

# Estimation de la VaR et de la CVaR par algorithmes stochastiques

O. Bardou<sup>1</sup>, N. Frikha<sup>1,2</sup>, G. Pagès<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Direction de la Recherche et de l'Innovation GDFSuez,

<sup>2</sup>Université Pierre et Marie Curie, Paris VI

Journées Jeunes Probabilistes et Statisticiens

# Plan

- 1 Motivation
  - Mesures de risque sur un portefeuille
  - Définition et Calcul de la VaR et de la CVaR
- 2 Etude d'un premier algorithme de Robbins-Monro
  - Convergence p.s.
  - Vitesse de convergence
  - Problèmes
- 3 Importance Sampling Récuratif en dimension finie
  - Appliquée au calcul d'espérance
  - Appliquée au calcul du couple VaR-CVaR
- 4 Exemples numériques

# Simulation d'un portefeuille Gaz

On considère un portefeuille simple composé d'une consommation à la date  $T=1$  an,  $C_T$  que l'on désire couvrir.

- Achat sur le marché de gaz spot au prix  $S_T^g$  d'une quantité  $C_T$ .

$$S_T^g = S_0^g e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma W_T^g},$$

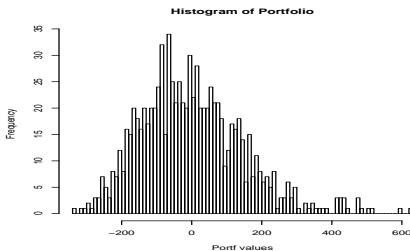
$$C_T = a + b \times T_T, \quad dT_t = -\lambda T_t dt + \sigma dW_t^T.$$

- Vente à un prix fixe  $K$  de cette quantité de gaz.
- On couvre cette position risquée (on tente de minimiser un certain "risque") par l'achat de  $\theta_0 = 100$  unités de spot gaz.

$$L := F(X) = -\Delta V = (S_T^g - K) C_T - \theta_0 (S_T^g - S_0)$$

où  $X \sim \mathcal{N}(0, I_2)$ .

## 10 000 simulations de la perte du portefeuille



- $\xi^* := \text{VaR}_\alpha$  est la perte qui ne sera pas dépassée dans  $\alpha\%$  des cas.

$$\mathbb{P}(L \leq \xi^*) = \alpha = .95, \quad \xi^* \approx 265.2,$$

- $C^* := \text{CVaR}_\alpha$  donne plus d'information sur la distribution des pertes maximales.

$$C^* := \mathbb{E}[L | L \geq \xi^*], \quad C^* \approx 372.6.$$

## Laquelle des deux choisir ?

- La  $VaR_\alpha$  est largement utilisée par les praticiens. Cependant, elle n'est pas sous-additive ce qui pénalise la diversification. De plus, elle ne tient pas compte de la queue de la distribution au delà la  $VaR_\alpha$ .
- La  $CVaR_\alpha$  possède de meilleures propriétés. C'est une mesure de risque cohérente (c.f. Artzner, Delbaen, Eber & Heath (1999)).
- Lorsque  $\alpha \approx 1$ , estimer ces deux quantités devient difficile (événements rares). De plus, dans la pratique, le nombre de simulations est souvent limité car les portefeuilles sont très complexes.

## VaR-CVaR comme solutions d'un problème d'optimisation convexe

Soit  $\alpha \in (0, 1)$  et  $L := \varphi(X)$  où  $X$  est une v.a. à valeur dans  $\mathbb{R}^d$ .  
On suppose que  $\varphi(X)$  est continue et  $\mathbb{E}[|\varphi(X)|] < +\infty$ .

$$\xi^* := \text{VaR}_\alpha, \text{ où } \mathbb{P}(\varphi(X) \leq \xi^*) = \alpha$$
$$C^* := \text{CVaR}_\alpha = \mathbb{E}[\varphi(X) | \varphi(X) \geq \xi^*].$$

vérifient (Rockafellar & Uryasev)

$$C^* = V(\xi^*) = \min_{\xi \in \mathbb{R}} V(\xi) \quad \text{et} \quad \xi^* = \arg \min_{\xi \in \mathbb{R}} V(\xi)$$

où  $V$  est la fonction convexe, dérivable

$$V : \xi \mapsto \xi + \frac{1}{1-\alpha} \mathbb{E}[(\varphi(X) - \xi)_+].$$

## Recherche de zéro stochastique...

Afin d'estimer  $\xi^*$ , il suffit de trouver un zéro de  $V'$

$$\xi^* = \arg \min_{\xi \in \mathbb{R}} V(\xi) = \{ \xi \in \mathbb{R} \mid V'(\xi) = 0 \}.$$

où  $V(\xi) = \mathbb{E} \left[ v(\xi, X) := \xi + \frac{1}{1-\alpha} (\varphi(X) - \xi)_+ \right]$  et,

$$\begin{aligned} V'(\xi) &= \mathbb{E} \left[ \frac{\partial v}{\partial \xi}(\xi, X) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ H(\xi, X) := 1 - \frac{1}{1-\alpha} \mathbf{1}_{\{\varphi(X) \geq \xi\}} \right] \end{aligned}$$

## par une procédure de dosage (Robbins-Monro)

Soit  $X_n \sim X$ , i.i.d. et  $(\gamma_n)_{n \geq 1}$  une suite positive réelle (pas de l'algorithme) telle que :

$$\sum_{n \geq 1} \gamma_n = +\infty \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 1} \gamma_n^2 < +\infty. \quad (1)$$

On définit alors l'algorithme stochastique  $(\xi_n)_{n \geq 1}$  par :

$$\xi_n = \xi_{n-1} - \gamma_n H(\xi_{n-1}, X_n), \quad n \geq 1, \quad \xi_0 \in L^1(\mathbb{P}).$$

Alors, il existe  $\xi^* : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow \{V' = 0\}$ ,  $\xi^* \in L^2(\mathbb{P})$  tel que :

$$\xi_n \xrightarrow{\text{a.s.}} \xi^*, \quad n \rightarrow +\infty.$$



## Pourquoi ? Théorème de Robbins-Monro

Soit  $H : \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  borélienne,  $X$  v.a. à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  tel que  $\mathbb{E}[|H(z, X)|] < +\infty, \forall z \in \mathbb{R}^q$ . On définit  $h(z) = \mathbb{E}[H(z, X)]$ . On suppose  $h$  continue et que  $\mathcal{T}^* := \{h = 0\}$  vérifie

$$\forall z \in \mathbb{R}^d \setminus \mathcal{T}^*, \forall z^* \in \mathcal{T}^*, \quad \langle z - z^*, h(z) \rangle > 0.$$

Soit  $(\gamma_n)_{n \geq 1}$  une suite déterministe satisfaisant (1). On suppose que  $H$  vérifie

$$\forall z \in \mathbb{R}^d, \quad \mathbb{E}[|H(z, X)|^2] \leq C(1 + |z|^2)$$

Alors la procédure définie pour  $n \geq 1$  par

$$Z_n = Z_{n-1} - \gamma_n H(Z_{n-1}, X_n),$$

satisfait :

$$\exists z_\infty, \quad \text{tel que } Z_n \xrightarrow{\text{a.s.}} z_\infty \text{ et } z_\infty \in \mathcal{T}^* \text{ a.s.}$$

## Estimation de la CVaR par *procédure compagnon*

Pour calculer la CVaR, il suffit d'estimer la quantité

$$C^* := V(\xi^*) = \mathbb{E}[v(\xi^*, X)] \approx \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n v(\xi^*, X_k).$$

On peut utiliser les mêmes innovations en calculant (récursivement) la quantité :

$$\begin{aligned} C_n &:= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n v(\xi_{k-1}, X_k) = C_{n-1} - \frac{1}{n} (C_{n-1} - v(\xi_{n-1}, X_n)) \\ &= \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n V(\xi_{k-1})}_{\xrightarrow{\text{a.s.}} V(\xi^*)} + \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n v(\xi_{k-1}, X_k) - V(\xi_{k-1})}_{\text{Bruit: } \frac{N_n}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} 0} \end{aligned}$$

## Une procédure globale VaR-CVaR

On peut modifier légèrement la procédure compagnon  $C_n$  :

$$C_n = C_{n-1} - \gamma_n (C_{n-1} - v(\xi_{n-1}, X_n))$$

Maintenant, la procédure globale  $Z_n := (\xi_n, C_n)$  s'écrit :

$$Z_n = Z_{n-1} - \gamma_n H_g(Z_{n-1}, X_n)$$

avec  $H_g(z, x) = \left(1 - \frac{1}{1-\alpha} \mathbf{1}_{\{\varphi(x) \geq \xi\}}, C - v(\xi, x)\right)$ . Le pas de l'algorithme doit être choisi tel que :

$$\sum_{n \geq 1} \gamma_n = +\infty \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 1} \gamma_n^2 < +\infty.$$

## Quel pas choisir ?

- $(\gamma_n) \equiv (Cn^{-1})$ ,  $C > 0$  permet d'obtenir la convergence et la vitesse de convergence faible optimale : TCL à la vitesse  $\sqrt{n}$  si  $C$  est choisi correctement. La condition fait intervenir  $f_{\varphi(X)}(\xi^*)$ . Le choix de  $C$  est délicat.
- $(\gamma_n) \equiv (Cn^{-p})$ ,  $\frac{1}{2} < p < 1$  permet de s'affranchir de la condition sur  $C$ . La procédure converge. Cependant, la vitesse dans le TCL n'est pas optimale  $\left(\gamma_n^{-\frac{1}{2}}\right)$ .
- La solution couramment utilisée est le principe de moyennisation de Ruppert et Polyak. Il permet d'obtenir la meilleure vitesse de convergence asymptotique.

## Principe de moyennisation de Ruppert et Polyak

Il consiste à calculer la procédure de Robbins-Monro avec un pas lentement décroissant  $\gamma_n = \frac{\gamma_1}{n^p}$  avec  $\frac{1}{2} < p < 1$

$$Z_n = Z_{n-1} - \gamma_n H_g(Z_{n-1}, X_n), \quad n \geq 1, \quad Z_0 \in L^1(\mathbb{P}),$$

et à calculer de manière adaptative la moyenne empirique  $\bar{Z}_n$  de  $Z_n$

$$\bar{Z}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \bar{Z}_{n-1} + \frac{1}{n} (Z_{n-1} - \bar{Z}_{n-1}), \quad n \geq 1, \quad \bar{Z}_0 = 0.$$

Alors, sous certaines hypothèses classiques, on a :

$$\sqrt{n} (\bar{Z}_n - z^*) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Sigma).$$

# Vitesse de convergence de cette première version de l'algorithme VaR-CVaR

Soit  $\gamma_n = \frac{\gamma_1}{n^p}$  avec  $\frac{1}{2} < p < 1$ . On suppose que  $f_{\varphi(X)}(\xi^*) > 0$ . Si  $\exists a > 1, \mathbb{E} \left[ |\varphi(X)|^{2a} \right] < +\infty, \varphi(X)$  est continue alors

$$\sqrt{n} \begin{pmatrix} \bar{\xi}_n - \xi^* \\ \bar{C}_n - C^* \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Sigma) \quad , n \rightarrow +\infty.$$

où  $\Sigma$  est la matrice de covariance asymptotique définit par

$$\Sigma_{1,1} = \frac{\alpha(1-\alpha)}{f_{\varphi(X)}^2(\xi^*)}$$
$$\Sigma_{2,2} = \frac{1}{(1-\alpha)^2} \text{Var} \left( (\varphi(X) - \xi^*)_+ \right)$$

# Différents problèmes

- Convergence lente dans les cas qui nous intéressent :  
 $\alpha \approx 1 \Rightarrow \mathbb{P}(\varphi(\mathbf{X}) \geq \xi^*) = 1 - \alpha \approx 0$  (événements rares)

$$\xi_n = \xi_{n-1} - \gamma_n \left( 1 - \frac{1}{1 - \alpha} \mathbf{1}_{\{\varphi(\mathbf{X}_n) \geq \xi_{n-1}\}} \right)$$

- $\varphi(\mathbf{X})$  peut être un portefeuille complexe, difficile à simuler. On dispose d'un nombre limité de simulations en pratique.
- En pratique, on doit combiner le premier algorithme avec une procédure d'*importance sampling*, afin d'augmenter la probabilité que  $\varphi(\mathbf{X})$  dépasse  $\xi^*$ .

## Calcul d'espérance et Réduction de variance par I.S.

On s'intéresse à un grand problème en probabilités numériques, l'estimation de  $\mathbb{E}[F(X)]$ .

$F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ , avec  $\mathbb{P}_X(dx) = p(x)\lambda_d(dx)$ , alors  $\forall \theta \in \mathbb{R}^d$ ,

$$\mathbb{E}[F(X)] = \mathbb{E}\left[F(X + \theta) \frac{p(X + \theta)}{p(X)}\right]$$

On choisit  $\theta$  afin de minimiser la variance, i.e. le moment d'ordre 2 :

$$Q(\theta) := \mathbb{E}\left[F^2(X + \theta) \frac{p^2(X + \theta)}{p^2(X)}\right] = \mathbb{E}\left[F^2(X) \frac{p(X)}{p(X - \theta)}\right]$$



# I.S. pour les fonctions de densités log-concave

Lemaire & Pagès (2009). On suppose que  $\forall \theta \in \mathbb{R}^d$ ,  $Q(\theta) < \infty$ ,

$p$  est log-concave et  $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} p(x) = 0$ .

Alors,  $Q$  est finie, convexe et  $\lim_{|\theta| \rightarrow +\infty} Q(\theta) = +\infty$ . Par conséquent,

$$\arg \min_{\theta \in \mathbb{R}^d} Q(\theta) = \left\{ \theta \in \mathbb{R}^d \mid \nabla Q(\theta) = 0 \right\} \neq \emptyset$$

Pour différencier  $Q$ , on suppose que

$\forall C > 0$ ,  $\mathbb{E} \left[ F^2(X) e^{C|X|^{a-1}} \right] < +\infty$  et

$\exists b \in [1, 2]$  tel que  $\left\{ \begin{array}{l} (i) \quad \frac{|\nabla p(x)|}{p(x)} = O(|x|^{b-1}) \quad , \quad |x| \rightarrow \infty \\ (ii) \quad \exists \rho > 0, \log(p(x)) + \rho|x|^b \text{ est convexe.} \end{array} \right.$

## Version projetée

- Arouna dans un cadre gaussien utilise le gradient de  $Q$  afin de définir un algorithme stochastique

$$\nabla Q(\theta) = \mathbb{E} \left[ \underbrace{F^2(X) \frac{p(X)}{p^2(X - \theta)}}_{K(\theta, X)} \nabla p(X - \theta) \right]$$

Cependant, l'algorithme explose car l'hypothèse de sous linéarité n'est pas vérifiée :

$$\mathbb{E} [|K(\theta, X)|] \leq C(1 + |\theta|).$$

- Solution : projeter l'algorithme afin de le forcer à rester dans un compact (projection "à la Chen"). Convergence p.s. avec un TCL (c.f. Lelong 2007) une fois que la phase de stabilisation s'est terminée

## Lemaire&Pagès : version non projetée

On exécute un troisième changement de variable. Cette fois-ci  $\theta$  apparaît dans la fonction  $F$

$$\nabla Q(\theta) = \mathbb{E} \left[ \underbrace{F(X - \theta) \frac{p^2(X - \theta)}{p(X)p(X - 2\theta)} \frac{\nabla p(X - 2\theta)}{p(X - 2\theta)}}_{K(\theta, X)} \right].$$

On suppose qu'on a un contrôle de  $F$  à l'infini :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, |F(x)| \leq C e^{a|x|}.$$

Alors, l'algorithme définit par

$$\theta_n = \theta_{n-1} - \gamma_n e^{-2a(|\theta|^2+1)-2\rho|\theta|^b} H(\theta_{n-1}, X_n), \quad n \geq 1.$$

converge p.s. vers  $\theta^* \in \arg \min_{\theta \in \mathbb{R}^d} Q(\theta)$  (+TCL classique).

## 2 variances à minimiser

Il s'agit ici d'utiliser un algorithme d'I.S. afin de minimiser les deux variances dans le TCL :

$$Q_1(\theta) := \mathbb{E} \left[ \mathbf{1}_{\varphi(X) \geq \xi^*} \frac{\rho(X)}{\rho(X - \theta)} \right]$$

$$Q_2(\theta) := \mathbb{E} \left[ (\varphi(X) - \xi^*)_+^2 \frac{\rho(X)}{\rho(X - \mu)} \right]$$

On minimise les deux variances en implémentant deux algorithmes stochastiques :

$$\theta_n = \theta_{n-1} - \gamma_n \mathbf{K}_3(\xi^*, \theta_{n-1}, X_n), \quad \theta_0 \in \mathbb{R}^d$$

$$\mu_n = \mu_{n-1} - \gamma_n \mathbf{K}_4(\xi^*, \mu_{n-1}, X_n), \quad \mu_0 \in \mathbb{R}^d.$$

Alors, on a convergence

$$\theta_n \xrightarrow{\text{a.s.}} \theta^* \quad \text{et} \quad \mu_n \xrightarrow{\text{a.s.}} \mu^*.$$

## 2 variances à minimiser

Il s'agit ici d'utiliser un algorithme d'I.S. afin de minimiser les deux variances dans le TCL :

$$Q_1(\theta) := \mathbb{E} \left[ \mathbf{1}_{\varphi(X) \geq \xi^*} \frac{\rho(X)}{\rho(X - \theta)} \right]$$

$$Q_2(\theta) := \mathbb{E} \left[ (\varphi(X) - \xi^*)_+^2 \frac{\rho(X)}{\rho(X - \mu)} \right]$$

On minimise les deux variances en implémentant deux algorithmes stochastiques :

$$\theta_n = \theta_{n-1} - \gamma_n \mathbf{K}_3(\xi_{n-1}, \theta_{n-1}, X_n), \quad \theta_0 \in \mathbb{R}^d$$

$$\mu_n = \mu_{n-1} - \gamma_n \mathbf{K}_4(\xi_{n-1}, \mu_{n-1}, X_n), \quad \mu_0 \in \mathbb{R}^d.$$

Alors, on a convergence

$$\theta_n \xrightarrow{\text{a.s.}} \theta^* \quad \text{et} \quad \mu_n \xrightarrow{\text{a.s.}} \mu^*.$$

# On injecte les paramètres d'I.S. adaptativement

On modifie la première procédure VaR-CVaR en translatant l'algorithme VaR-CVaR :

$$H_1(\xi, \theta, \mathbf{x}) := e^{-\rho|\theta|^b} \left( 1 - \frac{1}{1-\alpha} \mathbf{1}_{\{\varphi(\mathbf{x}+\theta) \geq \xi\}} \frac{\rho(\mathbf{x}+\theta)}{\rho(\mathbf{x})} \right)$$

$$H_2(\xi, \mathbf{C}, \mu, \mathbf{x}) := \mathbf{C} - v(\xi, \mu, \mathbf{x})$$

avec,  $v(\xi, \mu, \mathbf{x}) := \xi + \frac{1}{1-\alpha} (\varphi(\mathbf{x} + \mu) - \xi)_+ \frac{\rho(\mathbf{x} + \mu)}{\rho(\mathbf{x})}$ . L'algorithme global s'écrit :

$$\xi_n = \xi_{n-1} - \gamma_n H_1(\xi_{n-1}, \theta_{n-1}, \mathbf{X}_n)$$

$$\mathbf{C}_n = \mathbf{C}_{n-1} - \gamma_n H_2(\xi_{n-1}, \mathbf{C}_{n-1}, \mu_{n-1}, \mathbf{X}_n)$$

$$\theta_n = \theta_{n-1} - \gamma_n \mathbf{K}_3(\xi_{n-1}, \theta_{n-1}, \mathbf{X}_n)$$

$$\mu_n = \mu_{n-1} - \gamma_n \mathbf{K}_4(\xi_{n-1}, \mu_{n-1}, \mathbf{X}_n)$$

# TCL avec vitesse asymptotique optimale

$$\sqrt{n} \begin{pmatrix} \bar{\xi}_n - \xi^* \\ \bar{C}_n - C^* \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Sigma^*) \quad , n \rightarrow +\infty.$$

avec,

Variance Asymptotique (sans réduction de variance)

$$\Sigma_{1,1} = \frac{\alpha(1-\alpha)}{f_{\varphi(X)}^2(\xi^*)}$$

$$\Sigma_{2,2} = \frac{1}{(1-\alpha)^2} \text{Var}((\varphi(X) - \xi^*)_+)$$

# TCL avec vitesse asymptotique optimale

$$\sqrt{n} \left( \begin{array}{c} \bar{\xi}_n - \xi^* \\ \bar{C}_n - C^* \end{array} \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Sigma^*) \quad , n \rightarrow +\infty.$$

avec,

$$\Sigma_{1,1}^* = \frac{\text{Var} \left( \mathbf{1}_{\{\varphi(X + \theta^*) \geq \xi^*\}} \frac{\rho(X + \theta^*)}{\rho(X)} \right)}{f_{\varphi(X)}^2(\xi^*)}$$

$$\Sigma_{2,2}^* = \frac{1}{(1 - \alpha)^2} \text{Var} \left( (\varphi(X + \mu^*) - \xi^*)_+ \frac{\rho(X + \mu^*)}{\rho(X)} \right)$$



## Cas Gaussien :

On suppose que  $X \sim \mathcal{N}(0, I_d)$ , alors la procédure d'I.S. devient :

$$\frac{p^2(X - \theta)}{p(X)p(X - 2\theta)} \frac{\nabla p(X - 2\theta)}{p(X - 2\theta)} = e^{|\theta|^2} (2\theta - X)$$

d'où il vient,

$$K_3(\xi, \theta, x) = \mathbf{1}_{\{\varphi(X - \theta) \geq \xi\}} (2\theta - X),$$

$$K_4(\xi, \mu, x) = e^{-2a(|\mu|^2 + 1)} (\varphi(X - \mu) - \xi)_+^2 (2\mu - x)$$

# Exemples numériques

On se place dans le cadre gaussien.  $X \sim \mathcal{N}(0, I_d)(d = 60)$  :  
 Position courte dans une centrale Gaz-Electricité et 30  
 positions longues sur des calls electricité.

$$\varphi(X) = \sum_{k=1}^{30} \left( e^{r(T-t_k)} \left( S_{t_k}^e - h_R S_{t_k}^g - C \right)_+ - P_0^c e^{rT} \right) \\ + e^{rT} C_0 - e^{r(T-t_k)} \left( S_{t_k}^e - K \right)_+$$

# Portefeuille : Gaz-Electricité

Number of steps	$\alpha$	VaR	CVaR	$RV_{VaR}$	$RV_{CVaR}$
10 000	95%	115.7	150.5	3.4	6.8
	99%	169.4	196	8.4	12.9
	99.5%	186.3	213.2	13.5	20.3
100 000	95%	118.7	150.5	4.5	8.7
	99%	169.4	195.4	12.6	17.5
	99.5%	188.8	212.9	15.6	29.5
500 000	95%	119.2	150.4	5	9.2
	99%	169.8	195.7	13.1	18.6
	99.5%	188.7	212.8	17	29

## Conclusion 1/2

- Convergence rapide de l'algorithme VaR-CVaR et une réduction de variance efficace surtout lorsque  $\alpha \approx 1$
- La procédure d'I.S. sampling converge rapidement 10 000-20 000 pas suffisent pour obtenir une bonne approximation de  $\theta^*$  et  $\mu^*$ .
- On peut appliquer la transformation d'Esscher lorsque le vecteur  $X$  n'est pas gaussien :  $X \sim \text{NIG}(\alpha, \beta, \delta, \mu)$

## Conclusion 2/2

- On peut également étendre la méthode au cadre des diffusions (Théorème de Girsanov) pour des pertes qui dépendent de toute la trajectoire d'un processus  $X = (X_t)_{t \in [0, T]}$ .
- L'algorithme peut être utilisé avec des suites à discrécances faibles. On peut démontrer la convergence sous des hypothèses raisonnables. La vitesse théorique est plus difficile à obtenir. Les simulations montrent un gain important comparé aux suites pseudo-aléatoires.
- Couverture en marché incomplet par minimisation de CVaR en utilisant les approximations stochastiques.



M. Duflo

*Algorithmes Stochastiques.*

Springer, 1996.



H. J. Kushner & Clark D. S.

*Stochastic Approximation Methods for constrained and unconstrained systems.*

Springer, 1978.



V. Lemaire & G. Pagès

Unconstrained Recursive Importance Sampling

*Journal of Applied Probability,*



O. Bardou, N. Frikha & G. Pagès

Computing VaR and CVaR using stochastic approximation  
and adaptive unconstrained importance sampling

*Monte Carlo Methods and Applications*, (15)3, 173-210.