Processus stationnaires sur des graphes

Thibault Espinasse

Université Paul Sabatier

6 mai 2010, JPS, Mont-Dore

Plan de l'exposé

Table des Matières

Origine du problème

Traffic routier : Prédire en temps réel des temps de parcours

- Capteurs sur la route : défaillance
- Données localistion GPS, téléphones : non homogènes
- **But :** Reconstitueer les données

Actuellement : Pas d'exploitation de dépendance spatiale ni temporelle (Régression...)

Objectif

Proposer un modèle statique utilisant la dépendance spatiale, et des outils simples.

Origine du problème

Traffic routier : Prédire en temps réel des temps de parcours

- Capteurs sur la route : défaillance
- Données localistion GPS, téléphones : non homogènes
- **But :** Reconstituer les données

Actuellement : Pas d'exploitation de dépendance spatiale ni temporelle (Régression...)

Objectif

Proposer un modèle statique utilisant la dépendance spatiale, et des outils simples.

Origine du problème

Traffic routier : Prédire en temps réel des temps de parcours

- Capteurs sur la route : défaillance
- Données localistion GPS, téléphones : non homogènes
- **But :** Reconstitueer les données

Actuellement : Pas d'exploitation de dépendance spatiale ni temporelle (Régression...)

Objectif

Proposer un modèle statique utilisant la dépendance spatiale, et des outils simples.

Origine du problème

Traffic routier : Prédire en temps réel des temps de parcours

- Capteurs sur la route : défaillance
- Données localistion GPS, téléphones : non homogènes
- **But :** Reconstitueer les données

Actuellement : Pas d'exploitation de dépendance spatiale ni temporelle (Régression...)

Objectif

Proposer un modèle statique utilisant la dépendance spatiale, et des outils simples.

Origine du problème

Traffic routier : Prédire en temps réel des temps de parcours

- Capteurs sur la route : défaillance
- Données localistion GPS, téléphones : non homogènes
- **But :** Reconstitueer les données

Actuellement : Pas d'exploitation de dépendance spatiale ni temporelle (Régression...)

Objectif

Proposer un modèle statique utilisant la dépendance spatiale, et des outils simples.

Origine du problème

Traffic routier : Prédire en temps réel des temps de parcours

- Capteurs sur la route : défaillance
- Données localistion GPS, téléphones : non homogènes
- **But :** Reconstitueer les données

Actuellement : Pas d'exploitation de dépendance spatiale ni temporelle (Régression...)

Objectif

Proposer un modèle statique utilisant la dépendance spatiale, et des outils simples.

Table des Matières

Présentation du problème

Observation : Comportement des conducteurs indépendant de la position dans le réseau

Idée : Proposer un modèle de covariance “stationnaire” et “isotrope” généralisant les notions suivantes :

- Sur $\mathbb{Z}$ invariance par translation
- Sur $\mathbb{Z}^d$ invariance par rotations/translations
- Arbres homogènes, graphes de Cayley...

$\Rightarrow$ invariance par automorphisme de graphe

Présentation du problème

Observation : Comportement des conducteurs indépendant de la position dans le réseau
Idée : Proposer un modèle de covariance “stationnaire” et “isotrope” généralisant les notions suivantes :

- Sur $\mathbb{Z}$ invariance par translation
- Sur $\mathbb{Z}^d$ invariance par rotations/translations
- Arbres homogènes, graphes de Cayley...

$\Rightarrow$ invariance par automorphisme de graphe

Présentation du problème

Observation : Comportement des conducteurs indépendant de la position dans le réseau
Idée : Proposer un modèle de covariance “stationnaire” et “isotrope” généralisant les notions suivantes :

- Sur $\mathbb{Z}$ invariance par translation
- Sur $\mathbb{Z}^d$ invariance par rotations/translations
- Arbres homogènes, graphes de Cayley...

$\Rightarrow$ invariance par automorphisme de graphe

Présentation du problème

Observation : Comportement des conducteurs indépendant de la position dans le réseau
Idée : Proposer un modèle de covariance “stationnaire” et “isotrope” généralisant les notions suivantes :

- Sur $\mathbb{Z}$ invariance par translation
- Sur $\mathbb{Z}^d$ invariance par rotations/translations
- Arbres homogènes, graphes de Cayley...

$\Rightarrow$ invariance par automorphisme de graphe

Définitions

$G = (S, W)$ graphe infini pondéré

- S sommets (infini dénombrable)
- $W \in \mathbb{R}^{S \times S}$ opérateur de poids

W agit sur $l^2(S)$

H_0 : G de degré borné par d,

Alors W borné en tant qu'opérateur $B_S := l^2(S) \to l^2(S)$

Définitions

$G = (S, W)$ graphe infini pondéré

- S sommets (infini dénombrable)
- $W \in \mathbb{R}^{S \times S}$ opérateur de poids

W agit sur $l^2(S)$

H_0 : G de degré borné par d,
Alors W borné en tant qu'opérateur $B_S := l^2(S) \to l^2(S)$

Définitions

$G = (S, W)$ graphe infini pondéré

- S sommets (infini dénombrable)
- $W \in \mathbb{R}^{S\times S}$ opérateur de poids

W agit sur $l^2(S)$
H_0 : G de degré borné par d,
Alors W borné en tant qu'opérateur $B_S := l^2(S) \to l^2(S)$

Démarche

Cadre : Gaussien centré
$\Rightarrow$ Définir classes de covariances de processus stationnaires

- Covariance dans B_S
- Invariance par automorphisme si il en existe
- Contient fonctions positives de W, D opérateur de degrés, $L = D - W$ Laplacien discret...

Démarche

Cadre : Gaussien centré
$\Rightarrow$ Définir classes de covariances de processus stationnaires

- Covariance dans B_S
- Invariance par automorphisme si il en existe
- Contient fonctions positives de W, D opérateur de degrés, $L = D - W$ Laplacien discret...

Démarche

Cadre : Gaussien centré
$\Rightarrow$ Définir classes de covariances de processus stationnaires

- Covariance dans B_S
- Invariance par automorphisme si il en existe
- Contient fonctions positives de W, D opérateur de degrés, $L = D - W$ Laplacien discret...

Idée : Invariance par automorphisme

Démarche

Cadre : Gaussien centré
$\Rightarrow$ Définir classes de covariances de processus stationnaires

- Covariance dans B_S
- Invariance par automorphisme si il en existe
- Contient fonctions positives de W, D opérateur de degrés, $L = D - W$ Laplacien discret...

Problème : Pas d'automorphisme non triviaux généralement

Démarche

Cadre : Gaussien centré

$\Rightarrow$ Définir classes de covariances de processus stationnaires

- Covariance dans B_S
- Invariance par automorphisme si il en existe
- Contient fonctions positives de W, D opérateur de degrés, $L = D - W$ Laplacien discret...

Idee : Prendre fonctions de W, L...

Démarche

Cadre : Gaussien centré
$\Rightarrow$ Définir classes de covariances de processus stationnaires

- Covariance dans B_S
- Invariance par automorphisme si il en existe
- Contient fonctions positives de W, D opérateur de degrés, $L = D - W$ Laplacien discret...

Problème : Choix arbitraire

Démarche

Cadre : Gaussien centré

$\Rightarrow$ Définir classes de covariances de processus stationnaires

- Covariance dans B_S
- Invariance par automorphisme si il en existe
- Contient fonctions positives de W, D opérateur de degrés, $L = D - W$ Laplacien discret...

Idée : Construire opérateurs de ce type

Définition (Fonctions invariantes I_S)

Φ de B_S dans B_S invariante si

- $$\forall \sigma \in \mathcal{S}, \forall W \in B_S, \Phi(W \circ \sigma) = \Phi(W) \circ \sigma$$
- $$\forall W \in B_S, \Phi(W^T) = (\Phi(W))^T$$

Remarque : Conditions de symétries sur les variables

Définition

$(X_i)_{i \in G}$ de covariance K Gaussien stationnaire si

$$\exists \Phi \in I_S, K = \Phi(W)$$

Définition (Fonctions invariantes I_S)

Φ de B_S dans B_S invariante si

- $$\forall \sigma \in \mathcal{S}, \forall W \in B_S, \Phi(W \circ \sigma) = \Phi(W) \circ \sigma$$
- $$\forall W \in B_S, \Phi(W^T) = (\Phi(W))^T$$

Remarque : Conditions de symétries sur les variables

Définition

$(X_i)_{i \in G}$ de covariance K Gaussien stationnaire si

$$\exists \Phi \in I_S, K = \Phi(W)$$

Définition (Fonctions invariantes I_S)

Φ de B_S dans B_S invariante si

- $$\forall \sigma \in \mathcal{S}, \forall W \in B_S, \Phi(W \circ \sigma) = \Phi(W) \circ \sigma$$
- $$\forall W \in B_S, \Phi(W^T) = (\Phi(W))^T$$

Remarque : Conditions de symétries sur les variables

Définition

$(X_i)_{i \in G}$ de covariance K Gaussien stationnaire si

$$\exists \Phi \in I_S, K = \Phi(W)$$

Définition (Fonctions invariantes I_S)

Φ de B_S dans B_S invariante si

- $$\forall \sigma \in \mathcal{S}, \forall W \in B_S, \Phi(W \circ \sigma) = \Phi(W) \circ \sigma$$
- $$\forall W \in B_S, \Phi(W^T) = (\Phi(W))^T$$

Remarque : Conditions de symétries sur les variables

Définition

$(X_i)_{i \in G}$ de covariance K Gaussien <u>stationnaire</u> si

$$\exists \Phi \in I_S, K = \Phi(W)$$

Remarque :

- Compatibilité avec définitions existantes
- Contient L,$\tilde{L}$, $W, \cdots$

Soit $A = \Phi(W), \Phi \in I_S$, tel que

$$W_{ij} = 0 \Rightarrow A_{ij} = 0$$

Processus MA_A

$(X_i)_{i \in G}$ de covariance K est MA_A si

$$\exists f, K = \sigma^2 P(A)^T P(A)$$

Remarque :

- Comme pour $\mathbb{Z}$, propagation locale de erreurs.
- $\sigma^2 P^2$ est la densité du processus

Remarque :

- Compatibilité avec définitions existantes
- Contient L,$\tilde{L}$, $W, \cdots$

Soit $A = \Phi(W), \Phi \in I_S$, tel que

$$W_{ij} = 0 \Rightarrow A_{ij} = 0$$

Processus MA_A

$(X_i)_{i \in G}$ de covariance K est MA_A si

$$\exists f, K = \sigma^2 P(A)^T P(A)$$

Remarque :

- Comme pour $\mathbb{Z}$, propagation locale de erreurs.
- $\sigma^2 P^2$ est la densité du processus

Remarque :

- Compatibilité avec définitions existantes
- Contient L,$\tilde{L}$, $W, \cdots$

Soit $A = \Phi(W), \Phi \in I_S$, tel que

$$W_{ij} = 0 \Rightarrow A_{ij} = 0$$

Processus MA_A

$(X_i)_{i \in G}$ de covariance K est MA_A si

$$\exists f, K = \sigma^2 P(A)^T P(A)$$

Remarque :

- Comme pour $\mathbb{Z}$, propagation locale de erreurs.
- $\sigma^2 P^2$ est la densité du processus

Remarque :

- Compatibilité avec définitions existantes
- Contient L,$\tilde{L}$, W, $\cdots$

Soit $A = \Phi(W), \Phi \in I_S$, tel que

$$W_{ij} = 0 \Rightarrow A_{ij} = 0$$

Processus MA_A

$(X_i)_{i \in G}$ de covariance K est MA_A si

$$\exists f, K = \sigma^2 P(A)^T P(A)$$

Remarque :

- Comme pour $\mathbb{Z}$, propagation locale de erreurs.
- $\sigma^2 P^2$ est la densité du processus

Table des Matières

Position du problème

Problème :

- $(f_\theta)_{\theta \in \Theta}$ famille paramétrique de densités
- G_N suite de sous graphes emboités
- $(X_i)_{i \in G}$ MA_A de densité f_{θ_0} observé sur G_N

On veut estimer θ_0 par max de vraisemblance

$K_N(f)$: covariance du processus de densité f restreint à G_N (comme pour Toeplitz)

H_1 : Convergence étroite de la mesure spectrale empirique de A sur G_N vers μ

Position du problème

Problème :

- $(f_\theta)_{\theta \in \Theta}$ famille paramétrique de densités
- G_N suite de sous graphes emboités
- $(X_i)_{i \in G}$ MA_A de densité f_{θ_0} observé sur G_N

On veut estimer θ_0 par max de vraisemblance

$K_N(f)$: covariance du processus de densité f restreint à G_N (comme pour Toeplitz)

H_1 : Convergence étroite de la mesure spectrale empirique de A sur G_N vers μ

Position du problème

Problème :

- $(f_\theta)_{\theta\in\Theta}$ famille paramétrique de densités
- G_N suite de sous graphes emboités
- $(X_i)_{i\in G}$ MA_A de densité f_{θ_0} observé sur G_N

On veut estimer θ_0 par max de vraisemblance

$K_N(f)$: covariance du processus de densité f restreint à G_N (comme pour Toeplitz)

H_1 : Convergence étroite de la mesure spectrale empirique de A sur G_N vers μ

Position du problème

Problème :

- $(f_\theta)_{\theta \in \Theta}$ famille paramétrique de densités
- G_N suite de sous graphes emboités
- $(X_i)_{i \in G}$ MA_A de densité f_{θ_0} observé sur G_N

On veut estimer θ_0 par max de vraisemblance

$K_N(f)$: covariance du processus de densité f restreint à G_N (comme pour Toeplitz)

H_1 : Convergence étroite de la mesure spectrale empirique de A sur G_N vers μ

Généralisation de $\mathbb{Z}$

- $\mathbb{Z}, [1, N]$
- $\mu = \frac{1}{2\pi}\lambda$ sur $\mathbb{T}$
- $2 = o(N)$
- $A_{ij} = \mathbf{1}_{j=i+1}$
- $T(f) = \sigma^2 P(A)^T P(A)$, $f = \sigma^2 |P|^2$
- $\Delta_k = k, \alpha(f) = \sum_k k |f_k|$

- G, G_N

H_1 : Mesure spectrale μ

H_2 : $\sharp\partial G_N = o(\sharp G_N)$

✓ $A \in \mathrm{S}_1$

✓ $K(f) = \sigma^2 P(A)^T P(A)$, $f = \sigma^2 |P|^2$

✓ $\alpha(f) = \sum_k \Delta_k |f_k|$

Généralisation de $\mathbb{Z}$

- $\mathbb{Z}, [1, N]$
- $\mu = \frac{1}{2\pi}\lambda$ sur $\mathbb{T}$
- $2 = o(N)$
- $A_{ij} = \mathbf{1}_{j=i+1}$
- $T(f) = \sigma^2 P(A)^T P(A)$, $f = \sigma^2 |P|^2$
- $\Delta_k = k, \alpha(f) = \sum_k k |f_k|$

- G, G_N

H_1 : Mesure spectrale μ

H_2 : $\sharp \partial G_N = o(\sharp G_N)$

✓ $A \in \mathrm{S}_1$

✓ $K(f) = \sigma^2 P(A)^T P(A)$, $f = \sigma^2 |P|^2$

✓ $\alpha(f) = \sum_k \Delta_k |f_k|$

Généralisation de $\mathbb{Z}$

- $\mathbb{Z}, [1, N]$
- $\mu = \frac{1}{2\pi}\lambda$ sur $\mathbb{T}$
- $2 = o(N)$
- $A_{ij} = \mathbf{1}_{j=i+1}$
- $T(f) = \sigma^2 P(A)^T P(A)$, $f = \sigma^2 |P|^2$
- $\Delta_k = k, \alpha(f) = \sum_k k |f_k|$

- G, G_N

H_1 : Mesure spectrale μ

H_2 : $\sharp\partial G_N = o(\sharp G_N)$

✓ $A \in \mathbb{S}_1$

✓ $K(f) = \sigma^2 P(A)^T P(A)$, $f = \sigma^2 |P|^2$

✓ $\alpha(f) = \sum_k \Delta_k |f_k|$

Généralisation de $\mathbb{Z}$

- $\mathbb{Z}, [1, N]$
- $\mu = \frac{1}{2\pi}\lambda$ sur $\mathbb{T}$
- $2 = o(N)$
- $A_{ij} = \mathbf{1}_{j=i+1}$
- $T(f) = \sigma^2 P(A)^T P(A)$, $f = \sigma^2 |P|^2$
- $\Delta_k = k, \alpha(f) = \sum_k k |f_k|$

- G, G_N

H_1 : Mesure spectrale μ

H_2 : $\sharp\partial G_N = o(\sharp G_N)$

✓ $A \in \mathrm{S}_1$

✓ $K(f) = \sigma^2 P(A)^T P(A)$, $f = \sigma^2 |P|^2$

✓ $\alpha(f) = \sum_k \Delta_k |f_k|$

Généralisation de $\mathbb{Z}$

- $\mathbb{Z}, [1, N]$
- $\mu = \frac{1}{2\pi}\lambda$ sur $\mathbb{T}$
- $2 = o(N)$
- $A_{ij} = \mathbf{1}_{j=i+1}$
- $T(f) = \sigma^2 P(A)^T P(A)$, $f = \sigma^2 |P|^2$
- $\Delta_k = k, \alpha(f) = \sum_k k |f_k|$

- G, G_N

H_1 : Mesure spectrale μ

H_2 : $\sharp\partial G_N = o(\sharp G_N)$

✓ $A \in \mathrm{S}_1$

✓ $K(f) = \sigma^2 P(A)^T P(A)$, $f = \sigma^2 |P|^2$

✓ $\alpha(f) = \sum_k \Delta_k |f_k|$

Généralisation de $\mathbb{Z}$

- $\mathbb{Z}, [1, N]$
- $\mu = \frac{1}{2\pi}\lambda$ sur $\mathbb{T}$
- $2 = o(N)$
- $A_{ij} = \mathbf{1}_{j=i+1}$
- $T(f) = \sigma^2 P(A)^T P(A)$, $f = \sigma^2 |P|^2$
- $\Delta_k = k, \alpha(f) = \sum_k k |f_k|$

- G, G_N

H_1 : Mesure spectrale μ

H_2 : $\sharp\partial G_N = o(\sharp G_N)$

✓ $A \in \mathrm{S}_1$

✓ $K(f) = \sigma^2 P(A)^T P(A)$, $f = \sigma^2 |P|^2$

✓ $\alpha(f) = \sum_k \Delta_k |f_k|$

Lemmes de Szegö

$\mathbb{Z}$:

$$\frac{1}{N}\log\left(\det\left(T_N(f)\right)\right) \to \int \log\left(f(\lambda)\right) \mathrm{d}\mu(\lambda)$$

Lemmes de Szegö

Lemme du determinant

$$\frac{1}{\sharp G_N} \log\left(\det\left(K_N(f)\right)\right) \to \int \log\left(f(\lambda)\right) \mathrm{d}\mu(\lambda)$$

Lemmes de Szegö

Lemme du determinant

$$\frac{1}{\sharp G_N} \log\left(\det\left(K_N(f)\right)\right) \to \int \log\left(f(\lambda)\right) \mathrm{d}\mu(\lambda)$$

$\mathbb{Z}$:

$$T_N(f)^{-1} \approx T_N(\frac{1}{f})$$

Lemmes de Szegö

Lemme du determinant

$$\frac{1}{\sharp G_N} \log\left(\det\left(K_N(f)\right)\right) \to \int \log\left(f(\lambda)\right) \mathrm{d}\mu(\lambda)$$

Lemme d'inversion

$$K_N(f)^{-1} \approx K_N(\frac{1}{f})$$

Lemmes de Szegö

Lemme du determinant

$$\frac{1}{\sharp G_N} \log\left(\det\left(K_N(f)\right)\right) \to \int \log\left(f(\lambda)\right) \mathrm{d}\mu(\lambda)$$

Lemme d'inversion

$$K_N(f)^{-1} \approx K_N(\frac{1}{f})$$

$\Rightarrow$ Convergence des estimateurs

On construit les vraisemblances approchées utilisant les deux lemmes précédents.

Théorème

Sous des hypothèses "classiques", et pour des classes de densités assez régulières, tous les estimateurs de max de vraisemblances approchées convergent vers la vraie valeur.

On construit les vraisemblances approchées utilisant les deux lemmes précédents.

Théorème

Sous des hypothèses "classiques", et pour des classes de densités assez régulières, tous les estimateurs de max de vraisemblances approchées convergent vers la vraie valeur.

Pistes de recherche

Problèmes connexes

- Extension aux cas de densités moins régulières (longue mémoire...)
- Efficacité
- Estimation du générateur A
- Grandes déviations

Utilisation du modèle

- Généralisations aux processus non-réguliers
- Graphes aléatoires
- Filtrage—Prédiction
- $\dots$

Pistes de recherche

Problèmes connexes

- Extension aux cas de densités moins régulières (longue mémoire...)
- Efficacité
- Estimation du générateur A
- Grandes déviations

Utilisation du modèle

- Généralisations aux processus non-réguliers
- Graphes aléatoires
- Filtrage—Prédiction
- $\ldots$

Pistes de recherche

Problèmes connexes

- Extension aux cas de densités moins régulières (longue mémoire...)
- Efficacité
- Estimation du générateur A
- Grandes déviations

Utilisation du modèle

- Généralisations aux processus non-réguliers
- Graphes aléatoires
- Filtrage—Prédiction
- $\ldots$

Pistes de recherche

Problèmes connexes

- Extension aux cas de densités moins régulières (longue mémoire...)
- Efficacité
- Estimation du générateur A
- Grandes déviations

Utilisation du modèle

- Généralisations aux processus non-réguliers
- Graphes aléatoires
- Filtrage—Prédiction
- $\cdots$

Pistes de recherche

Problèmes connexes

- Extension aux cas de densités moins régulières (longue mémoire...)
- Efficacité
- Estimation du générateur A
- Grandes déviations

Utilisation du modèle

- Généralisations aux processus non-réguliers
- Graphes aléatoires
- Filtrage—Prédiction
- $\ldots$

Pistes de recherche

Problèmes connexes

- Extension aux cas de densités moins régulières (longue mémoire...)
- Efficacité
- Estimation du générateur A
- Grandes déviations

Utilisation du modèle

- Généralisations aux processus non-réguliers
- Graphes aléatoires
- Filtrage–Prédiction
- ...

Pistes de recherche

Problèmes connexes

- Extension aux cas de densités moins régulières (longue mémoire...)
- Efficacité
- Estimation du générateur A
- Grandes déviations

Utilisation du modèle

- Généralisations aux processus non-réguliers
- Graphes aléatoires
- Filtrage–Prédiction
- ...

Merci

Lemmes de Szegö

Comme pour $\mathbb{Z}$, deux lemmes nécessaires

Lemme (Lemme du déterminant)

$$\frac{1}{\sharp G_N} \log\left(\det\left(K_N(f)\right)\right) \to \int \log\left(f(\lambda)\right) \mathrm{d}\mu(\lambda)$$

Lemmes de Szegö

Comme pour $\mathbb{Z}$, deux lemmes nécessaires

Lemme (Lemme du déterminant)

$$\frac{1}{\sharp G_N} \log\left(\det\left(K_N(f)\right)\right) \to \int \log\left(f(\lambda)\right) \mathrm{d}\mu(\lambda)$$

Lemme (Lemme d'inversion)

$$(K_N(f))^{-1} \approx K_N(\frac{1}{f})$$

Lemmes de Szegö

Comme pour $\mathbb{Z}$, deux lemmes nécessaires

Lemme (Lemme du déterminant)

$$\frac{1}{\sharp G_N} \log\left(\det\left(K_N(f)\right)\right) \to \int \log\left(f(\lambda)\right) \mathrm{d}\mu(\lambda)$$

Lemme (Lemme d'inversion)

$$(K_N(f))^{-1} \approx K_N(\frac{1}{f})$$

Remarque : En réalité, contrôle du biais (norme infinie b) entre $K_N(f)K_N(g)$ et $K_N(fg)$

Lemmes de Szegö

Comme pour $\mathbb{Z}$, deux lemmes nécessaires

Lemme (Lemme du déterminant)

$$\frac{1}{\sharp G_N} \log\left(\det\left(K_N(f)\right)\right) \to \int \log\left(f(\lambda)\right) \mathrm{d}\mu(\lambda)$$

$\mathbb{Z}$:

$$b(T_N(f)T_N(g) - T_N(fg)) \leq \alpha(f)\alpha(g)$$

Lemmes de Szegö

Comme pour $\mathbb{Z}$, deux lemmes nécessaires

Lemme (Lemme du déterminant)

$$\frac{1}{\sharp G_N} \log\left(\det\left(K_N(f)\right)\right) \to \int \log\left(f(\lambda)\right) \mathrm{d}\mu(\lambda)$$

Lemme de quasi-homomorphisme

$$\frac{1}{\sharp \partial G_N} b(K_N(f)K_N(g) - K_N(fg)) \leq \frac{1}{2}\alpha(f)\alpha(g)$$

Hypothèses (H_3)

- *Θ est compact*
- *L'application $\nu \to f_\nu$ est injective*
- $$\exists \rho, \forall \nu \in \Theta, \alpha(f_\nu) \leq \rho, \alpha(\frac{1}{f_\nu}) \leq \rho$$
- $$\exists m > 0, \forall \nu \in \Theta, \forall x, m \leq f_\nu(x) \leq \frac{1}{m}$$
- *Continuité de $f_\nu(\lambda)$ en ν*

Théorème

Sous l'hypothèse H_3, les estimateurs ν_n,$\bar{\nu}_n$ et $\tilde{\nu}_n$ convergent P_{f_ν}-p.s. vers la vraie valeur ν quelque soit $\nu \in \Theta$

Hypothèses (H_3)

- *Θ est compact*
- *L'application $\nu \to f_\nu$ est injective*
- $$\exists \rho, \forall \nu \in \Theta, \alpha(f_\nu) \leq \rho, \alpha(\frac{1}{f_\nu}) \leq \rho$$
- $$\exists m > 0, \forall \nu \in \Theta, \forall x, m \leq f_\nu(x) \leq \frac{1}{m}$$
- *Continuité de $f_\nu(\lambda)$ en ν*

Théorème

Sous l'hypothèse H_3, les estimateurs ν_n,$\bar{\nu}_n$ et $\tilde{\nu}_n$ convergent P_{f_ν}-p.s. vers la vraie valeur ν quelque soit $\nu \in \Theta$