

Propagation des ondes dans des guides d'ondes aléatoires.

Christophe Gomez

LPMA Paris 7

Le Mont-Dore, Mai 2010

Modèle de guides d'ondes

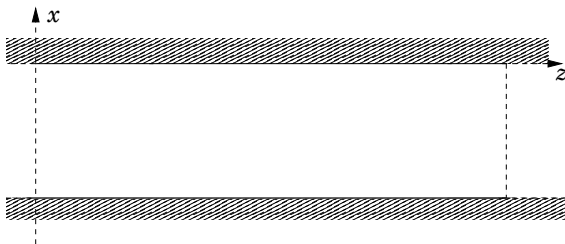


Illustration d'un guide d'onde plan. La coordonnée z représente l'axe de propagation et x l'axe transverse. Confinement des ondes réalisé par les parois réfléchissantes.

Modèle de guides d'ondes

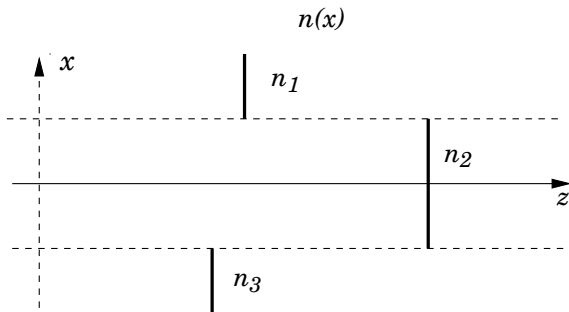


Illustration d'un guide d'onde plan. La coordonnée z représente l'axe de propagation et x l'axe transverse. Confinement des ondes réalisé par la variation d'indice ($n_3 \leq n_1 < n_2$).

Modèle de guides d'ondes

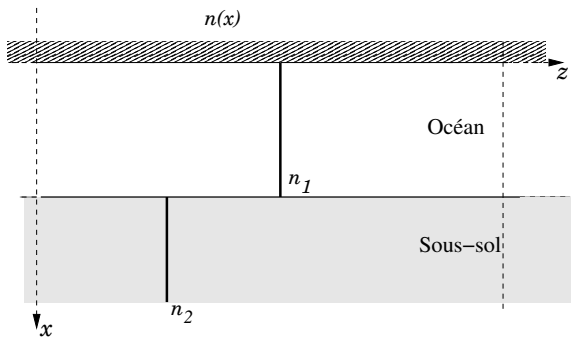


Illustration d'un guide d'onde plan de type océanique. La coordonnée z représente l'axe de propagation et x l'axe transverse. Confinement des ondes réalisé par des conditions mixtes, une paroi réfléchissante et une variation d'indice.

Modèle de propagation acoustique

Modèle de propagation acoustique linéaire,

$$\rho(x, z) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla p = \mathbf{F}, \quad \frac{1}{K(x, z)} \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

où :

- x = coordonnée de l'axe transverse,
- z = coordonnée de l'axe de propagation,
- $p(t, x, z)$ est le champ de pression acoustique,
- $\mathbf{u}(t, x, z)$ est le champ de vitesse acoustique,
- $K(x, z)$ module de compressibilité du milieu,
- $\rho(x, z)$ densité du milieu,
- $\mathbf{F}(t, x, z)$ terme représentant la source.

Equation d'onde pour le champ de pression $p(t, x, z)$

Pour simplifier les calculs, on considère un guide d'onde homogène parfait de paramètres :

$$\rho(x, z) = \bar{\rho} \quad \text{et} \quad K(x, z) = K(x).$$

On a alors :

$$\Delta p - \frac{1}{c^2(x)} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \nabla \cdot \mathbf{F} \quad \text{et} \quad p(t, 0, z) = 0,$$

où $c(x) = \sqrt{K(x)/\bar{\rho}}$ est le profil de la vitesse de propagation.

$$c(x) = \frac{c}{n(x)},$$

où $n(x)$ est le profil de l'indice de réfraction et c est la vitesse de propagation de référence du guide d'onde.

Equation d'Helmholtz

$$p(t, x, z) = \frac{1}{2\pi} \int \hat{p}(\omega, x, z) e^{-i\omega t} d\omega.$$

Pour $z > L_S$, on a :

$$\partial_z^2 \hat{p}(\omega, x, z) + \partial_x^2 \hat{p}(\omega, x, z) + k^2(\omega) n^2(x) \hat{p}(\omega, x, z) = 0 \quad \text{et} \quad \hat{p}(\omega, 0, z) = 0,$$

où $k(\omega) = \omega/c$ (nombre d'onde). On considère l'équation différentielle opérationnelle :

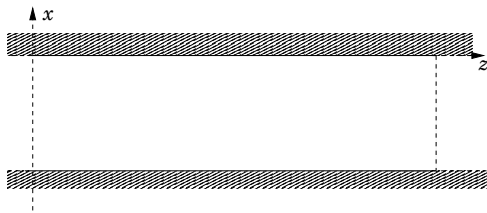
$$\frac{d^2}{dz^2} \hat{p}(\omega, \cdot, z) + R(\omega) [\hat{p}(\omega, \cdot, z)] = 0,$$

où

$$R(\omega) = \partial_x^2 + k^2(\omega) n^2(x) \quad (\text{opérateur transverse}).$$

Les propriétés spectrales de $R(\omega)$ dépendent de la géométrie du guide d'onde et de l'indice de réfraction $n(x)$.

Décomposition spectrale : Guide d'onde de section transverse bornée

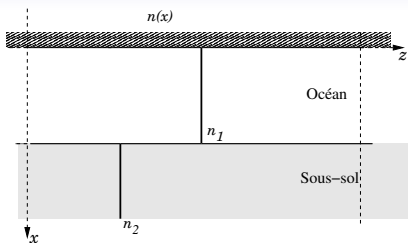


- Isométrie surjective entre $L^2(0, d)$ et $l^2(\mathbb{N}^*)$,
-

$$\begin{aligned}\widehat{p}(\omega, x, z) &= \sum_{j \geq 1} \widehat{p}_j(\omega, z) \phi_j(x), \\ &= \sum_{j=1}^{N(\omega)} \underbrace{\widehat{A}_j(\omega) e^{i\beta_j(\omega)z} \phi_j(x)}_{\text{mode propagatif}} + \sum_{j > N(\omega)} \underbrace{\widehat{C}_j(\omega) e^{-\beta_j(\omega)z} \phi_j(x)}_{\text{mode évanescent}}.\end{aligned}$$

- Dans ce contexte, la propagation en milieu aléatoire a été étudiée par J. Garnier et G. Papanicolaou (06).

Décomposition spectrale : Guide d'onde de section transverse non bornée

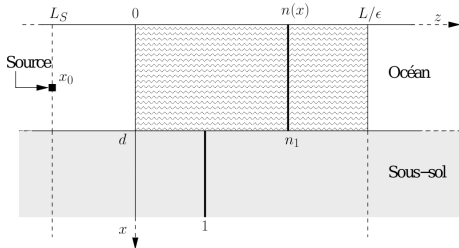


- Isométrie surjective entre $L^2(0, +\infty)$ et $\mathbb{C}^{N(\omega)} \times L^2(-\infty, k^2(\omega))$ (C. Wilcox (75))

-

$$\begin{aligned}
 \hat{p}(\omega, x, z) &= \sum_{j=1}^{N(\omega)} \hat{p}_j(\omega, z) \phi_j(\omega, x) + \int_{-\infty}^{k^2(\omega)} \hat{p}_\gamma(\omega, z) \phi_\gamma(\omega, x) d\gamma \\
 &= \sum_{j=1}^{N(\omega)} \underbrace{\hat{A}_j(\omega) e^{i\beta_j(\omega)z} \phi_j(\omega, x)}_{\text{mode propagatif}} + \int_0^{k^2(\omega)} \underbrace{\hat{A}_\gamma(\omega) e^{i\sqrt{\gamma}z} \phi_\gamma(\omega, x) d\gamma}_{\text{mode radiatif}} \\
 &\quad + \int_{-\infty}^0 \underbrace{\hat{C}_\gamma(\omega) e^{-\sqrt{|\gamma|}z} \phi_\gamma(\omega, x) d\gamma}_{\text{mode évanescent}}
 \end{aligned}$$

Guide d'onde aléatoire



On considère une section $[0, L/\epsilon]$ de l'océan, possédant des perturbations aléatoires. On considère

$$\Delta p - \frac{1}{c^2(x, z)} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \nabla \cdot \mathbf{F}$$

où

$$\frac{1}{c^2(x, z)} = \begin{cases} \frac{1}{c^2} (n_1^2 + \sqrt{\epsilon} V(x, z)) & \text{si } x \in [0, d[, \\ \frac{1}{c^2} & \text{si } x \geq d. \end{cases}$$

$$\frac{L/\epsilon}{\lambda_0} \gg 1, \quad \frac{l_{x,c}}{\lambda_0} \sim \frac{l_{z,c}}{\lambda_0} \sim 1, \quad \text{and } \sigma^\epsilon \ll 1.$$

Décomposition spectrale dans le guide d'onde aléatoire

$$\begin{aligned} \widehat{p}\left(\omega, x, \frac{z}{\epsilon}\right) &= \sum_{j=1}^{N(\omega)} \widehat{p}_j^\epsilon(\omega, z) \phi_j(\omega, x) + \int_{-\infty}^{k^2(\omega)} \widehat{p}_\gamma^\epsilon(\omega, z) \phi_\gamma(\omega, x) d\gamma \\ &\underset{\epsilon \ll 1}{\approx} \sum_{j=1}^{N(\omega)} \frac{\mathbf{T}_j^{\xi, \epsilon}(\omega, z)(\widehat{a}_0(\omega))}{\sqrt{\beta_j(\omega)}} e^{i\beta_j(\omega) \frac{z}{\epsilon}} \phi_j(\omega, x) \\ &\quad + \int_{\xi}^{k^2(\omega)} \frac{\mathbf{T}_\gamma^{\xi, \epsilon}(\omega, z)(\widehat{a}_0(\omega))}{\gamma^{1/4}} e^{i\sqrt{\gamma} \frac{z}{\epsilon}} \phi_\gamma(\omega, x) d\gamma, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \mathbf{T}^{\xi, \epsilon}(\omega, z) &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \mathbf{H}\left(\omega, C\left(\frac{z}{\epsilon}\right), \frac{z}{\epsilon}\right) \mathbf{T}^{\xi, \epsilon}(\omega, z) \\ &\quad + \mathbf{G}\left(\omega, C\left(\frac{\cdot}{\epsilon}\right), \frac{z}{\epsilon}\right) \mathbf{T}^{\xi, \epsilon}(\omega, z) \end{aligned}$$

avec $\mathbf{T}^{\xi, \epsilon}(\omega, 0) = Id$.

$$C_{rs}(z) = \int_0^d V(x, z) \phi_r(\omega, x) \phi_s(\omega, x) dx.$$

Approximation diffusion

On considère (X^ϵ) , processus à valeurs dans \mathbb{R}^d , l'unique solution de

$$\frac{d}{dz} X^\epsilon(z) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} F\left(X^\epsilon(z), m\left(\frac{z}{\epsilon}\right), \frac{z}{\epsilon}\right) + G\left(X^\epsilon(z), m\left(\frac{z}{\epsilon}\right), \frac{z}{\epsilon}\right)$$

avec $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathbb{E}[F(x, m(0), \tau)] d\tau = 0$. Alors (X^ϵ) converge en loi sur $\mathcal{C}([0, +\infty), \mathbb{R}^d)$ vers un processus de diffusion de générateur :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}f(x) &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^{+\infty} \mathbb{E}[F(x, m(0), \tau) \cdot \nabla_x(F(x, m(t), \tau + t) \cdot \nabla_x f(x))] dt d\tau \\ &\quad + \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^{+\infty} \mathbb{E}[G(x, m(0), \tau) \cdot \nabla_x f(x)] dt d\tau \end{aligned}$$

(Papanicolaou et Kohler (74))

Théorème (approximation-diffusion)

$\forall y \in \mathbb{C}^{N(\omega)} \times L^2(0, k^2(\omega))$, $(\mathbf{T}^{\xi, \epsilon}(\omega, \cdot)(y))$ converge en loi sur $\mathcal{C}([0, L], \mathbb{C}^{N(\omega)} \times L^2(0, k^2(\omega)))$, lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ puis $\xi \rightarrow 0$, vers un processus de diffusion dont le générateur ne dépend que des $N(\omega)$ coordonnées discrètes.

Amplitude moyenne des modes propagatifs

$$\forall y \in \mathbb{C}^{N(\omega)} \times L^2(0, k^2(\omega)), \forall j \in \{1, \dots, N(\omega)\}$$

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left| \mathbb{E} \left[\mathbf{T}_j^{\xi, \epsilon}(\omega, z)(y) \right] \right| = \exp \left[\left(\frac{\Gamma_{jj}^c(\omega) - \Gamma_{jj}^1(\omega) - \Lambda_j^c(\omega)}{2} \right) z \right] |y_j|,$$

$$\Gamma_{jj}^c = - \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^N \Gamma_{jl}^c, \quad \Gamma_{nj}^c = \frac{k^4}{2\beta_n \beta_j} \int_0^{+\infty} \mathbb{E} [C_{nj}(0) C_{nj}(z)] \cos((\beta_j - \beta_n)z) dz,$$

$$\Gamma_{jj}^1 = \frac{k^4}{2\beta_n \beta_j} \int_0^{+\infty} \mathbb{E} [C_{jj}(0) C_{jj}(z)] dz,$$

$$\Lambda_j^c = \int_0^{k^2} \frac{k^4}{2\sqrt{\gamma'} \beta_j} \int_0^{+\infty} \mathbb{E} [C_{j\gamma'}(0) C_{j\gamma'}(z)] \cos((\sqrt{\gamma'} - \beta_j)z) dz d\gamma'$$

et

$$C_{rs}(z) = \int_0^d V(x, z) \phi_r(\omega, x) \phi_s(\omega, x) dx.$$

Transfert d'énergie entre les modes propagatifs

On considère, pour $(j, l) \in \{1, \dots, N(\omega)\}^2$ et $z \in [0, L]$,

$$T_j^l(\omega, z) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[|\mathbf{T}_j^{\xi, \epsilon}(\omega, z)(y^l)|^2 \right]$$

avec $y_j^l = \delta_{jl}$, la puissance moyenne transmise au mode j partant du mode pur l . On a :

$$\frac{d}{dz} T_j^l(\omega, z) = -\Lambda_j^c(\omega) T_j^l(\omega, z) + \sum_{n=1}^{N(\omega)} \Gamma_{nj}^c(\omega) (T_n^l(\omega, z) - T_j^l(\omega, z)),$$

avec $T_j^l(\omega, 0) = \delta_{jl}$. De plus,

$$\Gamma_{nj}^c = \frac{k^4}{2\beta_n\beta_j} \int_0^{+\infty} \mathbb{E}[C_{nj}(0)C_{nj}(z)] \cos((\beta_j - \beta_n)z) dz,$$

$$\Lambda_j^c = \int_0^{k^2} \frac{k^4}{2\sqrt{\gamma'}\beta_j} \int_0^{+\infty} \mathbb{E}[C_{j\gamma'}(0)C_{j\gamma'}(z)] \cos((\sqrt{\gamma'} - \beta_j)z) dz d\gamma'.$$

Perte énergétique des modes propagatifs

Proposition

$$\lim_{L \rightarrow +\infty} \frac{1}{L} \ln \left[\sum_{j=1}^{N(\omega)} \mathcal{T}_j^I(\omega, L) \right] = -\Lambda_\infty(\omega)$$

où le taux de décroissance est donné par

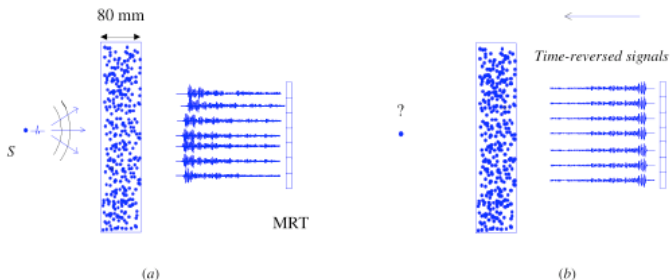
$$\Lambda_\infty = \inf_{X \in \mathcal{S}_+^N} \langle (-\Gamma^c + \Lambda_d^c) X, X \rangle_{\mathbb{R}^N},$$

avec $\Lambda_d^c = \text{diag}(\Lambda_1^c, \dots, \Lambda_N^c)$ et

$$\mathcal{S}_+^N = \left\{ X \in \mathbb{R}^N, X_j \geq 0 \forall j \in \{1, \dots, N\} \text{ et } \|X\|_{2, \mathbb{R}^N}^2 = \langle X, X \rangle_{\mathbb{R}^N} = 1 \right\}$$

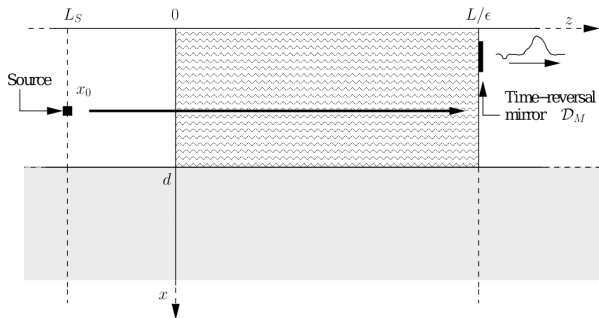
- Si $\Lambda^c(\omega) \equiv 0$, alors $\Lambda_\infty(\omega) = 0$ et $\mathcal{T}_j^I(\omega, L) \xrightarrow{L \rightarrow +\infty} 1/N$.
- Si $\Gamma^c(\omega) \rightarrow \frac{1}{\tau} \Gamma^c(\omega)$, alors $\lim_{\tau \rightarrow 0} \Lambda_\infty^\tau = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Lambda_j^c$.

Retournement temporel des ondes



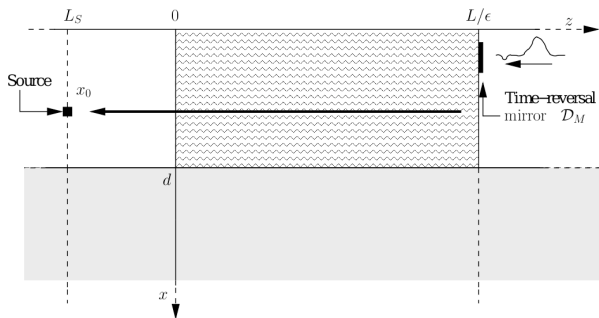
- L'onde retournée en temps refocalise au voisinage de la source d'origine.
- "Plus le milieu est désordonnée" et meilleur est la refocalisation.

Première étape de l'expérience de retournement temporel



- Intervalle temporel d'enregistrement $[t_0/\epsilon, t_1/\epsilon]$ suffisamment grand.
- Fenêtre spatiale d'enregistrement $\mathcal{D}_M = [d_1, d_2]$.
- $\Psi^\epsilon(t, x) \simeq f(\sqrt{\epsilon}t)e^{-i\omega_0 t}\delta(x - x_0)$.

Deuxième étape de l'expérience de retournement temporel



- L'onde refocalise au voisinage de la source.
- Quelle est l'influence des pertes radiatives sur la refocalisation?

Focalisation en milieu homogène

En milieu homogène, l'onde refocalisée est de la forme :

$$p_{TR}\left(\frac{t_1}{\epsilon} + \frac{t}{\sqrt{\epsilon}}, x, L_S\right) = e^{-i\omega_0 \frac{t}{\sqrt{\epsilon}}} f(-t) H_{x_0}(\omega_0, x) + \mathcal{O}(\sqrt{\epsilon}),$$

avec pour profil transverse lorsque $\omega_0 \gg 1$:

$$H_{x_0}(\omega_0, x) \simeq \frac{\theta}{\lambda_{oc}} \frac{d_2 - d_1}{d} \text{sinc}\left(2\pi\theta \frac{x - x_0}{\lambda_{oc}}\right),$$

avec $\lambda_{oc} = 2\pi c / (\omega_0 n_1)$. Dans ce cas, la limite de diffraction est $\lambda_{oc} / (2\theta)$.

Focalisation en milieu aléatoire

L'onde refocalisée converge en **probabilité** qd $\epsilon \rightarrow 0$ puis $\xi \rightarrow 0$ vers

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[p_{TR} \left(\frac{t_1}{\epsilon} + \frac{t}{\sqrt{\epsilon}}, x, L_S \right) e^{i\omega_0 \frac{t}{\sqrt{\epsilon}}} \right] = f(-t) H_{x_0}(\omega_0, x, L),$$

avec pour profil transverse lorsque $\omega_0 \gg 1$:

$$H_{x_0}(\omega_0, x, L) \simeq \frac{\theta}{\lambda_{oc}} \frac{d_2 - d_1}{d} H \left(\frac{x - x_0}{\lambda_{oc}} \theta, L \right),$$

avec

$$H(\tilde{x}, L) = \int_0^1 \mathcal{T}_1(L, u) \cos(2\pi u \tilde{x}) du.$$

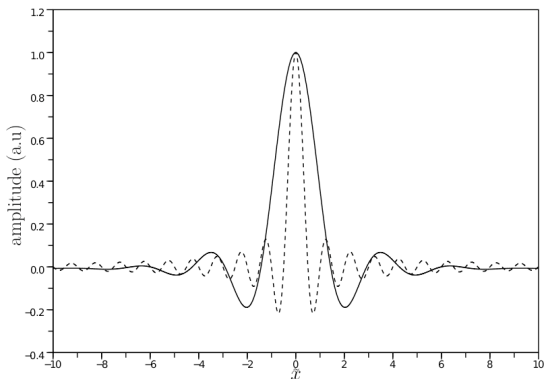
où $\mathcal{T}_\varphi(z, u)$ satisfait : $\forall (z, u) \in (0, +\infty) \times (0, 1)$,

$$\frac{\partial}{\partial z} \mathcal{T}_\varphi(z, u) = \frac{\partial}{\partial u} \left(a_\infty(u) \frac{\partial}{\partial u} \mathcal{T}_\varphi \right) (z, u), \quad a_\infty(u) = \frac{a_0}{1 - \left(1 - \frac{\pi^2}{a^2 d^2}\right) (\theta u)^2},$$

avec conditions aux bords :

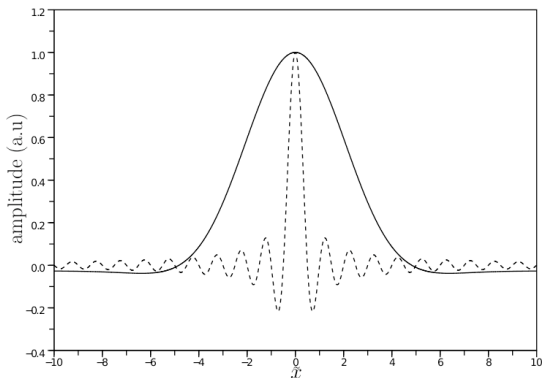
$$\frac{\partial}{\partial u} \mathcal{T}_\varphi(z, 0) = 0, \quad \mathcal{T}_\varphi(z, 1) = 0, \quad \text{et} \quad \mathcal{T}_\varphi(0, u) = \varphi(u).$$

Illustrations numériques



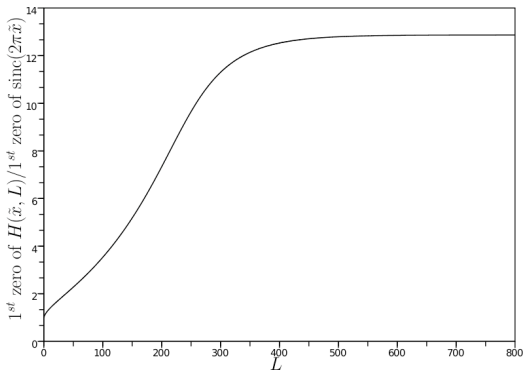
- $L = 75$.
- Courbe pleine = $H(\tilde{x}, L)$ = profil transverse normalisé de l'onde refocalisée dans le cas aléatoire.
- Courbe pointillée = $\text{sinc}(2\pi\tilde{x})$ = profil transverse normalisé de l'onde refocalisée dans le cas homogène.

Illustrations numériques



- $L = 250$.
- Courbe pleine = $H(\tilde{x}, L)$ = profil transverse normalisé de l'onde refocalisée dans le cas aléatoire.
- Courbe pointillée = $\text{sinc}(2\pi\tilde{x})$ = profil transverse normalisé de l'onde refocalisée dans le cas homogène.

Illustrations numériques



Le profil transverse asymptotique quand $L \gg 1$ est donné par :

$$H(\tilde{x}, L) \underset{L \gg 1}{\sim} e^{\lambda_1 L} \int_0^1 \phi_{\infty,1}(v) dv \int_0^1 \phi_{\infty,1}(u) \cos(2\pi\tilde{x}u) du \quad (\lambda_1 < 0).$$