$g(t)$- mouvement brownien, et applications

Koléhè Coulibaly

Laboratoire de Mathématiques
Université du Luxembourg.

3 mai 2010

Plan

- Soit M une variété différentielle compacte connexe de dimension n.
- Elle sera supposée munie d'une famille de métriques $g(t)_{t\in I}$ qui sera $C^{1,2}$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.
- Δ_t l'opérateur de Laplace-Beltrami associé à la métrique $g(t)$.
- Soit $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré complet dont la filtration satisfait les conditions usuelles de continuité à droite.
- Soit W un brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, pour cet espace probabilisé filtré.

Définition

Soit $g(t)_{t\in[0,T[}$ une famille $C^{1,2}$ de métriques sur M. Un processus $X(x)$ à valeurs dans M défini sur $\Omega \times [0,T[$ sera appelé $g(t)$ mouvement brownien sur M partant de $x \in M$ si $X(x)$ est continu, adapté, et si pour toutes fonctions $f \in C^2(M)$,

$$f(X_s(x)) - f(x) - \frac{1}{2}\int_0^s \Delta_t f(X_t(x))\, dt$$

est une martingale locale valant 0 au temps 0.

Proposition

Soit $x \in M$ et U_t la solution de l'EDS sur $\mathcal{F}(M)$:

$$\begin{cases} * \, dU_t = \sum_{i=1}^{n} L_i(t, U_t) * dW^i - \frac{1}{2}\partial_1 G(t, U_t)_{\alpha,\beta} V_{\alpha,\beta}(U_t)\, dt \\ U_0 \in \mathcal{F}(M) \text{ tel que } U_0 \in (\mathcal{O}_x(M), g(0)). \end{cases} \tag{1}$$

Alors $U_t \in (\mathcal{O}(M), g(t))$, et $X_t(x) = \pi(U_t)$ est un $g(t)$ mouvement brownien. On le notera $g(t)$-BM(x).

On définit le $g(t)$ transport parallèle au dessus du $g(t)$-BM par :

$$/\!/_{0,t} := U_t \circ U_0^{-1}.$$

C'est une isométrie :

$$/\!/_{0,t} : (TM_{X_0(x)}, g(0)) \to (TM_{X_t(x)}, g(t)).$$

Soit $g(t)_{[0,T_c[}$ une famille $C^{1,2}$ de métriques, on considère l'équation de la "chaleur" :

$$\begin{cases} \partial_t f(t,x) = \frac{1}{2}\Delta_t f(t,x) \\ f(0,x) = f_0(x); \end{cases} \tag{2}$$

où f_0 est une fonction sur M.
Pour $T < T_c$, et $x \in M$ on notera :

- $X_t^T(x)$ le $g(T-t)$-BM(x)
- $/\!/_{0,t}^T$ le $g(T-t)$-transport parallèle au dessus de $X_t^T(x)$.

Par la formule d'Itô on a que :

$$f(T-t, X_t^T(x))$$

est une martingale locale à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Définition

On définit le transport parallèle déformé $\boldsymbol{W}_{0,t}^{T}$ comme solution de l'équation différentielle stochastique covariante de Itô :

$$d((/\!/_{0,t}^{T})^{-1}(\boldsymbol{W}_{0,t}^{T})) = -\frac{1}{2}(/\!/_{0,t}^{T})^{-1}(Ric_{g(T-t)} - \partial_t(g(T-t)))^{\#g(T-t)}(\boldsymbol{W}_{0,t}^{T})dt$$

avec :

$$\boldsymbol{W}_{0,t}^{T} : T_xM \longrightarrow T_{X_t^T(x)}M, \quad \boldsymbol{W}_{0,0}^{T} = Id_{T_xM}.$$

Théorème

Soit $f(t,.)$ solution de (2), alors pour tout $v \in T_xM$,

$$df(T-t,.)_{X_t^T(x)}(\boldsymbol{W}_{0,t}^{T}v)$$

est une martingale locale.

Remarque :

- Elle permet d'obtenir une formule d'intégration par partie (type Bismut).
- La théorie du flot stochastique (intrinsèque) permet d'en donner une construction plus canonique, en terme de dérivé de couplage parallèle. On la notera TX_t.

Théorème

Soit $g(t)$ une famille $C^{1,2}$ de métriques sur M, alors les conditions suivantes sont équivalentes :

i) *$g(t)$ provient du flot de Ricci (forward)*
ii) *pour tous $T < T_c$, $\quad /\!\!/^T_{0,t} = \mathbf{W}^T_{0,t} = TX_t$*
iii) *pour tous $T < T_c$, le transport parallèle déformé $\mathbf{W}^T_{0,t}$ est une isométrie.*

Remarque :

- C'est une caractérisation probabiliste du flot de Ricci.
- On en déduit des contrôles de gradient de solutions d'équation de la chaleur inhomogène, ainsi que des résultats de décroissance de norme de gradient (sans aucune hypothèse sur la courbure de Ricci de la variété de départ).
- On retrouve des résultats de Hamilton concernant le flot de Ricci normalisé pour les surfaces (dans le cas $\chi(M) < 0$).

Etant donné un opérateur différentiel de second ordre L sans terme constant sur une variété M et une courbe C^1, $u \to \varphi(u)$ à valeurs dans M, est-il possible de construire une famille à un paramètre $X_t(u)$ de L-diffusion de point de départ $X_0(u) = \varphi(u)$? telle que la dérivé par rapport à u soit localement uniformément bornée en (t, u, ω) (sous certaines hypothèses) ?

Remarque :

- La réponse à la première question peut être donnée par le flot stochastique (à la Kunita), mais il ne vérifie pas la deuxième condition.
- Le but de cette partie est de répondre positivement et simultanément aux deux questions, sous l'hypothèse d'ellipticité de l'opérateur L.
- La construction sera ensuite généralisée aux cas d'opérateurs inhomogènes elliptiques.

- Etant donné L un opérateur elliptique, on peut toujours choisir une métrique g sur M telle que $L = \frac{1}{2}\Delta_g + Z$, avec Z un champ de vecteurs sur M.
- On supposera que (M, g) est une variété Riemanienne complète pour ρ, la distance riemanienne associée.

Théorème (Arnaudon, Thalmaier, C.)

Soit $u \mapsto \varphi(u)$ une courbe C^1 à valeurs dans M, et X^0 une diffusion de générateur $L = \Delta/2 + Z$, commençant en $\varphi(0)$, de temps de vie ξ. Il existe une unique famille

$$u \mapsto (X_t(u))_{t\in[0,\xi[}$$

de diffusion de générateur L, continue presque sûrement en (t, u) et C^1 en u, satisfaisant $X(0) = X^0$, $X_0(u) = \varphi(u)$ et

$$\partial_u X_t(u) = W(X(u))_t(\dot{\varphi}(u)), \tag{3}$$

où $W(X(u))$ désigne le transport parallèle déformé au dessus de $X(u)$.

Définition

On appelle $t \mapsto (X_t(u)_{u\in\mathbb{R}})$ L-diffusion horizontale dans l'espace des courbes $C^1(\mathbb{R}, M)$ au dessus X^0, commençant en φ.

- Soit $L(t)$ un opérateur elliptique, $g(t)$ une famille de métriques C^1 sur M telle que

$$L(t) = \frac{1}{2}\Delta^t + Z(t)$$

  où Δ^t est le $g(t)$ Laplacien et $Z(t)$ un champs de vecteurs M.
- Soit X_t une diffusion inhomogène de générateur $L(t)$.
- Soit $W^t(X)_t$ le $g(t)$-transport parallèle déformé le long de X_t.

Théorème (Arnaudon, Thalmaier, C.)

Soit $\mathbb{R} \to M, \quad u \mapsto \varphi(u)$, *un chemin* C^1 *à valeurs dans* M *et soit* X^0 *une* $L(t)$*-diffusion de point de départ* $\varphi(0)$ *et de temps de vie* ξ. *Supposons que* $(M, g(t))$ *est complète pour tout temps* t. *Il existe une unique famille*

$$u \mapsto (X_t(u))_{t\in[0,\xi[}$$

de $L(t)$*-diffusions, qui est presque sûrement continue en* (t, u) *et* C^1 *en* u, *telle que* $X(0) = X^0$ *et* $X_0(u) = \varphi(u)$, *et qui satisfait l'équation suivante*

$$\partial X_t(u) = W^t(X(u))_t(\dot{\varphi}(u)). \tag{4}$$

Définition

On appelle

$$t \mapsto (X_t(u))_{u\in\mathbb{R}},$$

$L(t)$-diffusion horizontale dans $C^1(\mathbb{R}, M)$ au dessus de X^0, commençant en φ.

Remarque : Si $Z \equiv 0$ et $g(t)$ est solution du backward Ricci flot, alors presque partout pour tout t,

$$\|\partial X_t(u)\|_{g(t)} = \|\dot\varphi(u)\|_{g(0)}\,. \tag{5}$$

Dans ce cas, la $\frac{1}{2}\Delta_t$-diffusion horizontale conserve les longueurs (pour les métriques dépendant du temps).

Pour une mesure de probabilité μ sur M, la solution de l'équation de la chaleur associée à $L(t)$ sera notée μP_t. On note $\mathcal{W}_{p,t}$ la p-distance de Wasserstein associé à la métrique $g(t)$.

Théorème (Arnaudon, Thalmaier, C.)

Soit μ et ν deux mesures (Borélienne) de probabilité sur M.

a) *Supposons*

$$Ric^t - \dot{g} - 2(\nabla^t Z)^\flat \geq 0. \tag{6}$$

alors la fonction

$$t \mapsto \mathcal{W}_{p,t}(\mu P_t, \nu P_t)$$

est décroissante.

b) *S'il existe $k \in \mathbb{R}$, tel que*

$$Ric^t - \dot{g} - 2(\nabla^t Z)^\flat \geq kg, \tag{7}$$

alors pour tous $p > 0$, on a

$$\mathcal{W}_{p,t}(\mu P_t, \nu P_t) \leq e^{-kt/2}\, \mathcal{W}_{p,0}(\mu, \nu),$$

où $(\nabla^t Z)^\flat$ est défini par : pour tout $u, v \in T_x M$,
$(\nabla^t Z)^\flat(u, v) = \frac{1}{2}\left(g(t)(\nabla^t_u Z, v) + g(t)(u, \nabla^t_v Z)\right)$.