Développement d'Edgeworth d'ordre 1 pour des M-estimateurs dans le cas de chaînes de Markov V-géométriquement ergodiques.

$(X_n)_{n\geq 0}$ chaîne de Markov homogène sur E

- Q_θ noyau de transition
- π_θ probabilité Q_θ-invariante

V-géométrique ergodicité.

$V : E \to [1, +\infty[$ t.q.

- $\sup_\theta \pi_\theta(V) < +\infty$
- il existe $0 < \kappa < 1$ t.q. $\sup_{\theta, |f|\leq V} |\mathbb{E}_x[f(X_n)] - \pi_\theta(f)| \leq C\,\kappa^n\,V(x)$.

Exemple : système linéaire simple $X_n = \theta X_{n-1} + W_n$ avec

- $(W_n)_n$ i.i.d., $\mathbb{E}[|W_1|^\gamma] < +\infty$, de densité $f_W > 0$
- et θ dans un compact dans $]-1, 1[$.

On pose

$$Q_\theta(x, dy) := f_W(y - \theta x)dy \quad \text{et} \quad V(x) := (|x| + 1)^\gamma.$$

$(X_n)_{n\geq 0}$ chaîne de Markov homogène sur E

- Q_θ noyau de transition
- π_θ probabilité Q_θ-invariante

V-géométrique ergodicité.

$V : E \to [1, +\infty[$ t.q.

- $\sup\limits_\theta \pi_\theta(V) < +\infty$
- il existe $0 < \kappa < 1$ t.q. $\sup\limits_{\theta, |f|\leq V} |\mathbb{E}_x[f(X_n)] - \pi_\theta(f)| \leq C\, \kappa^n\, V(x)$.

Exemple : système linéaire simple $X_n = \theta X_{n-1} + W_n$ avec

- $(W_n)_n$ i.i.d., $\mathbb{E}[|W_1|^\gamma] < +\infty$, de densité $f_W > 0$
- et θ dans un compact dans $]-1, 1[$.

On pose

$$Q_\theta(x, dy) := f_W(y - \theta x)dy \quad \text{et} \quad V(x) := (|x| + 1)^\gamma.$$

- μ_θ loi initiale, avec $\sup_\theta \mu_\theta(V) < +\infty$
- $\alpha \equiv \alpha(\theta)$ paramètre d'intérêt (réel)

$$M_n(\alpha) := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} F(\alpha, X_{k-1}, X_k), \qquad \text{où } F \text{ est à valeurs réelles.}$$

α_0 unique t.q.

$$\mathbb{E}_{\theta,\pi_\theta}\left[F^{(1)}(\alpha_0, X_0, X_1)\right] = 0.$$

$\hat{\alpha}_n$ estimateur t.q.

$$\hat{\alpha}_n = \arg\min M_n(\alpha)$$

Exemple. $\alpha = \theta$ et $F(\theta, x, y) := -\ln f_W(y - \theta x) \Rightarrow$ estimateur du maximum de vraisemblance.

- $M_n^{(1)}(\hat{\alpha}_n) = 0$
- $\sup_{\theta, d>0} \mathbb{P}_{\theta,\mu_\theta}\left\{ |\hat{\alpha}_n - \alpha_0| \geq d \right\} = o(n^{-\frac{1}{2}})$.

- μ_θ loi initiale, avec $\sup_\theta \mu_\theta(V) < +\infty$
- $\alpha \equiv \alpha(\theta)$ paramètre d'intérêt (réel)

$$M_n(\alpha) := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} F(\alpha, X_{k-1}, X_k), \qquad \text{où } F \text{ est à valeurs réelles.}$$

α_0 unique t.q.

$$\mathbb{E}_{\theta,\pi_\theta}\left[F^{(1)}(\alpha_0, X_0, X_1)\right] = 0.$$

$\hat{\alpha}_n$ estimateur t.q.

$$\hat{\alpha}_n = \arg\min M_n(\alpha)$$

Exemple. $\alpha = \theta$ et $F(\theta, x, y) := -\ln f_W(y - \theta x) \Rightarrow$ estimateur du maximum de vraisemblance.

- $M_n^{(1)}(\hat{\alpha}_n) = 0$
- $\sup_{\theta, d>0} \mathbb{P}_{\theta,\mu_\theta}\left\{ |\hat{\alpha}_n - \alpha_0| \geq d \right\} = o(n^{-\frac{1}{2}})$.

- μ_θ loi initiale, avec $\sup_\theta \mu_\theta(V) < +\infty$
- $\alpha \equiv \alpha(\theta)$ paramètre d'intérêt (réel)

$$M_n(\alpha) := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} F(\alpha, X_{k-1}, X_k), \qquad \text{où } F \text{ est à valeurs réelles.}$$

α_0 unique t.q.

$$\mathbb{E}_{\theta,\pi_\theta}\left[F^{(1)}(\alpha_0, X_0, X_1)\right] = 0.$$

$\hat{\alpha}_n$ estimateur t.q.

$$\hat{\alpha}_n = \arg\min M_n(\alpha)$$

Exemple. $\alpha = \theta$ et $F(\theta, x, y) := -\ln f_W(y - \theta x) \Rightarrow$ estimateur du maximum de vraisemblance.

- $M_n^{(1)}(\hat{\alpha}_n) = 0$
- $\sup_{\theta, d>0} \mathbb{P}_{\theta,\mu_\theta}\left\{ |\hat{\alpha}_n - \alpha_0| \geq d \right\} = o(n^{-\frac{1}{2}})$.

- pour $j = 2, 3$ et $\eta \in]0, 1/2[$

$$|F^{(j)}(\alpha, x, y) - F^{(j)}(\alpha', x, y)| \leq C\,|\alpha - \alpha'|\,(V(x) + V(y))^{\eta}$$

- (D_3) pour $1 \leq j \leq 3$ $\quad |F^{(j)}(\alpha, x, y)|^{3+\varepsilon} \leq C\,(V(x) + V(y))$

$m_j(\theta) := \mathbb{E}_{\theta,\pi_\theta}[F^{(j)}(\alpha_0, X_0, X_1)]$

$(D_3) \Rightarrow \sigma_j(\theta)^2 := \lim_n \frac{1}{n}\,\mathbb{E}_{\theta,\mu_\theta}\Big[\big(\sum_{k=1}^{n} F^{(j)}(\alpha_0, X_{k-1}, X_k) - n\,m_j(\theta)\big)^2\Big].$

- pour $j = 1, 2$ $\quad \inf_\theta \sigma_j(\theta) > 0$
- $\inf_\theta m_2(\theta) > 0$

- condition de non-arithméticité.

- pour $j = 2, 3$ et $\eta \in]0, 1/2[$

$$|F^{(j)}(\alpha, x, y) - F^{(j)}(\alpha', x, y)| \leq C\,|\alpha - \alpha'|\,(V(x) + V(y))^{\eta}$$

- (D_3) pour $1 \leq j \leq 3$ $\quad |F^{(j)}(\alpha, x, y)|^{3+\varepsilon} \leq C\,(V(x) + V(y))$

$m_j(\theta) := \mathbb{E}_{\theta,\pi_\theta}[F^{(j)}(\alpha_0, X_0, X_1)]$
$(D_3) \Rightarrow \sigma_j(\theta)^2 := \lim_n \frac{1}{n}\,\mathbb{E}_{\theta,\mu_\theta}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} F^{(j)}(\alpha_0, X_{k-1}, X_k) - n\,m_j(\theta)\right)^2\right].$

- pour $j = 1, 2$ $\quad \inf_\theta \sigma_j(\theta) > 0$
- $\inf_\theta m_2(\theta) > 0$

- condition de non-arithméticité.

- pour $j = 2, 3$ et $\eta \in]0, 1/2[$

$$|F^{(j)}(\alpha, x, y) - F^{(j)}(\alpha', x, y)| \leq C\,|\alpha - \alpha'|\,(V(x) + V(y))^{\eta}$$

- (D_3) pour $1 \leq j \leq 3$ $\quad |F^{(j)}(\alpha, x, y)|^{3+\varepsilon} \leq C\,(V(x) + V(y))$

$$m_j(\theta) := \mathbb{E}_{\theta,\pi_\theta}[F^{(j)}(\alpha_0, X_0, X_1)]$$

$$(D_3) \Rightarrow \sigma_j(\theta)^2 := \lim_n \frac{1}{n}\,\mathbb{E}_{\theta,\mu_\theta}\left[\left(\sum_{k=1}^n F^{(j)}(\alpha_0, X_{k-1}, X_k) - n\,m_j(\theta)\right)^2\right].$$

- pour $j = 1, 2$ $\quad \inf_\theta \sigma_j(\theta) > 0$
- $\inf_\theta m_2(\theta) > 0$

- condition de non-arithméticité.

$\mathcal{N}$ fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$, et η sa densité.

Théorème.

Il existe un polynôme A_θ t.q.

$$\sup_{\theta,u}\left|\mathbb{P}_{\theta,\mu_\theta}\{\frac{\sqrt{n}}{\sigma(\theta)}\,(\hat{\alpha}_n-\alpha_0)\leq u\}-\mathcal{N}(u)-\eta(u)n^{-\frac{1}{2}}A_\theta(u)\right| = o(n^{-\frac{1}{2}}),$$

avec

$$\sigma(\theta) := \frac{\sigma_1(\theta)}{m_2(\theta)}.$$

et A_θ admet des coefficients uniformément bornés en θ.

$$S_n(p) := \sum_{k=1}^{n} \xi_p(X_{k-1}, X_k).$$

Hypothèse $\mathcal{R}(3)$.

Il existe $\mathcal{V}(0) \subset I\!\!R$ t.q. $\forall t \in \mathcal{V}(0)$

$$I\!\!E_\theta[e^{itS_n(p)}] = \lambda_{\theta,p}(t)^n \left(1 + l_{\theta,p}(t)\right) + r_{\theta,p,n}(t),$$

et pour $\ell = 0, \ldots, 3$:

- $\sup_{t\in\mathcal{V}(0)} \sup_{\theta,p} \left|\lambda^{(\ell)}_{\theta,p}(t)\right| < +\infty$ et $\sup_{t\in\mathcal{V}(0)} \sup_{\theta,p} \left|l^{(\ell)}_{\theta,p}(t)\right| < +\infty$,
- $\sup_{t\in\mathcal{V}(0)} \sup_{\theta,p} \left|r^{(\ell)}_{\theta,p,n}(t)\right| = O(\kappa^n)$.

Proposition.

Si $|\xi_p(x,y)|^{3+\varepsilon} \leq C\left(V(x) + V(y)\right)$ uniformément en p, alors $\mathcal{R}(3)$ est vérifiée.

$$S_n(p) := \sum_{k=1}^{n} \xi_p(X_{k-1}, X_k).$$

Hypothèse $\mathcal{R}(3)$.

Il existe $\mathcal{V}(0) \subset \mathbb{R}$ t.q. $\forall t \in \mathcal{V}(0)$

$$\mathbb{E}_\theta[e^{itS_n(p)}] = \lambda_{\theta,p}(t)^n \left(1 + l_{\theta,p}(t)\right) + r_{\theta,p,n}(t),$$

et pour $\ell = 0, \ldots, 3$:

- $\sup_{t\in\mathcal{V}(0)} \sup_{\theta,p} \left|\lambda_{\theta,p}^{(\ell)}(t)\right| < +\infty$ et $\sup_{t\in\mathcal{V}(0)} \sup_{\theta,p} \left|l_{\theta,p}^{(\ell)}(t)\right| < +\infty$,
- $\sup_{t\in\mathcal{V}(0)} \sup_{\theta,p} \left|r_{\theta,p,n}^{(\ell)}(t)\right| = O(\kappa^n)$.

Proposition.

Si $|\xi_p(x,y)|^{3+\varepsilon} \le C\left(V(x) + V(y)\right)$ uniformément en p, alors $\mathcal{R}(3)$ est vérifiée.

Hypothèse (N-A).

Pour tout compact $K_0 \subset I\!R^*$, il existe $0 < \rho < 1$ t.q.

$$\sup_{t \in K_0} \sup_{\theta,p} \left| I\!E_\theta[e^{itS_n(p)}] \right| = O(\rho^n).$$

Théorème : développement d'Edgeworth probabiliste d'ordre 1.

$\mathcal{R}(3)$ et (N-A) vérifiées $\Rightarrow$ il existe $\sigma_{\theta,p}$ et un polynôme $A_{\theta,p}$ t.q.

$$\sup_{u,\theta,p} \left| \mathbb{P}_\theta \left(\frac{S_n(p)}{\sigma_{\theta,p}\sqrt{n}} \leq u \right) - \mathcal{N}(u) - \frac{1}{\sqrt{n}} A_{\theta,p}(u)\, \eta(u) \right| = o(\frac{1}{\sqrt{n}}).$$

et $A_{\theta,p}$ admet des coefficients uniformément bornés en (θ, p).

Application : avec $|u| < 2\sqrt{\ln n}$ et

$$F_n^{(1)}(\alpha_0,x,y)+\frac{\sigma(\theta)}{\sqrt{n}}u\left(F_n^{(2)}(\alpha_0,x,y)-m_2(\theta)\right)+(\frac{\sigma(\theta)}{\sqrt{n}})^2\frac{u^2}{2}\left(F_n^{(3)}(\alpha_0,x,y)-m_3(\theta)\right).$$

Hypothèse (N-A).

Pour tout compact $K_0 \subset \mathbb{R}^*$, il existe $0 < \rho < 1$ t.q.

$$\sup_{t \in K_0} \sup_{\theta,p} \left| \mathbb{E}_\theta[e^{itS_n(p)}] \right| = O(\rho^n).$$

Théorème : développement d'Edgeworth probabiliste d'ordre 1.

$\mathcal{R}(3)$ et (N-A) vérifiées $\Rightarrow$ il existe $\sigma_{\theta,p}$ et un polynôme $A_{\theta,p}$ t.q.

$$\sup_{u,\theta,p} \left| \mathbb{P}_\theta\left(\frac{S_n(p)}{\sigma_{\theta,p}\sqrt{n}} \leq u \right) - \mathcal{N}(u) - \frac{1}{\sqrt{n}} A_{\theta,p}(u)\,\eta(u) \right| = o(\frac{1}{\sqrt{n}}).$$

et $A_{\theta,p}$ admet des coefficients uniformément bornés en (θ, p).

Application : avec $|u| < 2\sqrt{\ln n}$ et

$$F_n^{(1)}(\alpha_0, x, y) + \frac{\sigma(\theta)}{\sqrt{n}} u \left(F_n^{(2)}(\alpha_0, x, y) - m_2(\theta) \right) + (\frac{\sigma(\theta)}{\sqrt{n}})^2 \frac{u^2}{2} \left(F_n^{(3)}(\alpha_0, x, y) - m_3(\theta) \right).$$

- ρ-mixing et modèle itératif lipschitzien
- ordre supérieur à 1 : condition de Cramér

Références :

[1] Ferré D. Développement d'Edgeworth d'ordre 1 pour des M-estimateurs dans le cas de chaînes de Markov V-géométriquement ergodiques. CRAS, 2010.

[2] Hervé L. and Pène F. The Nagaev method via the Keller-Liverani theorem. A paraître dans Bull. Soc. Math. Fr.

[3] Hervé L., Ledoux J. and Patilea V. A uniform Berry-Esseen theorem on M-estimators for geometrically ergodic Markov chains.

[4] Meyn S. P. and Tweedie R. L. Markov chains and stochastic stability. Springer Verlag, 1993.

[5] Pfanzagl J. Asymptotic expansions related to minimum contrast estimators. Ann. Statist., 1973.