Étude d'une équation aux différences

Antoine Gerbaud

École Centrale de Lyon

3 Mai 2010

9$^{\text{ème}}$ Colloque des jeunes probabilistes et statisticiens

Mont Dore

1. Modélisation des réseaux d'interactions
2. Chaîne homogène
3. Probabilité invariante

1 Modélisation des réseaux d'interactions

2 Chaîne homogène

3 Probabilité invariante

Réseaux d'interactions

Un réseau d'interactions est constitué d'éléments qui interagissent les uns avec les autres de façon individuelle.

Le réseau d'interactions typique est le réseau social, où des individus sont reliés les uns aux autres suivant les liens sociaux que ces individus entretiennent : liens familiaux, liens d'amitiés ou liens professionnels par exemple.

Un réseau d'interactions est naturellement représenté par un graphe, les éléments constituant les sommets du graphe et les interactions entre les éléments ses arêtes.

Réseau social

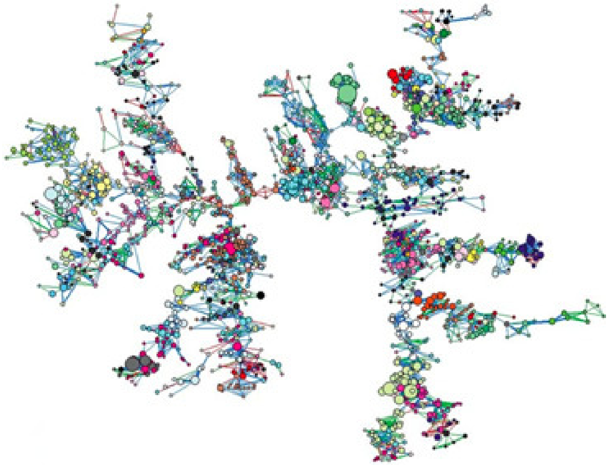

FIGURE: Réseau de collaborations d'ingénieurs de Boston

Modèle à seuil

Le modèle à seuil est un modèle de réseaux d'interactions par graphes aléatoires.

Ce modèle engendre un processus aléatoire croissant $\{G_n\}_{n\geqslant 1}$ de graphes simples tels que pour tout entier $n \geqslant 1$, l'ensemble des sommets de G_n est $[n]$. Ce processus dépend de trois paramètres :

- une loi de probabilité η sur $\mathbb{R}$ muni de la tribu de ses boréliens ;
- une fonction mesurable f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$;
- un nombre réel r.

Durant ce court exposé,

$$\eta = (1-p)\delta_0 + p\delta_\alpha$$

avec $\alpha > 0$ nombre réel et p dans $]0,1[$. De plus, pour tout nombre réel $x \geqslant 0$,

$$f(x) = x(1-e^{-x}).$$

Réalisation

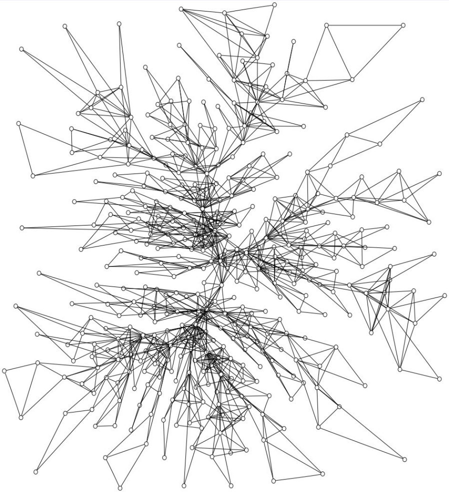

FIGURE: Réalisation de G_{100}

1. Modélisation des réseaux d'interactions

2. **Chaîne homogène**

3. Probabilité invariante

Définition

Definition

La suite $\{A_n\}_{n \geqslant 2}$ *est constituée de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi* η.

La chaîne de Markov suivante, appelée chaîne homogène, est l'objet de notre exposé.

Definition

La chaîne homogène est la chaîne de Markov homogène $\{U_n\}_{n \geqslant 1}$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *définie par* $U_1 = 0$ *et pour tout entier* $n \geqslant 2$,

$$U_n = A_n + U_{n-1}\left(1 - e^{-U_{n-1}}\right).$$

Degré moyen du premier sommet

Deux sommets reliés par une arête sont dits voisins. Le degré d'un sommet est le nombre de ses voisins. Le degré moyen du sommet 1 dans G_n est donné par la proposition suivante.

Proposition

Soit $\{N_n\}_{n\geqslant 0}$ la chaîne de Markov à valeurs dans $\mathbb{N}$ définie par $N_0 = 0$ et pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$N_n = \sum_{k=1}^{n} B_k .$$

Pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout nombre réel r,

$$\mathbb{E}(\deg_{G_n}(1)) = n \times \mathbb{P}(U_{N_n} \leqslant r) - \mathbb{1}\{r \geqslant 0\}.$$

Transience de la chaîne homogène

Proposition

La chaîne homogène est transiente si et seulement si α appartient à $]1/e, +\infty[$.

Les deux propositions précédentes impliquent que la proportion moyenne de sommets qui sont voisins du sommet 1 dans G_n est négligeable.

Corollaire

Si la chaîne homogène est transiente, alors pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout nombre réel r,

$$\mathbb{E}(\deg_{G_n}(1)) = o(n).$$

Graphe de f

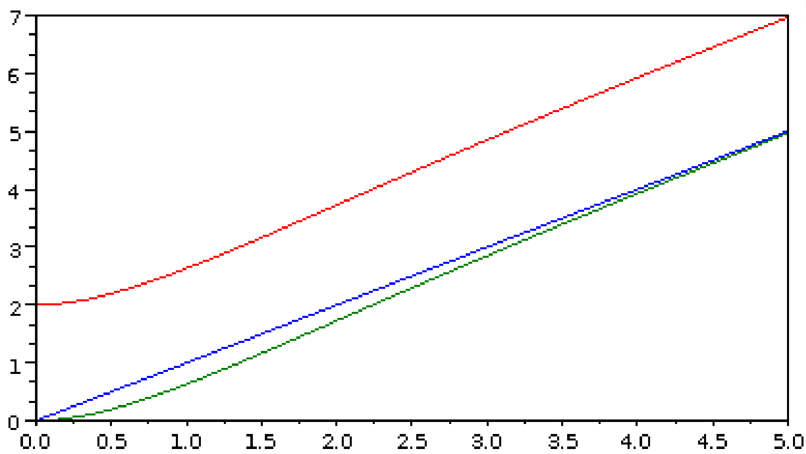

FIGURE: $y = x$, $y = f(x)$, $y = f(x) + 2$

1 Modélisation des réseaux d'interactions

2 Chaîne homogène

3 Probabilité invariante

Graphe de f

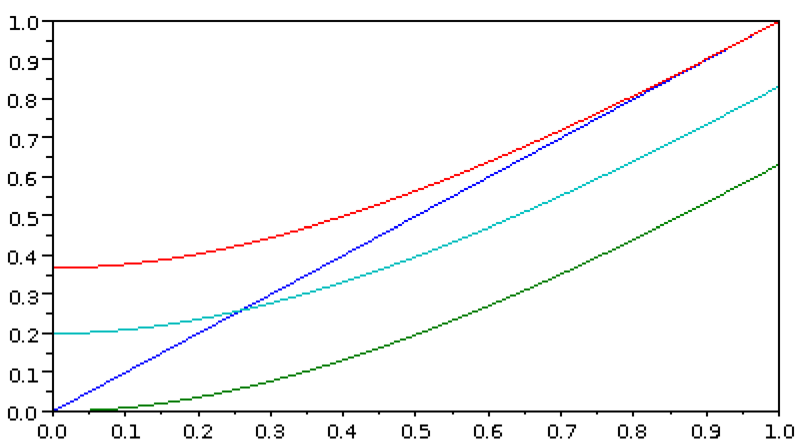

FIGURE: $y = x$, $y = f(x) + 0.2$, $y = f(x) + e^{-1}$

Ergodicité de la chaîne homogène

Pour tout α dans $]0,1/e]$, la fonction $f+\alpha$ admet un unique point fixe dans $[0,1]$, notée β. Par conséquent, pour tout entier $n \geqslant 1$, U_n appartient à l'intervalle $[0,\beta]$. La chaîne homogène n'est pas irréductible en général, ce qui justifie l'intérêt du résultat suivant.

Théorème

Si α appartient à $]0,1/e]$, alors la chaîne homogène converge en loi vers une unique probabilité invariante $\nu^{\alpha,p}$ dont le support est inclus dans $[0,\beta]$.

Support de la probabilité invariante

La proposition suivante précise le support de la probabilité invariante $\nu^{\alpha,p}$.

Proposition

Si α appartient à $]0, \log(2)/2[$, le support de $\nu^{\alpha,p}$ est négligeable pour la mesure de Lebesgue. Si α appartient à $[\log(2)/2, 1/e]$, le support de $\nu^{\alpha,p}$ est $[0, \beta]$.

Entropie et exposant de Lyapunov

Definition

Pour tout p dans $]0,1[$, l'entropie $h(p)$ est le nombre réel strictement positif

$$h(p) = -p\log(p) - (1-p)\log(1-p).$$

Definition

Pour tout nombre réel α dans $]0,1/e]$ et tout p dans $]0,1[$, l'exposant de Lyapunov $\chi(\alpha,p)$ est le nombre réel strictement négatif

$$\chi(\alpha,p) = \int \log f'(x)\, d\nu^{\alpha,p}(x).$$

Absolue continuité

Théorème

Pour presque tout nombre réel α dans $]0, 1/e]$,

- *si $h(p) > -\chi(\alpha, p)$, alors la probabilité invariante $\nu^{\alpha,p}$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue ;*
- *si $h(p) < -\chi(\alpha, p)$, alors la dimension de Hausdorff de $\nu^{\alpha,p}$ est*

$$\frac{h(p)}{-\chi(\alpha, p)}.$$

Probabilité invariante

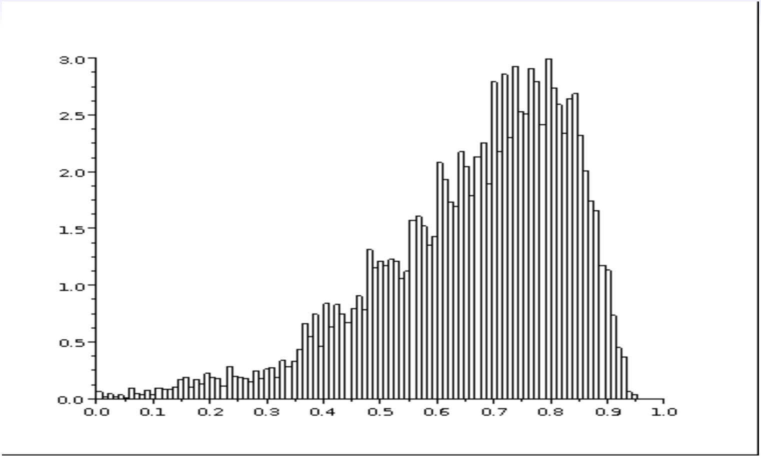

FIGURE: $\alpha = e^{-1}$, $p = 0.9$, $\chi(\alpha, p) \approx -0.24$, $h(p) \approx 0.33$

Probabilité invariante

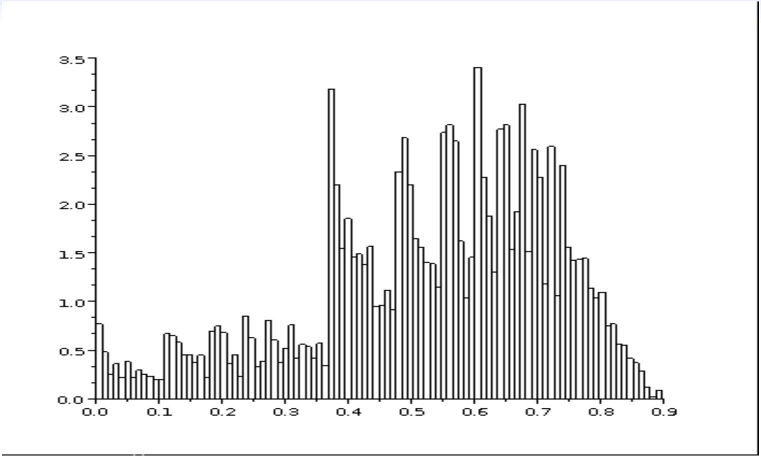

FIGURE: $\alpha = e^{-1}$, $p = 0.8$, $\chi(\alpha, p) \approx -0.46$, $h(p) \approx 0.5$

Probabilité invariante

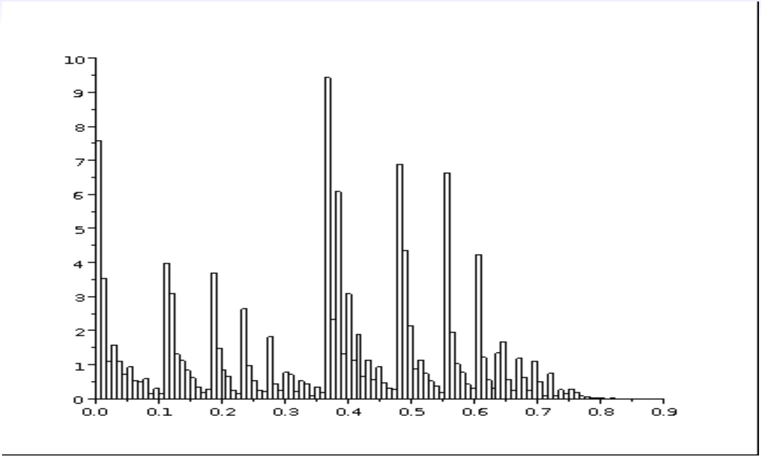

FIGURE: $\alpha = e^{-1}$, $p = 0.6$, $\chi(\alpha, p) \approx -1.29$, $h(p) \approx 0.67$

Probabilité invariante

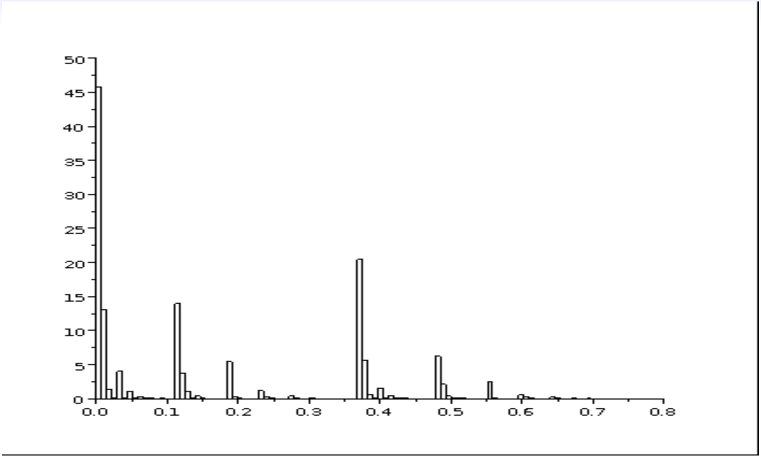

FIGURE: $\alpha = e^{-1}$, $p = 0.3$, $\chi(\alpha, p) \approx -4.38$, $h(p) \approx 0.61$