

Variance optimal hedging for PII and applications.

Goutte Stéphane

LAGA Paris 13 - LUISS Rome - LPMA Paris 7

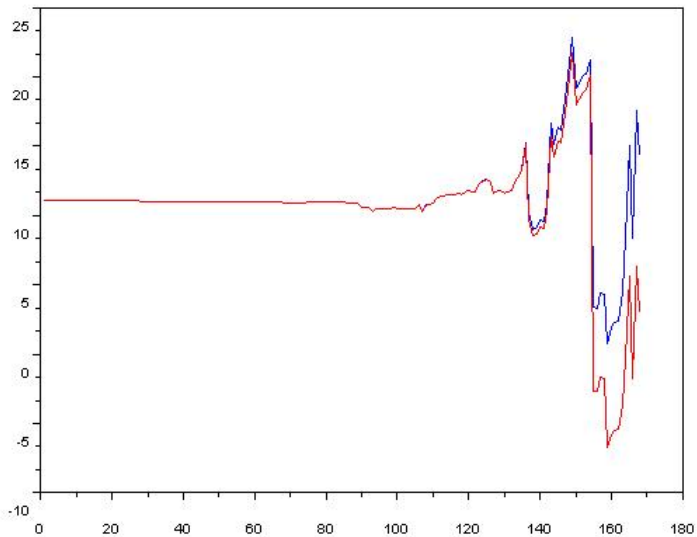
May 4, 2010

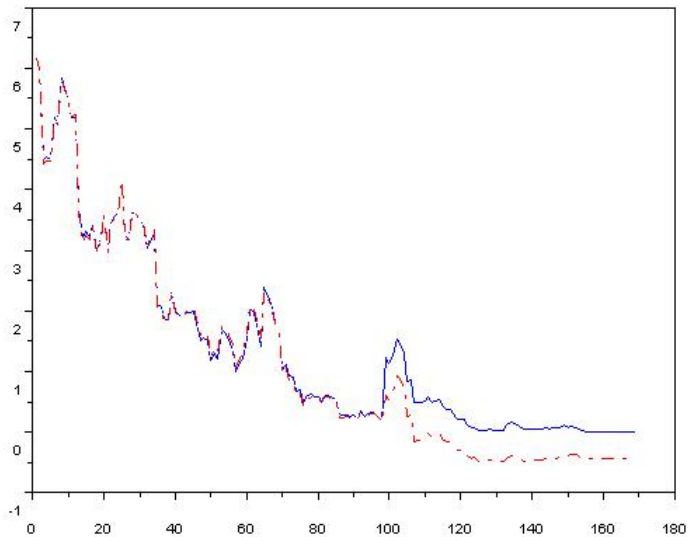
Joint work with F.Russo and N.Oudjane
Neuvième Colloque "Jeunes Probabilistes et Statisticiens"
Le Mont-Dore, 3-7 mai 2010

Plan de la présentation

- 1 Introduction
 - Motivations
 - Résultats antérieurs
 - Föllmer-Schweizer Structure Condition
 - Le problème
 - Décomposition de Föllmer-Schweizer
- 2 Föllmer Schweizer decomposition
 - Classe d'option
 - Etapes
 - Structure Condition
 - FS Décomposition
- 3 Solution du problème de minimisation
 - Mean-Variance Hedging
 - Application au cas de l'électricité
- 4 Simulations
 - Résultat en fonction de N
 - Résultat en fonction de Λ

Analyse de la qualite de la couverture





Electricité non stockable \Rightarrow Instruments de couverture utilisés sont les contrats à terme ou future $F_t^{T_d}$ sur les prix spot (S_t). $F_t^{T_d}$ représente le prix future à l'instant $t \leq T_d$ de la livraison de 1MWh d'électricité sur la période $[T_d, T_d + \theta]$.

Le modèle utilisé est:

$$F_t^{T_d} = F_0^{T_d} \exp\left(m_t^{T_d} + \underbrace{\int_0^t \sigma_S e^{-\lambda(T_d-s)} d\Lambda_s}_{\text{facteur court terme}} + \underbrace{\sigma_L W_t}_{\text{facteur long terme}}\right), \quad \forall t \in [0, T_d]$$

- m est une tendance réelle déterministe,
- Λ un processus de Lévy réel
- W un mouvement Brownien réel

La dynamique des prix futurs $F_t^{T_d}$ est donc modélisée par une exponentielle de processus à accroissements indépendants.

Soit $T > 0$ un instant de maturité fixé, $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, P)$ un espace de probabilité et $X = (X_t)_{t \in [0, T]}$ un processus stochastique réelle.

Definition: cumulant generating function

La **cumulant generating function** de (la loi de) X_t est la fonction $z \mapsto \text{Log}(\mathbb{E}[e^{zX_t}])$. En particulier nous avons que

$$\kappa_{X_t} : D \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{with} \quad e^{\kappa_{X_t}(z)} = \mathbb{E}[e^{zX_t}],$$

où $D := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathbb{E}[e^{\text{Re}(z)X_t}] < \infty, \forall t \in [0, T]\}$.

Dans la suite nous utiliserons la notation simplifiée κ_t pour κ_{X_t} .

Definition: PII

$X = (X_t)_{t \in [0, T]}$ est un **processus réel à accroissement indépendant (PII)** ssi

- 1 X est à trajectoire Càdlàg.
- 2 $X_0 = 0$.
- 3 $X_t - X_s$ est indépendant de \mathcal{F}_s pour $0 \leq s < t \leq T$ où (\mathcal{F}_t) est la filtration canonique classique associé à X .

De plus nous supposons que

- 4 X est continu en probabilité, i.e. X n'a pas de temps fixe de discontinuité.

Definition: Lévy process (PIIS)

On ajoute la propriété d'accroissement stationnaire à la définition d'un PII:
La distribution de $X_t - X_s$ depend seulement de $t - s$ pour tout $0 \leq s \leq t \leq T$.

Definition: Structure Condition

Soit $X = (X_t)_{t \in [0, T]}$ une semimartingale réelle de décomposition canonique

$$X = X_0 + M + A\Gamma$$

X est dit satisfaisant la **structure condition (SC)** si il existe un processus prévisible à valeurs réelles $\alpha = (\alpha_t)_{t \in [0, T]}$ tel que

$$\textcircled{1} \quad A_t = \int_0^t \alpha_s d\langle M \rangle_s, \quad \text{for all } t \in [0, T], \text{ donc que } dA \ll d\langle M \rangle.$$

$$\textcircled{2} \quad \int_0^T \alpha_s^2 d\langle M \rangle_s < \infty, \quad P\text{-a.s.}$$

Définition: Mean-Variance Tradeoff Process

On note par $K = (K_t)_{t \in [0, T]}$ la processus Càdlàg

$$K_t = \int_0^t \alpha_s^2 d\langle M \rangle_s, \quad \text{pour tout } t \in [0, T].$$

Ce processus est appelé processus **mean-variance tradeoff (MVT)**.

Soit Θ l'espace des processus prévisibles $(v_t)_{t \in [0, T]}$ pour lequel l'intégrale stochastique

$$G_t(v) := \int_0^t v_s dX_s = \int_0^t v_s dM_s + \int_0^t v_s dA_s, \quad \text{pour tout } t \in [0, T],$$

est une semimartingale de carrée intégrable.

Definition: Mean-variance Hedging

Soit H une v.a. de carré intégrable, le couple (V_0, φ) sera appelé **optimal** si $(c, v) = (V_0, \varphi)$ minimise le risque quadratique globale de couverture

$$\mathbb{E}[(H - c - G_T(v))^2], \quad (1)$$

pour tout les couples $(c, v) \in \mathbb{R} \times \Theta$.

En termes financiers, V_0 est la valeur du capital initial optimale et φ est la stratégie optimale d'achat et de vente sur le marché de l'actif H à chaque instant de couverture.

Definition: décomposition de Föllmer-Schweizer

Une variable aléatoire $H \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ admet une **décomposition de Föllmer-Schweizer (FS)**, si elle peut s'écrire sous la forme

$$H = H_0 + \int_0^T \xi_s^H dX_s + L_T^H, \quad P - a.s. , \quad (2)$$

où $H_0 \in \mathbb{R}$ est une constante, $\xi^H \in \Theta$ et $L^H = (L_t^H)_{t \in [0, T]}$ est une martingale de carrée intégrable telle que $\mathbb{E}[L_0^H] = 0$ et fortement orthogonale à M .

Remarque

Si (X_t) est une martingale de carrée intégrable alors la FS décomposition coïncide avec la décomposition de Kunita-Watanabe.

Hypothèse 1

Pour tout $t > 0$, X_t n'est jamais déterministe.

Hypothèse 2

On suppose que X satisfait (SC) et que le processus MVT K est uniformément borné en t et ω

Théorème: Théorème 3.4 de Monat, P. and Stricker, C. (1995)

Sous l'hypothèse 2, toute variable aléatoire $H \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ admet une FS décomposition et le sous espace $G(\Theta)$ est fermé dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$.

Corollaire

Le problème de mean-variance hedging admet une unique solution (V_0, φ) .

Théoreme: Théoreme 3 de Schweizer, M. (1994)

Supposons que X satisfasse (SC) et que le processus MVT K de X est déterministe. Si $H \in \mathcal{L}^2$ admet une FS décomposition de type (2), alors le problème de mean variance hedging admet une solution $\varphi^{(c)} \in \Theta$ pour tout $c \in \mathbb{R}$, tel que

$$\varphi_t^{(c)} = \xi_t^H + \frac{\alpha_t}{1 + \Delta K_t} (H_{t-} - c - G_{t-}(\varphi^{(c)})), \quad \text{for all } t \in [0, T] \quad (3)$$

où les processus $(H_t)_{t \in [0, T]}$ sont définis par

$$H_t := H_0 + \int_0^t \xi_s^H dX_s + L_t^H, \quad (4)$$

et le processus α est celui apparaissant dans la Définition de (SC).

Corollaire: Corollaire 10 de Schweizer, M. (1994)

Sous les hypothèses du théorème précédent, la solution du problème mean variance hedging est donnée par la paire $(H_0, \varphi^{(H_0)})$.

Plan de la présentation

- 1 Introduction
 - Motivations
 - Résultats antérieurs
 - Föllmer-Schweizer Structure Condition
 - Le problème
 - Décomposition de Föllmer-Schweizer
- 2 Föllmer Schweizer decomposition
 - Classe d'option
 - Etapes
 - Structure Condition
 - FS Décomposition
- 3 Solution du problème de minimisation
 - Mean-Variance Hedging
 - Application au cas de l'électricité
- 4 Simulations
 - Résultat en fonction de N
 - Résultat en fonction de Λ

Nous nous intéressons aux options H qui s'expriment de la façon suivante:

$$H = f(S_T) \quad \text{with} \quad f(s) = \int_{\mathbb{C}} s^z \Pi(dz), \quad (5)$$

où Π est une mesure finie complexe au sens de Rudin (1987), Section 6.1.

Call et Put européen

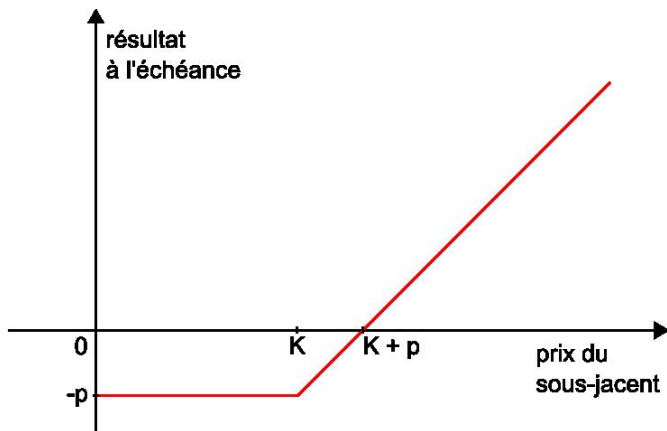
Soit $K > 0$, un Call européen $H = (S_T - K)_+$ admet une représentation de la forme (5), soit $R > 1$ et $s > 0$, nous avons

$$(s - K)_+ = \frac{1}{2\pi i} \int_{R-i\infty}^{R+i\infty} s^z \frac{K^{1-z}}{z(z-1)} dz .$$

Soit $K > 0$, un Put européen $H = (K - S_T)_+$ admet une représentation de la forme (5), soit $R < 0$ et $s > 0$, nous avons

$$(K - s)_+ = \frac{1}{2\pi i} \int_{R-i\infty}^{R+i\infty} s^z \frac{K^{1-z}}{z(z-1)} dz .$$

Bénéfice sur un Call européen



Hypothèse 3

- ① (X_t) n'a pas d'accroissement déterministe.
- ② $2 \in D$.

Définition

Pour tout $t \in [0, T]$, posons ρ_t la fonction complexe qui à $z \in D$

$$\rho_t(z, y) = \kappa_t(z + y) - \kappa_t(z) - \kappa_t(y) . \quad (6)$$

$$\rho_t(z) = \rho_t(z, \bar{z}) = \kappa_t(2\operatorname{Re}(z)) - 2\operatorname{Re}(\kappa_t(z)) . \quad (7)$$

Proposition:

Sous l'hypothèse 3

$$d(\kappa_t(z)) \ll d\rho_t(z) , \quad \text{pour tout } z \in D . \quad (8)$$

Nous avons donc

$$S_t = s_0 \exp(X_t), \quad \text{pour tout } t \in [0, T]$$

où s_0 est une constante strictement positive et X est une semimartingale spéciale à accroissement indépendant (PII). Nous nous intéressons aux options de la forme:

$$H = \int_{\mathbb{C}} S_T^z \Pi(dz)$$

Les étapes de la résolution du problème:

- 1 Vérification de la condition de structure (SC) de S et du fait que le processus MVT K de S soit uniformément bornée.
- 2 FS Décomposition de $H = S_T^z, z \in \mathbb{C}$
- 3 FS Décomposition de $H = \int_{\mathbb{C}} S_T^z \Pi(dz)$

Proposition:

Soit $y, z \in D$ tel que $y + z, 2\operatorname{Re}(y), \operatorname{Re}(y) + 1, 2\operatorname{Re}(z)$ et $\operatorname{Re}(z) + 1 \in D$.
alors S^Z est une semimartingale spéciale de décomposition

$S_t^Z = M(z)_t + A(z)_t$ satisfaisant

$$A(z)_t = \int_0^t S_{u-}^Z \kappa_{du}(z)$$

$$\langle M(y), M(z) \rangle_t = \int_0^t S_{u-}^{y+z} (\kappa_{du}(y+z) - \kappa_{du}(y) - \kappa_{du}(z))$$

où $d\rho_u(z)$ est défini par l'équation (3).

Pour $y = z = 1$, on obtient $A_t = \int_0^t S_{u-} \kappa_{du}(1)$ et

$$\langle M, M \rangle_t = \int_0^t S_{u-}^2 (\kappa_{du}(2) - 2\kappa_{du}(1)) = \int_0^t S_{u-}^2 \rho_{du} .$$

Proposition:

Sous l'hypothèse 3, nous avons

$$A_t = \int_0^t \alpha_s d \langle M \rangle_s , \quad (9)$$

avec α donné par

$$\alpha_u := \frac{\lambda_u}{S_{u-}} \quad \text{avec} \quad \lambda_u := \frac{d\kappa_u(1)}{d\rho_u} , \quad \text{pour tout } u \in [0, T]. \quad (10)$$

De plus le processus (MVT) est donné par

$$K_t = \int_0^t \left(\frac{d(\kappa_u(1))}{d\rho_u} \right)^2 d\rho_u . \quad (11)$$

Corollaire:

Sous l'hypothèse 3, la condition de structure (SC) est vérifiée ssi

$$K_T = \int_0^T \left(\frac{d(\kappa_u(1))}{d\rho_u} \right)^2 d\rho_u < \infty .$$

On note par \mathcal{D} l'ensemble des $z \in D$ tel que

$$\int_0^T \left| \frac{d\kappa_u(z)}{d\rho_u} \right|^2 d\rho_u < \infty. \quad (12)$$

Nous formulons donc une hypothèse qui vaudra pour toute la présentation

Assumption 4

$1 \in \mathcal{D}$.

Proposition: FS Décomposition de S^z

Soit $z \in \mathcal{D}$ avec $z + 1 \in \mathcal{D}$ et $2\text{Re}(z) \in D$.

- ① $S_T^z \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_T)$.
- ② Nous admettons les hypothèses 3 et 4 et nous définissons

$$\gamma(z, t) := \frac{d(\rho_t(z, 1))}{d\rho_t}, \quad t \in [0, T]. \quad (13)$$

$\int_0^T |\gamma(z, t)|^2 \rho dt < \infty$ et

$$\begin{aligned} \eta(z, t) &:= \kappa_t(z) - \int_0^t \gamma(z, s) \kappa_{ds}(1) \\ &= \kappa_t(z) - \int_0^t \gamma(z, s) \frac{d\kappa_s(1)}{d\rho_s} \rho ds \end{aligned} \quad (14)$$

est bien défini et $\eta(z, \cdot)$ est absolument continu par rapport à ρds et donc borné.

Proposition (suite):

- ① Sous les memes hypothèses $H(z) = S_T^z$ admet la FS décomposition
 $H(z) = H(z)_0 + \int_0^T \xi(z)_t dS_t + L(z)_T$ où

$$H(z)_t := e^{\int_t^T \eta(z, ds)} S_t^z, \quad (15)$$

$$\xi(z)_t := \gamma(z, t) e^{\int_t^T \eta(z, ds)} S_{t-}^{z-1}, \quad (16)$$

$$L(z)_t := H(z)_t - H(z)_0 - \int_0^t \xi(z)_u dS_u. \quad (17)$$

Preuve: Nous devons montrer:

- ① $L(z)$ est une martingale de carré intégrable.
 ② $\sup_{t \leq T} \mathbb{E}[|\xi(z)_t|^2] < \infty$
 ③ $\langle L, M \rangle = 0$.

Hypothèse 5

Soit $I_0 = \text{supp}\Pi \cap \mathbb{R}$. Nous notons

$$I := [\inf I_0 \wedge 2 \inf I_0, 2 \sup I_0 \vee \sup I_0 + 1].$$

- ① I_0 est compact.
- ② $\forall z \in \text{supp}\Pi, \quad z, z + 1 \in \mathcal{D}$.
- ③ $I \subset D$ et $\sup_{x \in I \cup \{1\}, t \leq T} \left| \frac{d(\kappa_t(x))}{d\rho_t} \right|_\infty < \infty$.

Remarques:

- ① Point 2. de l'hypothèse 5 implique $\sup_{z \in I + i\mathbb{R}} \|\kappa_{dt}(Re(z))\|_T < \infty$.
- ② Sous l'hypothèse 5, $H = f(S_T)$ est de carré intégrable. En particulier elle admet une FS décomposable.
- ③ Parce que (8), la dérivée de Radon-Nykodim du point 3 de l'hypothèse 5 existe toujours.

Théorème:

Supposons les hypothèses 3,4 et 5. Toutes options complexes de type $H = f(S_T)$, où f est de la forme (5), et $H \in \mathcal{L}^2$, admet une unique FS décomposition $H = H_0 + \int_0^T \xi_t dS_t + L_T$ avec les propriétés suivantes:

- 1 $H \in \mathcal{L}^2$ et
 - $H_t = \int H(z)_t \Pi(dz)$,
 - $\xi_t = \int \xi(z)_t \Pi(dz)$,
 - $L_t = \int L(z)_t \Pi(dz)$,

Pour tout $z \in \text{supp}(\Pi)$, $H(z)$, $\xi(z)$ et $L(z)$ sont les memes que ceux introduits précédement et s'annulent par convention si $z \notin \text{supp}(\Pi)$.

- 2 Cette décomposition est réelle si f est à valeur réelle.

Plan de la présentation

- 1 Introduction
 - Motivations
 - Résultats antérieurs
 - Föllmer-Schweizer Structure Condition
 - Le problème
 - Décomposition de Föllmer-Schweizer
- 2 Föllmer Schweizer decomposition
 - Classe d'option
 - Etapes
 - Structure Condition
 - FS Décomposition
- 3 Solution du problème de minimisation
 - Mean-Variance Hedging
 - Application au cas de l'électricité
- 4 Simulations
 - Résultat en fonction de N
 - Résultat en fonction de Λ

Théorème:

Soit $X = (X_t)_{t \in [0, T]}$ un processus à accroissements indépendants de fonction cumulative κ . Soit $H = f(e^{X_T})$ où f est de la forme (5). Nous admettons les hypothèses 3, 4 et 5. Le capital initial optimal V_0 et la stratégie de couverture optimale φ , solution du problème de minimisation (1), sont donnés par

$$V_0 = H_0 \quad (18)$$

et l'expression explicite

$$\varphi_t = \xi_t + \frac{\lambda_t}{S_{t-}} (H_{t-} - V_0 - \int_0^t \varphi_s dS_s), \quad (19)$$

où les processus (H_t) , (ξ_t) et (λ_t) sont définis par

$$\gamma(z, t) := \frac{d\rho_t(z, 1)}{d\rho_t} \quad \text{avec} \quad \rho_t(z, y) = \kappa_t(z + y) - \kappa_t(z) - \kappa_t(y), \quad (20)$$

Théorème (suite):

$$\eta(z, dt) := \kappa_{dt}(z) - \gamma(z, t)\kappa_{dt}(1) , \quad (21)$$

$$\lambda_t := \frac{d(\kappa_t(1))}{d\rho_t} , \quad (22)$$

$$H_t := \int_{\mathbb{C}} e^{\int_t^T \eta(z, ds)} S_t^z \Pi(dz) , \quad (23)$$

$$\xi_t := \int_{\mathbb{C}} \gamma(z, t) e^{\int_t^T \eta(z, ds)} S_{t-}^{z-1} \Pi(dz) . \quad (24)$$

Nous avons donc le modèle suivant

$$S_t = s_0 \exp(m_t + X_t^1 + X_t^2), \quad \text{pour tout } t \in [0, T_d] \quad (25)$$

où

- m est une fonction réelle déterministe supposé absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue.
- $X_t^1 = \int_0^t \sigma_s e^{-\lambda(T_d-u)} d\Lambda_u$, où Λ est un processus de Lévy.
- $X^2 = \sigma_I W$ où W est un mouvement brownien standard.
- Λ et W sont indépendants.
- σ_s et σ_I représentent la volatilité court terme et long terme.

Théorème:

Le capital initial optimal V_0 et la stratégie de couverture optimale φ , solution du problème de minimisation (1), sont donnés par

$$V_0 = H_0 \quad (26)$$

et l'expression explicite

$$\varphi_t = \xi_t + \frac{\lambda_t}{S_{t-}} (H_{t-} - V_0 - \int_0^t \varphi_s dS_s), \quad (27)$$

où les processus (H_t) , (ξ_t) et (λ_t) sont définis comme

$$\begin{aligned} \tilde{z}_t &= \sigma_s e^{-\lambda(T_d-t)}, \\ \gamma(z, t) &= \frac{z\sigma_l^2 + \kappa^\Lambda((z+1)\tilde{z}) - \kappa^\Lambda(z\tilde{z}) - \kappa^\Lambda(\tilde{z})}{\sigma_l^2 + \kappa^\Lambda(2\tilde{z}) - 2\kappa^\Lambda(\tilde{z})} \end{aligned}$$

Théorème (suite):

$$\eta(z, t) : = \left[zm_t + \frac{z^2 \sigma_I^2}{2} + \kappa^\Lambda(z\bar{z}) - \gamma(z, t) \left(m_t + \frac{\sigma_I^2}{2} + \kappa^\Lambda(\bar{z}) \right) \right] dt$$

$$\lambda_t = \frac{m_t + \frac{\sigma_I^2}{2} + \kappa^\Lambda(\bar{z})}{\sigma_I^2 + \kappa^\Lambda(2\bar{z}) - 2\kappa^\Lambda(\bar{z})},$$

$$H_t = \int_{\mathcal{C}} e^{\int_t^T \eta(z, ds)} S_t^Z \Pi(dz),$$

$$\xi_t = \int_{\mathcal{C}} \gamma(z, t) e^{\int_t^T \eta(z, ds)} S_{t-}^{Z-1} \Pi(dz) .$$

$$\kappa_t(z) = zm_t + \frac{z^2 \sigma_I^2 t}{2} + \int_0^t \kappa^\Lambda(z\sigma_s e^{-\lambda(T_d-u)}) du . \quad (28)$$

Plan de la présentation

- 1 Introduction
 - Motivations
 - Résultats antérieurs
 - Föllmer-Schweizer Structure Condition
 - Le problème
 - Décomposition de Föllmer-Schweizer
- 2 Föllmer Schweizer decomposition
 - Classe d'option
 - Etapes
 - Structure Condition
 - FS Décomposition
- 3 Solution du problème de minimisation
 - Mean-Variance Hedging
 - Application au cas de l'électricité
- 4 Simulations
 - Résultat en fonction de N
 - Résultat en fonction de Λ

Cas discret

Prenons un call européen $(F_T^{T_d} - K)_+$ de maturité $T = 0.25$ sur 3 mois.
On suppose $T = T_d$. Prenons un modèle simplifié:

$$S_t^c = e^{X_t^c}, \quad \text{où } X_t^c = \int_0^t \sigma_s e^{-\lambda(T-u)} d\Lambda_u \quad (29)$$

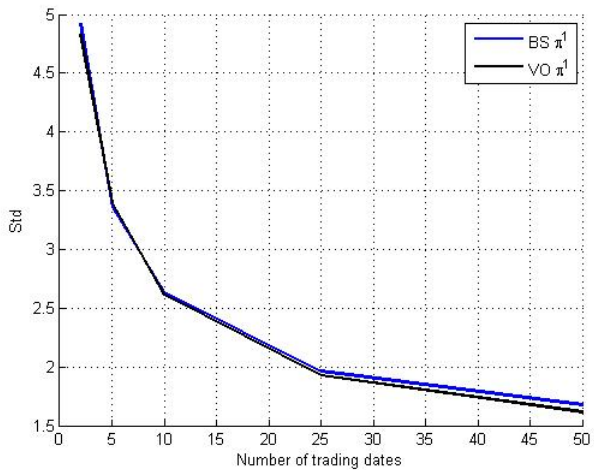
avec Λ un processus NIG tel que $\Lambda_1 \sim NIG(\alpha, \beta, \delta, \mu)$. On a donc pris $m \equiv 0, \sigma_l = 0$ et $\sigma_s = \sigma > 0$. Soit $N + 1$ dates discrètes

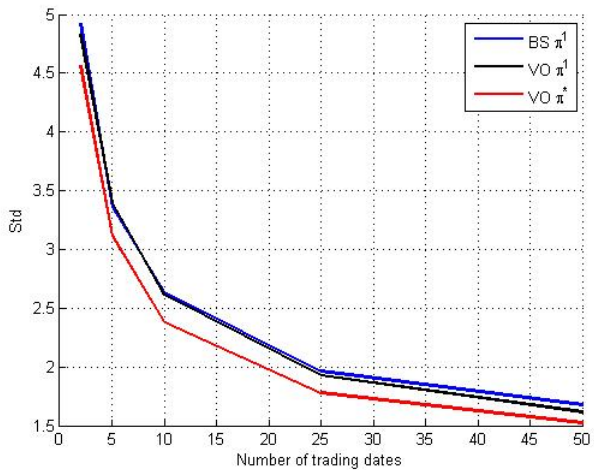
$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$, on considère la processus discret $X = X^N$ où $X_k = X_{t_k}^c, 0 \leq k \leq N$.

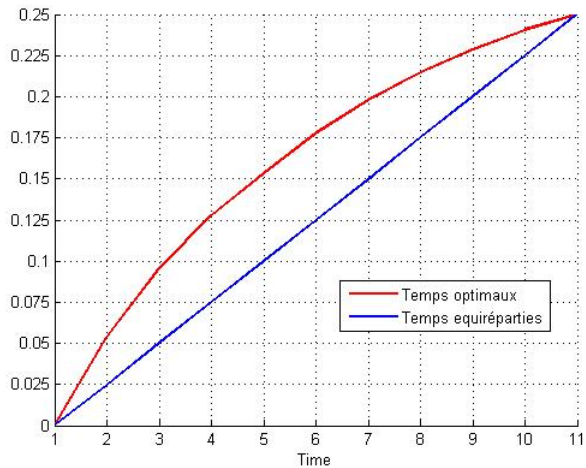
Les paramètres du modèle sont estimés sur des données réelles du Marché Français en 2007

$$\alpha = 15.81, \beta = -1.581, \delta = 15.57, \mu = 1.56,$$

ce qui correspond à une distribution centré réduite NIG avec une skewness de -0.019 et une excess kurtosis de 0.013 . Les estimation annuelle du la volatilité court terme et du coefficient de retour à la moyenne sont $\sigma_s = 57.47\%$ et $\lambda = 3$.

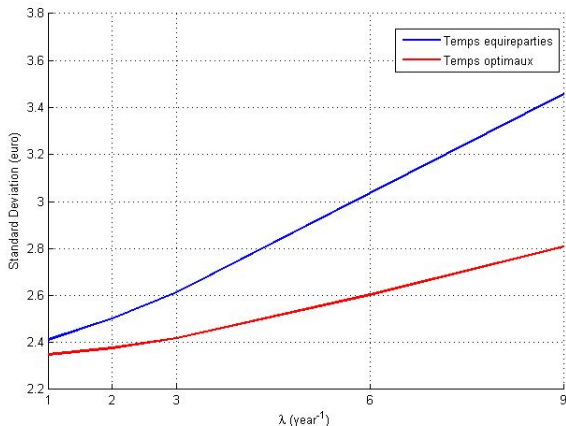






Bilan de ce test:

- 1 La méthode de BS est plus robuste que ce que l'on pouvait penser. Cependant dans le cas de sauts plus importants (α plus petit) on observe un apport significatif de la méthode variance optimale.
- 2 Ce sont plutôt les instants de rebalancement qui apporte le plus. Pour $N = 10$, le choix d'instant de rebalancement optimaux nous permet de réduire de 9% notre écart type de l'erreur de couverture.



Réduction de 9% quand $\lambda = 3$ ($\sigma = 57.47\%$) et de 17.9% quand $\lambda = 9$ ($\sigma = 88.23\%$) avec $Var(X_T) = \frac{\sigma^2}{2\lambda}(1 - e^{-2T})$ fixe.

Bibliography



Goutte, S. (2007) *Couverture en marché incomplet utilisant le modèle à deux facteurs non gaussiens.*, EDF Research R33 OSIRIS.



Goutte, S., Oudjane, N. and Russo, F. (2009). *Variance Optimal Hedging for continuous time processes with independent increments and applications*, Preprint HAL inria-00437984, <http://fr.arxiv.org/abs/0912.0372>.



Goutte, S., Oudjane, N. and Russo, F. (2010). *Variance Optimal Hedging for discrete time processes with independent increments. Application to Electricity Markets*, Preprint HAL inria-00473032, <http://hal.archives-ouvertes.fr/inria-00473032/fr/>.



Hubalek, F., Kallsen, J. and Krawczyk, L.(2006). *Variance-optimal hedging for processes with stationary independent increments*, The Annals of Applied Probability, Volume 16, Number 2, 853-885.



Monat, P. and Stricker, C. (1995). *Föllmer-Schweizer decomposition and mean-variance hedging for general claims*, The Annals of Probability, Vol. 23, No.2, 605-628.



Schweizer, M. (1994). *Approximating random variables by stochastic integrals*. The Annals of Probability Vol. 22, 1536-1575.