Théorie Géométrique des Représentations et conjecture de Kazhdan–Lusztig

Simon Riche

Université Clermont-Auvergne
Laboratoire de Mathématiques Blaise Pascal

Lycée Blaise Pascal – 20 mars 2018

1 Groupes

2 Théorie des représentations

3 Les groupes algébriques réductifs

4 La conjecture de Kazhdan–Lusztig

1 Groupes

2 Théorie des représentations

3 Les groupes algébriques réductifs

4 La conjecture de Kazhdan–Lusztig

Définition (Groupe)

Un *groupe* est une paire $(G, \bullet)$ où G est un ensemble et

$$(-) \bullet (-) : G \times G \to G$$

est une application telle que

1. (associativité) pour tous $x, y, z \in G$ on a $x \bullet (y \bullet z) = (x \bullet y) \bullet z$;
2. (neutre) il existe un élément $e \in G$ (nécessairement unique) tel que pour tout $x \in G$ on a $x \bullet e = e \bullet x = x$;
3. (inverses) pour tout $x \in G$ il existe un élément $x^{-1} \in G$ (nécessairement unique) tel que $x \bullet x^{-1} = x^{-1} \bullet x = e$.

Définition (Groupe)

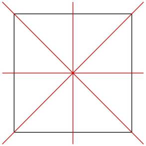
Un *groupe* est une paire $(G, \bullet)$ où G est un ensemble et

$$(-) \bullet (-) : G \times G \to G$$

est une application telle que

1. (associativité) pour tous $x, y, z \in G$ on a $x \bullet (y \bullet z) = (x \bullet y) \bullet z$;
2. (neutre) il existe un élément $e \in G$ (nécessairement unique) tel que pour tout $x \in G$ on a $x \bullet e = e \bullet x = x$;
3. (inverses) pour tout $x \in G$ il existe un élément $x^{-1} \in G$ (nécessairement unique) tel que $x \bullet x^{-1} = x^{-1} \bullet x = e$.

La notion de groupe formalise l'idée de *symétrie* :



L'invention (ou au moins le développement) de cette notion est souvent attribué à Évariste Galois (1811-1832).

L'invention (ou au moins le développement) de cette notion est souvent attribué à Évariste Galois (1811-1832).

Idée de base de la "théorie de Galois" : pour comprendre les racines d'un polynôme $f \in \mathbb{Q}[X]$ il faut comprendre leurs "symétries", c'est-à-dire le groupe $\mathrm{Gal}(f)$ des automorphismes du sous-corps de $\mathbb{C}$ engendré par ces racines.

L'invention (ou au moins le développement) de cette notion est souvent attribué à Évariste Galois (1811-1832).

Idée de base de la "théorie de Galois" : pour comprendre les racines d'un polynôme $f \in \mathbb{Q}[X]$ il faut comprendre leurs "symétries", c'est-à-dire le groupe $\mathrm{Gal}(f)$ des automorphismes du sous-corps de $\mathbb{C}$ engendré par ces racines.

Théorème (Galois)

L'équation $f(x) = 0$ est résoluble par radicaux si et seulement si $\mathrm{Gal}(f)$ est résoluble.

MÉMOIRE

Sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux.

MÉMOIRE

Sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux.

PROPOSITION I.

THÉORÈME. « Soit une équation donnée, dont a, b, c, ... sont les
» m racines. Il y aura toujours un groupe de permutations des lettres
» a, b, c,... qui jouira de la propriété suivante :

» 1°. Que toute fonction des racines, invariable [*] par les substi-
» tutions de ce groupe, soit rationnellement connue ;

» 2°. Réciproquement, que toute fonction des racines, déterminable
» rationnellement, soit invariable par les substitutions. »

PROPOSITION V.

PROBLÈME. « Dans quels cas une équation est-elle soluble par de » simples radicaux? »

J'observerai d'abord que, pour résoudre une équation, il faut successivement abaisser son groupe jusqu'à ne contenir plus qu'une seule permutation. Car, quand une équation est résolue, une fonction quelconque de ses racines est connue, même quand elle n'est invariable par aucune permutation.

Cela posé, cherchons à quelle condition doit satisfaire le groupe d'une équation, pour qu'il puisse s'abaisser ainsi par l'adjonction de quantités radicales.

Suivons la marche des opérations possibles dans cette solution, en considérant comme opérations distinctes l'extraction de chaque racine de degré premier.

Adjoignons à l'équation le premier radical extrait dans la solution. Il pourra arriver deux cas : ou bien, par l'adjonction de ce radical, le groupe des permutations de l'équation sera diminué; ou bien, cette extraction de racine n'étant qu'une simple préparation, le groupe restera le même.

Toujours sera-t-il qu'après un certain nombre *fini* d'extractions de racines, le groupe devra se trouver diminué, sans quoi l'équation ne serait pas soluble.

Si, arrivé à ce point, il y avait plusieurs manières de diminuer le groupe de l'équation proposée par une simple extraction de racine, il faudrait, pour ce que nous allons dire, considérer seulement un radical du degré le moins haut possible parmi tous les simples radicaux, qui sont tels que la connaissance de chacun d'eux diminue le groupe de l'équation.

Soit donc p le nombre premier qui représente ce degré minimum, en sorte que par une extraction de racine de degré p, on diminue le groupe de l'équation.

Nous pouvons toujours supposer, du moins pour ce qui est relatif au groupe de l'équation, que parmi les quantités adjointes précédemment à l'équation se trouve une racine $p^{ième}$ de l'unité, α. Car, comme

Lettre de Galois à M. Auguste Chevalier [*].

(Insérée en 1832 dans la *Revue encyclopédique,* numéro de septembre, page 568.)

Mon cher ami,

J'ai fait en analyse plusieurs choses nouvelles.

Les unes concernent la théorie des équations; les autres, les fonctions intégrales.

Dans la théorie des équations, j'ai recherché dans quels cas les équations étaient résolubles par des radicaux, ce qui m'a donné occasion d'approfondir cette théorie, et de décrire toutes les transformations possibles sur une équation, lors même qu'elle n'est pas soluble par radicaux.

On pourra faire avec tout cela trois Mémoires.

Le premier est écrit, et, malgré ce qu'en a dit Poisson, je le maintiens, avec les corrections que j'y ai faites.

Le second contient des applications assez curieuses de la théorie des équations. Voici le résumé des choses les plus importantes :

1°. D'après les propositions II et III du premier Mémoire, on voit une grande différence entre adjoindre à une équation une des racines d'une équation auxiliaire ou les adjoindre toutes.

Dans les deux cas, le groupe de l'équation se partage par l'adjonction en groupes tels, que l'on passe de l'un à l'autre par une même substitution; mais la condition que ces groupes aient les mêmes substitutions n'a lieu certainement que dans le second cas. Cela s'appelle *la décomposition propre.*

En d'autres termes, quand un groupe G en contient un autre H, le groupe G peut se partager en groupes, que l'on obtient chacun en opérant sur les permutations de H une même substitution; en sorte que

$$G = H + HS + HS' + \ldots.$$

Et aussi il peut se décomposer en groupes qui ont tous les mêmes substitutions, en sorte que

$$G = H + TH + T'H + \ldots.$$

Ces deux genres de décompositions ne coïncident pas ordinairement. Quand ils coïncident, la décomposition est dite *propre.*

Il est aisé de voir que, quand le groupe d'une équation n'est susceptible d'aucune décomposition propre, on aura beau transformer cette équation, les groupes des équations transformées auront toujours le même nombre de permutations.

Au contraire, quand le groupe d'une équation est susceptible d'une décomposition propre, en sorte qu'il se partage en M groupes de N permutations, on pourra résoudre l'équation donnée au moyen de deux équations : l'une aura un groupe de M permutations, l'autre un de N permutations.

Lors donc qu'on aura épuisé sur le groupe d'une équation tout ce qu'il y a de décompositions propres possibles sur ce groupe, on arrivera à des groupes qu'on pourra transformer, mais dont les permutations seront toujours en même nombre.

Si ces groupes ont chacun un nombre premier de permutations, l'équation sera soluble par radicaux; sinon, non.

Le plus petit nombre de permutations que puisse avoir un groupe indécomposable, quand ce nombre n'est pas premier, est 5.4.3.

Exemples de groupes

- Si X est un ensemble, alors l'ensemble $\mathfrak{S}(X)$ des bijections de X dans X est un groupe (pour la composition des applications).

Exemples de groupes

- Si X est un ensemble, alors l'ensemble $\mathfrak{S}(X)$ des bijections de X dans X est un groupe (pour la composition des applications).

  Exemple : $\mathfrak{S}_n = \mathfrak{S}(\{1, 2, \cdots, n\})$. Si $n = 3$:

$$\begin{array}{ccc} 1 & \to & 1 \\ 2 & \to & 2 \\ 3 & \to & 3 \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} 1 & \to & 1 \\ 2 & \to & 3 \\ 3 & \to & 2 \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} 1 & \to & 2 \\ 2 & \to & 1 \\ 3 & \to & 3 \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} 1 & \to & 2 \\ 2 & \to & 3 \\ 3 & \to & 1 \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} 1 & \to & 3 \\ 2 & \to & 2 \\ 3 & \to & 1 \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} 1 & \to & 3 \\ 2 & \to & 1 \\ 3 & \to & 2 \end{array}$$

Exemples de groupes

- Si X est un ensemble, alors l'ensemble $\mathfrak{S}(X)$ des bijections de X dans X est un groupe (pour la composition des applications).

  Exemple : $\mathfrak{S}_n = \mathfrak{S}(\{1, 2, \cdots, n\})$. Si $n = 3$:

$$\begin{array}{ccc} 1 & \to & 1 \\ 2 & \to & 2 \\ 3 & \to & 3 \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} 1 & \to & 1 \\ 2 & \to & 3 \\ 3 & \to & 2 \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} 1 & \to & 2 \\ 2 & \to & 1 \\ 3 & \to & 3 \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} 1 & \to & 2 \\ 2 & \to & 3 \\ 3 & \to & 1 \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} 1 & \to & 3 \\ 2 & \to & 2 \\ 3 & \to & 1 \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} 1 & \to & 3 \\ 2 & \to & 1 \\ 3 & \to & 2 \end{array}$$

- Si V est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel alors $\mathrm{GL}(V)$ et $\mathrm{SL}(V)$ sont des groupes.

Exemples de groupes

- Si X est un ensemble, alors l'ensemble $\mathfrak{S}(X)$ des bijections de X dans X est un groupe (pour la composition des applications).

  Exemple : $\mathfrak{S}_n = \mathfrak{S}(\{1, 2, \cdots, n\})$. Si $n = 3$:

$$\begin{array}{ccc} 1 & \to & 1 \\ 2 & \to & 2 \\ 3 & \to & 3 \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} 1 & \to & 1 \\ 2 & \to & 3 \\ 3 & \to & 2 \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} 1 & \to & 2 \\ 2 & \to & 1 \\ 3 & \to & 3 \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} 1 & \to & 2 \\ 2 & \to & 3 \\ 3 & \to & 1 \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} 1 & \to & 3 \\ 2 & \to & 2 \\ 3 & \to & 1 \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} 1 & \to & 3 \\ 2 & \to & 1 \\ 3 & \to & 2 \end{array}$$

- Si V est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel alors $\mathrm{GL}(V)$ et $\mathrm{SL}(V)$ sont des groupes.

  Exemple : $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) = \mathrm{GL}(\mathbb{C}^n)$ et $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) = \mathrm{SL}(\mathbb{C}^n)$.

1 Groupes

2 Théorie des représentations

3 Les groupes algébriques réductifs

4 La conjecture de Kazhdan–Lusztig

Idée de base : dans la “nature”, les groupes *agissent* sur des ensembles.

Idée de base : dans la “nature”, les groupes *agissent* sur des ensembles.

Définition (action de groupe)

Soient $(G, \bullet)$ un groupe et X un ensemble. Une *action* de G sur X est la donnée, pour tout $g \in G$, d'un élément $\sigma_g \in \mathfrak{S}(X)$, de telle sorte que

$$\sigma_e = \mathrm{id}_X, \quad \sigma_g \circ \sigma_h = \sigma_{g \bullet h}.$$

Idée de base : dans la “nature”, les groupes *agissent* sur des ensembles.

Définition (action de groupe)

Soient $(G, \bullet)$ un groupe et X un ensemble. Une *action* de G sur X est la donnée, pour tout $g \in G$, d'un élément $\sigma_g \in \mathfrak{S}(X)$, de telle sorte que

$$\sigma_e = \mathrm{id}_X, \quad \sigma_g \circ \sigma_h = \sigma_{g \bullet h}.$$

$\rightsquigarrow$ On veut comprendre les actions des groupes sur un ensemble.

Idée de base : dans la “nature”, les groupes *agissent* sur des ensembles.

Définition (action de groupe)

Soient $(G, \bullet)$ un groupe et X un ensemble. Une *action* de G sur X est la donnée, pour tout $g \in G$, d'un élément $\sigma_g \in \mathfrak{S}(X)$, de telle sorte que

$$\sigma_e = \mathrm{id}_X, \quad \sigma_g \circ \sigma_h = \sigma_{g \bullet h}.$$

$\rightsquigarrow$ On veut comprendre les actions des groupes sur un ensemble.

Problème : c'est beaucoup trop difficile !

Idée de base : dans la “nature”, les groupes *agissent* sur des ensembles.

Définition (action de groupe)

Soient $(G, \bullet)$ un groupe et X un ensemble. Une *action* de G sur X est la donnée, pour tout $g \in G$, d'un élément $\sigma_g \in \mathfrak{S}(X)$, de telle sorte que

$$\sigma_e = \mathrm{id}_X, \quad \sigma_g \circ \sigma_h = \sigma_{g \bullet h}.$$

$\rightsquigarrow$ On veut comprendre les actions des groupes sur un ensemble.

Problème : c'est beaucoup trop difficile !

Exemple : Tout groupe G agit sur $X = G$ via

$$\sigma_g(h) = g \bullet h.$$

$\rightsquigarrow$ On va plutôt considérer les actions *linéaires*.

$\rightsquigarrow$ On va plutôt considérer les actions *linéaires*.

Définition (représentation, version 1)

Soit $(G, \bullet)$ un groupe. Une *représentation* de G est la donnée d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V et, pour tout $g \in G$, d'un endomorphisme inversible $f_g^V \in \mathrm{GL}(V)$, de telle sorte que

$$f_e^V = \mathrm{Id}_V, \quad f_g^V \circ f_h^V = f_{g \bullet h}^V.$$

$\rightsquigarrow$ On va plutôt considérer les actions *linéaires*.

Définition (représentation, version 1)

Soit $(G, \bullet)$ un groupe. Une *représentation* de G est la donnée d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V et, pour tout $g \in G$, d'un endomorphisme inversible $f_g^V \in \mathrm{GL}(V)$, de telle sorte que

$$f_e^V = \mathrm{Id}_V, \quad f_g^V \circ f_h^V = f_{g \bullet h}^V.$$

Deux représentations V et V' seront dites *isomorphes* s'il existe un isomorphisme $\varphi : V \to V'$ tel que $f_g^{V'} \circ \varphi = \varphi \circ f_g^V$ pour tout $g \in G$.

$\rightsquigarrow$ On va plutôt considérer les actions *linéaires*.

Définition (représentation, version 1)

Soit $(G, \bullet)$ un groupe. Une *représentation* de G est la donnée d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V et, pour tout $g \in G$, d'un endomorphisme inversible $f_g^V \in \mathrm{GL}(V)$, de telle sorte que

$$f_e^V = \mathrm{Id}_V, \quad f_g^V \circ f_h^V = f_{g \bullet h}^V.$$

Deux représentations V et V' seront dites *isomorphes* s'il existe un isomorphisme $\varphi : V \to V'$ tel que $f_g^{V'} \circ \varphi = \varphi \circ f_g^V$ pour tout $g \in G$.

Définition (représentation, version 2)

Soit $(G, \bullet)$ un groupe. Une *représentation* de G de dimension n est la donnée, pour tout $g \in G$, d'une matrice $M_g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, de telle sorte que

$$M_e = \mathrm{Id}_n, \quad M_g \cdot M_h = M_{g \bullet h}.$$

$\rightsquigarrow$ On va plutôt considérer les actions *linéaires*.

Définition (représentation, version 1)

Soit $(G, \bullet)$ un groupe. Une *représentation* de G est la donnée d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V et, pour tout $g \in G$, d'un endomorphisme inversible $f_g^V \in \mathrm{GL}(V)$, de telle sorte que

$$f_e^V = \mathrm{Id}_V, \quad f_g^V \circ f_h^V = f_{g \bullet h}^V.$$

Deux représentations V et V' seront dites *isomorphes* s'il existe un isomorphisme $\varphi : V \to V'$ tel que $f_g^{V'} \circ \varphi = \varphi \circ f_g^V$ pour tout $g \in G$.

Définition (représentation, version 2)

Soit $(G, \bullet)$ un groupe. Une *représentation* de G de dimension n est la donnée, pour tout $g \in G$, d'une matrice $M_g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, de telle sorte que

$$M_e = \mathrm{Id}_n, \quad M_g \cdot M_h = M_{g \bullet h}.$$

Deux représentations $(M_g)_{g \in G}$ et $(N_g)_{g \in G}$ seront dites *isomorphes* s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $N_g = P \cdot M_g \cdot P^{-1}$ pour tout $g \in G$.

Étant donnée une action de G sur un ensemble fini X, on peut construire une représentation de G de la façon suivante : on écrit $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$, puis à $g \in G$ on associe la matrice dont la j-ème colonne a un 1 en position i si $\sigma_g(x_j) = x_i$, et des 0 ailleurs.

Étant donnée une action de G sur un ensemble fini X, on peut construire une représentation de G de la façon suivante : on écrit $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$, puis à $g \in G$ on associe la matrice dont la j-ème colonne a un 1 en position i si $\sigma_g(x_j) = x_i$, et des 0 ailleurs.

Exemple : $\mathfrak{S}_n$ agit sur l'ensemble $\{1, \cdots, n\}$.

Étant donnée une action de G sur un ensemble fini X, on peut construire une représentation de G de la façon suivante : on écrit $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$, puis à $g \in G$ on associe la matrice dont la j-ème colonne a un 1 en position i si $\sigma_g(x_j) = x_i$, et des 0 ailleurs.

Exemple : $\mathfrak{S}_n$ agit sur l'ensemble $\{1, \cdots, n\}$. La représentation associée est donnée par

$$M_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)})_{i,j \in \{1,\cdots,n\}}.$$

Étant donnée une action de G sur un ensemble fini X, on peut construire une représentation de G de la façon suivante : on écrit $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$, puis à $g \in G$ on associe la matrice dont la j-ème colonne a un 1 en position i si $\sigma_g(x_j) = x_i$, et des 0 ailleurs.

Exemple : $\mathfrak{S}_n$ agit sur l'ensemble $\{1, \cdots, n\}$. La représentation associée est donnée par

$$M_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)})_{i,j \in \{1,\cdots,n\}}.$$

Cette représentation se "scinde" en somme de 2 sous-espaces vectoriels stables :

$$\mathbb{C}^n = \{(x_1, \cdots, x_n) \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = 0\} \oplus \mathbb{C} \cdot (1, \cdots, 1),$$

alors que l'action initiale ne peut pas se "découper" d'une façon comparable.

Briques élémentaires pour les représentations : celles qui sont *simples*, c'est-à-dire celles qui n'admettent aucun sous-espace vectoriel stable par tous les endomorphismes f_g^V autre que $\{0\}$ et V.

Briques élémentaires pour les représentations : celles qui sont *simples*, c'est-à-dire celles qui n'admettent aucun sous-espace vectoriel stable par tous les endomorphismes f_g^V autre que $\{0\}$ et V.

Exemples :

1. Représentation triviale : $V = \mathbb{C}$ et $f_g^V = \mathrm{Id}_V$ pour tout $g \in G$.

Briques élémentaires pour les représentations : celles qui sont *simples*, c'est-à-dire celles qui n'admettent aucun sous-espace vectoriel stable par tous les endomorphismes f_g^V autre que $\{0\}$ et V.

Exemples :

1. Représentation triviale : $V = \mathbb{C}$ et $f_g^V = \mathrm{Id}_V$ pour tout $g \in G$.
2. Représentation de $\mathfrak{S}_n$ sur $\{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{C}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 0\}$.

Briques élémentaires pour les représentations : celles qui sont *simples*, c'est-à-dire celles qui n'admettent aucun sous-espace vectoriel stable par tous les endomorphismes f_g^V autre que $\{0\}$ et V.

Exemples :

1. Représentation triviale : $V = \mathbb{C}$ et $f_g^V = \mathrm{Id}_V$ pour tout $g \in G$.
2. Représentation de $\mathfrak{S}_n$ sur $\{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{C}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 0\}$.

Théorème (théorie des caractères)

Soit G un groupe fini.

Briques élémentaires pour les représentations : celles qui sont *simples*, c'est-à-dire celles qui n'admettent aucun sous-espace vectoriel stable par tous les endomorphismes f_g^V autre que $\{0\}$ et V.

Exemples :

1. Représentation triviale : $V = \mathbb{C}$ et $f_g^V = \mathrm{Id}_V$ pour tout $g \in G$.
2. Représentation de $\mathfrak{S}_n$ sur $\{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{C}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 0\}$.

Théorème (théorie des caractères)

Soit G un groupe fini.

1. Toute représentation de dimension finie de G est isomorphe à une somme directe de représentations simples.

Briques élémentaires pour les représentations : celles qui sont *simples*, c'est-à-dire celles qui n'admettent aucun sous-espace vectoriel stable par tous les endomorphismes f_g^V autre que $\{0\}$ et V.

Exemples :

1. Représentation triviale : $V = \mathbb{C}$ et $f_g^V = \mathrm{Id}_V$ pour tout $g \in G$.
2. Représentation de $\mathfrak{S}_n$ sur $\{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{C}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 0\}$.

Théorème (théorie des caractères)

Soit G un groupe fini.

1. Toute représentation de dimension finie de G est isomorphe à une somme directe de représentations simples.
2. À isomorphisme près, il y a autant de représentations simples de G que de classes de conjugaison dans G.

Briques élémentaires pour les représentations : celles qui sont *simples*, c'est-à-dire celles qui n'admettent aucun sous-espace vectoriel stable par tous les endomorphismes f_g^V autre que $\{0\}$ et V.

Exemples :

1. Représentation triviale : $V = \mathbb{C}$ et $f_g^V = \mathrm{Id}_V$ pour tout $g \in G$.
2. Représentation de $\mathfrak{S}_n$ sur $\{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{C}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 0\}$.

Théorème (théorie des caractères)

Soit G un groupe fini.

1. Toute représentation de dimension finie de G est isomorphe à une somme directe de représentations simples.
2. À isomorphisme près, il y a autant de représentations simples de G que de classes de conjugaison dans G.
3. Toute représentation V est caractérisée (à isomorphisme près) par son caractère, c'est-à-dire la fonction $g \mapsto \mathrm{Tr}(f_g^V)$.

La théorie des caractères doit beaucoup à Georg Frobenius (1849-1917) :

La théorie des caractères doit beaucoup à Georg Frobenius (1849-1917) :

C'est lui qui a calculé les premières “tables de caractères” (en 1896) :

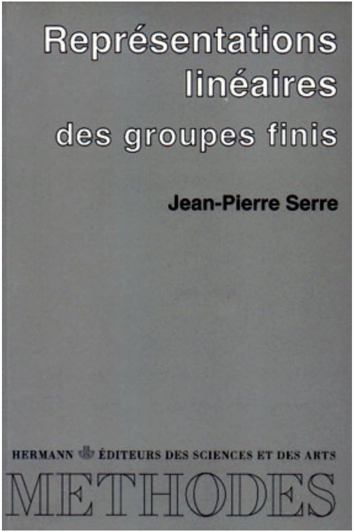
Über Gruppencharaktere.

Von G. Frobenius.

$h = 120$

	$\chi^{(0)}$	$\chi^{(1)}$	$\chi^{(2)}$	$\chi^{(3)}$	$\chi^{(4)}$	$\chi^{(5)}$	$\chi^{(6)}$	h_α
χ_0	1	5	5	4	4	6	1	1
χ_1	1	1	1	0	0	−2	1	15
χ_2	1	1	−1	2	−2	0	−1	10
χ_3	1	−1	−1	1	1	0	1	20
χ_4	1	−1	1	0	0	0	−1	30
χ_5	1	0	0	−1	−1	1	1	24
χ_6	1	1	−1	−1	1	0	−1	20

Auch für die symmetrische Gruppe n^{ten} Grades $\mathfrak{H}$ sind alle Charaktere ganze rationale Zahlen. Der Grund davon liegt darin, dass R und R^a stets in $\mathfrak{H}$ conjugirt sind, wenn a zur Ordnung von R theilerfremd ist.


Représentations
linéaires
des groupes finis
Jean-Pierre Serre
HERMANN ÉDITEURS DES SCIENCES ET DES ARTS
METHODES

1 Groupes

2 Théorie des représentations

3 Les groupes algébriques réductifs

4 La conjecture de Kazhdan–Lusztig

Les *groupes algébriques* sont ceux qui peuvent se définir dans des espaces de matrices par des équations *polynomiales* en les coefficients des matrices.

Les *groupes algébriques* sont ceux qui peuvent se définir dans des espaces de matrices par des équations *polynomiales* en les coefficients des matrices. Les “plus intéressants” du point de vue de la théorie des représentations sont ceux qui sont *réductifs*.

Les *groupes algébriques* sont ceux qui peuvent se définir dans des espaces de matrices par des équations *polynomiales* en les coefficients des matrices. Les “plus intéressants” du point de vue de la théorie des représentations sont ceux qui sont *réductifs*.

Exemples :

$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \det(M) = 1\},$$
$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) = \{(M, \lambda) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C} \mid \det(M) \cdot \lambda = 1\}.$$

Les *groupes algébriques* sont ceux qui peuvent se définir dans des espaces de matrices par des équations *polynomiales* en les coefficients des matrices. Les “plus intéressants” du point de vue de la théorie des représentations sont ceux qui sont *réductifs*.

Exemples :

$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \det(M) = 1\},$$
$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) = \{(M, \lambda) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C} \mid \det(M) \cdot \lambda = 1\}.$$

Ces groupes ont également une structure de *variété algébrique*.

Les *groupes algébriques* sont ceux qui peuvent se définir dans des espaces de matrices par des équations *polynomiales* en les coefficients des matrices. Les “plus intéressants” du point de vue de la théorie des représentations sont ceux qui sont *réductifs*.

Exemples :

$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \det(M) = 1\},$$
$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) = \{(M, \lambda) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C} \mid \det(M) \cdot \lambda = 1\}.$$

Ces groupes ont également une structure de *variété algébrique*. On s’intéresse à leurs représentations qui sont “compatibles” avec cette structure, c’est-à-dire telles que l’application $g \mapsto M_g$ est définie par des équations polynomiales en les coefficients de g (et $\det(g)^{-1}$).

Exemple : $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.

Exemple : $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.

Le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ agit sur $V = \mathbb{C}^2$.

Exemple : $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.

Le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ agit sur $V = \mathbb{C}^2$. Donc il agit sur l'espace $\mathcal{P} = \mathbb{C}[X, Y]$ des fonctions polynomiales sur V par

$$(g \cdot f)(v) = f(g^{-1} \cdot v).$$

Exemple : $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.

Le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ agit sur $V = \mathbb{C}^2$. Donc il agit sur l'espace $\mathcal{P} = \mathbb{C}[X, Y]$ des fonctions polynomiales sur V par

$$(g \cdot f)(v) = f(g^{-1} \cdot v).$$

Notons $\mathcal{P}_n$ le sous-espace de $\mathcal{P}$ formé des fonctions homogènes de degré n. C'est un espace vectoriel de dimension $n + 1$, dont une base est donnée par

$$X^n,\ X^{n-1} \cdot Y,\ X^{n-2} \cdot Y^2, \cdots,\ X \cdot Y^{n-1},\ Y^n,$$

et qui est stable par l'action de G.

Exemple : $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.

Le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ agit sur $V = \mathbb{C}^2$. Donc il agit sur l'espace $\mathcal{P} = \mathbb{C}[X, Y]$ des fonctions polynomiales sur V par

$$(g \cdot f)(v) = f(g^{-1} \cdot v).$$

Notons $\mathcal{P}_n$ le sous-espace de $\mathcal{P}$ formé des fonctions homogènes de degré n. C'est un espace vectoriel de dimension $n + 1$, dont une base est donnée par

$$X^n,\ X^{n-1} \cdot Y,\ X^{n-2} \cdot Y^2, \cdots,\ X \cdot Y^{n-1},\ Y^n,$$

et qui est stable par l'action de G.
Si $a \geq b$ sont des entiers, notons $V(a, b)$ l'espace vectoriel $\mathcal{P}_{a-b}$, muni de l'action de G définie par $g \bullet f = \det(g)^a (g \cdot f)$.

Exemple : $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.

Le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ agit sur $V = \mathbb{C}^2$. Donc il agit sur l'espace $\mathcal{P} = \mathbb{C}[X, Y]$ des fonctions polynomiales sur V par

$$(g \cdot f)(v) = f(g^{-1} \cdot v).$$

Notons $\mathcal{P}_n$ le sous-espace de $\mathcal{P}$ formé des fonctions homogènes de degré n. C'est un espace vectoriel de dimension $n+1$, dont une base est donnée par

$$X^n,\ X^{n-1} \cdot Y,\ X^{n-2} \cdot Y^2, \cdots,\ X \cdot Y^{n-1},\ Y^n,$$

et qui est stable par l'action de G.
Si $a \geq b$ sont des entiers, notons $V(a, b)$ l'espace vectoriel $\mathcal{P}_{a-b}$, muni de l'action de G définie par $g \bullet f = \det(g)^a (g \cdot f)$.

Fait

Pout tous entiers $a \geq b$, $V(a, b)$ est une représentation algébrique simple de G. De plus, toute représentation algébrique simple est isomorphe à une représentation de cette forme.

Théorème (représentations algébriques de $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$)

1. Toute représentation algébrique de G de dimension finie est somme directe de représentations simples.

Théorème (représentations algébriques de $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$)

1. Toute représentation algébrique de G de dimension finie est somme directe de représentations simples.
2. Les représentations simples sont paramétrées (à isomorphisme près) par les suites d'entiers $(a_1, \cdots, a_n)$ telles que $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$).

Théorème (représentations algébriques de $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$)

1. Toute représentation algébrique de G de dimension finie est somme directe de représentations simples.
2. Les représentations simples sont paramétrées (à isomorphisme près) par les suites d'entiers $(a_1, \cdots, a_n)$ telles que $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$).
3. La représentation correspondant à $(a_1, \cdots, a_n)$ est de dimension

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{a_i - a_j + j - i}{j - i}.$$

Théorème (représentations algébriques de $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$)

1. Toute représentation algébrique de G de dimension finie est somme directe de représentations simples.
2. Les représentations simples sont paramétrées (à isomorphisme près) par les suites d'entiers $(a_1, \cdots, a_n)$ telles que $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$).
3. La représentation correspondant à $(a_1, \cdots, a_n)$ est de dimension

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{a_i - a_j + j - i}{j - i}.$$

La formule de dimension est due à Hermann Weyl (1885-1955) :

1 Groupes

2 Théorie des représentations

3 Les groupes algébriques réductifs

4 La conjecture de Kazhdan–Lusztig

Définition (algèbre de Lie)

Une *algèbre de Lie* est un couple $(V, [-,-])$ où V est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $[-,-] : V \times V \to V$ est une application bilinéaire antisymétrique (c'est-à-dire telle que $[y,x] = -[x,y]$) telle que

$$[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0.$$

Définition (algèbre de Lie)

Une *algèbre de Lie* est un couple $(V, [-,-])$ où V est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $[-,-] : V \times V \to V$ est une application bilinéaire antisymétrique (c'est-à-dire telle que $[y,x] = -[x,y]$) telle que

$$[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0.$$

À tout groupe algébrique G on peut associer son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ (espace tangent en l'élément neutre).

Définition (algèbre de Lie)

Une *algèbre de Lie* est un couple $(V, [-,-])$ où V est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $[-,-] : V \times V \to V$ est une application bilinéaire antisymétrique (c'est-à-dire telle que $[y,x] = -[x,y]$) telle que

$$[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0.$$

À tout groupe algébrique G on peut associer son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ (espace tangent en l'élément neutre).

Exemple : l'algèbre de Lie de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) = (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), [-,-])$ avec $[M,N] = M \cdot N - N \cdot M$.

Une représentation d'une algèbre de Lie $(V, [-,-])$ est la donnée d'un espace vectoriel E et d'une application $x \in V \mapsto \varphi_x^E \in \mathrm{End}(E)$ telle que

$$\varphi_{[x,y]}^E = \varphi_x^E \circ \varphi_y^E - \varphi_y^E \circ \varphi_x^E$$

pour tous $x, y \in V$.

Une représentation d'une algèbre de Lie $(V, [-,-])$ est la donnée d'un espace vectoriel E et d'une application $x \in V \mapsto \varphi_x^E \in \mathrm{End}(E)$ telle que

$$\varphi^E_{[x,y]} = \varphi^E_x \circ \varphi^E_y - \varphi^E_y \circ \varphi^E_x$$

pour tous $x, y \in V$.

Étant donnée une représentation algébrique d'un groupe algébrique, on peut la "différentier" pour obtenir une représentation de son algèbre de Lie.

Une représentation d'une algèbre de Lie $(V, [-,-])$ est la donnée d'un espace vectoriel E et d'une application $x \in V \mapsto \varphi_x^E \in \mathrm{End}(E)$ telle que

$$\varphi_{[x,y]}^E = \varphi_x^E \circ \varphi_y^E - \varphi_y^E \circ \varphi_x^E$$

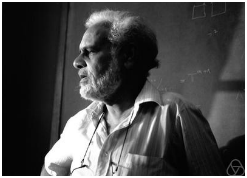
pour tous $x, y \in V$.

Étant donnée une représentation algébrique d'un groupe algébrique, on peut la "différentier" pour obtenir une représentation de son algèbre de Lie.

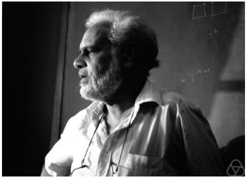
Exemple : Si E est une représentation de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, on obtient une représentation de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ en posant

$$\varphi_x^E(v) = \frac{d}{dt}\left(f_{\mathrm{Id}+tx}^E(v)\right)_{|t=0}.$$

Une “bonne” classe de représentations des algèbres de Lie des groupes algébriques réductifs a été introduite et étudiée par Daya-Nand Verma (1933-2012).

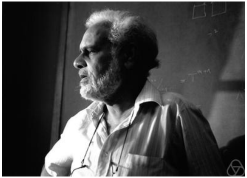


Une “bonne” classe de représentations des algèbres de Lie des groupes algébriques réductifs a été introduite et étudiée par Daya-Nand Verma (1933-2012).



Dans le cas de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ on obtient des *modules de Verma* $M(a_1, \cdots, a_n)$ et des *représentations simples de plus poids* $L(a_1, \cdots, a_n)$ associés à tous les vecteurs $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{C}^n$.

Une “bonne” classe de représentations des algèbres de Lie des groupes algébriques réductifs a été introduite et étudiée par Daya-Nand Verma (1933-2012).

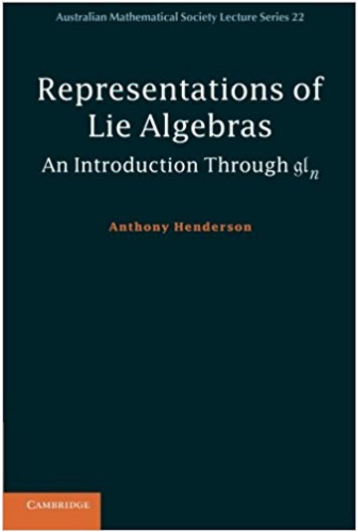


Dans le cas de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ on obtient des *modules de Verma* $M(a_1, \cdots, a_n)$ et des *représentations simples de plus poids* $L(a_1, \cdots, a_n)$ associés à tous les vecteurs $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{C}^n$.

Des travaux des années 1970 ramènent la description de ces représentations au cas des vecteurs de la forme

$$\sigma(-n+1, -n+2, \cdots, 0) - (n-1, n-2, \cdots, 0)$$

pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.


Australian Mathematical Society Lecture Series 22
Representations of Lie Algebras
An Introduction Through $\mathfrak{gl}_n$
Anthony Henderson
CAMBRIDGE

En 1979, David Kazhdan (né en 1946) et George Lusztig (né en 1946)

ont proposé une “description” conjecturale de ces représentations :

En 1979, David Kazhdan (né en 1946) et George Lusztig (né en 1946)

ont proposé une “description” conjecturale de ces représentations :

Inventiones math. 53, 165 – 184 (1979)

Inventiones mathematicae

Representations of Coxeter Groups and Hecke Algebras

David Kazhdan[1] and George Lusztig[2]*

[1] Harvard University, Department of Mathematics, Cambridge, MA02138, USA
[2] MIT, Department of Mathematics, Cambridge, MA02139, USA

Let $\underline{g}$ be a semisimple complex Lie algebra. We wish to state a conjecture relating our results with the theory of infinite dimensional representations of $\underline{g}$. We shall need some notations. Let $\underline{h}$ be a Cartan subalgebra of $\underline{g}$ and let $\underline{b}$ be a Borel subalgebra containing $\underline{h}$. Let $\rho: \underline{h} \to \mathbb{C}$ be the linear function on $\underline{h}$ which takes the value 1 on each simple coroot vector. Let W be the Weyl group of $\underline{g}$ with respect to $\underline{h}$ and let S be its set of simple reflections determined by $\underline{b}$. For each $w \in W$, let M_w be the Verma module with highest weight $-w(\rho)-\rho$ and let L_w be its unique irreducible quotient. We can now state

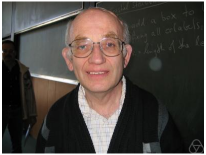
Conjecture 1.5

$$\operatorname{ch} L_w = \sum_{y \leqq w} \varepsilon_y \varepsilon_w P_{y,w}(1) \operatorname{ch} M_y \tag{1.5.a}$$

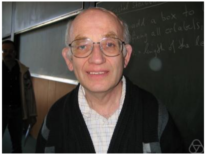
$$\operatorname{ch} M_w = \sum_{y \leqq w} P_{w_0 w, w_0 y}(1) \operatorname{ch} L_y \tag{1.5.b}$$

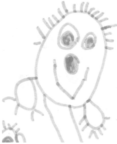
for all $w \in W$, where $P_{y,w}$ is the polynomial in q given by Theorem 1.1, *and* $P_{y,w}(1)$ *denotes its value for $q=1$.*

1980 : Premières preuves de la conjecture, par Beĭlinson–Bernstein et Brylinski–Kashiwara.

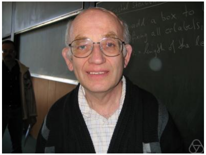
 

1980 : Premières preuves de la conjecture, par Beĭlinson–Bernstein et Brylinski–Kashiwara.





1980 : Premières preuves de la conjecture, par Beĭlinson–Bernstein et Brylinski–Kashiwara.



Outil principal : faisceaux pervers sur les variétés de drapeaux.

VOLUME 1 - ASTÉRISQUE N° 100 (1982)

[1] A.A.BEILINSON, J.BERNSTEIN, P.DELIGNE - *Faisceaux pervers*

Introduction

Sous-catégories abéliennes d'une catégorie triangulée.

1.1. Catégories triangulées.
1.2. Sous-catégories abéliennes.
1.3. t-catégories.
1.4. Recollement.

Faisceaux pervers sur les espaces stratifiés et sur les schémas.

2.1. Espaces stratifiés.
2.2. Schémas.

Compléments.

3.1. Catégories dérivée filtrée, filtrations canoniques et filtrations bêtes.
3.2. Localisation.
3.3. Cohomologie entière.

La perversité autoduale : propriétés géométriques.

1990 : Nouvelle approche de la conjecture proposée par Soergel (né en 1962).

1990 : Nouvelle approche de la conjecture proposée par Soergel (né en 1962).

Cette approche est plus algébrique, mais repose encore sur la géométrie pour un point crucial.

JOURNAL OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 3, Number 2, April 1990

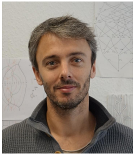
KATEGORIE $\mathcal{O}$, PERVERSE GARBEN UND MODULN ÜBER DEN KOINVARIANTEN ZUR WEYLGRUPPE

WOLFGANG SOERGEL

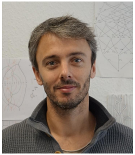
INHALTSVERZEICHNIS

1. Einleitung
   1.1. Moduln über den Koinvarianten zur Weylgruppe
   1.2. Kategorie $\mathcal{O}$
   1.3. Perverse Garben
   1.4. Danksagung
2. Argumente aus der Darstellungstheorie
   2.1. Deformation von projektiven Moduln
   2.2. Endomorphismen antidominanter Projektiver
   2.3. Homomorphismen in projektive Moduln
   2.4. Verschiebung durch die Wand
   2.5. Äquivalenz verschiedener Kategorien
   2.6. Verschiedene Operationen der Weylgruppe
3. Argumente aus der Topologie
   3.1. Geometrische Realisierung der Hecke-Algebra
   3.2. Duale Verschiebung durch die Wand
   3.3. Verschiedene Operationen der Hecke-Algebra
   3.4. Erweiterungen einfacher Objekte
   3.5. Beilinson-Ginsburg-Dualität

2014 : Preuve algébrique de la conjecture de Kazhdan–Lusztig par Ben Elias (né en 1983) et Geordie Williamson (né en 1981).



2014 : Preuve algébrique de la conjecture de Kazhdan–Lusztig par Ben Elias (né en 1983) et Geordie Williamson (né en 1981).

Annals of Mathematics **180** (2014), 1089–1136
http://dx.doi.org/10.4007/annals.2014.180.3.6

The Hodge theory of Soergel bimodules

By Ben Elias and Geordie Williamson

Abstract

We prove Soergel's conjecture on the characters of indecomposable Soergel bimodules. We deduce that Kazhdan-Lusztig polynomials have positive coefficients for arbitrary Coxeter systems. Using results of Soergel one may deduce an algebraic proof of the Kazhdan-Lusztig conjecture.