Filtrations

Gaël Ceillier ; Institut Fourier, Grenoble

3 mai 2010 ; Neuvième Colloque "Jeunes Probabilistes et Statisticiens"

I) Introduction

On s'intéresse ici aux filtrations des processus $X = (X_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ indexés par les entiers relatifs (ou par les entiers négatifs).

La filtration naturelle d'un tel processus est la famille de tribus $\mathcal{F}^X = (\mathcal{F}^X_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ où $\mathcal{F}^X_n = \sigma((X_k)_{k\le n})$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$.

On dit que le processus $U = (U_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ gouverne X si pour tout $n \in \mathbf{Z}$,
- U_{n+1} est indépendant de $\mathcal{F}^{X,U}_n$,
- X_{n+1} est une fonction mesurable de $\sigma(U_{n+1})$ et de $\mathcal{F}^X_n$.

Exemple 1

– *Les marches aléatoires* X *sur un graphe sont gouvernées par leurs pas :*

$$U_n = X_n - X_{n-1}.$$

– *Toute suite de v.a. indépendantes* $(X^1_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ *de loi uniforme sur* $\{-1,1\}$, *est gouvernée par elle même. Cependant elle est aussi gouvernée par d'autres processus, par exemple par les variables* $U^1_n = X^1_n X^1_{n-1}$.

II) Filtrations de type produit et filtrations standards

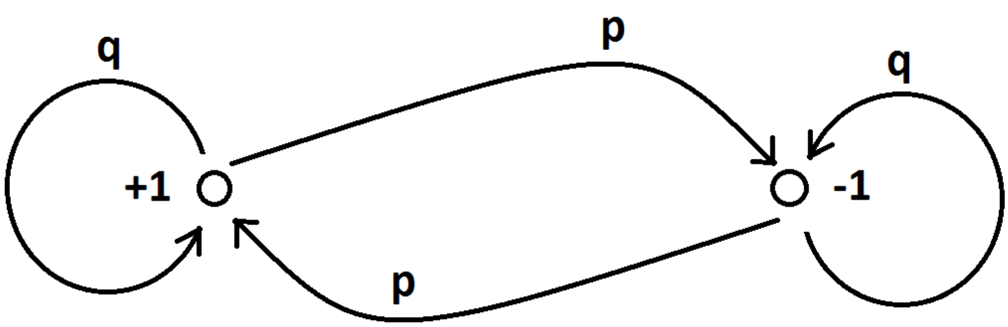
Définition 1 Filtration de type produit
Une filtration sera dite de type produit si elle est engendrée par des variables aléatoires indépendantes.
Autrement dit X est gouverné par un processus U tel que $\mathcal{F}^X = \mathcal{F}^U$.

Par exemple $\mathcal{F}^{X^1}$ est de type produit.

Déterminer si une filtration est de type produit est assez complexe.

Définition 2 Filtration standard
La filtration naturelle du processus X sera dite standard si X est gouverné par un processus U tel que $\mathcal{F}^X \subset \mathcal{F}^U$.

Il est évident que toute filtration de type produit est standard. Attention cependant, l'inverse n'est pas vrai.



Marche aléatoire sur {-1,+1}.

Pour la marche aléatoire $X = (X_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ associée au graphe ci dessus on peut étudier deux systèmes d'innovations :
– $U_n = X_n X_{n-1}$,
– V_n de loi uniforme sur $[0,1]$ et tel que,

Si $X_{n-1} = 1$ alors $V_n < q$ implique $X_n = 1$
Si $X_{n-1} = -1$ alors $V_n < p$ implique $X_n = 1$.

On remarque que d'une part $\mathcal{F}^X$ n'est pas incluse dans $\mathcal{F}^U$. D'autre part $\mathcal{F}^X \subset \mathcal{F}^V$ mais l'inclusion est stricte. Une étude plus poussée montre que cette filtration est standard (on vient de le montrer) et qu'elle n'est pas de type produit.

Un raisonnement classique, mais faux est le suivant :
Si $\mathcal{F}^X_{-\infty}$ est triviale et si X est gouverné par U, alors puisque pour tout $n \in \mathbf{Z}$ on sait que $\mathcal{F}^X_n \subset \mathcal{F}^X_{n-1} \wedge \sigma(U_n)$ on a $\mathcal{F}^X_n \subset \mathcal{F}^U_n$, autrement dit $\mathcal{F}^X$ est standard.

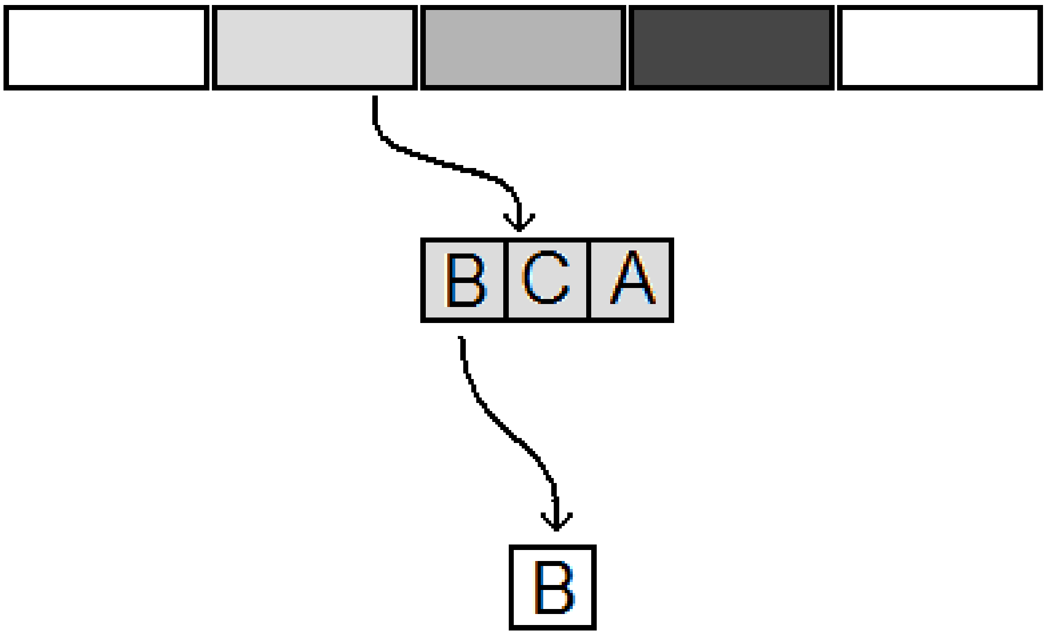
Ceci est faux car de l'information peut être perdue. En effet, par exemple pour le processus précédant, $\mathcal{F}^X$ n'est pas inclue dans $\mathcal{F}^U$, puisque X_0 est indépendant de $\mathcal{F}^U$. Nous allons maintenant étudier deux types d'exemples.

III)Le processus des mots découpés

Ce processus a été introduit et étudié par M.Smorodinsky puis par S.Laurent.

Soit A un ensemble de cardinal $N \geq 2$ et $(\ell_n)_{n\leq 0}$ une suite décroissante d'entiers, le processus $(X_n)_{n\leq 0}$ des mots découpés est caractérisé par, pour tout $n \in \mathbf{Z}$,

– la loi de X_n est la loi uniforme sur l'ensemble des mots de longueur ℓ_n sur A ;
– si l'on coupe le mot X_{n-1} en ℓ_{n-1}/ℓ_n sous-mots, alors X_n est choisit uniformément parmi ces sous-mots indépendamment du passé jusqu'au temps $n-1$.


B
C
A
B

On note $r_n = \ell_{n-1}/\ell_n$.

S.Laurent a donné deux conditions, ∇ et Δ, sur les longueurs $(\ell_n)_{n \leq 0}$:

∇ : Il existe $\alpha < 1$ tel que $r_n^\alpha \gg N^{\ell_n}$ quand $n \to -\infty$.

Δ : La série $\displaystyle\sum_n \frac{\ln(r_n)}{\ell_n}$ converge.

Il a montré que sous la condition ∇ la filtration du processus est de type produit, tandis que sous la condition Δ elle ne n'est pas standard.

Les conditions ∇ et Δ avaient déjà été introduites par Vershik, dans le contexte de la théorie ergodique.

Theorem 1 *La condition* Δ *est nécessaire et suffisante pour que la filtration du processus des mots découpés soit standard. De plus elle est de type produit dès qu'elle est standard.*

IV) Processus stationnaires à valeurs dans un ensemble fini

On a cherché des conditions suffisantes pour que la filtration d'un processus stationnaire $X = (X_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ à valeurs dans un ensemble fini A soit standard. Ces conditions expriment le fait que le passé a long terme a peu d'influence sur le présent.

Pour tout $n \geq 0$, $x \in A^n$ et $a \in A$, on pose

$$p(a|x) = \mathbf{P}(X_0 = a \mid X_{-n:-1} = x),$$

De plus on se donne une version régulière de la loi conditionnelle de X_0 sachant $X_{-1}^{\triangleleft}$:

$$p(\cdot|x) = \mathbf{P}(X_0 = \cdot \mid X_{-1}^{\triangleleft} = x), \quad x \in A^{\triangleleft}.$$

On introduit alors les quantités γ_n et δ_n mesurant l'influence à distance n.

Définition 3 *Pour tout $n \geq 0$, on pose*

$$\gamma_n = 1 - \inf\left\{\frac{p(a|xz)}{p(a|yz)}\ ;\ a \in A,\ x, y \in A^{\triangleleft},\ z \in A^n,\right\},$$

$$\delta_n = \sup\left\{\|p(\cdot|xz) - p(\cdot|yz)\|\ ;\ x, y \in A^{\triangleleft},\ z \in A^n\right\},$$

où $\|\cdot\|$ est la variation totale.

X.Bressaud, A.Maass, S.Martinez et J.San Martin on montré le résultat suivant :

Theorem 2 *Si A ne possède que deux éléments, alors*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \prod_{n=0}^{k} (1-\gamma_n) = +\infty$$

implique que $\mathcal{F}^X$ est standard.

Nous avons amélioré ce résultat une première fois en montrant le résultat suivant

Theorem 3 *(1) Si A est fini, si $2\delta_0 < 1$ et si*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \prod_{n=0}^{k} (1-2\delta_n) = +\infty$$

est vérifiée, alors $\mathcal{F}^X$ est standard.
(2) Si A ne possède que 2 éléments alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \prod_{n=0}^{k} (1-\delta_n) = +\infty$$

suffit à impliquer la standardité de $\mathcal{F}^X$.

Tous les résultats ci-dessus font intervenir des écarts maximums. Nous avons cependant établi un résultat portant sur les influences moyennes :

Theorem 4 *Pour tout $n \geq 0$, on note η_n l'influence moyenne à distance n :*

$$\eta_n = \sum_{z \in A^n} \mathbf{E}\Big[\|p(\cdot|z) - p(\cdot|X_{-n-1}^{\lhd} z)\|\Big] \cdot \mathbf{P}[X_{-n:-1} = z].$$

Si A est fini et si pour tout $a \in A$, $p(a|X_{-1}^{\lhd}) > 0$ presque sûrement, la condition

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \eta_k < +\infty. \qquad (1)$$

implique que $\mathcal{F}^X$ est standard.