# p-variations de semimartingales avec erreurs d'arrondis

P.-H. Cumenge

Université Pierre et Marie Curie

4 mai 2010

*Notation* : $\Delta_i^n X = X_{i/n} - X_{(i-1)/n}$.
**Définition** : $p$-variation d'une semimartingale $X$. Il s'agit du processus

$$\sum_{i=1}^{[nt]} |\Delta_i^n X|^p$$

Plus généralement, pour $f$ donnée, on s'intéresse à

$$\sum_{i=1}^{[nt]} f(\Delta_i^n X) \text{ et } \sum_{i=1}^{[nt]} f(\sqrt{n}\Delta_i^n X)$$

Exemples d'utilisations :

- Estimations de la volatilité.
- Détection de sauts.

Notation : $m_p := E(|Y|^p)$, où $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Théorème (Lépingle, 76)

$$Si\ p < 2, \qquad n^{p/2-1} \sum_{i=1}^{[nt]} |\Delta_i^n X|^p \xrightarrow{l.u.P} (m_p \int_0^t \sigma_s^p ds)_t$$

$$Si\ p = 2, \qquad \sum_{i=1}^{[nt]} |\Delta_i^n X|^2 \xrightarrow{Sk\ P} (\int_0^t \sigma_s^2 ds + \sum_{s \leq t} |\Delta X_s|^2)_t$$

$$Si\ p > 2, \qquad \sum_{i=1}^{[nt]} |\Delta_i^n X|^p \xrightarrow{Sk\ P} \sum_{s \leq t} |\Delta X_s|^p$$

• Plusieurs types d'erreurs d'observations possibles. Ici : erreurs d'arrondis.

• $X$ connue seulement à $\alpha_n$ près : on observe $X^{(\alpha_n)} := \alpha_n[X/\alpha_n]$.
*Hypothèse* : $(\alpha_n)$ suite de pas d'arrondis telle que $\alpha_n\sqrt{n} \to \beta > 0$.

• Retrouve-t-on le même type de convergence pour les $p$-variations ?

# Le cas brownien

### Théorème (Jacod, 96)

*Soit $W$ un m.b. de variance* $0$*,* $p>0$*,* $\alpha_n$ *une suite de réels* $(\geq 0)$ *tels que* $\alpha_n\sqrt{n}\to\beta$*,* $t>0$*,* $U\sim\mathcal{U}[0,1]$ *et* $Y\sim\mathcal{N}(0,1)$ *indépendantes. Alors*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{[nt]}|\sqrt{n}\Delta_i^n W^{(\alpha_n)}|^p \xrightarrow{P} t\beta^p E(|[U+\sigma Y/\beta]|^p)$$

*Notation :* $\Gamma(f,\beta,\sigma)=E(f(\beta[U+\sigma Y/\beta]))$.

# Le cas brownien

Dû à

1. Forme des accroissements :

$$[W_{i/n}/\alpha] - [W_{(i-1)/n}/\alpha] = [\{W_{(i-1)/n}/\alpha\} + \frac{\Delta_i^n X}{\alpha}]$$

2. Vieux résultat sur les parties fractionnaires :

**Théorème (Kosulajeff, 1937)**

*Soit $A$ une variable aléatoire réelle admettant une densité $h$. Soit $U$ une variable uniforme sur $[0,1]$. Alors*

$$\{A/\alpha\} \underset{\alpha \longrightarrow 0}{\overset{\mathcal{L}}{\longrightarrow}} U.$$

### Hypothèse ($\mathcal{H}$)

*Les caractéristiques* $(B, C, \nu)$ *de* $X$ *vérifient*

$$A_t = \int_0^t b_s ds, \qquad C_t = \int_0^t \sigma_s^2 ds, \qquad \nu(dt, dx) = dt F_t(dx)$$

*où les processus considérés sont tous supposés adaptés, et* $\sigma$ *est càdlàg. De plus,* $|b|$ *et* $\int_{\mathbb{R}} (x^2 \wedge 1) F_t(dx)$ *sont localement bornés et l'ensemble des zéros de* $\sigma$ *est de mesure de Lebesgue nulle.*

(Forme classique :

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s \mathrm{d}s + \int_0^t \sigma_s \mathrm{d}W_s + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} x 1_{\{|x|>1\}} \mu(\mathrm{d}x, \mathrm{d}s) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} x 1_{\{|x|\leq 1\}} (\mu - \nu)(\mathrm{d}x, \mathrm{d}s))$$

# Lois des Grands Nombres

## Théorème

*Soit $X$ une semimartingale, $f$ une fonction réelle continue.*

(i) *Supposons que $X$ vérifie $\mathcal{H}$. Si de plus $f(x) = o_{\pm\infty}(x^2)$, alors*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{[nt]} f(\sqrt{n}\Delta_i^n X^{(\alpha_n)}) \xrightarrow{l.u.P} \int_0^t \Gamma(f, \beta, \sigma_s)ds$$

(ii) *Supposons que $X$ vérifie $\mathcal{H}$. Alors*

$$\sum_{i=1}^{[nt]} (\Delta_i^n X^{(\alpha_n)})^2 \xrightarrow{Sk\ P} \int_0^t \Gamma(x \mapsto x^2, \beta, \sigma_s)ds + \sum_{s \le t} |\Delta X_s|^2$$

(iii) *Si $f(x) = \circ(x^2)$ en 0, alors*

$$\sum_{i=1}^{[nt]} f(\Delta_i^n X^{(\alpha_n)}) \xrightarrow{Sk\ P} (\sum_{s \le t} f(\Delta X_s))_t$$

1. (i) Méthode dans le cas diffusif : calculs explicites de densité que l'on ne peut transposer ici. On se ramène, donc, localement, à des accroissements browniens.
2. (iii) Méthode classique : on résoud d'abord le problème avec $f$ nulle au voisinage de 0.

# Un Théorème Central Limite

## Hypothèse $(\mathcal{H}2)$

*$F$ est de classe $\mathcal{C}2$ en $x$, et $F''$ est uniformément bornée (en $(x,t)$).*

Soient $U_q, U'_q, V_q \sim \mathcal{U}([0,1])$ et $Y_q, Y'_q \sim \mathcal{N}(0,1)$, indépendantes ; on pose :

$$\zeta_q = \sigma_{S_q-}\sqrt{V_q}Y_q, \qquad \zeta'_q = \sigma_{S_q}\sqrt{1-V_q}Y'_q \qquad \zeta''_q = \zeta_q + \zeta'_q \tag{4.1}$$

$$L_q := [U_q + U'_q 1_{\{\Delta X_{S_q}\neq 0\}} + \zeta''_q/\beta] - U'_q 1_{\{\Delta X_{S_q}\neq 0\}}.$$

Alors

## Théorème

*Soit $X$ une semimartingale vérifiant $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}2$, soit $f$ une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f''(x) = \circ_0(x)$, et $f(0) = f'(0) = 0$. Alors*

$$\sqrt{n}\left(\sum_{i=1}^{[nt]} f(\Delta_i^n X^{(\alpha_n)}) - \sum_{s\leq[nt]/n} \Delta X_s\right) \xrightarrow{\mathcal{L}\ st} \sum_{S_q\leq t} f'(\Delta X_{S_q})\beta L_q$$

# Un Théorème Central Limite

## Idée de la preuve

- Pour chaque temps de saut $S_q$,
  $\alpha_n[\{X_{(i_q-1)/n}/\alpha_n\} + \Delta^n_{i_q} X/\alpha_n] - \Delta X_{S_q} =$
  $\alpha_n \left[\{X_{(i_q-1)/n}/\alpha_n\} + \{\Delta X_{S_q}/\alpha_n\} + \frac{\Delta^n_{i_q} X - \Delta X_{S_q}}{\alpha_n}\right] - \{\Delta X_{S_q}\}$
- *Notations*
  - $i_q := [nS_q] + 1$ :premier temps de la grille suivant $S_q$,
  - $\kappa^n_q := n(S_q - (i_q - 1)/n)$,
  - $w^n_q := \sqrt{n}(W_{S_q} - W_{(i_q-1)/n})/\sqrt{\kappa^n_p}$ et
    $w'^n_q := \sqrt{n}(W_{i_q/n} - W_{S_q})/\sqrt{1-\kappa^n_p}$.
- On applique le lemme :

### Lemme

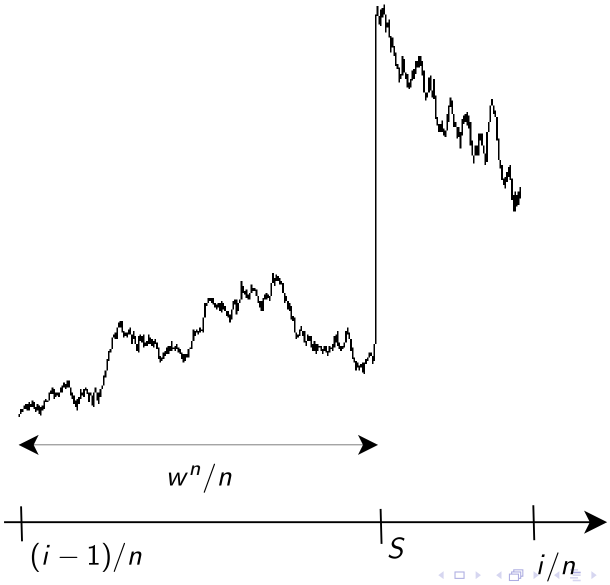
*Sous $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}_2$,*

$$\left(\{\frac{X_{i_q-1}}{\alpha_n}\}, \{\frac{\Delta X_{S_q}}{\alpha_n}\}, w^n_q, w'^n_q, \kappa^n_q\right)_q \xrightarrow{\mathcal{L}\ st} \left(U_q, 1_{\{\Delta X_{S_q}\neq 0\}} U'_q, Y_q, Y'_q, V_q\right)_q$$

*avec $U_q, U'_q, V_q \sim \mathcal{U}([0,1])$, et $Y_q, Y'_q \sim \mathcal{N}(0,1)$.*

# Un Théorème Central Limite

## Heuristique au voisinage d'un saut



# Un Théorème Central Limite

## Pourquoi des hypothèses supplémentaires ?

Contre-exemple : $X_t = W_t + 1_{[T,+\infty]}(t)$, avec

- $W$ un mouvement brownien standard
- $T$ temps d'arrêt indépendant.
- $n_l$, $\{\sqrt{n_l}\} \to a$, $m_l$, $\{\sqrt{m_l}\} \to b \neq a$
- $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, $f = \circ_0(x^3)$, alors :

$$\sqrt{n_l}\left(\sum_{i=1}^{[n_l t]}(f(\Delta_i^{n_l} X^{(\alpha_n)}) - f(1)1_{t>T}\right) \xrightarrow[l]{\mathcal{L}} f'(1)([U+Y+a]-a)1_{t>T}$$

$$\sqrt{m_l}\left(\sum_{i=1}^{[m_l t]}(f(\Delta_i^{m_l} X^{(\alpha_n)}) - f(1)1_{t>T}\right) \xrightarrow[l]{\mathcal{L}} f'(1)([U+Y+b]-b)1_{t>T}$$

# Quelques éléments de bibliographie

## Sur les p-variations


Kosulajeff, Petr A.
*Sur la répartition de la partie fractionnaire d'une variable*
Mat. Sb. **2 (44)**, 1017-1019, (1937)

Lépingle, Dominique
*La variation d'ordre p des semi-martingales*
Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete **36** (4), 295-316, (1976)

Jacod, Jean
*Asymptotic properties of realized power variations and related functionals of semimartingales.*
Stochastic processes and Applications **118** n°4, 517-559, (2008)

# Quelques éléments de bibliographie

## Sur le problème des arrondis


Jacod, Jean
*La variation quadratique du brownien en présence d'erreurs d'arrondis*
Astérisque **236**, 155-161, (1996)

Delattre, Sylvain et Jacod, Jean
*A central limit theorem for normalized functions of the increments of a diffusion process, in the presence of round-off errors*
Bernoulli **3**(1), 1-28, (1997)

Rosenbaum, Mathieu
*Integrated volatility and round-off error*
Bernoulli **15** 3, 6687-720, (2009)