

# Théorie des matrices aléatoires et applications aux communications numériques

Malika Kharouf

Télécom Paristech et UHAC  
9ème Colloque des Jeunes Probabilistes et Statisticiens

06 Mai 2010

# Bref aperçu sur la théorie des matrices aléatoires

- Propriétés macroscopiques du spectre des matrices aléatoires
  - Comportement global du spectre,
  - Comportement asymptotique des valeurs propres extrêmes,
  - Comportement asymptotique de la loi jointe des valeurs propres...

# Bref aperçu sur la théorie des matrices aléatoires

- Propriétés macroscopiques du spectre des matrices aléatoires
  - Comportement global du spectre,
  - Comportement asymptotique des valeurs propres extrêmes,
  - Comportement asymptotique de la loi jointe des valeurs propres...
- Propriété d'universalité: le comportement asymptotique du spectre est indépendant de la loi initiale des entrées de la matrice en question.

# Bref aperçu sur la théorie des matrices aléatoires

- Propriétés macroscopiques du spectre des matrices aléatoires
  - Comportement global du spectre,
  - Comportement asymptotique des valeurs propres extrêmes,
  - Comportement asymptotique de la loi jointe des valeurs propres...
- Propriété d'universalité: le comportement asymptotique du spectre est indépendant de la loi initiale des entrées de la matrice en question.

Approches:

- Approche des moments
- Approche de la transformée de Stieltjes
- ...

# Plan de la présentation

- Contexte applicatif
- Résultats du premier ordre
- Résultats de fluctuations
- Illustrations numériques

# Systèmes MIMO (Multiple Input Multiple Output)

- Technique de communication multi-antennes: à entrées multiples et à sorties multiples.

# Systèmes MIMO (Multiple Input Multiple Output)

- Technique de communication multi-antennes: à entrées multiples et à sorties multiples.
- Gain matriciel: transmission de bonne qualité.

# Représentation matricielle d'un système MIMO

Soit, à un instant donné  $n$ , un signal reçu  $\mathbf{r}_n$  et le signal émis  $\mathbf{t}_n$ .  
Le système MIMO à  $N$  émetteurs et  $n$  récepteurs est donnée par le système linéaire suivant:

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{\Sigma}_n \mathbf{t}_n + \mathbf{b}_n,$$

avec

- $\mathbf{\Sigma}_n$  est la  $N \times n$  matrice modélisant le canal de transmission,
- $\mathbf{b}_n$  un bruit blanc additif perturbant le signal transmis.



# Représentation matricielle d'un système MIMO

Soit, à un instant donné  $n$ , un signal reçu  $\mathbf{r}_n$  et le signal émis  $\mathbf{t}_n$ .  
Le système MIMO à  $N$  émetteurs et  $n$  récepteurs est donnée par le système linéaire suivant:

$$\mathbf{r}_n = \boldsymbol{\Sigma}_n \mathbf{t}_n + \mathbf{b}_n,$$

avec

- $\boldsymbol{\Sigma}_n$  est la  $N \times n$  matrice modélisant le canal de transmission,
- $\mathbf{b}_n$  un bruit blanc additif perturbant le signal transmis.

$\boldsymbol{\Sigma}_n$  est supposée aléatoire.

# Information Mutuelle

Indicateur de performance des systèmes MIMO: Information mutuelle entre le vecteur reçu et le vecteur émis donnée par:

$$\mathcal{I}_n(\rho) = \frac{1}{N} \log \det (\mathbf{\Sigma}_n \mathbf{\Sigma}_n^* + \rho \mathbf{I}_N),$$

$\rho$  un paramètre positif.

**But:**

Etudier le comportement asymptotique de la fonctionnelle spectrale  $\mathcal{I}_n(\rho)$  ainsi que ses fluctuations.

## Lien avec les matrices aléatoires

L'information mutuelle peut s'écrire:

$$\mathcal{I}_n(\rho) = \int_0^\infty \log(\rho + \lambda) d\mu_{\Sigma_n \Sigma_n^*}(\lambda).$$

$\mu_{\Sigma_n \Sigma_n^*}$  étant la mesure spectrale des valeurs propres de la matrice de Gram  $\Sigma_n \Sigma_n^*$ .

## Lien avec les matrices aléatoires

L'information mutuelle peut s'écrire:

$$\mathcal{I}_n(\rho) = \int_0^\infty \log(\rho + \lambda) d\mu_{\Sigma_n \Sigma_n^*}(\lambda).$$

$\mu_{\Sigma_n \Sigma_n^*}$  étant la mesure spectrale des valeurs propres de la matrice de Gram  $\Sigma_n \Sigma_n^*$ .

Cela revient donc à étudier le comportement asymptotique de la suite des mesures spectrales  $(\mu_{\Sigma_n \Sigma_n^*})_n$ .  
ou encore, le comportement asymptotique de la suite des transformées de Stieljes associées  $(f_n)_n$ .

# Transformée de Stieltjes vs Résolvante

Définition: La matrice résolvante

Soit  $A$  une matrice hermitienne de taille  $N \times N$ . La matrice résolvante  $\mathbf{Q}$  associée à la matrice  $A$  est la fonction matricielle complexe définie par:

$$\mathbf{Q}(z) = (\mathbf{A} - z\mathbf{I}_N)^{-1}, \Im(z) \neq 0.$$

**Lien avec la transformée de Stieltjes de la mesure spectrale de  $A$ :**

Nous avons la relation suivante:

$$f(z) = \frac{1}{N} \text{Tr} \mathbf{Q}(z).$$

# Modèle Matriciel

Considérons,

$$\Sigma_n = \mathbf{Y}_n + \mathbf{A}_n$$

avec,  $\mathbf{Y}_n$  ( $N \times n$ ) à entrées complexes, i.i.d. centrées et circulaires.  
 $\mathbf{A}_n$  ( $N \times n$ ) déterministe.

On travaille sous le régime asymptotique:  $n \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{N}{n} \rightarrow c > 0$

## Résultats du premier ordre

### Theorem

[Girko, Hachem et al.] Soit  $\rho$  un réel positif. Le système déterministe suivant:

$$\begin{cases} \delta_n(\rho) = \frac{1}{n} \text{Tr} \mathbf{T}_n(\rho) \\ \tilde{\delta}_n(\rho) = \frac{1}{n} \text{Tr} \tilde{\mathbf{T}}_n(\rho), \end{cases}$$

les matrices  $\mathbf{T}_n$  et  $\tilde{\mathbf{T}}_n$  sont données par:

$$\begin{cases} \mathbf{T}_n = \left( \rho \left( 1 + \tilde{\delta}_n(\rho) \right) \mathbf{I}_N + \frac{1}{1 + \tilde{\delta}_n(\rho)} \mathbf{A}_n \mathbf{A}_n^* \right)^{-1} \\ \tilde{\mathbf{T}}_n = \left( \rho \left( 1 + \delta_n(\rho) \right) \mathbf{I}_n + \frac{1}{1 + \delta_n(\rho)} \mathbf{A}_n^* \mathbf{A}_n \right)^{-1}. \end{cases}$$

admet une seule solution  $(\delta_n, \tilde{\delta}_n)$  sur  $(0, \infty)^2$ .

De plus, nous avons,

$$\frac{1}{n} \text{Tr} (\boldsymbol{\Sigma}_n \boldsymbol{\Sigma}_n^* + \rho \mathbf{I}_N)^{-1} - \delta_n(\rho) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} 0$$

# Résultats du premier ordre

## Theorem

*Nous avons la convergence suivante:*

$$\mathcal{I}_n(\rho) - \mathbf{V}_n(\rho) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \mathbf{0},$$

avec,

$$\mathbf{V}_n(\rho) = \frac{1}{N} \log \det \left( \rho(1 + \tilde{\delta}_n) \mathbf{I}_N + \frac{1}{1 + \delta_n} \mathbf{A}_n \mathbf{A}_n^* \right) + \frac{n}{N} \log(1 + \delta_n) - \frac{n\rho}{N} \delta_n \tilde{\delta}_n$$



## Théorème Central Limit

Posons  $\gamma = \frac{1}{n} \text{Tr} \mathbf{T}^2$ ,  $\tilde{\gamma} = \frac{1}{n} \text{Tr} \tilde{\mathbf{T}}^2$ ,  $\mathbf{S} = \text{diag} \mathbf{T}$  et  $\tilde{\mathbf{S}} = \text{diag} \tilde{\mathbf{T}}$ . Soit  $\kappa = \mathbb{E}|Y_{11}|^4 - 2$ . Soit,

$$\Delta_n = \left( 1 - \frac{1}{n(1+\delta)} \text{Tr}(\mathbf{A}_n \mathbf{A}_n^* \mathbf{T}_n^2) \right)^2 - \rho^2 \gamma \tilde{\gamma}.$$

Alors, nous avons,

1. La suite

$$\Theta_n^2 = -\log \Delta_n + \kappa \rho^2 \frac{1}{n} \text{Tr} \mathbf{S}^2 \frac{1}{n} \text{Tr} \tilde{\mathbf{S}}^2,$$

satisfait:  $0 < \liminf_n \Theta_n^2 \leq \limsup_n \Theta_n^2 < \infty$ .

2. La statistique information mutuelle  $\mathcal{I}_n$  vérifie:

$$\frac{N}{\Theta_n} (\mathcal{I}_n(\rho) - \mathbb{E} \mathcal{I}_n(\rho)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1).$$

## Éléments de la preuve: Approche REFORM

- Somme d'une suite d'incrément de martingale par rapport à une filtration donnée  $(\mathcal{F}_n)$ .

$$\mathcal{I}_n(\rho) - \mathbb{E}\mathcal{I}_n(\rho) \triangleq \sum_{j=1}^n \Lambda_j^{(n)},$$

avec  $(\Lambda_j^{(n)})_n$  suite d'incrément de martingale par rapport à une filtration  $(\mathcal{F}_j^{(n)})_n$ .

## Eléments de la preuve: Approche REFORM

- Somme d'une suite d'incrément de martingale par rapport à une filtration donnée  $(\mathcal{F}_n)$ .

$$\mathcal{I}_n(\rho) - \mathbb{E}\mathcal{I}_n(\rho) \triangleq \sum_{j=1}^n \Lambda_j^{(n)},$$

avec  $(\Lambda_j^{(n)})_n$  suite d'incrément de martingale par rapport à une filtration  $(\mathcal{F}_j^{(n)})_n$ .

- Validation de la condition de Lyapunov.

$$\exists \alpha > 0, \quad \frac{1}{\Theta_n^{2(1+\alpha)}} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}|\Lambda_j^{(n)}|^{2+\alpha} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

## Eléments de la preuve: Approche REFORM

- Somme d'une suite d'incrément de martingale par rapport à une filtration donnée  $(\mathcal{F}_n)$ .

$$\mathcal{I}_n(\rho) - \mathbb{E}\mathcal{I}_n(\rho) \triangleq \sum_{j=1}^n \Lambda_j^{(n)},$$

avec  $(\Lambda_j^{(n)})_n$  suite d'incrément de martingale par rapport à une filtration  $(\mathcal{F}_j^{(n)})_n$ .

- Validation de la condition de Lyapunov.

$$\exists \alpha > 0, \quad \frac{1}{\Theta_n^{2(1+\alpha)}} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}|\Lambda_j^{(n)}|^{2+\alpha} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

- Convergence de la suite des variances conditionnelles.

$$\frac{1}{\Theta_n^2} \sum_{j=1}^n \mathbb{E} \left( \Lambda_j^{(n)2} | \mathcal{F}_{j-1}^{(n)} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{P}} 0.$$

## Comportement asymptotique du biais

Il existe une suite de fonctions réelles  $\mathcal{B}_n(\rho)$  telle que:

$$N(\mathbb{E}\mathcal{I}_n(\rho) - \mathbf{V}_n(\rho)) - \mathcal{B}_n(\rho) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

avec  $\mathcal{B}_n(\rho) = \kappa\mathcal{C}_n(\rho)$ .

# Simulations

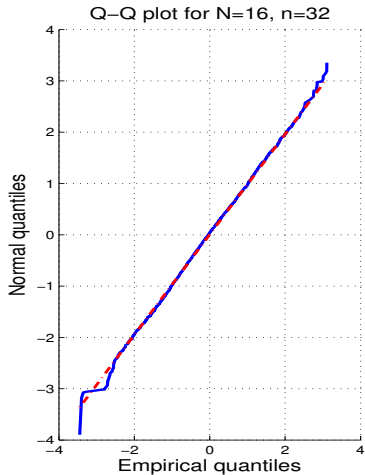
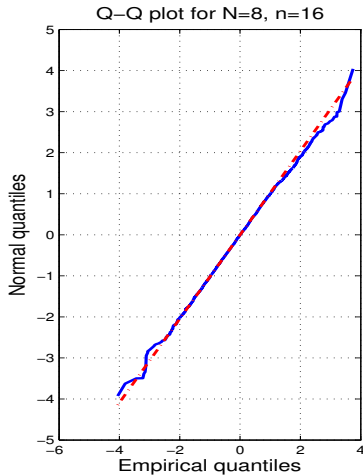


Figure: Q-Q plot pour  $\frac{N}{\Theta_n} (\mathcal{I}_n(\rho) - \mathbb{E}\mathcal{I}_n(\rho))$

# Simulations

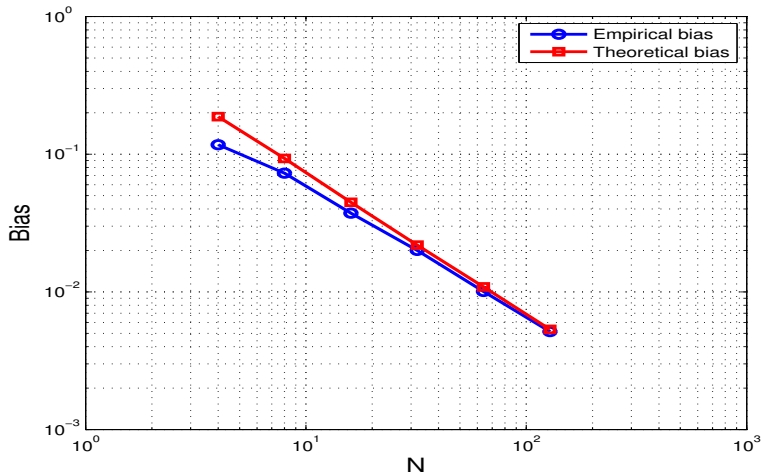


Figure: Biais théorique et expérimental (en fonction de N)

## Références

V. L. Girko, "Theory of Stochastic Canonical Equations (I and II)".  
Mathematics and its applications 535. Kluwer Academic,  
Dordrecht 2001.

W. Hachem, P. Loubaton et J. Najim, "Deterministic Equivalents  
for Certain Functionals of Large Random Matrices," Ann. Appl.  
Prob. Vol. 17, no. 3, pp. 875-930, 2007.

P. Billingsley, "Probability and Measure", John Wiley, 3rd edition,  
1995.