Processus de Langevin réfléchis au second ordre

Emmanuel Jacob, Université Pierre et Marie Curie

May 4, 2010

Plan

Réflexion au Second Ordre

- On considère une particule évoluant dans $\mathbb{R}_+$, soumise à une force extérieure f et réfléchie sur une barrière partiellement élastique en 0. Sa position $x(t)$ doit satisfaire l'équation de mouvement (RSO):

Réflexion au Second Ordre

- On considère une particule évoluant dans $\mathbb{R}_+$, soumise à une force extérieure f et réfléchie sur une barrière partiellement élastique en 0. Sa position $x(t)$ doit satisfaire l'équation de mouvement (RSO):

$$\begin{cases} x(t) &= \displaystyle\int_0^t \dot{x}(s)\mathrm{d}s \\ \dot{x}(t) &= \dot{x}(0) + \int_0^t f(s)\mathrm{d}s - (1+c)\sum_{0<s\leq t} \dot{x}(s-)\mathbf{1}_{x(s)=0}, \end{cases}$$

Le coefficient $c \geq 0$ est le coefficient d'élasticité.

Réflexion au Second Ordre

- Dans les équations (RSO), la difficulté principale provient des accumulations de rebonds:

Réflexion au Second Ordre

- Dans les équations (RSO), la difficulté principale provient des accumulations de rebonds:
  - Avant un temps fini.

Réflexion au Second Ordre

- Dans les équations (RSO), la difficulté principale provient des accumulations de rebonds:
  - Avant un temps fini.
  - Après le temps initial.

Réflexion au Second Ordre

- Dans les équations (RSO), la difficulté principale provient des accumulations de rebonds:
  - Avant un temps fini.
  - Après le temps initial.
- Nombreux travaux sur ce problème:

Réflexion au Second Ordre

- Dans les équations (RSO), la difficulté principale provient des accumulations de rebonds:
  - Avant un temps fini.
  - Après le temps initial.
- Nombreux travaux sur ce problème:
  Bressan 1960, Percivale 1985, Schatzman 1998, Ballard 2000:

Réflexion au Second Ordre

- Dans les équations (RSO), la difficulté principale provient des accumulations de rebonds:
  - Avant un temps fini.
  - Après le temps initial.
- Nombreux travaux sur ce problème:
  Bressan 1960, Percivale 1985, Schatzman 1998, Ballard 2000:
- Résultat principal: Une force f analytique implique l'unicité, mais une force f C^∞ non.

Particule soumise à un bruit blanc

- On considère (RSO) avec f un bruit blanc.

Particule soumise à un bruit blanc

- On considère (RSO) avec f un bruit blanc.
- En dehors de 0, la particule se déplace alors comme un processus de Langevin $(Y_t = \int_0^t W_s \mathrm{d}s)$, processus déjà largement étudié.

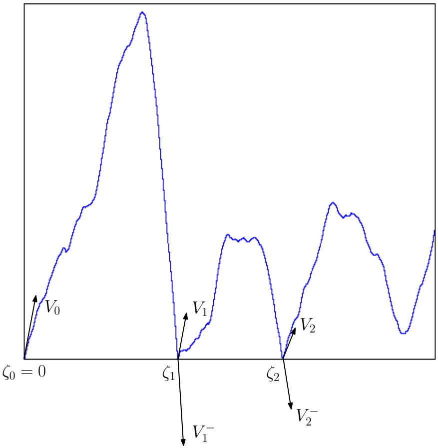
Particule soumise à un bruit blanc

- On considère (RSO) avec f un bruit blanc.
- En dehors de 0, la particule se déplace alors comme un processus de Langevin ($Y_t = \int_0^t W_s \mathrm{d}s$), processus déjà largement étudié. Remarquons que le processus Y n'est pas Markovien, et qu'on étudie souvent le processus $(Y, \dot{Y})$, qui, lui, l'est. Notons enfin une invariance par rescaling.

Particule soumise à un bruit blanc

- On considère (RSO) avec f un bruit blanc.
- En dehors de 0, la particule se déplace alors comme un processus de Langevin ($Y_t = \int_0^t W_s \mathrm{d}s$), processus déjà largement étudié. Remarquons que le processus Y n'est pas Markovien, et qu'on étudie souvent le processus $(Y, \dot{Y})$, qui, lui, l'est. Notons enfin une invariance par rescaling.
- On note $(X, \dot{X})$ le processus canonique. Pour $v > 0$, on note $\mathbb{P}_v^c$ la loi de $\dot{X}$ sous laquelle $(X, \dot{X})$ est solution de (RSO) avec $\dot{X}_0 = v$, et tuée au temps ζ_∞.

Particule soumise à un bruit blanc



Particule soumise à un bruit blanc

- Première question: Le temps ζ_∞ est-il fini?

Particule soumise à un bruit blanc

- Première question: Le temps ζ_∞ est-il fini?
- Observation: La suite $\left(\frac{\zeta_{n+1}-\zeta_n}{V_n^2}, \frac{V_{n+1}}{V_n}\right)_{n\geq 0}$ est i.i.d (Rescaling + Markov). En particulier la suite $\ln(V_n)$ est une marche aléatoire.

Particule soumise à un bruit blanc

- Première question: Le temps ζ_∞ est-il fini?
- Observation: La suite $\left(\frac{\zeta_{n+1}-\zeta_n}{V_n^2}, \frac{V_{n+1}}{V_n}\right)_{n\geq 0}$ est i.i.d (Rescaling + Markov). En particulier la suite $\ln(V_n)$ est une marche aléatoire.
- Les lois sont connues. En particulier la marche aléatoire a pour drift

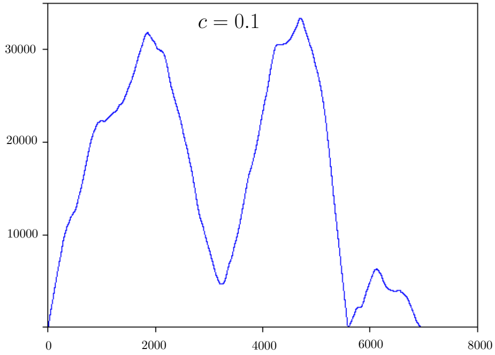
$$\mu := \mathbb{E}_1^c(\ln V_1) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} + \ln c.$$

Particule soumise à un bruit blanc

- Première question: Le temps ζ_∞ est-il fini?
- Observation: La suite $\left(\frac{\zeta_{n+1}-\zeta_n}{V_n^2}, \frac{V_{n+1}}{V_n}\right)_{n\geq 0}$ est i.i.d (Rescaling + Markov). En particulier la suite $\ln(V_n)$ est une marche aléatoire.
- Les lois sont connues. En particulier la marche aléatoire a pour drift
$$\mu := \mathbb{E}_1^c(\ln V_1) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} + \ln c.$$
- Le drift μ s'annule pour $c = c_{crit} := \exp(-\pi/\sqrt{3})$. Trois régimes distincts.

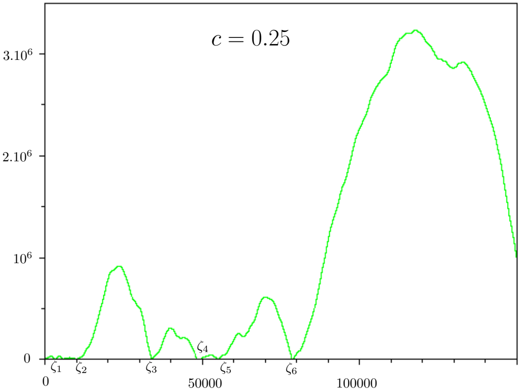
Les trois régimes

- Pour $c < c_{crit} = \exp(-\pi/\sqrt{3})$, on est en régime sous-critique: $\mu < 0$, $V_n \to 0$ et $\zeta_n \to \zeta_\infty < \infty$.



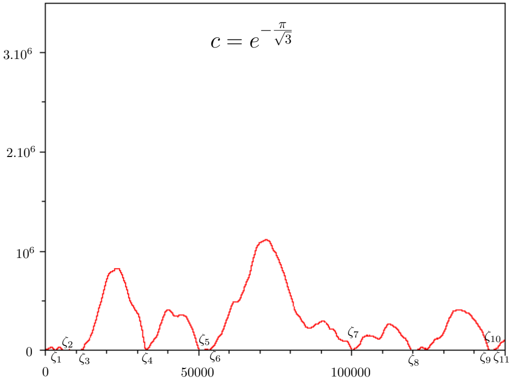
Les trois régimes

- Pour $c > c_{crit}$, on est en régime sur-critique: $\mu > 0$, $V_n \to +\infty$ et $\zeta_n \to \infty$.



Les trois régimes

- Pour $c = c_{crit}$, on est en régime critique: $\mu = 0$, (V_n) est récurrente et $\zeta_n \rightarrow \infty$.



Existence et unicité des équations (RSO)

Résultat principal (Bertoin 2008, J. 2010)

Pour tout coefficient d'élasticité $c \geq 0$, pour toute condition initiale $\dot{X}_0 = u \geq 0$, il y a existence et unicité d'une solution aux sens faibles à l'équation différentielle stochastique (RSO).

Existence et unicité des équations (RSO)

Résultat principal (Bertoin 2008, J. 2010)

Pour tout coefficient d'élasticité $c \geq 0$, pour toute condition initiale $\dot{X}_0 = u \geq 0$, il y a existence et unicité d'une solution aux sens faibles à l'équation différentielle stochastique (RSO).

- **Remarque:** Ce résultat est en contraste fort avec le cas déterministe.

Existence et unicité des équations (RSO)

Résultat principal (Bertoin 2008, J. 2010)

Pour tout coefficient d'élasticité $c \geq 0$, pour toute condition initiale $\dot{X}_0 = u \geq 0$, il y a existence et unicité d'une solution aux sens faibles à l'équation différentielle stochastique (RSO).

- **Remarque:** Ce résultat est en contraste fort avec le cas déterministe.
- Le processus de Langevin réfléchi au second ordre est donc toujours bien défini. En plus, dans chaque cas, on en obtiendra des descriptions (plus ou moins directes).

Partir avec vitesse nulle

- Pour $c \geq c_{crit}$ et $\mathbf{v} > \mathbf{0}$, l'équation différentielle stochastique (RSO) avec condition initiale $\dot{X}_0 = v$ admet une unique solution, au sens fort. Si $(X, \dot{X})$ est solution, alors la loi de $\dot{X}$ est $\mathbb{P}^c_v$.

Partir avec vitesse nulle

- Pour $c \geq c_{crit}$ et $\mathbf{v} > \mathbf{0}$, l'équation différentielle stochastique (RSO) avec condition initiale $\dot{X}_0 = v$ admet une unique solution, au sens fort. Si $(X, \dot{X})$ est solution, alors la loi de $\dot{X}$ est $\mathbb{P}^c_v$.
- Le seul problème est donc de partir avec vitesse nulle.

Partir avec vitesse nulle

- Pour $c \geq c_{crit}$ et $\mathbf{v} > \mathbf{0}$, l'équation différentielle stochastique (RSO) avec condition initiale $\dot{X}_0 = v$ admet une unique solution, au sens fort. Si $(X, \dot{X})$ est solution, alors la loi de $\dot{X}$ est $\mathbb{P}_v^c$.
- Le seul problème est donc de partir avec vitesse nulle. Cela sera une conséquence du théorème à suivre, qui nous décrit la loi d'une solution $\mathbb{P}_{0+}^c$.

Partir avec vitesse nulle

Théorème

La famille de mesures de probabilités $(\mathbb{P}^c_v)_{v>0}$ converge faiblement vers une mesure de probabilité $\mathbb{P}^c_{0^+}$ sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

Partir avec vitesse nulle

Théorème

La famille de mesures de probabilités $(\mathbb{P}^c_v)_{v>0}$ converge faiblement vers une mesure de probabilité $\mathbb{P}^c_{0^+}$ sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.
De plus, en écrivant τ_u pour l'instant du premier rebond avec vitesse supérieure à u, c'est à dire $\tau_u := \inf\{t > 0, X_t = 0, \dot{X}_t > u\}$, alors:

$$(*) \begin{cases} \lim\limits_{u \to 0^+} \tau_u = 0 \qquad \mathbb{P}^c_{0^+}\text{-p.s.} \\ \text{Conditionellement à } \dot{X}_{\tau_u} = v,\ (\dot{X}_{\tau_u + t})_{t \geq 0} \text{ a pour loi } \mathbb{P}^c_v. \end{cases}$$

Notations

Le point clef est l'étude de la suite des logarithmes des vitesses aux instants de rebond, $S_n = \ln(V_n)$, sachant que conditionnellement à cette suite, on peut reconstruire le processus.

Notations

Le point clef est l'étude de la suite des logarithmes des vitesses aux instants de rebond, $S_n = \ln(V_n)$, sachant que conditionnellement à cette suite, on peut reconstruire le processus. Lorsque v tend vers 0, la suite $(S_{n+T_x})_{n\in Z}$ va tendre vers une "marche aléatoire partant de $-\infty$",

Notations

Le point clef est l'étude de la suite des logarithmes des vitesses aux instants de rebond, $S_n = \ln(V_n)$, sachant que conditionnellement à cette suite, on peut reconstruire le processus. Lorsque v tend vers 0, la suite $(S_{n+T_x})_{n \in Z}$ va tendre vers une "marche aléatoire partant de $-\infty$", qui part de $-\infty$ de manière linéaire dans le cas surcritique, de manière "$\sqrt{n}$" dans le cas critique.

Barrière totalement inélastique ($c = 0$)

- Pour $c = 0$, on a $\zeta_\infty = \zeta_1 < \infty$. L'étude est donc radicalement différente. On va décrire le processus réfléchi via sa mesure d'excursion, au sens d'Itô, notée $\mathbf{n}$, mesure $\sigma-$finie.

Barrière totalement inélastique ($c = 0$)

- Pour $c = 0$, on a $\zeta_\infty = \zeta_1 < \infty$. L'étude est donc radicalement différente. On va décrire le processus réfléchi via sa mesure d'excursion, au sens d'Itô, notée $\mathbf{n}$, mesure $\sigma-$finie.

Théorème (Bertoin 2007)

La mesure $\mathbf{n}$ est déterminée par:

$$\mathbf{n}(F(e)) = \lim_{u \to 0+} u^{-\frac{1}{2}} \mathbb{P}_u^0(F(e))$$

Barrière totalement inélastique ($c = 0$)

En regardant les excursions retournées à leur temps de retour en 0, on obtient aussi une formule “directe”:

Barrière totalement inélastique ($c = 0$)

En regardant les excursions retournées à leur temps de retour en 0, on obtient aussi une formule "directe":

$$\mathbf{n}(F(\overline{e})) = \int v^{-\frac{3}{2}} \mathbb{P}_{v;0}(F(e))dv,$$

où $\overline{e}$ désigne l'excursion retournée, et $\mathbb{P}_{v;0}$ désigne la loi du processus de Langevin tué en 0 "conditionné à revenir en 0 avec vitesse nulle" (conditionnement au sens de Doob).

Régime sous-critique (en cours)

En régime sous-critique $0 < c < c_{crit}$:

- Comme dans le cas $c = 0$, il va falloir décrire la mesure d'excursion du processus.

Régime sous-critique (en cours)

En régime sous-critique $0 < c < c_{crit}$:

- Comme dans le cas $c = 0$, il va falloir décrire la mesure d'excursion du processus.
- Il existe un k dans $(0, \frac{1}{2})$ tel que $u^k \mathbb{P}_u^c$ converge vers une mesure $\sigma-$finie.

Régime sous-critique (en cours)

En régime sous-critique $0 < c < c_{crit}$:

- Comme dans le cas $c = 0$, il va falloir décrire la mesure d'excursion du processus.
- Il existe un k dans $(0, \frac{1}{2})$ tel que $u^k \mathbb{P}_u^c$ converge vers une mesure $\sigma-$finie. La valeur de k est connue explicitement, et donnée implicitement par

$$c = \left[2 \cos \left(\frac{k+1}{3} \pi \right) \right]^{\frac{1}{k}} .$$

Théorème

La mesure $\mathbf{n}$ est déterminée par:

$$\mathbf{n}(F(e)) = \lim_{u \to 0+} u^{-k} \mathbb{P}_u^0 (F(e)).$$

Remerciements

Merci pour votre attention.