

Processus Markoviens Déterministes par Morceaux et Fiabilité Dynamique

Karen Gonzalez

Benoîte de Saporta et François Dufour

IMB, Université Bordeaux

Neuvième Colloque Jeunes Probabilistes et Statisticiens

Plan

- 1 Introduction
- 2 Le réservoir, cas-test de l'industrie gazière
- 3 Les Processus Markoviens Déterministes par Morceaux
- 4 Première méthode : simulation par Monte Carlo
- 5 Deuxième méthode : approche par les EDP
- 6 Conclusion

Plan

- 1 Introduction
- 2 Le réservoir, cas-test de l'industrie gazière
- 3 Les Processus Markoviens Déterministes par Morceaux
- 4 Première méthode : simulation par Monte Carlo
- 5 Deuxième méthode : approche par les EDP
- 6 Conclusion

Sûreté de fonctionnement

Définition

Ensemble des propriétés qui décrivent la disponibilité et les facteurs qui la conditionnent : **fiabilité**, maintenabilité et logistique de maintenance

(norme européenne EN 13306 (2001))

Méthodes

AMDE(C), Arbres de défaillances, Graphes de Markov, Réseaux de Petri, ...

Fiabilité dynamique

Analyse probabiliste de la fiabilité d'un système évoluant dans le temps

Sûreté de fonctionnement

Définition

Ensemble des propriétés qui décrivent la disponibilité et les facteurs qui la conditionnent : **fiabilité**, maintenabilité et logistique de maintenance

(norme européenne EN 13306 (2001))

Méthodes

AMDE(C), Arbres de défaillances, Graphes de Markov, Réseaux de Petri, ...

Fiabilité dynamique

Analyse probabiliste de la fiabilité d'un système évoluant dans le temps

Sûreté de fonctionnement

Définition

Ensemble des propriétés qui décrivent la disponibilité et les facteurs qui la conditionnent : **fiabilité**, maintenabilité et logistique de maintenance

(norme européenne EN 13306 (2001))

Méthodes

AMDE(C), Arbres de défaillances, Graphes de Markov, Réseaux de Petri, ...

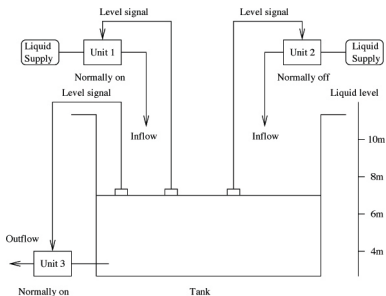
Fiabilité dynamique

Analyse probabiliste de la fiabilité d'un système évoluant dans le temps

Plan

- 1 Introduction
- 2 Le réservoir, cas-test de l'industrie gazière
 - Principe de fonctionnement
 - Les interactions entre variables
 - Exemple d'une trajectoire
 - Problématique
- 3 Les Processus Markoviens Déterministes par Morceaux
- 4 Première méthode : simulation par Monte Carlo
- 5 Deuxième méthode : approche par les EDP

Principe de fonctionnement



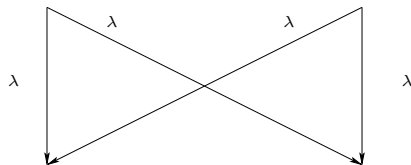
- 3 vannes
- 4 positions pour chaque vanne : O, F, Ob, Fb
- la hauteur h varie entre 4 m et 10 m
- la température θ varie entre 0°C et 100°C
- 64 modes potentiels
- 8 configurations possibles

Les changements d'état

① saut aléatoire : la panne d'une vanne

ETAT 1 : O

ETAT 2 : F



ETAT 3 : Ob

ETAT 4 : Fb

Les changements d'état

- 1 saut aléatoire : la panne d'une vanne
- 2 saut déterministe : les lois de commande L^1 et L^2
 - L^1 agit si $h = 6$: $m = (O, O, F)$
 - L^2 agit si $h = 8$: $m = (F, F, O)$

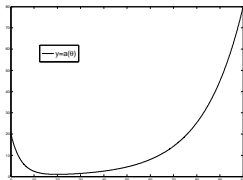
Les événements redoutés

3 événements redoutés qui conduisent à l'arrêt définitif du système :

- 1 assèchement du réservoir : $p_1(t) = \mathbf{P}(h(t) \leq 4)$
- 2 débordement du réservoir : $p_2(t) = \mathbf{P}(h(t) \geq 10)$
- 3 surchauffe du réservoir : $p_3(t) = \mathbf{P}(\theta(t) \geq 100)$

Les interactions entre variables

- **Interaction Température-Mode** : le saut d'un état à un autre dans le cas de la panne d'une vanne dépend de l'évolution de la température.



$$\lambda = Ca(\theta)$$

- **Interaction Hauteur-Mode** : L^1 et L^2 permettent de modifier la hauteur quand celle-ci atteint 6 m ou 8 m.

- **Interaction Hauteur-Température** : la hauteur et la température sont liées par le système différentiel (S).

$$(S) \begin{cases} \frac{dh}{dt} = \gamma_1(\alpha) \\ \frac{d\theta}{dt} = \frac{\gamma_2(\alpha) - \gamma_3(\alpha)\theta}{h} \end{cases}$$

CAS	α	$\gamma_1(\alpha)$	h	θ
1.1	(0, 1, 0) et (1, 0, 0)	Q	$h \uparrow$	$\theta \rightarrow 31^\circ C$
1.2	(1, 1, 0)	$2Q$	$h \uparrow$	$\theta \rightarrow 23^\circ C$
1.3	(1, 1, 1)	Q	$h \uparrow$	$\theta \rightarrow 23^\circ C$
2	(0, 0, 0)	0	$h =$	$\theta \uparrow$
3	(0, 1, 1) et (1, 0, 1)	0	$h =$	$\theta \rightarrow 31^\circ C$
4	$\alpha = (0, 0, 1)$	$-Q$	$h \downarrow$	$\theta \uparrow$

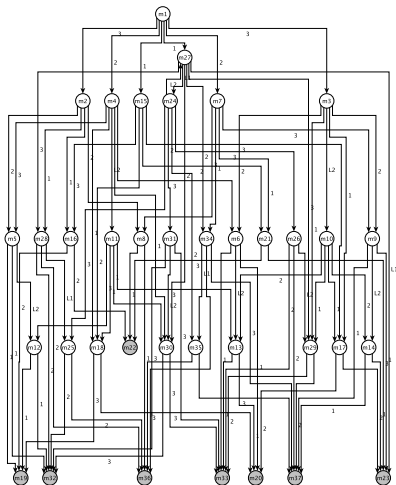
- **Interaction Hauteur-Température** : la hauteur et la température sont liées par le système différentiel (S).

$$(S) \begin{cases} \frac{dh}{dt} = \gamma_1(\alpha) \\ \frac{d\theta}{dt} = \frac{\gamma_2(\alpha) - \gamma_3(\alpha)\theta}{h} \end{cases}$$

CAS	α	$\gamma_1(\alpha)$	h	θ
1.1	(0, 1, 0) et (1, 0, 0)	Q	$h \uparrow$	$\theta \rightarrow 31^\circ C$
1.2	(1, 1, 0)	$2Q$	$h \uparrow$	$\theta \rightarrow 23^\circ C$
1.3	(1, 1, 1)	Q	$h \uparrow$	$\theta \rightarrow 23^\circ C$
2	(0, 0, 0)	0	$h =$	$\theta \uparrow$
3	(0, 1, 1) et (1, 0, 1)	0	$h =$	$\theta \rightarrow 31^\circ C$
4	$\alpha = (0, 0, 1)$	$-Q$	$h \downarrow$	$\theta \uparrow$

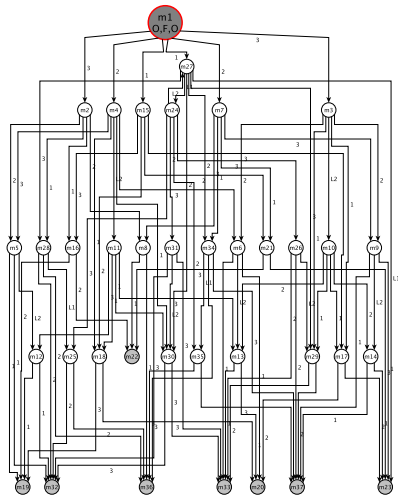
Exemple d'une trajectoire

Exemple d'une trajectoire



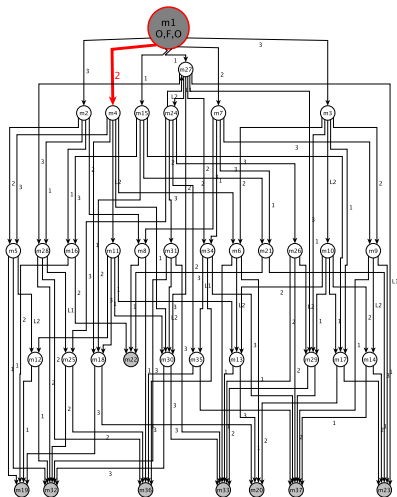
Exemple d'une trajectoire

Exemple d'une trajectoire



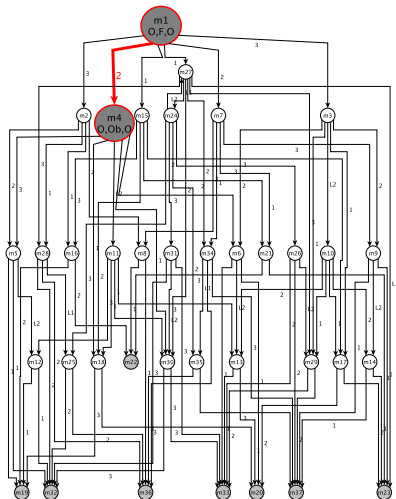
Exemple d'une trajectoire

Exemple d'une trajectoire



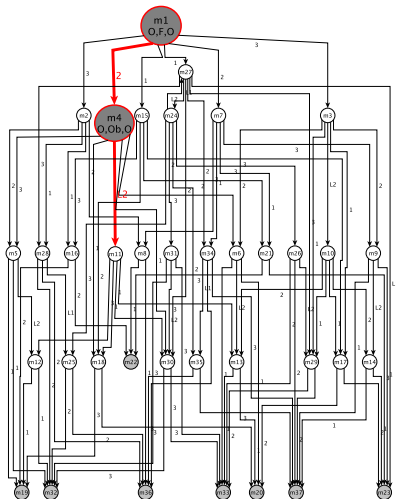
Exemple d'une trajectoire

Exemple d'une trajectoire



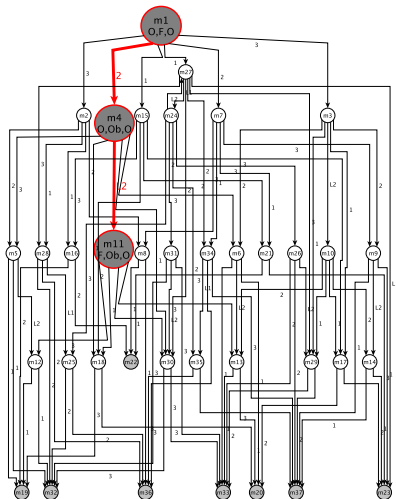
Exemple d'une trajectoire

Exemple d'une trajectoire



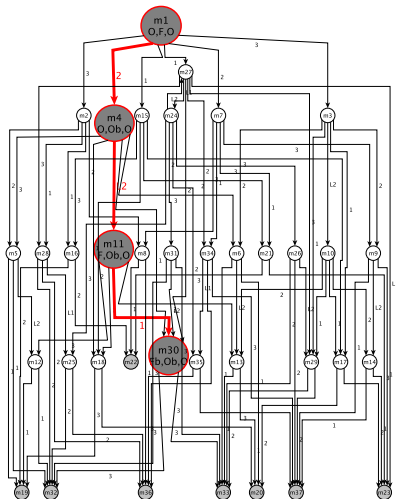
Exemple d'une trajectoire

Exemple d'une trajectoire



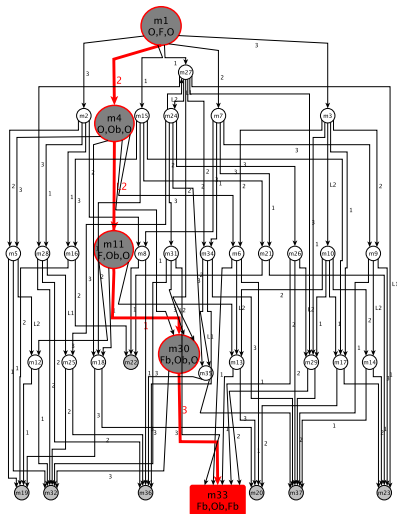
Exemple d'une trajectoire

Exemple d'une trajectoire



Exemple d'une trajectoire

Exemple d'une trajectoire



Problématique

- M. Marseguerra et E. Zio (1996) *Monte Carlo approach to PSA for dynamic process system*, Reliability Engineering and System Safety
- B. Tombuyses, T. Aldemir (1996) *Continuous Cell-to-Cell Mapping and dynamic PSA*, ESREL 96

But : Utiliser les PDMP pour calculer les probabilités d'événements redoutés du réservoir sans discrétiser le système différentiel.

Plan

- 1 Introduction
- 2 Le réservoir, cas-test de l'industrie gazière
- 3 Les Processus Markoviens Déterministes par Morceaux
 - Définition des PDMP
 - Construction itérative
- 4 Première méthode : simulation par Monte Carlo
- 5 Deuxième méthode : approche par les EDP
- 6 Conclusion

Définition

Davis(1980)

Modèle dynamique stochastique hybride de type non diffusion : trajectoire déterministe ponctuée de sauts aléatoires

Exemples d'application

files d'attente, exploitation optimale des ressources, plan d'investissement, fiabilité dynamique ...

Dynamique

Processus hybride $X_t = (m_t, y_t)$

- un mode discret $m_t \in \{1, \dots, p\}$
- une variable d'état euclidienne $y_t \in \mathbb{R}^n$

Caractéristiques locales pour chaque mode m

- E_m un sous-espace ouvert de \mathbb{R}^n , ∂E_m sa frontière d'état et \bar{E}_m sa fermeture
- Le flot $\phi_m : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ qui définit la trajectoire déterministe entre deux sauts
- L'intensité des sauts aléatoires $\lambda_m : \bar{E}_m \rightarrow \mathbb{R}_+$
- Le noyau markovien Q_m sur \bar{E}_m , qui sélectionne la position après le saut

Deux types de sauts

- Le **temps de sortie** déterministe $t^*(y, m)$:

$$t^*(y, m) = \inf\{t > 0 : \phi(y, m) \in \partial E_m\}$$

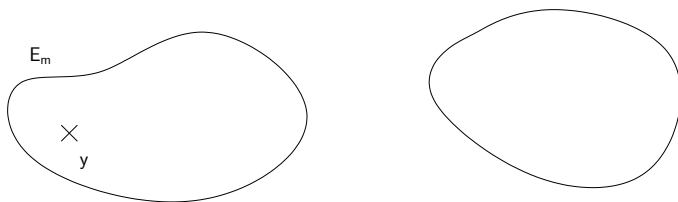
- La loi du premier temps de saut T_1 partant de (y, m)

$$\mathbb{P}_{(y,m)}(T_1 > t) = \begin{cases} e^{-\int_0^t \lambda_m(\phi_m(y,s)) ds} & \text{si } t < t^*(y, m) \\ 0 & \text{si } t \geq t^*(y, m) \end{cases}$$

Construction itérative

Point de départ

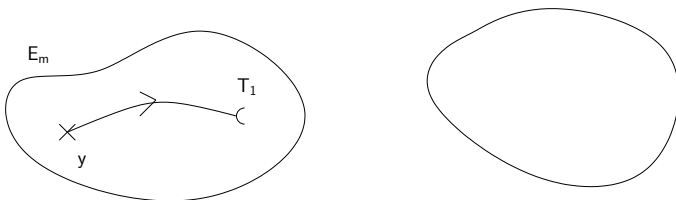
$$X_0 = (y, m)$$



Construction itérative

X_t suit le flot jusqu'au premier temps de saut T_1

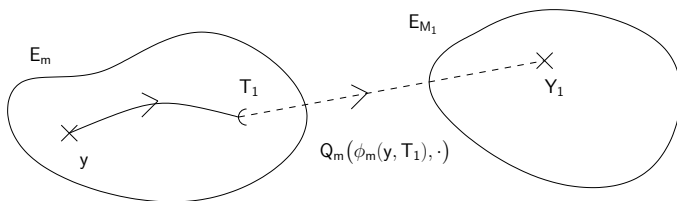
$$X_t = \phi_m(y, t), \quad t < T_1$$



Construction itérative

Nouvelle position (M_1, Y_1) sélectionnée par

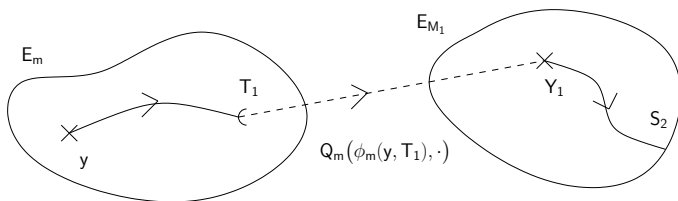
$$Q_m(\phi_m(y, T_1), \cdot)$$



Construction itérative

X_t suit le flot jusqu'au prochain temps de saut $T_2 = T_1 + S_2$

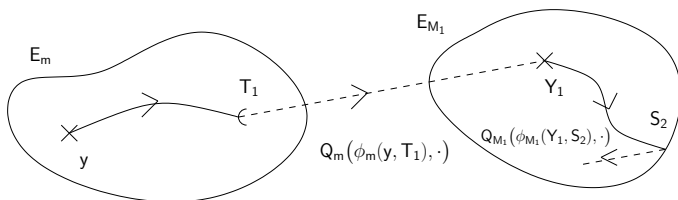
$$X_{T_1+t} = \phi_{M_1}(Y_1, t), \quad t < S_2$$



Construction itérative

Nouvelle position (M_2, Y_2) sélectionnée par

$$Q_{M_1}(\phi_{M_1}(Y_1, S_2), \cdot) \dots$$



Plan

- 1 Introduction
- 2 Le réservoir, cas-test de l'industrie gazière
- 3 Les Processus Markoviens Déterministes par Morceaux
- 4 Première méthode : simulation par Monte Carlo**
 - Principe de la méthode
 - Résultats
- 5 Deuxième méthode : approche par les EDP
- 6 Conclusion

Principe de la méthode

- 1 $T_0 = 0$, Horizon de calcul = 1000 heures,
 $X_0 = (7, 32, (O, F, O))$
- 2 On note τ_i le temps de panne de la vanne i .
⇒ Algorithme de simulation de l'intensité dépendant de la position (Cocozza-Thivent)
- 3 On note t^* le temps d'atteinte de 6 m ou 8 m.
- 4 Alors $T_1 = \min\{\tau_1, \tau_2, \tau_3, t^*\}$.
- 5 Loi de Bernoulli pour sélectionner la position
- 6 Mise à jour du flot
- 7 Retour à l'étape 2

Principe de la méthode

- 1 $T_0 = 0$, Horizon de calcul = 1000 heures,
 $X_0 = (7, 32, (O, F, O))$
- 2 On note τ_i le temps de panne de la vanne i .
⇒ Algorithme de simulation de l'intensité dépendant de la position (Cocozza-Thivent)
- 3 On note t^* le temps d'atteinte de 6 m ou 8 m.
- 4 Alors $T_1 = \min\{\tau_1, \tau_2, \tau_3, t^*\}$.
- 5 Loi de Bernoulli pour sélectionner la position
- 6 Mise à jour du flot
- 7 Retour à l'étape 2

Principe de la méthode

- 1 $T_0 = 0$, Horizon de calcul = 1000 heures,
 $X_0 = (7, 32, (O, F, O))$
- 2 On note τ_i le temps de panne de la vanne i .
⇒ Algorithme de simulation de l'intensité dépendant de la position (Cocozza-Thivent)
- 3 On note t^* le temps d'atteinte de 6 m ou 8 m.
- 4 Alors $T_1 = \min\{\tau_1, \tau_2, \tau_3, t^*\}$.
- 5 Loi de Bernoulli pour sélectionner la position
- 6 Mise à jour du flot
- 7 Retour à l'étape 2

Principe de la méthode

- 1 $T_0 = 0$, Horizon de calcul = 1000 heures,
 $X_0 = (7, 32, (O, F, O))$
- 2 On note τ_i le temps de panne de la vanne i .
⇒ Algorithme de simulation de l'intensité dépendant de la position (Cocozza-Thivent)
- 3 On note t^* le temps d'atteinte de 6 m ou 8 m.
- 4 Alors $T_1 = \min\{\tau_1, \tau_2, \tau_3, t^*\}$.
- 5 Loi de Bernoulli pour sélectionner la position
- 6 Mise à jour du flot
- 7 Retour à l'étape 2

Principe de la méthode

- 1 $T_0 = 0$, Horizon de calcul = 1000 heures,
 $X_0 = (7, 32, (O, F, O))$
- 2 On note τ_i le temps de panne de la vanne i .
⇒ Algorithme de simulation de l'intensité dépendant de la position (Cocozza-Thivent)
- 3 On note t^* le temps d'atteinte de 6 m ou 8 m.
- 4 Alors $T_1 = \min\{\tau_1, \tau_2, \tau_3, t^*\}$.
- 5 Loi de Bernoulli pour sélectionner la position
- 6 Mise à jour du flot
- 7 Retour à l'étape 2

Principe de la méthode

- 1 $T_0 = 0$, Horizon de calcul = 1000 heures,
 $X_0 = (7, 32, (O, F, O))$
- 2 On note τ_i le temps de panne de la vanne i .
⇒ Algorithme de simulation de l'intensité dépendant de la position (Cocozza-Thivent)
- 3 On note t^* le temps d'atteinte de 6 m ou 8 m.
- 4 Alors $T_1 = \min\{\tau_1, \tau_2, \tau_3, t^*\}$.
- 5 Loi de Bernoulli pour sélectionner la position
- 6 Mise à jour du flot
- 7 Retour à l'étape 2

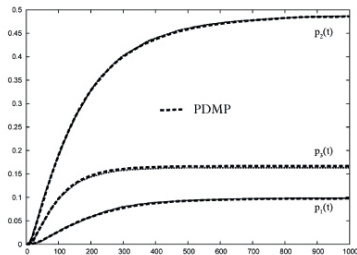
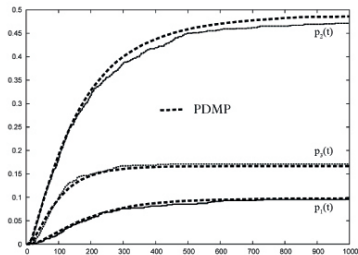
Principe de la méthode

- 1 $T_0 = 0$, Horizon de calcul = 1000 heures,
 $X_0 = (7, 32, (O, F, O))$
- 2 On note τ_i le temps de panne de la vanne i .
⇒ Algorithme de simulation de l'intensité dépendant de la position (Cocozza-Thivent)
- 3 On note t^* le temps d'atteinte de 6 m ou 8 m.
- 4 Alors $T_1 = \min\{\tau_1, \tau_2, \tau_3, t^*\}$.
- 5 Loi de Bernoulli pour sélectionner la position
- 6 Mise à jour du flot
- 7 Retour à l'étape 2

Principe de la méthode

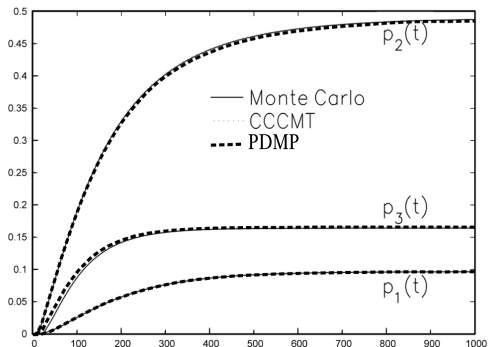
- 1 $T_0 = 0$, Horizon de calcul = 1000 heures,
 $X_0 = (7, 32, (O, F, O))$
- 2 On note τ_i le temps de panne de la vanne i .
⇒ Algorithme de simulation de l'intensité dépendant de la position (Cocozza-Thivent)
- 3 On note t^* le temps d'atteinte de 6 m ou 8 m.
- 4 Alors $T_1 = \min\{\tau_1, \tau_2, \tau_3, t^*\}$.
- 5 Loi de Bernoulli pour sélectionner la position
- 6 Mise à jour du flot
- 7 Retour à l'étape 2

Résultats



Résultats par la méthode PDMP pour $N = 10^3$ et $N = 10^4$
comparés à la courbe de référence $N = 10^7$

Résultats



Résultat par la méthode PDMP pour $N = 10^4$ comparé à la courbe solution CCCMT

Plan

- 1 Introduction
- 2 Le réservoir, cas-test de l'industrie gazière
- 3 Les Processus Markoviens Déterministes par Morceaux
- 4 Première méthode : simulation par Monte Carlo
- 5 Deuxième méthode : approche par les EDP**
 - Méthode de Davis
 - Difficultés
 - Méthode et Résultats
- 6 Conclusion

Deuxième méthode : approche par les EDP

- en collaboration avec l'équipe INRIA MC2 (Modélisation, Calcul et Contrôle).
- Méthode de Monte Carlo : $\mathbf{P}(\theta(t) \geq 100)$.
- Méthode par les EDP : $\mathbf{P}(\exists t, \theta(t) \geq 100)$.

Deuxième méthode : approche par les EDP

- en collaboration avec l'équipe INRIA MC2 (Modélisation, Calcul et Contrôle).
- Méthode de Monte Carlo : $\mathbf{P}(\theta(t) \geq 100)$.
- Méthode par les EDP : $\mathbf{P}(\exists t, \theta(t) \geq 100)$.

Deuxième méthode : approche par les EDP

- en collaboration avec l'équipe INRIA MC2 (Modélisation, Calcul et Contrôle).
- Méthode de Monte Carlo : $\mathbf{P}(\theta(t) \geq 100)$.
- Méthode par les EDP : $\mathbf{P}(\exists t, \theta(t) \geq 100)$.

Méthode de Davis

$$f(h, \theta, m) = \mathbf{E}_{(h, \theta, m)} \left[\int_0^\infty c(X(t)) dp_{t^*} \right]$$

où

- $X(t) = (h_t, \theta_t, m_t)$ est la trajectoire du processus
- $c(h, \theta, m) = \mathbf{1}_{\{\theta=100\}}$
- p_{t^*} est le processus de comptage de saut

Méthode de Davis

$$f(h, \theta, m) = \mathbf{E}_{(h, \theta, m)} \left[\int_0^\infty c(X(t)) dp_{t^*} \right]$$

Théorème (Davis, 1993)

f est l'unique solution de l'équation intégro-différentielle

$$\frac{d}{dt} f(y, m) + \lambda_m(y) (Q_m f(y, m) - f(y, m)) = 0,$$

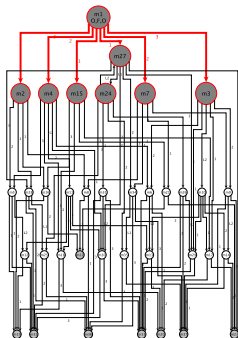
où $m \in \mathcal{M}$ et $y = (h, \theta) \in E_m$,

avec la condition aux bords

$$Q_m f(z, m) - f(z, m) + c(z, m) = 0, \quad m \in \mathcal{M}, \quad z \in \partial E_m$$

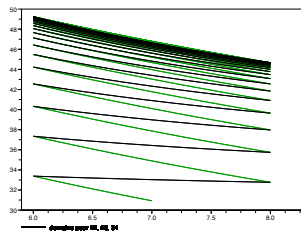
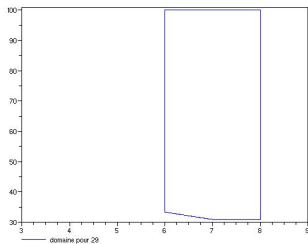
Difficultés

- Système à 17 équations : couplage inhabituel



Difficultés

- Domaines de définition compliqués :



Méthode

- Problème des 2 modes qui bouclent
- Redressement des domaines de définition
- Recherche de conditions aux bords
- Schéma de discrétisation
- Interpolation des fonctions

Méthode

- Problème des 2 modes qui bouclent
- Redressement des domaines de définition
- Recherche de conditions aux bords
- Schéma de discrétisation
- Interpolation des fonctions

Méthode

- Problème des 2 modes qui bouclent
- Redressement des domaines de définition
- Recherche de conditions aux bords
- Schéma de discrétisation
- Interpolation des fonctions

Méthode

- Problème des 2 modes qui bouclent
- Redressement des domaines de définition
- Recherche de conditions aux bords
- Schéma de discrétisation
- Interpolation des fonctions

Méthode

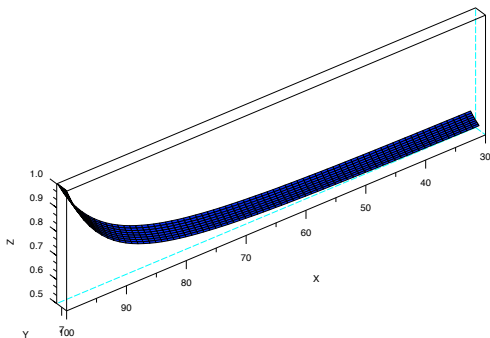
- Problème des 2 modes qui bouclent
- Redressement des domaines de définition
- Recherche de conditions aux bords
- Schéma de discrétisation
- Interpolation des fonctions

Résultats

- Calcul de f
 - $p_3(1000) = 0.167$
 - $f(7, 32, OFO) \simeq 0.17$

Résultats

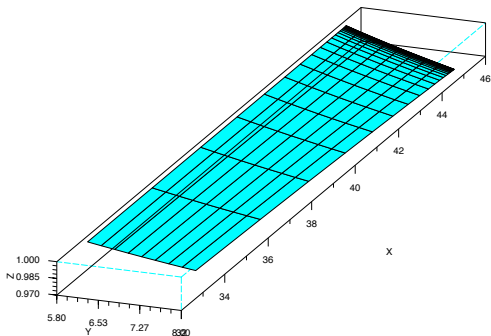
- Calcul de f



- $p_3(1000) = 0.167$
- $f(7, 32, OFO) \simeq 0.17$

Résultats

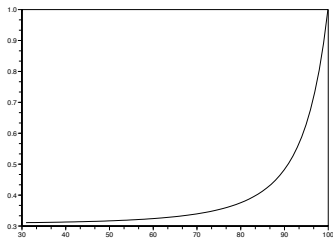
- Calcul de f



- $p_3(1000) = 0.167$
- $f(7, 32, OFO) \simeq 0.17$

Résultats

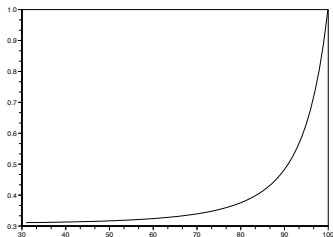
- Calcul de f



- - $p_3(1000) = 0.167$
 - $f(7, 32, OFO) \simeq 0.17$

Résultats

- Calcul de f



- - $p_3(1000) = 0.167$
 - $f(7, 32, OFO) \simeq 0.17$

Plan

- 1 Introduction
- 2 Le réservoir, cas-test de l'industrie gazière
- 3 Les Processus Markoviens Déterministes par Morceaux
- 4 Première méthode : simulation par Monte Carlo
- 5 Deuxième méthode : approche par les EDP
- 6 Conclusion**

Conclusion et Perspectives

- Première méthode : pas de discrétisation, gain de temps
- Deuxième méthode : calcul des probabilités d'événements redoutés
- PDMP adaptés aux méthodes numériques
- Projet de recherche avec des numériciens (ANR) :
⇒ thèse financée par EADS Astrium sur la propagation de fissures

Conclusion et Perspectives

- Première méthode : pas de discrétisation, gain de temps
- Deuxième méthode : calcul des probabilités d'événements redoutés
- PDMP adaptés aux méthodes numériques
- Projet de recherche avec des numériciens (ANR) :
⇒ thèse financée par EADS Astrium sur la propagation de fissures

Conclusion et Perspectives

- Première méthode : pas de discrétisation, gain de temps
- Deuxième méthode : calcul des probabilités d'événements redoutés
- PDMP adaptés aux méthodes numériques
- Projet de recherche avec des numériciens (ANR) :
⇒ thèse financée par EADS Astrium sur la propagation de fissures

Conclusion et Perspectives

- Première méthode : pas de discrétisation, gain de temps
- Deuxième méthode : calcul des probabilités d'événements redoutés
- PDMP adaptés aux méthodes numériques
- Projet de recherche avec des numériciens (ANR) :
⇒ thèse financée par EADS Astrium sur la propagation de fissures

Conclusion et Perspectives

- Première méthode : pas de discrétisation, gain de temps
- Deuxième méthode : calcul des probabilités d'événements redoutés
- PDMP adaptés aux méthodes numériques
- Projet de recherche avec des numériciens (ANR) :
⇒ thèse financée par EADS Astrium sur la propagation de fissures