{-1})^2 - (b_1 - b_{-1})^2 > a_1 + a_{-1} - b_1 - b_{-1} \\ (a_1 + a_{-1})^2 - (b_1 + b_{-1})^2 > a_1 + a_{-1} - b_1 - b_{-1} \end{cases}$
- non oscillant $\iff (a_1 - b_1)(a_{-1} - b_{-1}) \geq 0$
- Diffusion numérique positive $\iff 1 + \beta A_1 + \beta A_2 > 0$

Expression des conditions

En complément du caractère compact et de l'ordre élevé (2,4)

Pour $\alpha = \frac{\lambda h}{2}$, $r = \frac{k}{h^2}$, $\mu = \frac{k}{h}$

- Stabilité \iff

$$(-\beta + 4r\alpha^2 B_2)(-1 + 4r^2\alpha^2 + 12\beta r B_2) > 0$$

- Non-oscillant \iff

$$(-\beta + 4r\alpha^2 B_2 + \alpha)(-\beta + 4r\alpha^2 B_2 - \alpha) \geq 0$$

- Diffusion numérique positive \iff

$$1 - 4r\alpha^2 B_2 > 0$$

Schéma R3C

- B_2 est choisi de façon à assurer $e_4 = O(k^2 + h^4)$
on annule dans e_4 les termes d'ordres les plus bas

$$B_2 = -\frac{1}{12} \frac{h^2}{\beta k} + b = -\frac{1}{12} \frac{h^2}{\beta k} - \frac{\lambda^2 k}{12\beta} = -\frac{1 + 4r^2\alpha^2}{12\beta r}$$

- Avec ce choix $e_4 = -\frac{\lambda^2(-h^4+36k^2\beta^2)}{144\beta} + O(h^4 + k^2)$
- Le schéma obtenu est appelé R3C et correspond à

$$a_{-1} = -\frac{12r\beta^2 - 2\beta + r\lambda^2 h^2 + r^3 \lambda^4 h^4 + 6r\lambda h\beta - \lambda h - r^2 \lambda^3 h^3}{24\beta}$$

$$b_{-1} = \frac{12r\beta^2 + 2\beta + r\lambda^2 h^2 + r^3 \lambda^4 h^4 + 6r\lambda h\beta + \lambda h + r^2 \lambda^3 h^3}{24\beta}$$

$$a_0 = \frac{10\beta + 12r\beta^2 + r\lambda^2 h^2 + r^3 \lambda^4 h^4}{12\beta}$$

$$b_0 = -\frac{-10\beta + 12r\beta^2 + r\lambda^2 h^2 + r^3 \lambda^4 h^4}{12\beta}$$

$$a_1 = -\frac{12r\beta^2 - 2\beta + r\lambda^2 h^2 + r^3 \lambda^4 h^4 - 6r\lambda h\beta + \lambda h + r^2 \lambda^3 h^3}{24\beta}$$

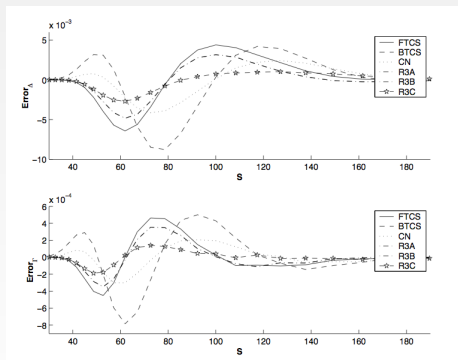
$$b_1 = \frac{12r\beta^2 + 2\beta + r\lambda^2 h^2 + r^3 \lambda^4 h^4 - 6r\lambda h\beta - \lambda h - r^2 \lambda^3 h^3}{24\beta}$$

Comparaisons avec les schémas classiques

Indicateurs Delta et Gamma

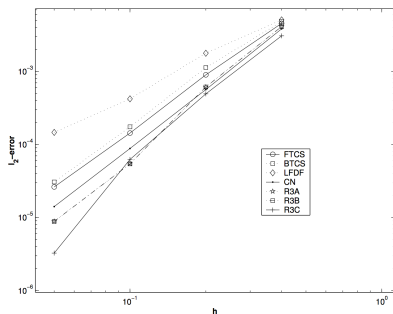
- Pour 50 points de discrétisation avec les paramètres

$$a = 0.02, \quad \sigma_0 = 0.2, \quad r = 0.1, \quad E = 100, \quad T = 0.02$$



Taux de convergence

- Caractérisation numérique de m tel que $\varepsilon_2 = Ch^m$



	m_{max}	m_{min}	m_{av}
FTCS	2.65	2.34	2.48
BTCS	2.70	2.09	2.43
LDFD	2.08	1.52	1.80
CN	2.76	2.64	2.69
R3A	3.41	2.75	3.13
R3B	3.42	2.75	3.13
R3C	4.26	2.98	3.29

Propriétés de positivité

$$\text{R3C} : A_n U^{n+1} = B_n U^n \text{ avec } A_n = [a_{-1}, a_0, a_1], B_n = [b_{-1}, b_0, b_1]$$

Lemme

Si $h < 2$ et $1/(6\beta) \leq r < 1/(2\beta)$ alors (suffisant nécessaire)

- B_n est positive
- A_n est M-matrice
 - a_0, b_{-1}, b_0, b_1 sont positifs, a_{-1}, a_1 sont négatifs ou nuls
 - A_n est non-singulière et $(A_n)^{-1}$ est une matrice positive

Conséquence

Le schéma R3C est positif, c'est à dire, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$U^n \geq 0 \implies U^{n+1} \geq 0$$

Analyse de convergence [M²AN 2004]

Théorème

Supposons le lemme vérifié, Ψ' borné et a petit alors la solution numérique converge uniformément sur tout sous domaine de $\bar{\Omega}$ vers l'unique solution de viscosité du problème lorsque $(k, h) \rightarrow 0$

Preuve

- Justification la non propagation de l'erreur introduite par la résolution numérique du problème sur Ψ lorsque l'on considère un domaine borné [Barles, Perthame 87]
- Vérification des hypothèses du théorème donné dans [Barles, Souganides 91] (stabilité, consistance, monotonie)

Le modèle stochastique de Heston [J. Comp. Appl. Math. 2012]

- Modèle plus réaliste avec le prix de l'option $V = V(S, \sigma, t)$
- Le modèle repose non plus sur une seul E.D. Stochastique mais sur système faisant intervenir deux mouvements Browniens corrélés $dW^{(1)}(t)dW^{(2)}(t) = \rho dt$:

$$dS(t) = \bar{\mu}S(t) + \sqrt{\sigma(t)}S(t)dW^{(1)}(t)$$

$$d\sigma(t) = \kappa^*(\theta^* - \sigma(t))dt + v\sqrt{\sigma(t)}dW^{(2)}(t)$$

pour $0 < t < T$ avec $S(0)$ et $\sigma(0) > 0$

$\bar{\mu}, \kappa^*, v$ et θ^* sont respectivement les paramètres du modèle :
 dérivée de la volatilité, vitesse moyenne caractéristique,
 volatilité de la volatilité, valeur moyenne en temps long de σ

Le modèle de Heston

- Ici $S, \sigma > 0, 0 \leq t < T$

$$V_t + \frac{1}{2} S^2 \sigma V_{SS} + \rho v \sigma S V_{S\sigma} + \frac{1}{2} v^2 \sigma V_{\sigma\sigma} + r S V_S + [\kappa^* (\theta^* - \sigma) - \lambda \sigma] V_\sigma - r V = 0$$

- Condition finale pour une option de vente européenne avec un prix d'exercice E (put)

$$V(S, \sigma, T) = \max(E - S, 0)$$

- Conditions aux limites pour une option de vente (put option)

$$V(0, \sigma, t) = E e^{-r(T-t)}, \quad T > t \geq 0, \quad \sigma > 0$$

$$V(S, \sigma, t) \rightarrow 0, \quad T > t \geq 0, \quad \sigma > 0, \quad \text{quand } S \rightarrow \infty$$

$$V_\sigma(S, \sigma, t) \rightarrow 0, \quad T > t \geq 0, \quad S > 0, \quad \text{quand } \sigma \rightarrow \infty$$

$$V_\sigma(S, \sigma, t) \rightarrow 0, \quad T > t \geq 0, \quad S > 0, \quad \text{quand } \sigma \rightarrow 0$$

Changement de variables

- Changement de variables : $\kappa = \kappa^* + \lambda, \theta = \kappa^* \theta^* / (\kappa^* + \lambda)$
 $x = \ln(S/E), y = \sigma/v, \tilde{t} = T - t, u = \exp(r\tilde{t})V/E$ (sans les $\tilde{\cdot}$)

$$u_t - \frac{1}{2}vy(u_{xx} + u_{yy}) - \rho vy u_{xy} + \left(\frac{1}{2}vy - r\right)u_x - \kappa \frac{\theta - vy}{v}u_y = 0$$

↑
Dérivée croisée

- Conditions aux limites et condition initiale

$$u(x, \sigma, 0) = \max(1 - \exp(x), 0), \quad x \in \mathbb{R}, \sigma > 0,$$

$$u(x, \sigma, t) \rightarrow 1, \quad x \rightarrow -\infty, \sigma > 0, t > 0,$$

$$u(x, \sigma, t) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow +\infty, \sigma > 0, t > 0,$$

$$u_\sigma(x, \sigma, t) \rightarrow 0, \quad x \in \mathbb{R}, \sigma \rightarrow \infty, t > 0,$$

$$u_\sigma(x, \sigma, t) \rightarrow 0, \quad x \in \mathbb{R}, \sigma \rightarrow 0, t > 0.$$

Approche méthodologique

Partant de

$$u_t - \frac{1}{2}vy(u_{xx} + u_{yy}) - \rho vy u_{xy} + \left(\frac{1}{2}vy - r\right)u_x - \kappa \frac{\theta - vy}{v}u_y = 0$$

- Construction d'un schéma HOC pour le problème stationnaire (Semi-discrétisation)

$$f(x, y) = -\frac{1}{2}vy(u_{xx} + u_{yy}) - \rho vy u_{xy} + \left(\frac{1}{2}vy - r\right)u_x - \kappa \frac{\theta - vy}{v}u_y$$

$$\implies \sum_{l=0}^8 \alpha_l u_l = \sum_{l=0}^8 \gamma_l f_l$$

- Prise en compte de la dérivée en temps u_t (θ -schéma)

$$\implies \sum_{l=0}^8 \beta_l u_l^{n+1} = \sum_{l=0}^8 \zeta_l u_l^n$$

(β_l, ζ_l) s'expriment en fonction de (α_l, γ_l)

Schéma HOC pour Heston

- Approximation de $\frac{\partial u}{\partial t} = f(t, x)$
au temps $t_\mu = (1 - \mu)t^n + \mu t^{n+1}$, où $0 \leq \mu \leq 1$

$$\delta_t^+ u^n = \frac{u^{n+1} - u^n}{k} = (1 - \mu)f^n + \mu f^{n+1}$$

- Forward Euler ($\mu = 0$)
- Backward Euler ($\mu = 1$)
- Crank-Nicolson ($\mu = 1/2$)
- Au noeud (i, j) et à l'instant t^n le schéma s'écrit

$$\sum_{l=0}^8 \mu \alpha_l u_l^{n+1} + (1 - \mu) \alpha_l u_l^n = \sum_{l=0}^8 \gamma_l \delta_t^+ u_l^n$$

Construction du schéma

- Discrétisation du problème **stationnaire**

à l'aide d'approximations centrées δ_x, δ_x^2 (d'ordre 2) :

$$-\frac{1}{2}vy_j(\delta_x^2 u_{i,j} + \delta_y^2 u_{i,j}) - \rho vy_j \delta_x \delta_y u_{i,j} \\ + \left(\frac{1}{2}vy_j - r\right)\delta_x u_{i,j} - \kappa \frac{\theta - vy_j}{v} \delta_y u_{i,j} - \tau_{i,j} = f_{i,j}$$

- L'erreur de troncature est alors égale à

$$\tau_{i,j} = \frac{1}{24}vy h^2 (u_{xxxx} + u_{yyyy}) + \frac{1}{6}\rho vy h^2 (u_{xyyy} + u_{xxyy}) \\ + \frac{1}{12}(2r - vy)h^2 u_{xxx} + \frac{1}{6}\kappa \frac{(\theta - vy)}{v} h^2 u_{yyy} + \mathcal{O}(h^4)$$

- Les dérivées d'ordre supérieur $\subset \tau_{ij}$ sont substituées par des expressions **exactes** déduites par dérivation formelle du problème continu

Schéma HOC pour Heston

Le stencil

$$\left(\begin{array}{ccc} u_{i-1,j+1} = u_6 & u_{i,j+1} = u_2 & u_{i+1,j+1} = u_5 \\ u_{i-1,j} = u_3 & u_{i,j} = u_0 & u_{i+1,j} = u_1 \\ u_{i-1,j-1} = u_7 & u_{i,j-1} = u_4 & u_{i+1,j-1} = u_8 \end{array} \right)$$

Le schéma s'écrit $\sum_{l=0}^8 \alpha_l u_l = \sum_{l=0}^8 \gamma_l f_l$ où

$$\gamma_0 = \frac{2}{3}, \quad \gamma_5 = \gamma_7 = \frac{\rho}{24}, \quad \gamma_6 = \gamma_8 = -\frac{\rho}{24},$$

$$\gamma_{1,3} = \frac{1}{12} \mp \frac{h}{24} \pm \frac{1}{12} \frac{(r - \rho v)h}{vy_j}, \quad \gamma_{2,4} = \frac{1}{12} \mp \frac{1}{12} \frac{\kappa h}{v} \mp \frac{1}{12} \frac{(v^2 - \kappa \theta)h}{v^2 y_j}$$

Schéma HOC pour Heston

$$\alpha_{0,0} = \left(\frac{4\kappa^2 + v^2}{12v} - \frac{v(2\rho^2 - 5)}{3h^2} \right) y_j - \frac{\kappa v^2 + 2\kappa^2\theta + v^2 r}{3v^2} + \frac{-v^4 + \kappa^2\theta^2 - v^3 r\rho + v^2 r^2}{3v^3 y_j},$$

$$\alpha_{1,3} = \left(-\frac{v}{24} + \frac{\pm \frac{1}{6}v \mp \frac{1}{3}\kappa\rho}{h} + \frac{v(\rho^2 - 1)}{3h^2} \right) y_j \mp \frac{\kappa h}{24} + \frac{\kappa}{12} + \frac{r}{6}$$

$$\mp \frac{vr - \kappa\theta\rho}{3vh} \mp \frac{(v^2 - \kappa\theta)h}{24vy_j} - \frac{-2rv\rho + \kappa\theta + 2r^2 - v^2}{12vy_j},$$

$$\alpha_{2,4} = \left(-\frac{\kappa^2}{6v} + \frac{\pm \frac{1}{3}\kappa \mp \frac{1}{6}\rho v}{h} + \frac{v(\rho^2 - 1)}{3h^2} \right) y_j \mp \frac{\kappa^2 h}{12v} + \frac{\kappa(v^2 + 4\kappa\theta)}{12v^2}$$

$$\mp \frac{rv\rho - \kappa\theta}{3vh} \mp \frac{\kappa(v^2 - \kappa\theta)h}{12v^2 y_j} + \frac{(2\kappa\theta + v^2)(v^2 - \kappa\theta)}{12v^3 y_j},$$

$$\alpha_{5,7} = \left(-\frac{\kappa}{24} \pm \frac{(2\rho + 1)(2\kappa + v)}{24h} - \frac{v(\rho + 1)(2\rho + 1)}{12h^2} \right) y_j$$

$$+ \frac{\kappa(\rho v + 2r + \theta)}{24v} \mp \frac{(2\rho + 1)(\kappa\theta + vr)}{12vh} + \frac{v^2 r + v^3 \rho - 2r\kappa\theta}{24v^2 y_j},$$

$$\alpha_{6,8} = \left(\frac{\kappa}{24} \pm \frac{(2\rho - 1)(-2\kappa + v)}{24h} - \frac{v(2\rho - 1)(\rho - 1)}{12h^2} \right) y_j$$

$$- \frac{\kappa(\rho v + 2r + \theta)}{24v} \mp \frac{(2\rho - 1)(vr - \kappa\theta)}{12vh} - \frac{v^2 r + v^3 \rho - 2r\kappa\theta}{24v^2 y_j},$$

Stabilité et convergence

Théorème

Pour $r = \rho = 0$ et $\mu = 1/2$ (Crank-Nicolson)
le schéma compact est d'ordre (2,4) et inconditionnellement stable
et donc convergent (Lax-Richtmyer).

Preuve

Gel des coefficients.

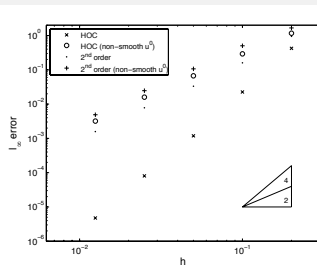
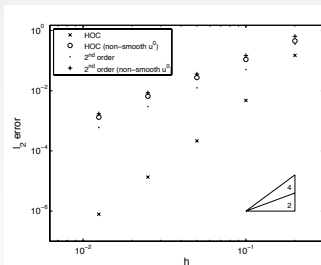
Etude du signe du facteur d'amplification $u_{i,j}^n \leftarrow g^n e^{li z_1 + lj z_2}$ (Maple).

$|G| = \left| \frac{g^{n+1}}{g^n} \right| \leq 1$ vérifiée pour toute valeur des paramètres du modèle

Tests numériques

On considère

- $E = 100$, $T = 0.5$, $r = 0.05$, $v = 0.1$, $\kappa = 2$,
 $\theta = 0.01$, $\rho = -0.5$, $\mu = 1/2$
- le rapport k/h^2 fixé



Courbes d'erreurs

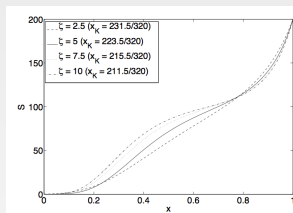
Fonction Zoom [C. Heuer]

- Introduction d'une fonction Zoom autour de $S = 0$: $S = \phi(x)$

- $\phi(x) = x \longrightarrow$ schéma précédent
- $\phi(x) = \frac{\sinh(c_2 x + c_1(1-x))}{\zeta}$ pour $\zeta > 0$,

$$c_1 = \operatorname{asinh}(\zeta S_{\min}), \quad c_2 = \operatorname{asinh}(\zeta S_{\max})$$

- On est ramené à une discrétisation sur maillage uniforme
- L'approche faite précédemment est appliquée
- Emploi de relations formelles déduites du problème continu
- Le schéma final dépend du choix des relations (ordre dans lequel elles sont appliquées)
- Etude exhaustive avec mise en évidence des meilleurs choix



Méthodes Alternating Direction Implicit (ADI)

- Problème de convection-diffusion

$$u_t = c \cdot \nabla u + \nabla \cdot (D \nabla u)$$

où

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}$$

et D est **full** (non-diagonal) semi-définie positive

$$d_{11} \geq 0, \quad d_{22} \geq 0, \quad (d_{12} + d_{21})^2 \leq 4d_{11}d_{22}$$

- Le problème s'écrit sous la forme

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} = \underbrace{(d_{12} + d_{21}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}}_{F_0} + \underbrace{\left(c_1 \frac{\partial u}{\partial x} + d_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)}_{F_1} + \underbrace{\left(c_2 \frac{\partial u}{\partial y} + d_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)}_{F_2}$$

Pourquoi ?

- Cadre très général
- Particulièrement adapté en Finance
 - Prise en compte des dérivées croisées
 - Gestion des maillages non uniformes
 - Gestion de géométries complexes
(fonction zoom pouvant introduire des dérivées croisées)
- Extension des travaux de [in't Hout, Welfert (2002, 07, 10)]
Méthodes ADI inconditionnellement stable d'ordre 2 en temps
 - Ordre élevé mais schéma Non-compact
 - Schéma Compact d'Ordre élevé

Problème considérés

$$\bullet \frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t} = \underbrace{(d_{12} + d_{21}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}}_{F_0} + \underbrace{(c_1 \frac{\partial u}{\partial x} + d_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2})}_{F_1} + \underbrace{(c_2 \frac{\partial u}{\partial y} + d_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2})}_{F_2} = F$$

- On considère

$$k \begin{cases} Y^0 &= U^{n-1} + kF(U^{n-1}) \\ Y^1 &= Y^0 + (k/2)(F_1(Y^1) - F_1(U^{n-1})) \\ Y^2 &= Y^1 + (k/2)(F_2(Y^2) - F_2(U^{n-1})) \\ \tilde{Y}^0 &= Y^0 + (k/2)(F(Y^2) - F(U^{n-1})) \\ \tilde{Y}^1 &= \tilde{Y}^0 + (k/2)(F_1(\tilde{Y}^1) - F_1(Y^2)) \\ \tilde{Y}^2 &= \tilde{Y}^1 + (k/2)(F_2(\tilde{Y}^2) - F_2(Y^2)) \\ U^n &= \tilde{Y}^2 \end{cases}$$

- $F_0, (F)$ traité **explicitement** à l'ordre 4 (5-points)
- F_1, F_2 traités **implicitement** à l'ordre 4 (3-points)

Conclusion

Survol de quelques schémas compacts d'ordre élevé avec

- condition initiale non régulière
- non-linéarité
- analyse de stabilité et de convergence
- maillage non-uniforme
- approche ADI

Tous ces points sont NON SPECIFIQUES A LA FINANCE

- Peu de résultats théoriques existent
- malgré leur emploi de plus en plus fréquent
- dû à leur grande efficacité (robuste) :
précision et temps de calcul

Merci

41/41