Contrôle impulsionnel appliqué à la gestion de changement de technologie dans une entreprise

Rim Amami

Institut de Mathématiques de Toulouse
Faculté des Sciences de Tunis

Colloque "Jeunes Probabilistes et Statisticiens"
Le Mont Dore - 07 Mai 2010

Plan

Problème et objectif

- **Problème:** L'entrepreneur d'une entreprise décide à certains instants de changer de technologie.
- **Conséquences:**
  - Changement de technologie $\longrightarrow$ Temps d'arrêt du système. $\Rightarrow$ Une impulsion.
  - La renaissance du système en suivant une nouvelle technologie.
- **Objectif:** Optimiser le gain de la firme.
- **Observations:**
  - Un caractère markovien et homogène entre deux instants d'impulsions.
  - Une forme markovienne de chaque renaissance.

Problème et objectif

- **Problème:** L'entrepreneur d'une entreprise décide à certains instants de changer de technologie.
- **Conséquences:**
  - Changement de technologie $\longrightarrow$ Temps d'arrêt du système. $\Rightarrow$ Une impulsion.
  - La renaissance du système en suivant une nouvelle technologie.
- **Objectif:** Optimiser le gain de la firme.
- **Observations:**
  - Un caractère markovien et homogène entre deux instants d'impulsions.
  - Une forme markovienne de chaque renaissance.

Problème et objectif

- **Problème:** L'entrepreneur d'une entreprise décide à certains instants de changer de technologie.
- **Conséquences:**
  - Changement de technologie $\longrightarrow$ Temps d'arrêt du système. $\Rightarrow$ Une impulsion.
  - La renaissance du système en suivant une nouvelle technologie.
- **Objectif:** Optimiser le gain de la firme.
- **Observations:**
  - Un caractère markovien et homogène entre deux instants d'impulsions.
  - Une forme markovienne de chaque renaissance.

Problème et objectif

- **Problème:** L'entrepreneur d'une entreprise décide à certains instants de changer de technologie.
- **Conséquences:**
  - Changement de technologie $\longrightarrow$ Temps d'arrêt du système. $\Rightarrow$ Une impulsion.
  - La renaissance du système en suivant une nouvelle technologie.
- **Objectif:** Optimiser le gain de la firme.
- **Observations:**
  - Un caractère markovien et homogène entre deux instants d'impulsions.
  - Une forme markovienne de chaque renaissance.

Outils

Un contrôle impulsionnel (ou stratégie admissible) a la forme:

$$\alpha = (\tau_n, \zeta_{n+1}, \Delta_n, n \geqslant -1).$$

$\Rightarrow$ Les trois composantes de la variable du contrôle sont:

- Les instants d'impulsion: $(\tau_n)_{n \geqslant -1}$ une suite croissante de temps d'arrêt qui converge vers τ et vérifiant $\tau_{-1} = 0$ et $\tau_{n+1} = \tau_n + \tau_0 \circ \phi_{\tau_n}$.
- ζ_{n+1} le choix de la technologie à l'instant τ_n.
- Δ_n la taille du saut.

Outils

Un contrôle impulsionnel (ou stratégie admissible) a la forme:

$$\alpha = (\tau_n, \zeta_{n+1}, \Delta_n, n \geqslant -1).$$

$\Rightarrow$ Les trois composantes de la variable du contrôle sont:

- Les instants d'impulsion: $(\tau_n)_{n \geqslant -1}$ une suite croissante de temps d'arrêt qui converge vers τ et vérifiant $\tau_{-1} = 0$ et $\tau_{n+1} = \tau_n + \tau_0 \circ \phi_{\tau_n}$.
- ζ_{n+1} le choix de la technologie à l'instant τ_n.
- Δ_n la taille du saut.

Outils

Un contrôle impulsionnel (ou stratégie admissible) a la forme:

$$\alpha = (\tau_n, \zeta_{n+1}, \Delta_n, n \geqslant -1).$$

$\Rightarrow$ Les trois composantes de la variable du contrôle sont:

- Les instants d'impulsion: $(\tau_n)_{n\geqslant -1}$ une suite croissante de temps d'arrêt qui converge vers τ et vérifiant $\tau_{-1} = 0$ et $\tau_{n+1} = \tau_n + \tau_0 \circ \phi_{\tau_n}$.
- ζ_{n+1} le choix de la technologie à l'instant τ_n.
- Δ_n la taille du saut.

Outils

Un contrôle impulsionnel (ou stratégie admissible) a la forme:

$$\alpha = (\tau_n, \zeta_{n+1}, \Delta_n, n \geqslant -1).$$

$\Rightarrow$ Les trois composantes de la variable du contrôle sont:

- Les instants d'impulsion: $(\tau_n)_{n\geqslant -1}$ une suite croissante de temps d'arrêt qui converge vers τ et vérifiant $\tau_{-1} = 0$ et $\tau_{n+1} = \tau_n + \tau_0 \circ \phi_{\tau_n}$.
- ζ_{n+1} le choix de la technologie à l'instant τ_n.
- Δ_n la taille du saut.

Outils

Un contrôle impulsionnel (ou stratégie admissible) a la forme:

$$\alpha = (\tau_n, \zeta_{n+1}, \Delta_n, n \geqslant -1).$$

$\Rightarrow$ Les trois composantes de la variable du contrôle sont:

- Les instants d'impulsion: $(\tau_n)_{n \geqslant -1}$ une suite croissante de temps d'arrêt qui converge vers τ et vérifiant $\tau_{-1} = 0$ et $\tau_{n+1} = \tau_n + \tau_0 \circ \phi_{\tau_n}$.
- ζ_{n+1} le choix de la technologie à l'instant τ_n.
- Δ_n la taille du saut.

- $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$: Un espace de probabilité.
- $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$: Une filtration complète continue à droite.
- $(\mathcal{G}_t)_{t>0}$: Une filtration prévisible: $\mathcal{G}_t = \vee_{s<t} \mathcal{F}_s, \ \forall\ s < t$.
- Le processus càdlàg ξ_t indique la technologie à l'instant t:

$$\xi_t = \xi_0 \, 1_{[0,\tau_0[}(t) + \sum_{n\geq 0} \zeta_{n+1} \, 1_{[\tau_n,\tau_{n+1}[}(t) + \emptyset \, 1_{[\tau,+\infty[}(t).$$

Ce processus est à valeurs dans U, l'ensemble fini des technologies possibles. De plus, ζ_{n+1} est une v.a. $\mathcal{G}_{\tau_n}$-mesurable et $(\tau_n)_{n\geqslant -1}$ est une suite des $\mathcal{G}$-temps d'arrêt. On note $\overline{U} = U \cup \{\emptyset\}$.

La valeur de la firme est $S_t = \exp Y_t,\ t \geq 0$, où Y est le processus continu à droite à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\Delta\}$ défini par:

$$\begin{aligned} Y_t &= Y_0\, 1_{[0,\tau_0[}(t) + \sum_{n \geq 0} \Delta_n\, 1_{[\tau_n,\tau_{n+1}[}(t) \\ &+ \int_0^t (b(\xi_s)\, ds + \sigma(\xi_s)\, dW_s) + \Delta\, 1_{[\tau,+\infty[}(t), \end{aligned}$$

avec Δ signifie que la firme a disparu et Δ_n est la taille du saut du log de la valeur de la firme, une v.a. $\mathcal{G}_{\tau_n}$-mesurable. On note r^α la probabilité de transition du couple $(\zeta_n, Y_{\tau_n^-})$ au couple $(\zeta_{n+1}, Y_{\tau_n})$:

$$\mathbb{P}(\zeta_{n+1} = j, Y_{\tau_n} = x + dy \,\big|\, \zeta_n = i, Y_{\tau_n^-} = x) = r^\alpha(i, x; j, dy).$$

La fonction gain économique

A chaque stratégie α, nous associons le gain

$$k(\alpha) = \int_0^T e^{-\beta s} f(\xi_s, Y_s)\, ds - \sum_{n \geq 0} e^{-\beta \tau_n} c(\zeta_n, Y_{\tau_n^-}, \zeta_{n+1}, Y_{\tau_n}) \quad (1)$$

où

- $\beta > 0$ est un coefficient d'actualisation.
- La fonction f représente le bénéfice net de la firme.
- La fonction c représente le coût de changement de technologie avec $c(i, x, i, x) = 0$.

Soit le gain moyen:

$$K(\alpha) = \mathbb{E}(k(\alpha) \big| \xi_0 = i, Y_0 = x). \quad (2)$$

But

Prouver l'existence d'une stratégie admissible $\widehat{\alpha}$ qui maximise la fonction gain $K(\alpha)$ définie par l'expression (2), c'est à dire:

$$K(\widehat{\alpha}) = ess \sup_{\alpha \in \underline{D}} K(\alpha), \tag{3}$$

où $\underline{D}$ est l'ensemble des stratégies admissibles.

Gain maximal conditionnel

Définition

Le gain maximal conditionnel est la famille définie p.s. par:

$$F_\theta^\alpha = ess \sup_{\{\mu_t = \alpha_t,\, t < \theta\}} \mathbb{E}\left(k(\mu) \middle| \mathcal{G}_\theta\right).$$

De même,

$$F_\theta^{\alpha^+} = ess \sup_{\{\mu_t = \alpha_t,\, t \leq \theta\}} \mathbb{E}\left(k(\mu) \middle| \mathcal{F}_\theta\right).$$

Proposition

Le gain maximal conditionnel F_θ^α (resp. $F_\theta^{\alpha^+}$) est une sur-martingale positive c'est à dire que F_θ^α (resp. $F_\theta^{\alpha^+}$) est $\mathbb{P}$-integrable et que

$$\mathbb{E}\left(F_\theta^\alpha \,|\, \mathcal{G}_\gamma\right) \leq F_\gamma^\alpha \quad \left(\text{resp. } \mathbb{E}\left(F_\theta^{\alpha^+} \,|\, \mathcal{F}_\gamma\right) \leq F_{\gamma^+}^\alpha\right).$$

Corollaire (Premier critère d'optimalité (N. El Karoui))

Une condition nécessaire et suffisante pour que la stratégie $\widehat{\alpha}$ soit optimale est que le gain maximal conditionnel $F_\cdot^{\widehat{\alpha}^+}$ soit une martingale.

Proposition

Le gain maximal conditionnel F_θ^α *(resp.* $F_\theta^{\alpha^+}$*) est une sur-martingale positive c'est à dire que* F_θ^α *(resp.* $F_\theta^{\alpha^+}$*) est* $\mathbb{P}$*-integrable et que*

$$\mathbb{E}\left(F_\theta^\alpha \middle| \mathcal{G}_\gamma\right) \leq F_\gamma^\alpha \quad \left(\textit{resp. } \mathbb{E}\left(F_\theta^{\alpha^+} \middle| \mathcal{F}_\gamma\right) \leq F_{\gamma^+}^\alpha\right).$$

Corollaire (Premier critère d'optimalité (N. El Karoui))

Une condition nécessaire et suffisante pour que la stratégie $\widehat{\alpha}$ *soit optimale est que le gain maximal conditionnel* $F_\cdot^{\widehat{\alpha}^+}$ *soit une martingale.*

Définition

Nous appellons gain maximal conditionnel après θ (respectivement à droite après θ), la famille définie p.s. par:

$$W_\theta^\alpha = ess \sup_{\{\mu_t=\alpha_t,\,\forall\, t<\theta\}} \mathbb{E}\left[k_\theta(\mu)\,|\mathcal{G}_\theta\right],$$

où k_θ est le gain après θ. (Respectivement, pour tout $\theta \geq 0$:

$$W_\theta^{\alpha^+} = ess \sup_{\{\mu_t=\alpha_t,\,\forall\, t\leq\theta\}} \mathbb{E}\left[k_{\theta^+}(\mu)\,|\mathcal{F}_\theta\right],$$

où k_{θ^+} est le gain à droite après θ).

Principe de la programmation dynamique

Proposition (Bellman)

Pour toute stratégie admissible α *et* $0 < \gamma \leq \theta$, *nous avons p.s.*

$$W^{\alpha}_{\gamma} \quad \geq \quad \mathbb{E}\Big[k_{\gamma}(\alpha) - k_{\theta}(\alpha) + W^{\alpha}_{\theta} \big| \mathcal{G}_{\gamma}\Big]. \tag{4}$$

Respectivement, pour $0 \leq \gamma \leq \theta$, *nous avons p.s.*

$$W^{\alpha^{+}}_{\gamma} \quad \geq \quad \mathbb{E}\Big[k_{\gamma^{+}}(\alpha) - k_{\theta^{+}}(\alpha) + W^{\alpha^{+}}_{\theta} \big| \mathcal{F}_{\gamma}\Big]. \tag{5}$$

De plus, $\widehat{\alpha}$ *est optimale si et seulement si l'égalité (5) a lieu p.s. pour tout couple* (γ, θ).

Notations

On introduit $M = \cup_{(i,x)\in\overline{U}\times\overline{\mathbb{R}}} M_{(i,x)}$ avec $M_{(i,x)}$ vérifie:

$$\begin{cases} M_{(i,x)} = \{r^{\alpha}(i,x;.,.), \delta_{i,x};\ \alpha \in \underline{D}\} & \text{si } (i,x) \neq (\emptyset, \Delta) \\ M_{(\emptyset,\Delta)} = \delta_{(\emptyset,\Delta)} & \text{sinon.} \end{cases}$$

On rappelle que r^{α} est une probabilité de transition du couple $(\zeta_n, Y_{\tau_n^-})$ au couple $(\zeta_{n+1}, Y_{\tau_n})$.

Hypothèse

L'ensemble M est faiblement fermé, faiblement compact et séparable.

Théorème: Deuxième critère d'optimalité

Pour toute stratégie α nous avons les inégalités suivantes:

$$
\begin{aligned}
W_0^{\alpha^+} &\geq \mathbb{E}\left(\int_0^{\tau_0} e^{-\beta s} f(\xi_s, Y_s)\, ds - e^{-\beta\tau_0} c(\xi_0, Y_{\tau_0^-}, \zeta_1, Y_{\tau_0}) + W_{\tau_0}^{\alpha^+}\right) \\
W_{\tau_n}^{\alpha} &\geq -e^{-\beta\tau_n} \int_{\overline{U}\times\overline{\mathbb{R}}} c(\zeta_n, Y_{\tau_n^-}, i, x) r^\alpha(., i, dx) + \mathbb{E}(W_{\tau_n}^{\alpha^+} \mid \mathcal{G}_{\tau_n}) \\
W_{\tau_n}^{\alpha^+} &\geq \mathbb{E}\left(\int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} e^{-\beta s} f(\xi_s, Y_s)\, ds \mid \mathcal{F}_{\tau_n}\right) + \mathbb{E}(W_{\tau_{n+1}}^{\alpha} \mid \mathcal{F}_{\tau_n})
\end{aligned}
$$

De plus, la stratégie $\widehat{\alpha}$ est optimale ssi l'égalité a lieu dans ces trois inégalités.

Corollaire

On a les égalités p.s. suivantes:

$$W^{\alpha}_{\tau_n} = e^{-\beta\tau_n}\rho(\zeta_n, Y_{\tau_n^-}),\ \forall\ n \geq 0,$$

où $\rho(i,x) = ess\sup_{\mu \in \underline{D}} \mathbb{E}_{\{i,x\}}(k(\mu))$.

$$W^{\alpha+}_{\tau_n} = e^{-\beta\tau_n}\rho^{+}(\zeta_{n+1}, Y_{\tau_n}),\ \forall\ n \geq -1,$$

où $\rho^{+}(i,x) = ess\sup_{\{\mu \in \underline{D},\, \zeta_1^{\mu} \neq \emptyset\}} \mathbb{E}_{\{i,x\}}(k(\mu))$.

Proposition (Lepeltier-Marchal)

Pour toute stratégie admissible α *et tout* $n \geq 0$, *on a*

$$W^{\alpha}_{\tau_n} = e^{-\beta\tau_n}\, m\rho^{+}(\zeta_n, Y_{\tau_n^-}) \quad p.s.$$

où $m\rho^{+}$ *est l'opérateur défini par*

$$(i,x) \to ess \sup_{\nu \in M_{(i,x)}} \int_{\overline{U}\times\overline{\mathbb{R}}} \nu(i,x;j,dy)\, \left(-c(i,x,j,y) + \rho^{+}(j,y)\right).$$

De plus, le gain moyen $\rho(i,x)$ *est égal à* $m\rho^{+}(i,x)$.

Proposition

L'application ρ^+ ne dépend pas de la stratégie α et satisfait à l'égalité suivante:

$$\begin{aligned}\rho^+(i,x) &= ess \sup_{T>0, T\in \underline{R}_{-1}} \mathbb{E}_{\{i,x\}}\Big(\int_0^{T((i,x),.)} e^{-\beta s} f(i, Y_s)\, ds \\ &+ e^{-\beta T((i,x),.)} m\rho^+(i, Y_{T-((i,x),.)})\Big),\end{aligned} \tag{6}$$

où $\underline{R}_{-1}$: Ensemble des applications mesurables T sur $\overline{U} \times \overline{\mathbb{R}} \times \Omega$ tel que $T((i,x),.)$ est un $\mathcal{G}$-temps d'arrêt.

Théorème: Critère d'optimalité

Pour toute stratégie α, nous avons les inégalités suivantes:

$$\begin{aligned}
\rho^+(i,x) &\geq \mathbb{E}_{\{i,x\}}\Big(\int_0^{\tau_0} e^{-\beta s} f(i, Y_s)\, ds \\
&+ e^{-\beta\tau_0} m\rho^+(i, Y_{\tau_0^-})\Big). && (7)\\
m\rho^+(\zeta_n, Y_{\tau_n^-}) &\geq \int_{\overline{U}\times\mathbb{R}} r^\alpha(\zeta_n, Y_{\tau_n^-}, i, dx)\Big(-c(\zeta_n, Y_{\tau_n^-}, j, y) \\
&+ \rho^+(j,y)\Big). && (8)\\
e^{-\beta\tau_n}\rho^+(\zeta_{n+1}, Y_{\tau_n}) &\geq \mathbb{E}_{\{\zeta_{n+1}, Y_{\tau_n}\}}\Big(\int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} e^{-\beta s} f(\zeta_{n+1}, Y_s)\, ds \\
&+ e^{-\beta\tau_{n+1}} m\rho^+(\zeta_{n+1}, Y_{\tau_{n+1}^-})\Big). && (9)
\end{aligned}$$

De plus, $\widehat{\alpha}$ est optimale ssi l'égalité a lieu dans (7), (8) et (9).

Pour tout (i,x), on définit le temps

$$T^*((i,x),.) = \begin{cases} \inf\{t \geq 0 : e^{-\beta t}\rho(i, Y_t^x) = e^{-\beta t} m^* \rho^+(i, Y_t^x)\}. \\ +\infty \qquad \text{si l'ensemble est vide.} \end{cases}$$

L'ensemble d'impulsion est $I = \big\{(i,x) : \rho(i,x) = m^*\rho^+(i,x)\big\}$, où pour $M^*_{(i,x)} = M_{(i,x)} - \delta_{(i,x)}$, $m^*\rho^+$ est l'opérateur:

$$(i,x) \rightarrow ess \sup_{\nu \in M^*_{(i,x)}} \int_{\overline{U}\times\overline{\mathbb{R}}} \nu(i,x;j,dy)(-c(i,x,j,y) + \rho^+(j,y)).$$

Lemme

Il existe un noyau borélien $r^* \in M$ qui réalise le maximum tel que p.s. pour tout (i,x) de I:

$$m^*\rho^+(i,x) = \int_{\overline{U}\times\overline{\mathbb{R}}} r^*(i,x;j,dy)\big(-c(i,x,j,y) + \rho^+(j,y)\big).$$

Pour tout (i,x), on définit le temps

$$T^*((i,x),.) = \begin{cases} \inf\{t \geq 0 : e^{-\beta t}\rho(i, Y_t^x) = e^{-\beta t} m^* \rho^+(i, Y_t^x)\}. \\ +\infty \qquad \text{si l'ensemble est vide.} \end{cases}$$

L'ensemble d'impulsion est $I = \big\{(i,x) : \rho(i,x) = m^*\rho^+(i,x)\big\}$, où pour $M^*_{(i,x)} = M_{(i,x)} - \delta_{(i,x)}$, $m^*\rho^+$ est l'opérateur:

$$(i,x) \to ess \sup_{\nu \in M^*_{(i,x)}} \int_{\overline{U}\times\overline{\mathbb{R}}} \nu(i,x;j,dy)(-c(i,x,j,y) + \rho^+(j,y)).$$

Lemme

Il existe un noyau borélien $r^* \in M$ qui réalise le maximum tel que p.s. pour tout (i,x) de I:

$$m^*\rho^+(i,x) = \int_{\overline{U}\times\overline{\mathbb{R}}} r^*(i,x;j,dy)\big(-c(i,x,j,y) + \rho^+(j,y)\big).$$

Théorème: Une stratégie optimale

La famille $\widehat{\alpha} = (\widehat{\tau}_n, \zeta_{n+1}, \widehat{\Delta}_n)$ définie par:

$$\begin{cases} \widehat{\tau}_0 := \begin{cases} T^*((\xi_0, Y_0), \omega) & \text{sur} \quad (\xi_0 \neq \emptyset) \cap (T^*((\xi_0, Y_0), \omega) > 0) \\ +\infty & \text{sur} \quad (\xi_0 \neq \emptyset) \cap (T^*((\xi_0, Y_0), \omega) = 0) \\ 0 & \text{sur} \quad (\xi_0 = \emptyset), \end{cases} \\ r^*(\xi_0, Y_{0^-}, \zeta_1, Y_0) \ \text{ est la loi de passage sur } \mathcal{G}_{\widehat{\tau}_0}, \end{cases}$$

puis par récurrence pour tout $n \geq 1$:

- $\widehat{\tau}_n = \widehat{\tau}_{n-1} + T^*((\zeta_n, Y_{\tau_{n-1}}), .)$,
- le couple $(\zeta_{n+1}, \widehat{\Delta}_n)$ est de loi:

$$\begin{cases} r^*(\zeta_n, Y_{\widehat{\tau}_n^-}; ., .) & \text{sur} \quad (\xi_0 \neq \emptyset) \cap (0 < T^*((\zeta_n, Y_{\widehat{\tau}_n^-}), \omega) < +\infty) \\ \delta_{\{\emptyset, \Delta\}} & \quad \text{sinon}, \end{cases}$$

est une stratégie admissible qui réalise l'optimalité.

- Formuler le problème d'optimisation comme un problème du contrôle impulsionnel avec trois variables liées à la fonction gain, la technologie choisie et la valeur de la firme.
- Etablir une caractérisation de la fonction valeur et la considérer comme solution des inéquations de Hamilton-Bellman-Jacobi.

- Formuler le problème d'optimisation comme un problème du contrôle impulsionnel avec trois variables liées à la fonction gain, la technologie choisie et la valeur de la firme.
- Etablir une caractérisation de la fonction valeur et la considérer comme solution des inéquations de Hamilton-Bellman-Jacobi.

Références

- **A. Bensoussan et J.L. Lions:** *Contrôle Impulsionnel et Inéquations quasi-variationnelles*. Dunod, Paris, 1982
- **M.H.A. Davis:** *Markov Models and Optimization*. Chapman et Hall,1993.
- **N. El Karoui:** *Les Aspects Probabilistes du Contrôle Stochastique*. Lecture Notes in Mathematics 876, Springer-Verlag, Berlin, 1981.
- **P.A. Lepeltier et B. Marchal:** *Théorie Générale du Contrôle Impulsionnel Markovien*. SIAM J.Control and optimization, Vol.22, No.4, 1984.