

Rendements asymétriques et volatilité multifractale

Emmanuel Bacry (École Polytechnique)

Laurent Duvernet (Université Paris-Est MLV et École Polytechnique)

Jean-François Muzy (Université de Corse)

Jeunes probabilistes et statisticiens

Le Mont-Dore, mai 2010

Faits stylisés

Prenons un actif et $X(t) = \log(p(t))$ son log-prix à la date t .

Quelle que soit l'échelle τ de cinq minutes à un an,

- ▶ la série des rendements à l'échelle τ

$$\delta_\tau X(k\tau) = X((k+1)\tau) - X(k\tau), \quad k = 0, \dots$$

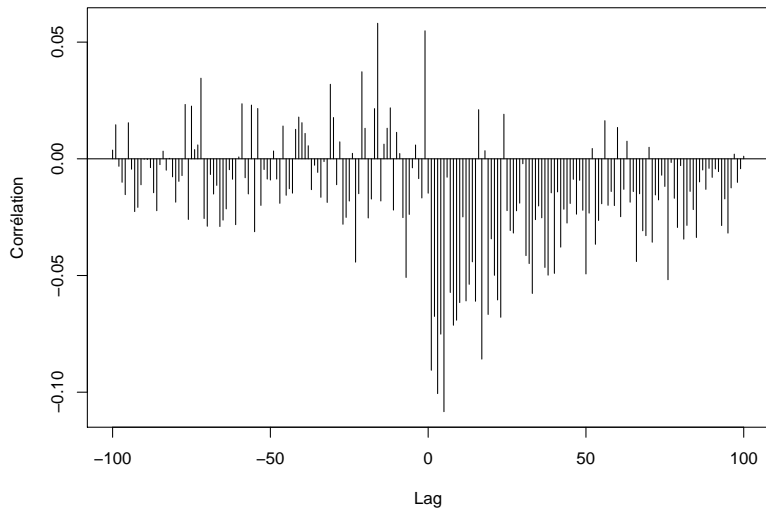
est centrée et décorrélée.

- ▶ La corrélation de la série des volatilités réalisées $(\delta_\tau X(k\tau))^2$ décroît lentement (persistance, clusters).
- ▶ La distribution de $\delta_\tau X(k\tau)$ présente des queues lourdes.

- ▶ On constate un **effet de levier**, c'est-à-dire une corrélation négative entre les rendements passés et les volatilités futures (actions, indices). Il n'y a pas de corrélation en sens inverse.
- ▶ À chaque échelle de temps, on a une imbrication de phases d'activités intenses et de phases plus paisibles : **invariance d'échelle multifractale**.
- ▶ Également : la distribution de $\delta_\tau X(k\tau)$ semble s'approcher d'une gaussienne quand τ croît, la densité de la volatilité est raisonnablement bien approchée par une loi lognormale...

Question : peut-on construire un processus à temps continu $X(t)$ "simple" qui reflèterait ces faits stylisés ?

Effet de levier sur le CAC40



Plan

Le cadre de l'analyse multifractale

Modèles aléatoires multifractals

Modèle symétrique

Modèle asymétrique

Le cadre de l'analyse multifractale

Modèles aléatoires multifractals

Modèle symétrique

Modèle asymétrique

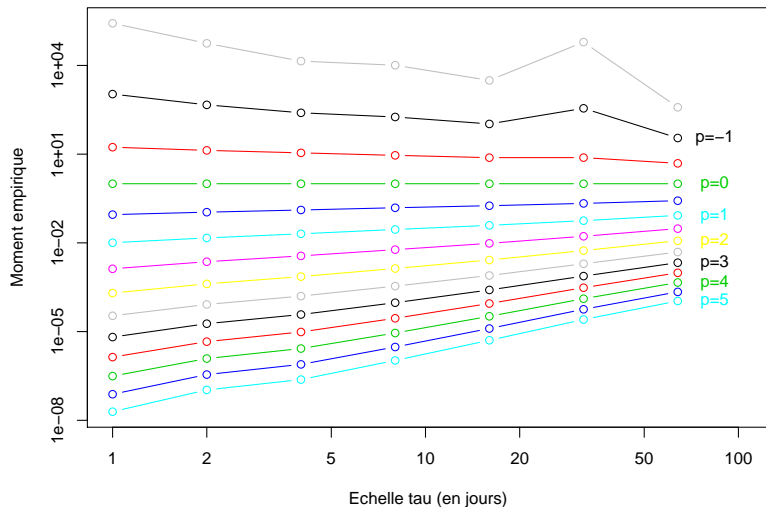
Invariance d'échelle des moments

- ▶ Pour une gamme d'échelle $\tau \rightarrow 0$ et d'exposants p , on observe que

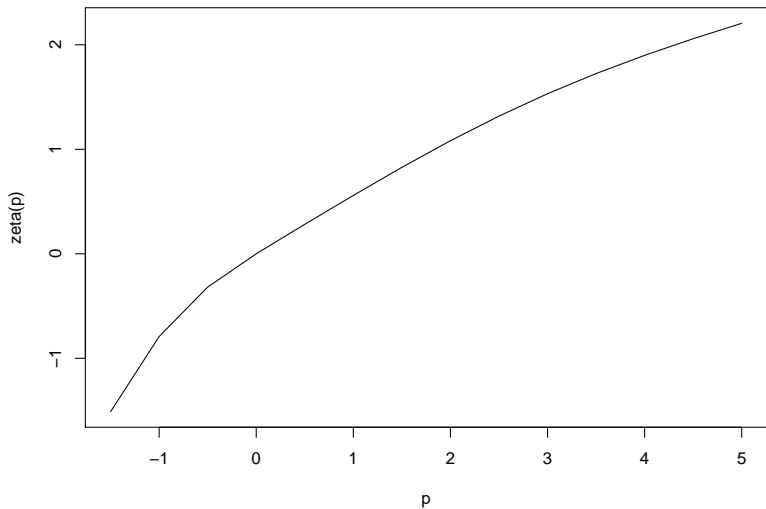
$$\frac{\tau}{T} \sum_{k=0}^{T/\tau} |\delta_\tau X(k\tau)|^p \approx c(p) \tau^{\zeta(p)}.$$

- ▶ Si X est par exemple un processus autosimilaire, $\zeta(p) = pH$, où H est l'indice d'autosimilarité de X .
- ▶ Mais sur les données financières, on trouve des fonctions $\zeta(p)$ strictement concaves : *scaling multifractal* vs *scaling monofractal*.

Scaling multifractal du CAC40



Scaling multifractal du CAC40



Scaling des moments et régularité locale

- ▶ Au point t_0 , X a la régularité $\alpha > 0$ si

$$|X(t_0 + s) - X(t_0)| = O(|s|^\alpha) \quad \text{pour } s \rightarrow 0.$$

Plus α est grand, plus la trajectoire de X est "lisse" au voisinage de t_0 . Par exemple, un mbs a une régularité $1/2$ en tout $t \geq 0$, un mb fractionnaire d'exposant H a une régularité $H \in (0, 1)$ en tout $t \geq 0$.

- ▶ Cadre multifractal : on a un ensemble de régularités locales $[\alpha_*, \alpha^*]$, chacune portée par un ensemble de points qui est fractal.

Conjecture de Frisch-Parisi (1985) : soit $\alpha \mapsto D(\alpha)$ la dimension de Hausdorff de l'ensemble de niveau des points t où la régularité vaut α . Alors $D(\alpha)$ et $\zeta(p)$ sont des fonctions concaves reliées par une transformée de Legendre (démonstrations rigoureuses : Jaffard 2000, Barral et Mandelbrot 2002).

Scaling des moments et régularité locale

- ▶ Au point t_0 , X a la régularité $\alpha > 0$ si

$$|X(t_0 + s) - X(t_0)| = O(|s|^\alpha) \quad \text{pour } s \rightarrow 0.$$

Plus α est grand, plus la trajectoire de X est "lisse" au voisinage de t_0 . Par exemple, un mbs a une régularité $1/2$ en tout $t \geq 0$, un mb fractionnaire d'exposant H a une régularité $H \in (0, 1)$ en tout $t \geq 0$.

- ▶ Cadre multifractal : on a **un ensemble de régularités locales $[\alpha_*, \alpha^*]$, chacune portée par un ensemble de points qui est fractal.**

Conjecture de Frisch-Parisi (1985) : soit $\alpha \mapsto D(\alpha)$ la dimension de Hausdorff de l'ensemble de niveau des points t où la régularité vaut α . Alors **$D(\alpha)$ et $\zeta(p)$ sont des fonctions concaves reliées par une transformée de Legendre** (démonstrations rigoureuses : Jaffard 2000, Barral et Mandelbrot 2002).

Scaling des moments et autosimilarité

- ▶ Autosimilarité au sens classique : pour tout $r \in [0, 1]$

$$(X(rt), 0 \leq t \leq T) \stackrel{\text{law}}{=} r^H (X(t), 0 \leq t \leq T).$$

Cela implique le scaling monofractal des moments théoriques : $\mathbb{E}[|X(t)|^p] = c_p t^{Hp}$

- ▶ Autosimilarité "stochastique" (Castaing 1990) : pour tout $r \in [0, 1]$

$$(X(rt), 0 \leq t \leq T) \stackrel{\text{law}}{=} r^H W_r (X(t), 0 \leq t \leq T),$$

avec W_r une v.a. positive d'espérance 1, indépendante de X .

Alors $W_r W_{r'} \stackrel{\text{law}}{=} W_{r+r'}$, d'où on déduit que W_r est l'exponentielle d'une loi infiniment divisible.

$\mathbb{E}[W_r^p] = r^{-\psi(p)}$, ψ étant l'exposant de la formule de Lévy-Khinchine.

- ▶ Prenons $r = t/T$:

$$\mathbb{E}[|X(t)|^p] = \mathbb{E}[|X(T)|^p] T^{-Hp+\psi(p)} t^{Hp-\psi(p)}.$$

Scaling des moments et autosimilarité

- ▶ Autosimilarité au sens classique : pour tout $r \in [0, 1]$

$$(X(rt), 0 \leq t \leq T) \stackrel{\text{law}}{=} r^H (X(t), 0 \leq t \leq T).$$

Cela implique le scaling monofractal des moments théoriques : $\mathbb{E}[|X(t)|^p] = c_p t^{Hp}$

- ▶ Autosimilarité "stochastique" (Castaing 1990) : pour tout $r \in [0, 1]$

$$(X(rt), 0 \leq t \leq T) \stackrel{\text{law}}{=} r^H W_r (X(t), 0 \leq t \leq T),$$

avec W_r une v.a. positive d'espérance 1, indépendante de X .

Alors $W_r W_{r'} \stackrel{\text{law}}{=} W_{r+r'}$, d'où on déduit que W_r est l'exponentielle d'une loi infiniment divisible.

$\mathbb{E}[W_r^p] = r^{-\psi(p)}$, ψ étant l'exposant de la formule de Lévy-Khinchine.

- ▶ Prenons $r = t/T$:

$$\mathbb{E}[|X(t)|^p] = \mathbb{E}[|X(T)|^p] T^{-Hp+\psi(p)} t^{Hp-\psi(p)}.$$

Scaling des moments et autosimilarité

- ▶ Autosimilarité au sens classique : pour tout $r \in [0, 1]$

$$(X(rt), 0 \leq t \leq T) \stackrel{\text{law}}{=} r^H (X(t), 0 \leq t \leq T).$$

Cela implique le scaling monofractal des moments théoriques : $\mathbb{E}[|X(t)|^p] = c_p t^{Hp}$

- ▶ Autosimilarité "stochastique" (Castaing 1990) : pour tout $r \in [0, 1]$

$$(X(rt), 0 \leq t \leq T) \stackrel{\text{law}}{=} r^H W_r (X(t), 0 \leq t \leq T),$$

avec W_r une v.a. positive d'espérance 1, indépendante de X .

Alors $W_r W_{r'} \stackrel{\text{law}}{=} W_{r+r'}$, d'où on déduit que W_r est l'exponentielle d'une loi infiniment divisible.

$\mathbb{E}[W_r^p] = r^{-\psi(p)}$, ψ étant l'exposant de la formule de Lévy-Khinchine.

- ▶ Prenons $r = t/T$:

$$\mathbb{E}[|X(t)|^p] = \mathbb{E}[|X(T)|^p] T^{-Hp + \psi(p)} t^{Hp - \psi(p)}.$$

Le cadre de l'analyse multifractale

Modèles aléatoires multifractals

Modèle symétrique

Modèle asymétrique

Le cadre de l'analyse multifractale

Modèles aléatoires multifractals

Modèle symétrique

Modèle asymétrique

Modèle de Mandelbrot

- ▶ On pose $X(t) = B(\theta(t))$, $t \geq 0$, où B est un mbs, et θ est un changement de temps (positif, croissant) indépendant de B et qui satisfait $\mathbb{E}[\theta(t)] = t$.
- ▶ Les propriétés d'autosimilarité de X se déduisent de celles de θ via le scaling du brownien.
- ▶ Les seuls processus θ connus qui satisfont une forme d'autosimilarité stochastique sont des processus de cascades aléatoires (Mandelbrot 1971, Calvet et Fisher 2000, Bacry et Muzy 2002).

Ces cascades ont la particularité de **ne pas être absolument continues** : $X(t)$ est une martingale continue, mais pas une martingale d'Itô.

Cascade continue lognormale

On définit (cf. Bacry et Muzy 2002) $\theta(t) = \lim_{l \rightarrow 0} \int_0^t e^{a_l(u)} du$, où pour $l > 0$, $a_l(u)$ est un processus gaussien stationnaire, tel que

- ▶ $\mathbb{E}[a_l(u)] = -1/2 \text{Var}[a_l(u)]$, si bien que $\mathbb{E}[e^{a_l(u)}] = 1$
- ▶ sa covariance asymptotique est quand $l \rightarrow 0$

$$\text{Cov}[a_l(0), a_l(u)] \uparrow \begin{cases} \lambda^2 \log(T/|u|) & \text{si } 0 < |u| \leq T \\ 0 & \text{si } |u| \geq T. \end{cases}$$

- ▶ pour $r \in (0, 1)$

$$(a_{rl}(ru), 0 \leq u \leq T) \stackrel{\text{law}}{=} w_r + (a_l(u), 0 \leq u \leq T)$$

où $w_r \sim \mathcal{N}(\lambda^2/2 \log(r), -\lambda^2 \log(r))$ est indépendante de a_l .
Cela donne la propriété d'autosimilarité stochastique.

Cascade continue lognormale

On définit (cf. Bacry et Muzy 2002) $\theta(t) = \lim_{l \rightarrow 0} \int_0^t e^{a_l(u)} du$, où pour $l > 0$, $a_l(u)$ est un processus gaussien stationnaire, tel que

- ▶ $\mathbb{E}[a_l(u)] = -1/2 \text{Var}[a_l(u)]$, si bien que $\mathbb{E}[e^{a_l(u)}] = 1$
- ▶ sa covariance asymptotique est quand $l \rightarrow 0$

$$\text{Cov}[a_l(0), a_l(u)] \uparrow \begin{cases} \lambda^2 \log(T/|u|) & \text{si } 0 < |u| \leq T \\ 0 & \text{si } |u| \geq T. \end{cases}$$

- ▶ pour $r \in (0, 1)$

$$(a_{rl}(ru), 0 \leq u \leq T) \stackrel{\text{law}}{=} w_r + (a_l(u), 0 \leq u \leq T)$$

où $w_r \sim \mathcal{N}(\lambda^2/2 \log(r), -\lambda^2 \log(r))$ est indépendante de a_l .
Cela donne la propriété d'autosimilarité stochastique.

Intérêt du modèle lognormal

- ▶ Le modèle ne repose que sur les paramètres T et λ^2 , typiquement sur des données financières $T \simeq$ un an, $\lambda^2 \simeq 0.04$.
- ▶ Il vérifie la propriété d'autosimilarité stochastique, et reproduit bien les fait stylisés observés sur les cours d'actifs financiers **hors asymétrie** (Bouchaud et Potters 2003).
- ▶ Applications par ex. en prévision de volatilité (Calvet et Fisher 2008, Bacry, Kozhemyak et Muzy 2009, Duchon, Robert et Vargas 2009).
- ▶ Extensions directes au cas log-infiniment divisible.

Le cadre de l'analyse multifractale

Modèles aléatoires multifractals

Modèle symétrique

Modèle asymétrique

Intégrale contre un mBf

- ▶ Nous étudions

$$X^H(t) = \lim_{l \rightarrow 0} \int_0^t e^{a_l(u)} dB^H(u);$$

c'est un modèle déjà évoqué dans la littérature dans le cas où a_l et B^H sont indépendants (Ludña 2008, Abry, Chainais, Coutin et Pipiras 2009).

- ▶ Nous construisons a_l et B^H de telle sorte que $dB^H(t)$ soit corrélé négativement avec $a_l(t+s)$ pour $s > 0$ (mais ils sont indépendants pour $s < 0$).
- ▶ Nous arrivons à obtenir la propriété d'autosimilarité stochastique.
- ▶ Un problème pour la modélisation de données financières vient de la corrélation des accroissements de B^H qui se retrouve dans celle des accroissements de X^H .

Choix de H

- ▶ Scaling du moment d'ordre 2 : $\mathbb{E}[X^H(t)^2] = c_H(2)t^{2H-\lambda^2}$.
On examine donc le régime $2H - \lambda^2 \approx 1$.
- ▶ Posons $d = 2H - \lambda^2 - 1$. (Le processus X^H n'est bien défini que si $d > 0$.)
- ▶ Nous obtenons quand $d \downarrow 0$:

$$\begin{aligned}\text{Corr}[\delta_\tau X^H(0), \delta_\tau X^H(k_\tau)] &\sim d && \text{pour } k \geq 1 \\ \text{Corr}[\delta_\tau X^H(0), \delta_\tau X^H(k_\tau)^2] &\sim d^{1/2} && \text{pour } k \geq 0 \\ \text{Corr}[\delta_\tau X^H(0), \delta_\tau X^H(k_\tau)^2] &\sim d^{3/2} && \text{pour } k \leq -1.\end{aligned}$$

- ▶ Un régime $d \approx 0.03$ permet d'obtenir à la fois un leverage effect mesurable, et des incréments quasi-décorrélés.

Résultats de simulation

De haut en bas, $d = 0.01, 0.03, 0.06$. À gauche, l'autocorrélogramme des rendements, à droite, le corrélogramme des rendements et de leurs carrés.

