

# Ergodicité des mosaïques STIT.

Raphaël Lachièze-Rey

Laboratoire Paul Painlevé (Université Lille 1)

9eme colloque “jeunes Probabilistes et Statisticiens”

1 Mosaiques aléatoires

2 Fermés aléatoires

3 Mosaiques STIT

1 Mosaiques aléatoires

2 Fermés aléatoires

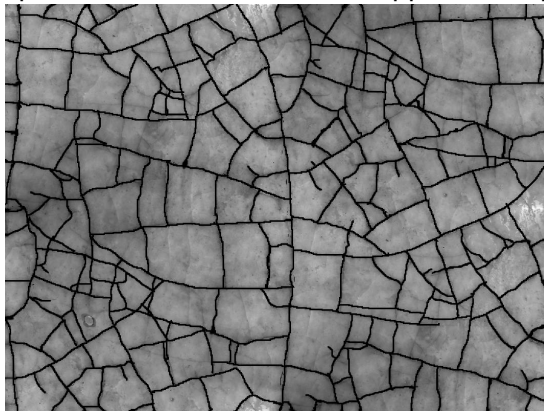
3 Mosaiques STIT

## Definition

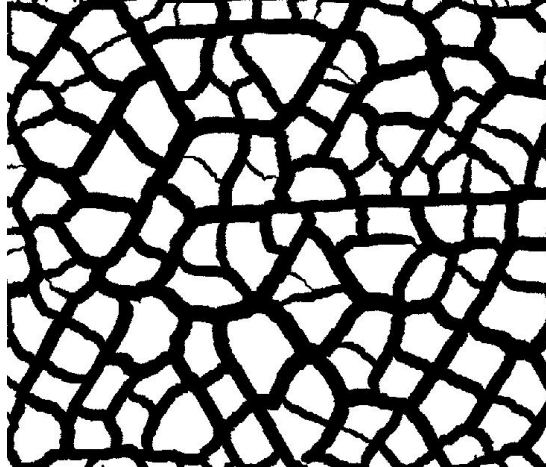
*Mosaïque : Ensemble  $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \dots\}$  de cellules convexes compactes, localement fini (pour tout compact  $K$ ,  $\{i; C_i \cap K \neq \emptyset\}$  est fini.)*

*Le fermé correspondant est  $M = \cup_i \partial C_i$ .*

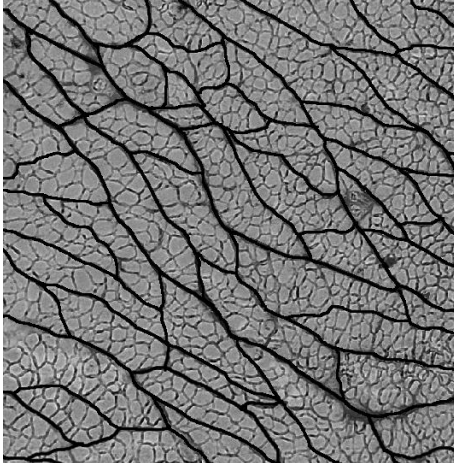
## Quelques exemples de structures réelles – Applications potentielles.



Craquelée sur une surface de céramique (Photo : G. Weil)



Simulation de craquement d'un sol séché (H.-J. Vogel)



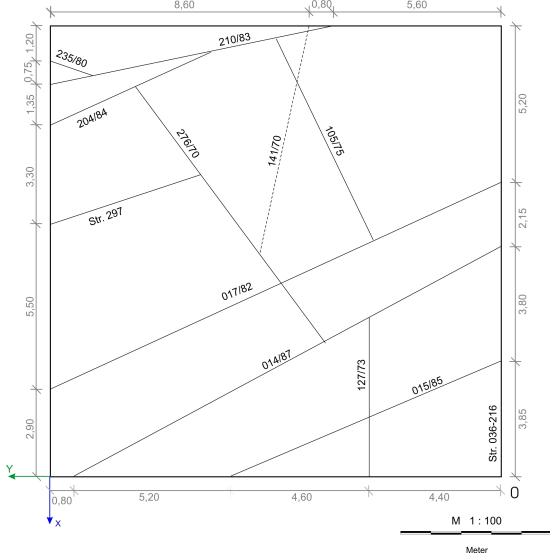
Tissu dans un muscle de rat (I. Erzen)



Perla 2.jpg

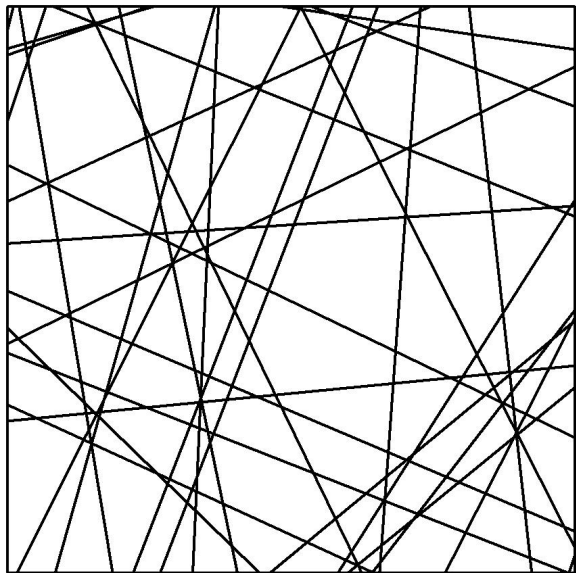
Joints dans le granit (D. Nikolayev, S. Siegesmund, S. Mosch, A. Hoffmann)





Gris Perla.jpg  
Schéma des joints dans le granit.

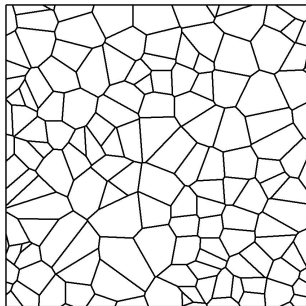
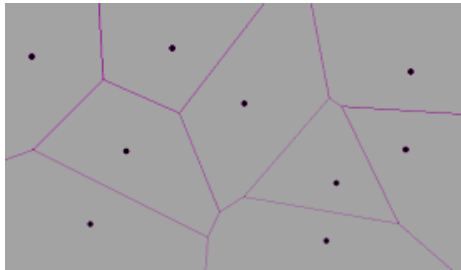
# Mosaïque poissonnienne



# Mosaïques de Voronoi, Delaunay

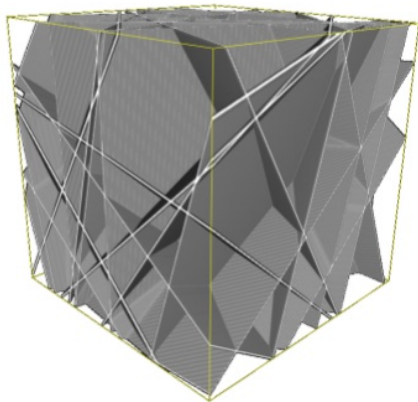
Etant donné un processus ponctuel de **points**  $\Pi$ , on associe à chaque point  $x$  de  $\Pi$  sa cellule de Voronoi  $V_x$  comme l'ensemble des points dont  $x$  est le plus proche élément de  $\Pi$ .

$$V_x = \{y \in \mathbb{R}^2; \|x - y\| = \inf_{x' \in \Pi} \|x' - y\|\}$$



# Mosaïques en 3D

Mosaïque d'hyperplans Poissonniens en dimension 3 :

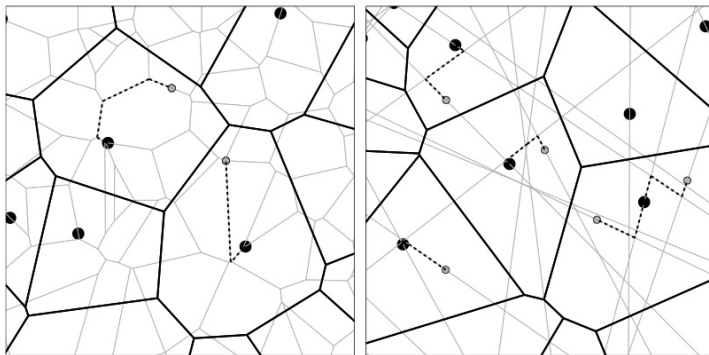


# Mosaïques mixtes

Mosaïque grise : Réseau de bas niveau.

Points noirs : Serveurs de haut niveau.

Mosaïque noire (Réseau de haut niveau) : Mosaïque de Voronoi correspondant aux points noirs.



gauche : Serveur de bas niveau= mosaïque de Voronoi.

droite : Seveurs de bas niveau=mosaïque poissonnienne de droites.

1 Mosaïques aléatoires

2 Fermés aléatoires

3 Mosaïques STIT

# Topologie de Fell

$\mathcal{X}$  : Espace topologique

$\mathcal{F}$  : Fermés

$\mathcal{K}$  : Compacts

Topologie de Fell  $\mathcal{T}$  sur  $\mathcal{F}$ , engendrée par les

$$\mathcal{F}^K = \{F \in \mathcal{F}; F \cap K = \emptyset, \}, \quad K \in \mathcal{K},$$
$$\mathcal{F}_O = \{F \in \mathcal{F}; F \cap O \neq \emptyset\}, \quad O \text{ ouvert.}$$

La tribu Borélienne correspondante est notée  $\mathcal{E}$  (Tribu d'Effros).

# Fonctionnelle de capacité

Un fermé quelconque  $X$  peut être récupéré si l'on connaît toutes les variables  $\mathbf{1}_{X \cap K = \emptyset}$ ,  $K \in \mathcal{K}$ .

Pour un fermé aléatoire  $X$  dans  $(\mathcal{F}, \mathcal{E})$ , on définit la *fonctionnelle de capacité*

$$T_X(K) = \mathbb{P}(X \cap K \neq \emptyset) = \mathbb{E}_X(\mathcal{F}_K), \quad K \in \mathcal{K}.$$



# Propriété d'alternation

Soit  $K_0, K_1$  des compacts. Alors

$$\mathbb{P}(X \text{ touche } K_0, \quad X \text{ ne touche pas } K_1) = T(K_0 \cup K_1) - T(K_1) \geq 0.$$

Pour tous compacts  $K_0, K'_0, K_1, \dots, K_n$ , on peut exprimer  $\mathbb{P}(X \text{ touche } K_0, \quad X \text{ ne touche pas } K_1, K_2, \dots, K_n)$  à partir de  $T$ .

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(X \text{ touche } K_0, \quad X \text{ ne touche pas } K_1, K_2, \dots, K_n) \\ & \geq \mathbb{P}(X \text{ touche } K_0 \cup K'_0, \quad X \text{ ne touche pas } K_1, K_2, \dots, K_n). \end{aligned}$$

On dit alors que  $T$  est **alternée**.

# Semi-continuité supérieure

Si  $K_n$  est une suite décroissante de compacts, et  $K = \bigcap_n K_n$ ,

$$\lim_n 1_{K_n \cap X \neq \emptyset} = 1_{K \cap X \neq \emptyset} \quad p.s.$$

En conséquence (Fatou)

$$\limsup_n T_X(K_n) \geq T_X(K).$$

$T$  est **Semi-continue supérieurement**.

# Théorème de Choquet

$T_X$  caractérise la loi de  $X$  dans  $(\mathcal{F}, \mathcal{T})$  :

## Théorème (Choquet)

Soit  $T : \mathcal{K} \mapsto [0, 1]$ . C'est la fonctionnelle de capacité d'un fermé aléatoire  $X$  ssi

- $T$  est semi-continue supérieurement.
- et  $T$  est alternée.

Conséquences :

- $X$  et  $X'$  ont la même loi ssi  $T_X = T_{X'}$ .
- $X_n$  converge en loi vers  $X$  ssi  $T_{X_n}(K) \rightarrow T_X(K)$  pour chaque  $K$  de  $\mathcal{K}$ .

# Fonctionnelle de capacité de la mosaïque Poissonienne

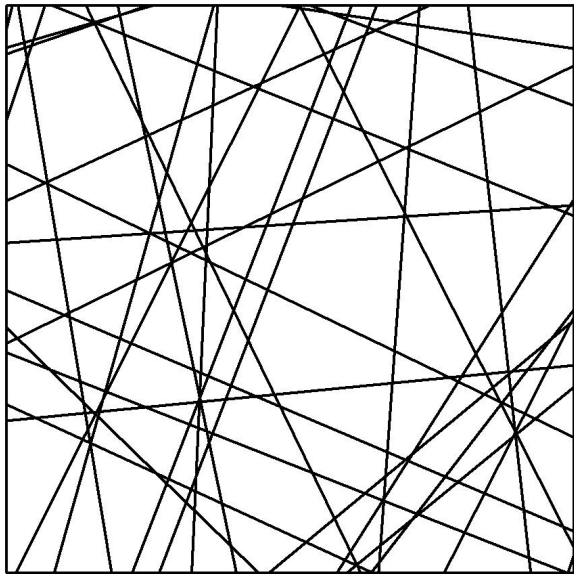
**Droites de  $\mathbb{R}^2$**  :  $\mathcal{D} = \mathbb{R}_+ \times \mathcal{S}^1$ , muni de la tribu Borélienne et d'une mesure  $\nu$  localement finie.

Soit  $\Pi$  un processus ponctuel Poissonien sur  $\mathcal{D}$  d'intensité  $\nu$ .

Alors  $M_\Pi = \cup_{D \in \Pi} D$  est une **mosaïque de droites Poissoniennes**.

Pour  $K$  compact de  $\mathbb{R}^d$  soit  $\mathcal{D}_K = \{D \in \mathcal{D}; D \cap K \neq \emptyset\}$ ,

$$T_{M_\Pi}(K) = \mathbb{P}(\text{card}(\Pi \cap \mathcal{D}_K) = 0) = 1 - \nu(\mathcal{D}_K)e^{-\nu(\mathcal{D}_K)}.$$

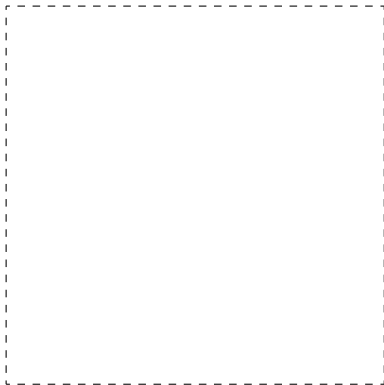


1 Mosaïques aléatoires

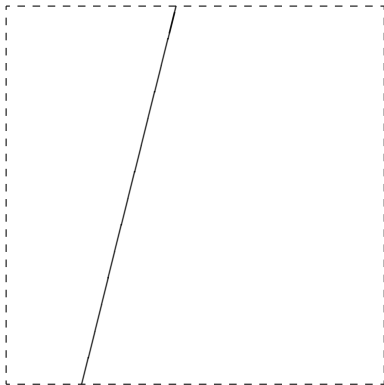
2 Fermés aléatoires

3 Mosaïques STIT

# modélisation de craquèlement sur une fenêtre bornée

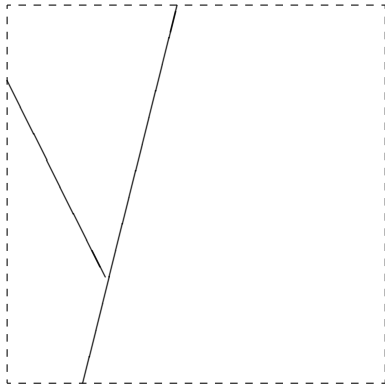


# modélisation de craquèlement sur une fenêtre bornée

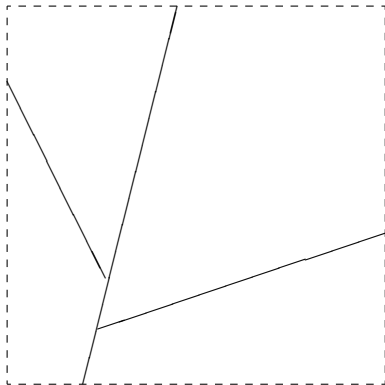




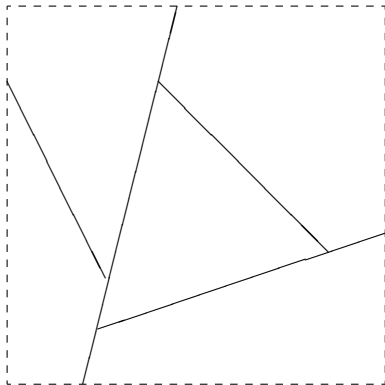
# modélisation de craquèlement sur une fenêtre bornée



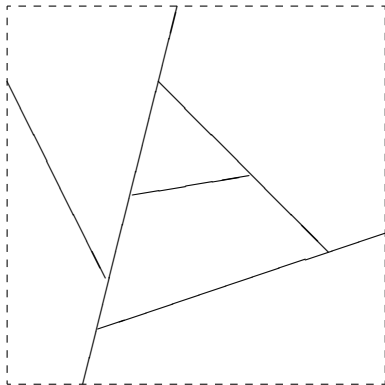
# modélisation de craquèlement sur une fenêtre bornée



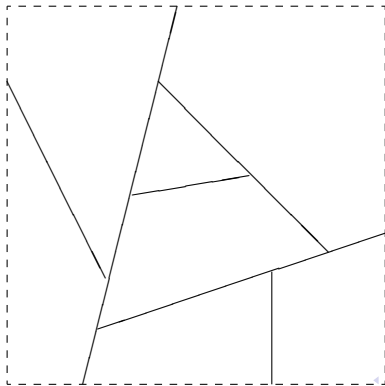
# modélisation de craquèlement sur une fenêtre bornée



# modélisation de craquèlement sur une fenêtre bornée



# modélisation de craquèlement sur une fenêtre bornée



## Nagel, Weiss, Mecke (Jena)

- Modèle de division cellulaire (processus de branchement.)
- Les temps de vies des cellules sont indépendants et exponentiels, leur taux de mort dépend de la géométrie de la cellule.
- Si la mosaïque doit être isotropique, le taux est proportionnel au périmètre de la cellule (Plus une cellule est petite, moins elle se craquelle vite.)

## Dans une fenêtre compacte

Soit  $\nu$  une mesure sur l'ensemble des hyperplans, et soit  $a \geq 0$ . On suppose que pour tout compact  $K$ ,

$$\nu(\mathcal{H}_K) < \infty,$$

où  $\mathcal{H}_K$  est l'ensemble des hyperplans qui intersectent  $K$ .

Algorithme de construction :

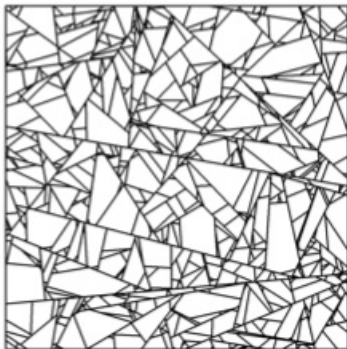
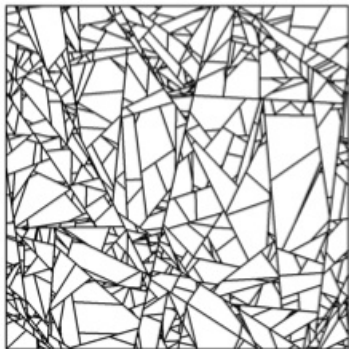
- On commence au temps  $t = 0$ .
- On fait tourner une exponentielle  $\tau$  de paramètre  $\nu(\mathcal{H}_W)$
- Lorsque  $t = \tau$ , on coupe  $W$  par un hyperplan aléatoire  $H$  en deux cellules  $W_0$  et  $W_1$ . ( $H$  est conditionné par  $H \cap W \neq \emptyset$ .)
- On recommence la procédure itérativement pour chaque sous-cellule.
- On s'arrête lorsque le temps  $t = a$  est atteint.

Mosaïque obtenue :  $S_{W,a,\nu}$ .

En général, on prendra  $\nu$  stationnaire.

# Exemples

Simulations de mosaïques STIT isotropes. ( $\nu$  est stationnaire et isotrope).  
En ce cas, on note la mosaïque aléatoire  $S_{W,a}$ .





# Mosaïque sur $\mathbb{R}^d$ .

Nagel and Weiss 2005 :

Si  $W \subseteq W'$ , alors

$$S_{W,a,\nu} \stackrel{(d)}{=} S_{W',a,\nu} \cap W.$$

(i.e.  $T_{S_{W,a,\nu}}(K) = T_{S_{W',a,\nu}}(K)$ ,  $K \in \mathcal{K}, K \subseteq W$ .)

## Théorème (Kolmogorov)

*Il existe une mosaïque aléatoire  $S_{a,W}$  sur  $\mathbb{R}^d$  telle que, pour toute fenêtre  $W$ ,  $S_{a,\nu} \cap W$  a même loi que  $S_{W,a,\nu}$ .*

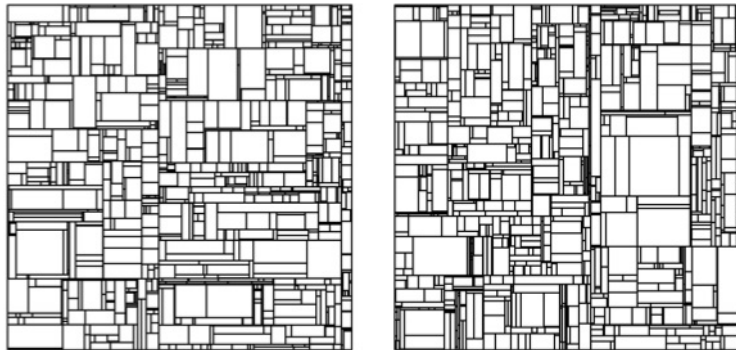
*$S_a$  est dite mosaïque STIT isotrope de paramètre  $a$ .*

# Stationnarité

On dit que  $x$  est stationnaire lorsque pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}^d$ ,

$$M + x \stackrel{(d)}{=} M.$$

Exemples où  $\nu$  est stationnaire (mais pas isotrope).



# Nesting

Soit deux mosaïques aléatoires  $M$  et  $M'$  sur  $\mathbb{R}^d$ . On définit l'itération, ou *nesting* de  $M$  dans  $M'$  de la manière suivante :

Soit  $(M'_k)_k$  des copies indépendantes de  $M'$ , et  $(C_1, C_2, \dots)$  les cellules de  $M$ . Alors

$$\mathcal{I}(M, M') = \cup_{i,k} C_i \cap M'_k$$

On définit par récurrence

$$\mathcal{I}_2(M) = 2\mathcal{I}(M, M),$$

$$\frac{1}{n+1}\mathcal{I}_{n+1}(M) = \mathcal{I}\left(\frac{1}{n}\mathcal{I}_n(M), M\right).$$

# STable to Iteration

Toute mosaïque STIT  $S$  est stable par itération :

$$\mathcal{I}_n(S) \stackrel{(d)}{=} S, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nagel, Weiss 2005 : Si  $M$  est une mosaïque a/'eatoire **stationnaire** , alors  $\mathcal{I}_n(M)$  converge en loi vers une mosaïque STIT.

$$T_{\mathcal{I}_n(M)}(K) \rightarrow T_{S_{a,\nu}}(K), \quad K \in \mathcal{K}.$$

# Propriété de mélange

Une mosaïque vérifie la propriété de mélange fort si

$$\mathbb{P}(M \cap K = \emptyset, M \cap (K' + h) = \emptyset) \xrightarrow{\|h\| \rightarrow \infty} T_M(K) T_M(K' + h), \quad K, K' \in \mathcal{K}.$$

## Théorème



Soit  $S$  une mosaïque STIT. Alors pour tous compacts  $K$  et  $K'$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(K \cap S = \emptyset, (K' + h) \cap S = \emptyset) - \mathbb{P}(K \cap S = \emptyset)\mathbb{P}((K' + h) \cap S = \emptyset) \\ = O(1/\|h\|) \end{aligned}$$

Si de plus  $K$  et  $K'$  sont connexes,

$$\left| \frac{P_a(K \cap S = \emptyset, (K' + h) \cap S = \emptyset)}{\mathbb{P}(K \cap S = \emptyset)\mathbb{P}((K' + h) \cap S = \emptyset)} - 1 \right| = \frac{1}{\|h\|\zeta(h/\|h\|)}(1 + o(1)).$$

où  $\zeta$  est strictement positive et continue sur  $\mathbb{S}^{d-1}$ .

-  J. Mecke, W. Nagel, V. Weiss : *A global construction of homogeneous random planar tessellations that are stable under iteration*. *Stochastics* **80**, 51-67 (2008).
-  W. Nagel, V. Weiss : *Crack STIT tessellations- Characterization of stationary random tessellations stable with respect to iteration*. *Adv. Appl. Prob.* **37**, 859-883 (2005).