Modèle mathématique du microcrédit : prêt individuel et prêt groupé

Osman KHODR, Francine DIENER
Laboratoire de mathématiques J.A.D, Nice

Colloque "Jeunes Probabilistes et Statiticiens"
Mont-Dore, 3-7 Mai 2010

Descriptions de l'activité de microcrédit

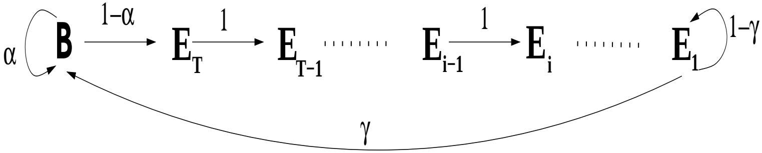
- L'activité de microcrédit.
- En 1976, la Création de la Grameen Bank en Bangladesh par Pr. Yunus.
- Les nations unies ont décrété 2005 comme l'année internationale du microcrédit.
- Octobre 2006, la mise en place de ce système a été récompensé par le prix Nobel de la paix attribué conjointement au Pr. Yunus et à la Grameen Bank.

Références

- Tedeschi, Gwendolyn Alexander. 2006. Here today, gone tomorrow : Can dynamic incentives make microfinance more flexible ? Journal of Development Economics, 80(1), pp. 84-105.
- Joseph E. Stiglitz. Peer monitoring and credit markets. World Bank Economic Review, 4(3) : 351-366, September 1990.
- Ghatak, Maitreesh (1999) Group lending, local information and peer selection. Journal of development economics, 60 (1). pp. 27-50. ISSN 0304-3878.

Modèle du prêt individuel

- Avoir un prêt pour investir dans un projet.
- Redevenir bénéficiaire en cas de réussite et de remboursement.
- Etre exclu d'emprunt pour au moins T périodes en cas d'échec.



Modèle

Matrice de transition :

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \gamma & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-\gamma \end{pmatrix}$$

Distribution stationnaire

Proposition

Quelque soit la distribution initiale, la dynamique Markovienne tend vers une distribution stationnaire :

$$\frac{\gamma}{\beta}(1, 1-\alpha, \cdots, 1-\alpha, \frac{1-\alpha}{\gamma}),$$

avec

$$\beta = \gamma + (1-\alpha)(1+\gamma(T-1))$$

Calcul du profit futur espéré

Le profit d'une étape est défini par :

$$f_1(X_{t-1}, X_t) = \begin{cases} w - (1+r) & \text{si } (X_{t-1}, X_t) = (B, B) \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$$

Le profit futur espéré à partir d'un instant s est :

$$V_s^1(X_s) = \mathbb{E}\left(\Sigma_{t=s+1}^{\infty} \delta^{t-s-1} f_1(X_{t-1}, X_t) \mid \mathcal{F}_s\right)$$

Calcul du profit futur espéré

Théorème

Pour $s > 0$, le profit futur total espéré V_s^1 à partir de l'instant s, pour $X_s = x$, est donné par :

$$V_s^1(x) = \begin{cases} V_0^1 & si\ x = B \\ \dfrac{\gamma\delta^i}{1-\delta(1-\gamma)} V_0^1 & si\ x = E_i,\ \ i = 1, \cdots, T \end{cases}$$

avec

$$V_0^1 = \frac{\alpha(w-(1+r))}{1-\alpha\delta-\frac{1-\alpha}{1-\delta(1-\gamma)}\gamma\delta^{T+1}}$$

Calcul d'un contrat optimal (r, T)

On cherche un contrat optimal (r, T) qui maximise le profit sous les contraintes :

- Contrainte de participation :

$$w \geq 1 + r$$

- Contrainte de recouvrement de prêt :

$$\alpha(1 + r) \geq 1 + z$$

- Contrainte d'empêchement de la stratégie de défaut :

$$w - (1 + r) + \delta V_s^1(B) \geq w + \delta V_s^1(E_T)$$

Contrat optimal

- Taux d'intérêt optimal

$$r^* = \frac{1+z}{\alpha} - 1$$

- La durée d'exclusion dans le cas $w \in (\frac{1+r^*}{\alpha\delta}, \frac{1+r^*}{\alpha\delta(1-\gamma)})$

$$T^* = \frac{1}{ln(\delta)} ln\left(\frac{[1-\delta(1-\gamma)][\alpha\delta w - (1+r^*)]}{\gamma[\alpha w - (1+r^*)]}\right) - 1$$

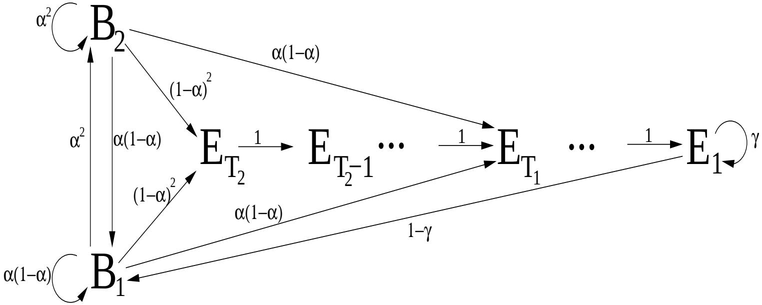
Prêt groupé : comment ça marche ?

Groupe de deux personnes (X, Y).

- Les deux personnes réussissent et seront bénéficiaires.
- Les deux personnes échouent et seront exclues au moins de T_2 périodes.
- Une gagne et l'autre perd, alors le gagnant reste bénéficiaire s'il rembourse la totalité de son prêt ainsi qu'une somme q représentant la responsabilité jointe, tandis que le perdant sera exclu pour au moins T_1 périodes.

Représentation en chaine de Markov

L'etat d'un participant



Distribution stationnaire

Proposition

La dynamique de Markov tend vers une distribution stationnaire :

$$\frac{\gamma}{\beta'}\left(\frac{1+\alpha}{1+2\alpha}, \frac{\alpha}{1+2\alpha}, (1-\alpha)^2, \cdots, (1-\alpha)^2, \frac{(1-\alpha)^2}{\gamma}\right),$$

avec

$$\beta' = \gamma + (1-\alpha)^2(1+\gamma(T_2-2))$$

Proposition

A l'equilibre, la proportion de bénéficiaires est plus importante dans le cas groupé que dans le cas individuel.

Profit total espéré d'un participant à un groupe

Théorème

Le profit futur total espéré V_s^2, à l'instant s, d'un participant à un prêt groupé est donné par :

$$V_s^2(x) = \begin{cases} V_0^2 & \textit{pour } x \in \{B_1, B_2\} \\ \dfrac{\delta^i \gamma}{1-\delta(1-\gamma)} V_0^2 & \textit{pour } x = E_i,\ i = 1, \cdots, T2 \end{cases}$$

où

$$V_0^2 = \frac{\alpha[w-(1+r)-(1-\alpha)q]}{1-\alpha\delta-\frac{1-\alpha}{1-\delta(1-\gamma)}\gamma[\alpha\delta^{T_1+1}+(1-\alpha)\delta^{T_2+1}]}$$

Calcul d'un contrat optimal (r, q, T_1, T_2)

On cherche un contrat optimal (r, q, T_1, T_2) qui maximise le profit sous les contraintes :

- Contrainte de participation :

$$w \geq 1 + r + (1 - \alpha)q$$

- Contrainte de recouvrement du coût de prêt :

$$\alpha(1 + r) + \alpha(1 - \alpha)q \geq 1 + z$$

- Contraintes d'empêchement des stratégies de défaut :

$$w - (1 + r) + \delta V_s^2(B) \geq w + \delta V_s^2(E_{T_1})$$

$$w - (1 + r + q) + \delta V_s^2(B) \geq w + \delta V_s^2(E_{T_2})$$

Application

$$\alpha(1+r)+\alpha(1-\alpha)q = 1+z, \text{ et } T_1(q) = T_2(1-\frac{q}{1+r})$$

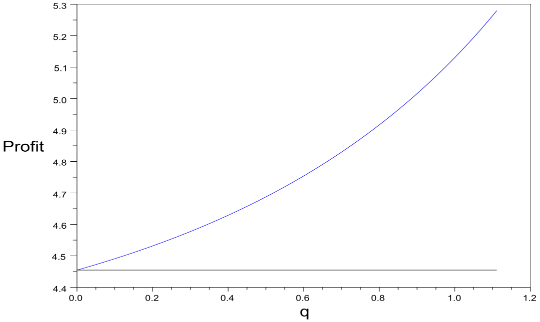


FIG.: Profit dans les deux cas pour $\alpha = 0.9$, $\gamma = 0.5$, $\delta = 0.8$, $z = 0.1$, $w = 2.5$, $T_2 = 5$

Application

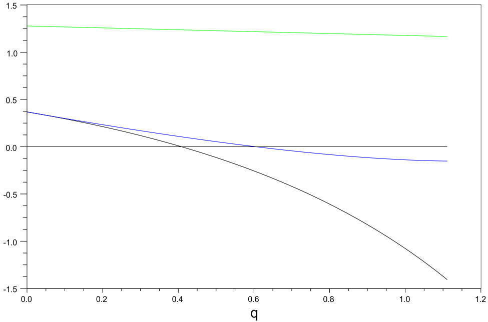


FIG.: Les contraintes comme fonctions de q

Conclusion

- Le cas individuel n'est autre que le cas groupé pour $q = 0$.
- A l'equilibre, la proportion de bénéficiaires dans le cas groupé est plus grande que dans le cas individuel.
- L'IMF peut pratiquer un taux d'intérêt plus bas dans le cas groupé que dans le cas individuel.
- Le profit espéré est plus important pour un individu participant au prêt groupé.