Temps local d'une diffusion en milieu aléatoire

Colloque Jeunes Probabilistes et Statisticiens
Mont Dore

Roland DIEL

3 mai 2010

- Environnement : V processus càd-làg sur $\mathbb{R}$ vérifiant $V(0) = 0$.

- Environnement : V processus càd-làg sur $\mathbb{R}$ vérifiant $V(0) = 0$.
- Diffusion X en milieu V :
  "Solution" de l'EDS :

$$\begin{cases} \mathrm{d}X(t) = \mathrm{d}\beta(t) - \frac{1}{2}V'(X(t))\mathrm{d}t, \\ X(0) = 0 \end{cases}$$

avec β MB indépendant de V.

- Environnement : V processus càd-làg sur $\mathbb{R}$ vérifiant $V(0) = 0$.
- Diffusion X en milieu V :
  "Solution" de l'EDS :

$$\begin{cases} \mathrm{d}X(t) = \mathrm{d}\beta(t) - \frac{1}{2}V'(X(t))\mathrm{d}t, \\ X(0) = 0 \end{cases}$$

  avec β MB indépendant de V.
  Plus rigoureusement, à V fixé, X diffusion de générateur infinitésimal :

$$A = \frac{1}{2}e^{V(x)}\frac{d}{dx}\left(e^{-V(x)}\frac{d}{dx}\right).$$

- Environnement : V processus càd-làg sur $\mathbb{R}$ vérifiant $V(0) = 0$.
- Diffusion X en milieu V :
  "Solution" de l'EDS :

$$\begin{cases} \mathrm{d}X(t) = \mathrm{d}\beta(t) - \frac{1}{2}V'(X(t))\mathrm{d}t, \\ X(0) = 0 \end{cases}$$

  avec β MB indépendant de V.
  Plus rigoureusement, à V fixé, X diffusion de générateur infinitésimal :

$$A = \frac{1}{2}e^{V(x)}\frac{d}{dx}\left(e^{-V(x)}\frac{d}{dx}\right).$$

- On prend pour V un MB standard.

- X est récurrent.

- X est récurrent.
- (Schumacher 1985, Brox 1986)

$$\frac{X_t}{(\log t)^2} \xrightarrow{\text{loi}} L.$$

La loi de L est connue (Kesten 1986, Golosov 1986).

- X est récurrent.
- (Schumacher 1985, Brox 1986)

$$\frac{X_t}{(\log t)^2} \xrightarrow{\text{loi}} L.$$

La loi de L est connue (Kesten 1986, Golosov 1986).

- Lois du logarithme itéré (Hu, Shi 1998) : p.s.

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{X_t}{(\log t)^2 \log_3 t} = \frac{8}{\pi},$$

- X est récurrent.
- (Schumacher 1985, Brox 1986)

$$\frac{X_t}{(\log t)^2} \xrightarrow{\text{loi}} L.$$

La loi de L est connue (Kesten 1986, Golosov 1986).

- Lois du logarithme itéré (Hu, Shi 1998) : p.s.

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{X_t}{(\log t)^2 \log_3 t} = \frac{8}{\pi},$$

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{\log_3 t}{(\log t)^2} \max_{0\le s\le t} X_s = 1.$$

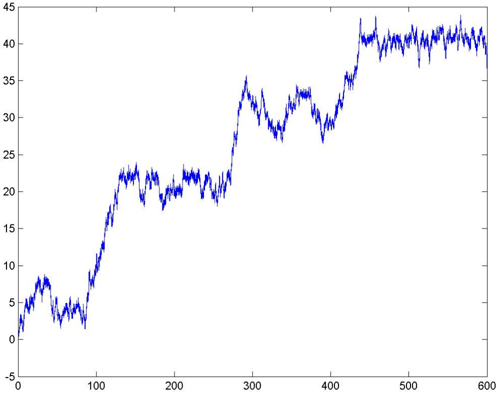


Figure: Une trajectoire de la diffusion en environnement brownien.

[Brox 1986, Tanaka 1987, Neveu, Pitman 1989]

- Le milieu V admet un *h-minimum* en x_0 s'il existe $\xi < x_0 < \zeta$ tel que pour tout $x \in [\xi, \zeta]$,
  - $V(x) \geq V(x_0)$,
  - $V(\xi) \geq V(x_0) + h$,
  - $V(\zeta) \geq V(x_0) + h$.

[Brox 1986, Tanaka 1987, Neveu, Pitman 1989]

- Le milieu V admet un *h-minimum* en x_0 s'il existe $\xi < x_0 < \zeta$ tel que pour tout $x \in [\xi, \zeta]$,
  - $V(x) \geq V(x_0)$,
  - $V(\xi) \geq V(x_0) + h$,
  - $V(\zeta) \geq V(x_0) + h$.
- idem pour *h-maximum*.

[Brox 1986, Tanaka 1987, Neveu, Pitman 1989]

- Le milieu V admet un *h-minimum* en x_0 s'il existe $\xi < x_0 < \zeta$ tel que pour tout $x \in [\xi, \zeta]$,
  - $V(x) \geq V(x_0)$,
  - $V(\xi) \geq V(x_0) + h$,
  - $V(\zeta) \geq V(x_0) + h$.
- idem pour *h-maximum*.
- M_h ensemble des *h-extrema* de V.
- P.s, M_h n'a pas de point d'accumulation et les h-maxima et les h-minima alternent.

$\Rightarrow$ Il existe $\Delta_h = (p_h, m_h, q_h)$ éléments successifs de M_h tels que

- p_h et q_h sont des h-maxima
- m_h est un h-minimum
- $0 \in [p_h, q_h]$.

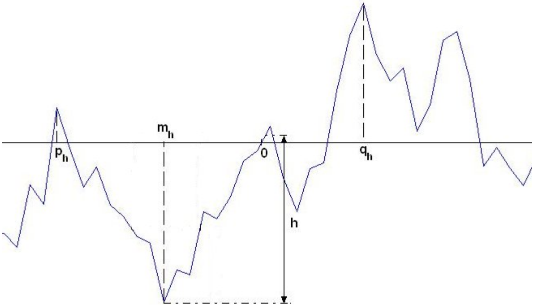


Figure: Vallée standard

(Brox 1986)

- Temps de sortie de $[p_h, q_h]$: $\log \tau_h \sim V(p_h) \wedge V(q_h) - V(m_h)$.

(Brox 1986)

- Temps de sortie de $[p_h, q_h]$: $\log \tau_h \sim V(p_h) \wedge V(q_h) - V(m_h)$.
-
$$\frac{1}{(\log t)^2} |X_t - m_{\log t}| \xrightarrow[t\to\infty]{\mathbb{P}} 0$$

(Brox 1986)

- Temps de sortie de $[p_h, q_h]$: $\log \tau_h \sim V(p_h) \wedge V(q_h) - V(m_h)$.
- $$\frac{1}{(\log t)^2} |X_t - m_{\log t}| \xrightarrow[t \to \infty]{\mathbb{P}} 0$$
- $$\frac{1}{(\log t)^2} X_t \xrightarrow{\text{loi}} m_1$$

Définition

Le temps local $L_X(t,x)$ est la densité de la mesure d'occupation :

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ \mu_t(A) = \int_0^t \mathbf{1}_A(X(s))\mathrm{d}s = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_A(x) L_X(t,x)\mathrm{d}x.$$

Définition

Le temps local $L_X(t,x)$ est la densité de la mesure d'occupation :

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ \mu_t(A) = \int_0^t \mathbf{1}_A(X(s))\mathrm{d}s = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_A(x) L_X(t,x)\mathrm{d}x.$$

On note

$$L_X^*(t) := \sup_{x\in\mathbb{R}} L_X(t,x).$$

- (Hu,Shi 1998) À x fixé,

$$\frac{\log L_X(t,x)}{\log t} \xrightarrow[t\to\infty]{\text{loi}} U \wedge \widetilde{U}.$$

où U et $\widetilde{U}$ sont i.i.d de loi uniforme sur $[0,1]$, .

- (Hu,Shi 1998) À x fixé,

$$\frac{\log L_X(t,x)}{\log t} \xrightarrow[t\to\infty]{\text{loi}} U \wedge \widetilde{U}.$$

  où U et $\widetilde{U}$ sont i.i.d de loi uniforme sur $[0,1]$, .
- (P.Andreoletti, R.D. 2009)

$$\left(\frac{L_X(t, m_{\log t}+x)}{t},\ x\in\mathbb{R}\right) \xrightarrow[t\to\infty]{\text{loi}} \left(\frac{e^{-\widetilde{V}(x)}}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\widetilde{V}}},\ x\in\mathbb{R}\right)$$

  où $\widetilde{V}$ est le milieu V conditionné à rester positif.

- $$\left(\frac{L_X(t, m_{\log t} + x)}{t},\ x \in \mathbb{R}\right) \underset{t\to\infty}{\overset{\text{ucp}}{\sim}} \left(\frac{e^{-V_{m_{\log t}}(x)}}{\int_{a_r \log t}^{b_r \log t} e^{-V_{m_{\log t}}}},\ x \in \mathbb{R}\right)$$

  où

  $$V_{m_{\log t}}(x) := V(m_{\log t} + x) - V(m_{\log t}) \text{ et } r \in]0,1[.$$

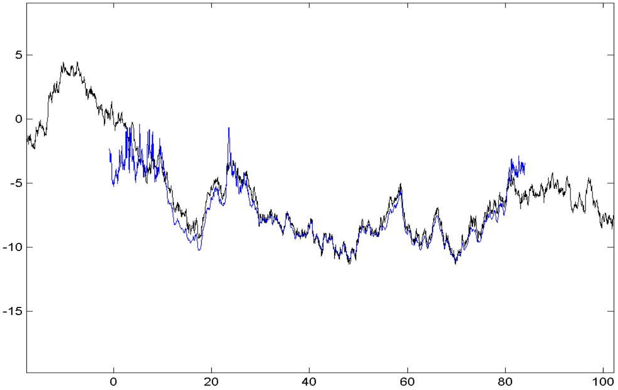
- $$\left(\frac{L_X(t, m_{\log t} + x)}{t},\ x \in \mathbb{R}\right) \underset{t\to\infty}{\overset{\text{ucp}}{\sim}} \left(\frac{e^{-V_{m_{\log t}}(x)}}{\int_{a_{r\log t}}^{b_{r\log t}} e^{-V_{m_{\log t}}}},\ x \in \mathbb{R}\right)$$

  où

  $$V_{m_{\log t}}(x) := V(m_{\log t} + x) - V(m_{\log t}) \text{ et } r \in]0, 1[.$$

- $$\left(\log\left(\frac{L_X^*(t)}{L_X(t, m_t^* + x)}\right),\ x \in \mathbb{R}\right) \underset{t\to\infty}{\overset{\text{ucp}}{\sim}} \left(V_{m_t^*}(x),\ x \in \mathbb{R}\right)$$

  où $m_t^* := \inf\{x \in \mathbb{R}\ ,\ L_X(t, x) = L_X^*(t)\}$.



Courbe noire : environnement brownien W
Courbe bleue : $\phi_t(x) = \log\left(\frac{L_X^*(t)}{L_X(t, m_t^* + x)}\right)$ où $t = 25000$

- (P.Andreoletti, R.D. 2009)

$$\frac{L_X^*(t)}{t} \xrightarrow{\text{loi}} \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\widetilde{V}}}.$$

- (P.Andreoletti, R.D. 2009)

$$\frac{L_X^*(t)}{t} \xrightarrow{\text{loi}} \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\widetilde{V}}}.$$

- (minoration : Z.Shi 1998, majoration : R.D. 2009)

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{L_X^*(t)}{t \log\log\log t} = constante \in]0,\infty[.$$

- (R.D. 2009)

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{\log\log\log t}{t} L_X^*(t) = constante \in]0,\infty[.$$

Fixons $\epsilon > 0, c > 0$. Il existe 4 processus $m_t^1, \dots, m_t^4$ dépendant uniquement du milieu V tel que p.s.

$$\frac{\nu_t(\overline{I_t})}{t} = o(\frac{1}{(\log t)^c})$$

où

$$I_t := \cup_{i=1}^4 [m_t^i - (\log_2 t)^{2+\epsilon}, m_t^i + (\log_2 t)^{2+\epsilon}].$$