Construction d'une solution faible d'une E.D.S.R

Nadira BOUCHEMELLA et Paul RAYNAUD DE FITTE

Université de Rouen
Laboratoire LMRS

03 mai 2010

Introduction

$$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, \mathrm{P})$$

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, X_s, Y_s, Z_s)\,ds - \int_t^T Z_s\,dW_s - (L_t - L_s) \quad (1)$$

- $W = (W_t)_{t\in[0,T]}$ un mouvement brownien $(\mathcal{F}_t)$-adapté défini sur $\mathbb{R}^m$

Introduction

$$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, \mathrm{P})$$

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, X_s, Y_s, Z_s)\, ds - \int_t^T Z_s\, dW_s - (L_t - L_s) \quad (1)$$

- $W = (W_t)_{t\in[0,T]}$ un mouvement brownien $(\mathcal{F}_t)$-adapté défini sur $\mathbb{R}^m$
- Y, Z et L trois processus inconnus, tel que Y et L prenent valeurs dans $\mathbb{H} = \mathbb{R}^d$ et Z dans $\mathbb{L}$ l'espace des applications linéaires de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{H}$

Introduction

$$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, \mathrm{P})$$

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, X_s, Y_s, Z_s)\, ds - \int_t^T Z_s\, dW_s - (L_t - L_s) \quad (1)$$

- $W = (W_t)_{t\in[0,T]}$ un mouvement brownien $(\mathcal{F}_t)$-adapté défini sur $\mathbb{R}^m$
- Y, Z et L trois processus inconnus, tel que Y et L prenent valeurs dans $\mathbb{H} = \mathbb{R}^d$ et Z dans $\mathbb{L}$ l'espace des applications linéaires de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{H}$
- $X = (X_t)_{0\le t\le T}$ est un processus $(\mathcal{F}_t)$-adapté à valeurs dans un espace métrique $\mathbb{M}$.

Introduction

$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, \mathrm{P})$

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, X_s, Y_s, Z_s)\, ds - \int_t^T Z_s\, dW_s - (L_t - L_s) \quad (1)$$

- $W = (W_t)_{t\in[0,T]}$ un mouvement brownien $(\mathcal{F}_t)$-adapté défini sur $\mathbb{R}^m$
- Y, Z et L trois processus inconnus, tel que Y et L prenent valeurs dans $\mathbb{H} = \mathbb{R}^d$ et Z dans $\mathbb{L}$ l'espace des applications linéaires de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{H}$
- $X = (X_t)_{0\leq t\leq T}$ est un processus $(\mathcal{F}_t)$-adapté à valeurs dans un espace métrique $\mathbb{M}$.
- $\xi \in \mathrm{L}^2_{\mathbb{H}}$ est la condition terminale.

- E. Pardoux and S. Peng
- J.P. Lepeltier and J. San Martin
- K. Bahlali, B. Mezerdi, and Y. Ouknine
- R. Buckdhahn, H.J. Engelbert and A. Rascanu

Hypothèses

- l'application $f : [0, T] \times \mathbb{M} \times \mathbb{H} \times \mathbb{L}$ vérifie les deux conditions suivantes :

Hypothèses

- l'application $f : [0, T] \times \mathbb{M} \times \mathbb{H} \times \mathbb{L}$ vérifie les deux conditions suivantes :
  - (H_1)
    Il existe $C_f \geq 0$ tel que : $\forall (t, x, y, z) \in [0, T] \times \mathbb{M} \times \mathbb{H} \times \mathbb{L}$,
    $\|f(t, x, y, z)\| \leq C_f(1 + \|z\|)$.

Hypothèses

- l'application $f : [0, T] \times \mathbb{M} \times \mathbb{H} \times \mathbb{L}$ vérifie les deux conditions suivantes :
  - (H_1)
    Il existe $C_f \geq 0$ tel que : $\forall (t, x, y, z) \in [0, T] \times \mathbb{M} \times \mathbb{H} \times \mathbb{L}$,
    $\|f(t, x, y, z)\| \leq C_f(1 + \|z\|)$.
  - (H_2)
    (i) $f(t, x, y, z)$ est continue en (x, y, z),
    (ii) Pour tous $x \in \mathbb{M}$, $u \in C_{\mathbb{H}}[0, T]$, $v \in \mathrm{L}^2_{\mathbb{H}}[0, T]$ et $t \in [0, T]$,

$$\lim_{n \to \infty} \int_t^T \left(f(t, x, u(s), v(s + 1/n)) - f(t, x, u(s), v(s))\right) ds = 0 \text{ p.p}$$

tel que v est prolongée $[T, T + 1/n]$ par $v(t) = 0$ pour $t > T$.

- Définition

  Une solution forte de l'equation (1) *est une paire de processus* (Y, Z) $\mathcal{F}_t$*-adaptée à valeurs dans* $\mathbb{M} \times \mathbb{H} \times \mathbb{L}$

- Définition

  Une solution forte de l'equation (1) *est une paire de processus* (Y, Z) $\mathcal{F}_t$*-adaptée à valeurs dans* $\mathbb{M} \times \mathbb{H} \times \mathbb{L}$

- Définition

  On dit que (Y, Z) *est une solution faible de l'EDSR* (1) *s'il existe une base stochastique* $(\underline{\Omega}, \underline{\mathcal{F}}, (\underline{\mathcal{F}}_t)_t, \mu)$ *telle que :*

  - *Le processus* $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$ *est un mouvement brownien sur* $\underline{\mathcal{F}}$
  - Y, Z *deux processus* $(\underline{\mathcal{F}}_t)$*-adaptés tel que :*

$$\mathrm{E}\left(\int_0^T \left\|Z_s^2\right\|_{\mathbb{L}} ds\right) \leq +\infty$$

  - *l'équation* (1) *est vérifiée.*

Résultat principal

- Théorème
  Sous les hypothèses (H_1) *et* (H_2) *l'équation* (1) *admet une solution faible.*

Résultat principal

- Théorème

  Sous les hypothèses (H_1) *et* (H_2) *l'équation* (1) *admet une solution faible.*

- Remarque

  L'équation (1) *est équivalente à données par*

$$Y_t = \mathrm{E}^{\mathcal{F}_t}\left(\xi + \int_t^T f(s, X_s, Y_s, Z_s)\, ds\right) \tag{2}$$

$$\int_0^t Z_s\, dW_s = \mathrm{E}^{\mathcal{F}_t}\left(\xi + \int_0^T f(s, X_s, Y_s, Z_s)\, ds\right) - \mathrm{E}\left(\xi + \int_0^T f(s, X_s, Y_s, Z_s)\, ds\right) \tag{3}$$

1^{ere} étape : suite approximante

En admettant que $f(t,x,y,z) = 0$ pour $t > T$, on prolonge Z par $\widetilde{Z}_s^{(n)} = \mathrm{E}^{\mathcal{F}_s}\left(Z_{s+1/n}^{(n)}\right)$, avec $Z_t^{(n)} = 0$ pour $t > T$.

$$Y_t^{(n)} = \mathrm{E}^{\mathcal{F}_t}\left(\xi + \int_{t+1/n}^{T} f(s, X_s, Y_s^{(n)}, \widetilde{Z}_s^{(n)})\, ds\right) \tag{4}$$

$$\int_0^t Z_s^{(n)}\, dW_s = \mathrm{E}^{\mathcal{F}_t}\left(\xi + \int_0^T f(s, X_s, Y_s^{(n)}, \widetilde{Z}_s^{(n)})\, ds\right) - \mathrm{E}\left(\xi + \int_0^T f(s, X_s, Y_s^{(n)}, \widetilde{Z}_s^{(n)})\, ds\right) \tag{5}$$

- Proposition

  le système (4)-(5) *admet une unique solution forte* $(Y^{(n)}, Z^{(n)})$.

- Proposition

  le système (4)-(5) *admet une unique solution forte* $(Y^{(n)}, Z^{(n)})$.

  - Les equations (4) et (5) sont équivalentes à

$$Y_t^{(n)} = \xi + \int_t^T f(s, X_s, Y_s^{(n)}, \widetilde{Z}_s^{(n)})\, ds - \int_t^T Z_s^{(n)}\, dW_s - U_t^{(n)} \tag{6}$$

avec

$$U_t^{(n)} = \mathrm{E}^{\mathcal{F}_t}\left(\int_t^{t+1/n} f(s, X_s, Y_s^{(n)}, \widetilde{Z}_s^{(n)})\, ds \right).$$

- La famille $(Y_t^{(n)})_{0\leq t\leq T,\, n\geq 1}$ est tendue dans $C_{\mathbb{H}}[0,T]$.
  - $\forall \epsilon > 0,\ \exists R > 0, \forall n \geq 1,$

$$(A) \qquad \mathrm{P}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left\|Y_t^{(n)}\right\| \geq R\right) \leq \epsilon$$

  - $\forall \epsilon > 0, \forall \eta > 0,\ \exists \delta > 0 : \forall n > 0,$

$$(B) \qquad \sup_{0\leq \tau-\sigma\leq \delta}\mathrm{P}\left(\left\|Y_\tau^{(n)} - Y_\sigma^{(n)}\right\| \geq \eta\right) \leq \epsilon$$

- La suite $(Z^{(n)})_{n\geq 1}$ est tendue dans l'espace $\mathrm{L}^2_{\mathbb{H}}[0,T]$, muni de sa topologie faible.

2^{eme} étape : construction de la solution

- $(Y^{(n)}, Z^{(n)})$ converge vers
  $\mu \in \mathcal{Y}(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}; C_{\mathbb{H}}[0, T] \times \mathrm{L}^2_{\mathbb{H}}[0, T])$ i.e.

2^{eme} étape : construction de la solution

- $(Y^{(n)}, Z^{(n)})$ converge vers $\mu \in \mathcal{Y}(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}; C_{\mathbb{H}}[0,T] \times \mathrm{L}^2_{\mathbb{H}}[0,T])$ i.e.
- $(Y^{(n)}, Z^{(n)})$ converge en loi vers l'image de μ par la projection canonique de $\Omega \times C_{\mathbb{H}}[0,T] \times \mathrm{L}^2_{\mathbb{H}}[0,T]$ à $C_{\mathbb{H}}[0,T] \times \mathrm{L}^2_{\mathbb{H}}[0,T]$.

- $(\underline{\Omega}, \underline{\mathcal{F}}, (\underline{\mathcal{F}}_t)_t, \mu)$

- $(\underline{\Omega}, \underline{\mathcal{F}}, (\underline{\mathcal{F}}_t)_t, \mu)$
- $\underline{\Omega} = \Omega \times C_{\mathbb{H}}[0, T] \times \mathrm{L}^2_{\mathbb{H}}[0, T]$

- $(\underline{\Omega}, \underline{\mathcal{F}}, (\underline{\mathcal{F}}_t)_t, \mu)$
- $\underline{\Omega} = \Omega \times C_{\mathbb{H}}[0, T] \times \mathrm{L}^2_{\mathbb{H}}[0, T]$
- $\underline{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \otimes \mathcal{C} \otimes \mathcal{L}$

- $(\underline{\Omega}, \underline{\mathcal{F}}, (\underline{\mathcal{F}}_t)_t, \mu)$
- $\underline{\Omega} = \Omega \times C_{\mathbb{H}}[0, T] \times \mathrm{L}^2_{\mathbb{H}}[0, T]$
- $\underline{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \otimes \mathcal{C} \otimes \mathcal{L}$
- $\underline{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{C}_t \otimes \mathcal{L}_t$

- $(\underline{\Omega}, \underline{\mathcal{F}}, (\underline{\mathcal{F}}_t)_t, \mu)$
- $\underline{\Omega} = \Omega \times C_{\mathbb{H}}[0, T] \times \mathrm{L}^2_{\mathbb{H}}[0, T]$
- $\underline{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \otimes \mathcal{C} \otimes \mathcal{L}$
- $\underline{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{C}_t \otimes \mathcal{L}_t$
- (Y, Z) sur $\underline{\Omega}$ par

$$Y(\omega, u, v) = u, \quad Z(\omega, u, v) = v.$$

- La loi de (Y, Z) est la projection de μ sur $C_{\mathbb{H}}[0, T] \times \mathrm{L}^2_{\mathbb{H}}[0, T]$

- La loi de (Y, Z) est la projection de μ sur $C_{\mathbb{H}}[0, T] \times \mathrm{L}^2_{\mathbb{H}}[0, T]$
- (Y, Z) est $(\underline{\mathcal{F}}_t)$-adapté

- La loi de (Y, Z) est la projection de μ sur $C_{\mathbb{H}}[0, T] \times \mathrm{L}^2_{\mathbb{H}}[0, T]$
- (Y, Z) est $(\underline{\mathcal{F}}_t)$-adapté
- $$Y^{(n)}(\omega, u, v) := Y^{(n)}(\omega), \quad Z^{(n)}(\omega, u, v) := Z^{(n)}(\omega) \quad (n \geq 1).$$

- La loi de (Y, Z) est la projection de μ sur $C_{\mathbb{H}}[0, T] \times \mathrm{L}^2_{\mathbb{H}}[0, T]$
- (Y, Z) est $(\underline{\mathcal{F}}_t)$-adapté
-
$$Y^{(n)}(\omega, u, v) := Y^{(n)}(\omega), \quad Z^{(n)}(\omega, u, v) := Z^{(n)}(\omega) \quad (n \geq 1).$$
- $W(\omega, u, v) = W(\omega)$

- La loi de (Y, Z) est la projection de μ sur $C_{\mathbb{H}}[0, T] \times \mathrm{L}^2_{\mathbb{H}}[0, T]$
- (Y, Z) est $(\underline{\mathcal{F}}_t)$-adapté
- $$Y^{(n)}(\omega, u, v) := Y^{(n)}(\omega), \quad Z^{(n)}(\omega, u, v) := Z^{(n)}(\omega) \quad (n \geq 1).$$
- $W(\omega, u, v) = W(\omega)$
- Pour tout $t \in [0, T]$, la suite

$$\int_t^T f(s, X_s, Y_s^{(n)}, \widetilde{Z}_s^{(n)})\, ds - \int_t^T f(s, X_s, Y_s^{(n)}, Z_s^{(n)})\, ds$$

converge vers 0 en probabilité

- La loi de (Y, Z) est la projection de μ sur $C_{\mathbb{H}}[0, T] \times \mathrm{L}^2_{\mathbb{H}}[0, T]$
- (Y, Z) est $(\underline{\mathcal{F}}_t)$-adapté
- $$Y^{(n)}(\omega, u, v) := Y^{(n)}(\omega), \quad Z^{(n)}(\omega, u, v) := Z^{(n)}(\omega) \quad (n \geq 1).$$
- $W(\omega, u, v) = W(\omega)$
- Pour tout $t \in [0, T]$, la suite
$$\int_t^T f(s, X_s, Y_s^{(n)}, \widetilde{Z}_s^{(n)})\, ds - \int_t^T f(s, X_s, Y_s^{(n)}, Z_s^{(n)})\, ds$$
converge vers 0 en probabilité
- (Y, Z) vérifie (1).