Inégalités Isopérimétriques Quantitatives

Yohann de Castro
Équipe de Statistiques et Probabilité
Institut de Mathématiques de Toulouse

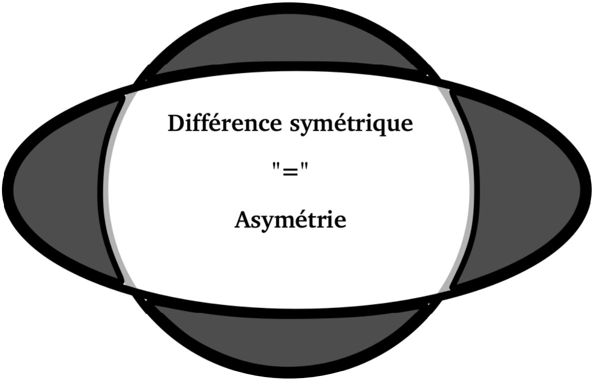
J.P.S. 3-7 Mai 2010

Le Mont-Dore *sous la neige*

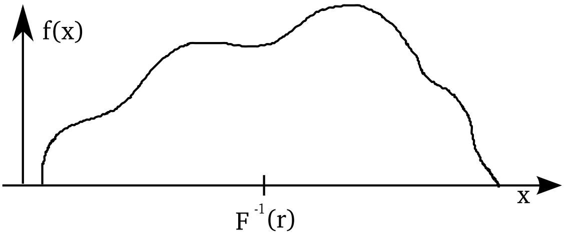
Cas Euclidien

Continuité du périmètre

Continuité du périmètre

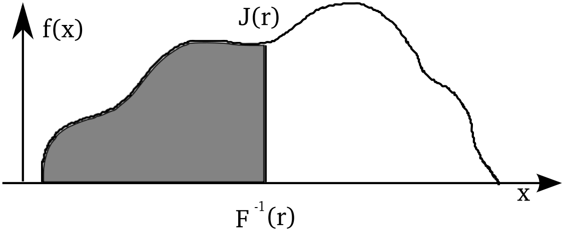


Cadre



μ mesure de probabilité de densité f sur $\mathbb{R}$

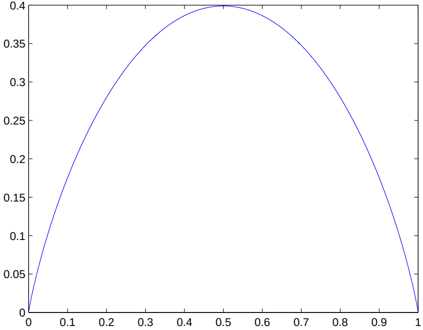
Fonction Isopérimétrique



$$J_\mu(r) = f\left(F^{-1}(r)\right)$$

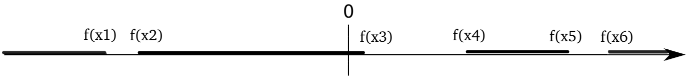
Elle permet de mesurer de manière canonique le périmètre et la mesure d'un ensemble Ω.

Mesure log-concave symétrique



- *Hypothèse* : μ à densité log-concave symétrique $\Leftrightarrow$ la fonction isopérimètrique est concave et symétrique par rapport à $1/2$.

Périmètre

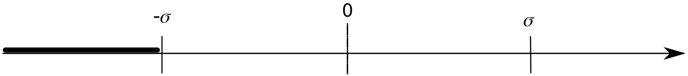


de manière générale :

$$P_\mu(\Omega) = H^0_\mu(\partial^M \Omega) = \int_{\partial^M \Omega} f(x) \mathrm{d}H^0(x)$$

avec H^0 la mesure de Hausdorff et $\partial^M \Omega$ la frontière de Ω.

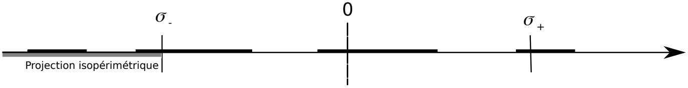
Périmètre minimal



où $\sigma = -F^{-1}(m)$

- $(-\infty, -\sigma)$ et $(\sigma, +\infty)$ sont (les uniques ensembles) de périmètre minimal parmi tous les ensembles Ω de mesure fixée, $\mu(\Omega) = m$.

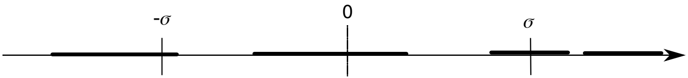
L'asymétrie



$$\lambda_\mu(\Omega) = \min\left\{\mu(\Omega\Delta(-\infty,-\sigma))\,,\ \mu(\Omega\Delta(\sigma,+\infty))\right\}$$

Elle mesure la distance aux ensembles de périmètre minimal.

L'ensemble Ω



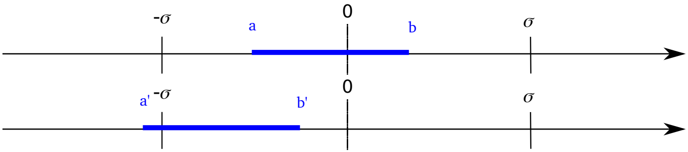
Tout ensemble de périmètre fini s'écrit comme :

$$\Omega = \left(\bigcup_{n \in I} (a_n, b_n) \right) \bigcup \mathcal{E},$$

où I est au plus dénombrable, $\mathcal{E}$ tel que $\mu(\mathcal{E}) = 0$, et

$$d \left((a_n, b_n), \bigcup_{k \in I \setminus \{n\}} (a_k, b_k) \right) > 0.$$

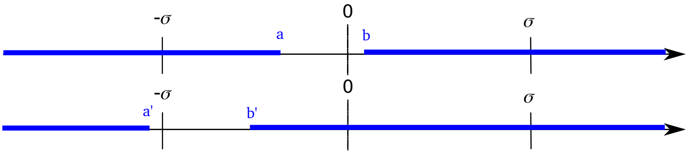
Le lemme de poussage



On a $\mu((a,b)) = \mu((a',b'))$ et

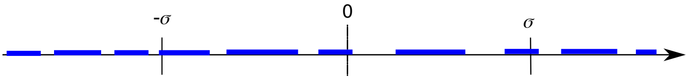
$$P_\mu((a,b)) \geq P_\mu((a',b'))$$

Le lemme de poussage



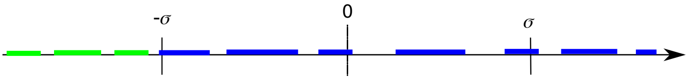
En passant au complémentaire, on pousse les trous.

Ensemble générique



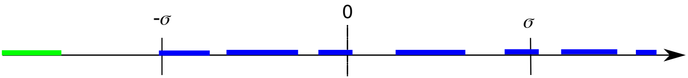
Soit un ensemble Ω de périmètre fini.

On pousse à gauche



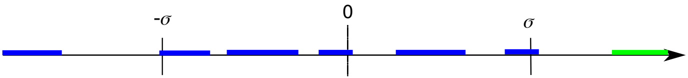
Ensembles strictement à gauche de $-\sigma$.

On pousse à gauche



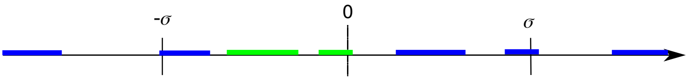
- Même mesure,
- Même projection isopérimètrique $\Leftrightarrow$ même asymétrie,
- Périmètre plus petit.

On pousse à droite



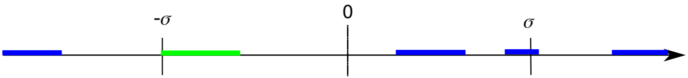
- Même mesure,
- Même projection isopérimètrique $\Leftrightarrow$ même asymétrie,
- Périmètre plus petit.

On pousse au milieu



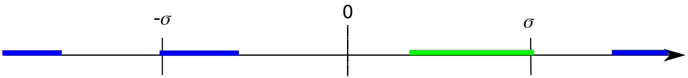
- Même mesure,
- Même projection isopérimètrique $\Leftrightarrow$ même asymétrie,
- Périmètre plus petit.

On pousse au milieu



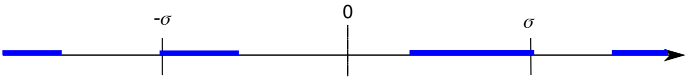
- Même mesure,
- Même projection isopérimètrique $\Leftrightarrow$ même asymétrie,
- Périmètre plus petit.

On pousse au milieu



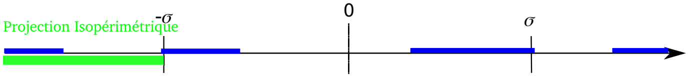
- Même mesure,
- Même projection isopérimètrique $\Leftrightarrow$ même asymétrie,
- Périmètre plus petit.

Simplification du problème

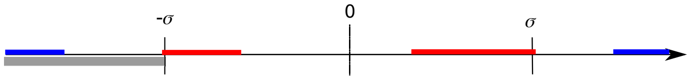


- Même mesure,
- Même projection isopérimètrique $\Leftrightarrow$ même asymétrie,
- Périmètre plus petit.

L'asymétrie et la mesure restent inchangées

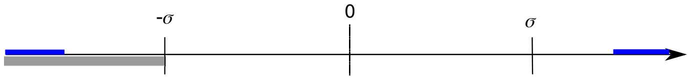


Discussion



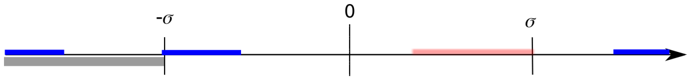
Les intervalles en rouge peuvent être vides.

Ensemble Ω_1



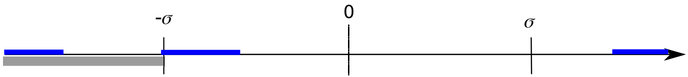
Si les deux sont vides, on a un ensemble Ω_1 de périmètre minimal à mesure et asymétrie fixées.

Le second est vide



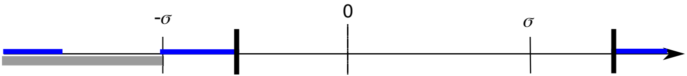
Etudions le cas où le second intervalle est vide.

Le second est vide

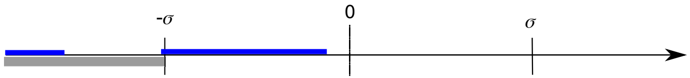


On utilise le lemme de poussage pour minimiser le périmètre.

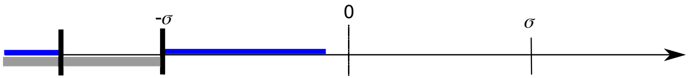
On pousse les trous



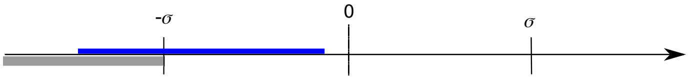
On pousse les trous



On pousse les trous

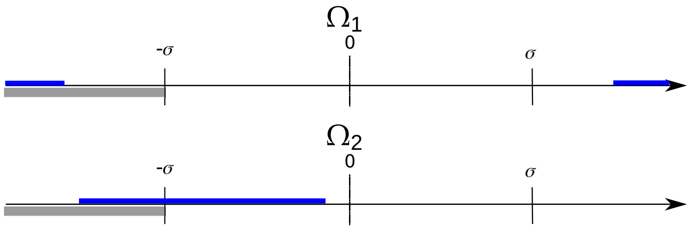


Ensemble Ω_2



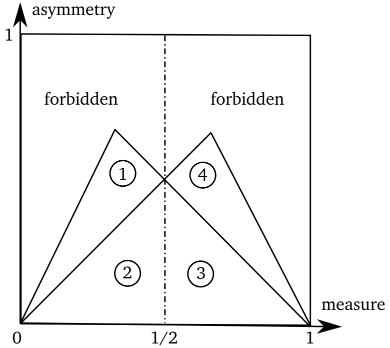
On a un ensemble Ω_2 de périmètre minimal à mesure et asymétrie fixées (quand Ω_1 n'existe pas).

Ensembles de périmètre minimal à asymétrie et mesure fixées



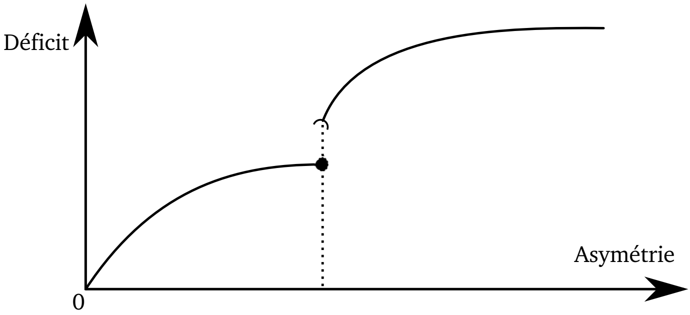
Ces ensembles existent pour des valeurs particulières de l'asymétrie.

Domaine des paramètres



- Sur 1 : Ω_2,
- Sur 2 : Ω_1,
- Pour $\mu(\Omega) > 1/2$, on passe au complémentaire.

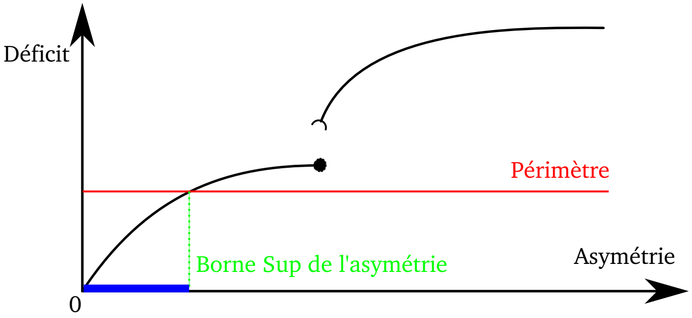
Minoration du périmètre



En calculant les périmètres de Ω_1 et Ω_2 on peut minorer le périmètre à asymétrie fixée. Le déficit est défini par :

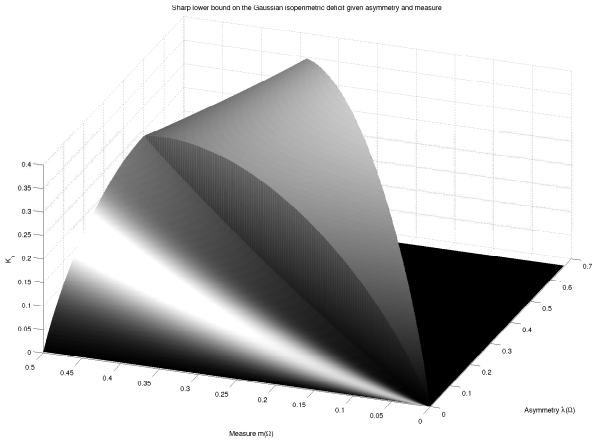
$$\delta_\mu(\Omega) = P_\mu(\Omega) - J_\mu(\mu(\Omega))$$

Majoration de l'asymétrie



Cela permet de majorer l'asymétrie à périmètre fixé.

Borne Inférieure du périmètre Gaussien



A. CIANCHI, N. FUSCO, F. MAGGI, et A. PRATELLI

$$P_{\gamma^n}(\Omega) \geq J_{\gamma^n}(\gamma^n(\Omega)) + \frac{\lambda(\Omega)}{C(\gamma^n(\Omega))}\sqrt{\log\left(\frac{1}{\lambda(\Omega)}\right)}$$

où γ^n mesure gaussienne standard sur $\mathbb{R}^n$.

Lien

www.math.univ-toulouse.fr/∼decastro

Bord d'un ensemble

Define the set Ω^d of all points in Ω of *density* exactly $d \in [0,1]$,

$$\Omega^d = \left\{ x \in \mathbb{R}, \lim_{\rho \to 0} \frac{\mathcal{L}^1(\Omega \cap B_\rho(x))}{\mathcal{L}^1(B_\rho(x))} = d \right\}$$

where $\mathcal{L}^1$ is the *Lebesgue measure* over the real line and $B_\rho(x)$ the ball with center x and radius ρ. Define the **essential boundary** $\partial^M \Omega$ of Ω as the set

$$\mathbb{R} \setminus \left(\Omega^0 \cup \Omega^1 \right).$$