Mouvement brownien conditionné à rester dans un segment

Benjamin Laquerrière

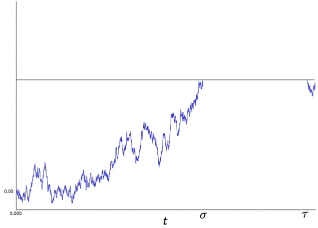
Université de La Rochelle

Colloque Jeunes Probabilistes et Statisticiens, 5 mai 2010

Motivation originelle

Soit $(X_t)_{t\in[0,T]}$, un processus de diffusion à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et soit $A \subset \mathbb{R}^n$.
On considère que le processus n'est observable qu'en dehors de A, *i.e.* on observe

$$Y_t = X_t 1_{X_t \notin A}.$$



Question : Que vaut le processus en un instant t_0 où le processus est dans A ?

Choi, Nam (2004) :

$$\hat{X}_{t_0} = \mathbb{E}[X_{t_0} | \sigma_{t_0}, \tau_{t_0}, X_{\sigma_{t_0}}, X_{\tau_{t_0}}]$$

avec $\sigma_{t_0} = \sup\{t < t_0, X_T \notin A\}$, et $\tau_{t_0} = \inf\{t > t_0, X_T \notin A\}$.

Estimation de trajectoire : On fait une estimation en chaque temps t où X_t n'est pas observable.

Question : Peut-on interpoler “de manière probabiliste” ?

Cadre

$(X_t)_t$ est un mouvement brownien standard $(W_t)_{t\in[0,T]}$ à valeurs réelles. On prend pour obstacle $A = [a, b]$. $(0 < a < b)$

Trois cas apparaissent :

- Le processsus n'est plus observé à partir du temps s,
- Le processus n'est pas observé entre les temps s et t et réapparaît en a,
- Le processus n'est pas observé entre les temps s et t et réapparaît en b.

Approche théorème limite

On souhaite conditionner un processus par un évènement Λ de probabilité nulle.
On se donne une suite $(\Lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'évènements de probabilité non nulle telle que

$$\Lambda_{n+1} \subset \Lambda_n, \qquad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Lambda_n = \Lambda.$$

On considère le processus conditionné par Λ_n et on fait tendre $n \longrightarrow +\infty$.

C'est l'approche utilisée par Durrett, Iglehart, Miller pour construire le méandre brownien et l'excursion brownienne.

Soit X une v.a. sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Soit Λ un évènement de probabilité non nulle . On définit un nouvelle espace de probabilité $(\Lambda, \mathcal{F}^{\Lambda}, \mathbb{P}_{\Lambda})$ où $\mathcal{F}$ est la trace de $\mathcal{F}$ sur Λ et $\mathbb{P}_{\Lambda}$ est la mesure de probabilité définie par

$$\mathbb{P}_{\Lambda}(A) = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(\Lambda)} = \mathbb{P}(A|\Lambda), \forall A \in \mathcal{F}^{\Lambda}.$$

On définit sur cet espace la variable X^{Λ} comme la restriction de X à Λ. X^{Λ} peut-être vu comme la variable X conditionnée par l'évènement Λ.

Mouvement brownien libre dans un segment

On définit les évènements

$$\Lambda_t^\varepsilon = \{W_s \in [-\varepsilon, \ell]; \forall s \in [0, t]\},$$

et on note $\Lambda^\varepsilon := \Lambda_1^\varepsilon$.

Théorème

Lorsque ε tend vers 0, $(W_t^{\Lambda^\varepsilon})_{t\in[0,1]}$ converge en loi vers un processus markovien inhomogène $(W_t^\ell)_{t\in[0,1]}$.

Mouvement Brownien dans un segment avec condition finale

On considère les évènements

$$\Lambda^{\downarrow} := \Lambda^{\varepsilon} \cap \{W_1 \in [-\varepsilon; \varepsilon]\}, \qquad \Lambda^{\uparrow} := \Lambda^{\varepsilon} \cap \{W_1 \in [\ell - \varepsilon; \ell]\}.$$

Théorème

Pour ℓ suffisamment grand, lorsque ε tend vers 0, le processus $(W^{\Lambda^{\downarrow}})_{t\in[0,1]}$ converge en loi vers un processus markovien $(W^{\ell,\downarrow})_{t\in[0,1]}$ qui fini presque surement en 0.

Pour ℓ suffisamment grand, lorsque ε tend vers 0, le processus $(W^{\Lambda^{\uparrow}})_{t\in[0,1]}$ converge en loi vers un processus markovien $(W^{\ell,\uparrow})_{t\in[0,1]}$ qui fini presque surement en ℓ.

Le théorème précédent est valide au moins pour $\ell > 1.66$.

Comparaisons

Proposition

Lorsque ℓ tend vers $+\infty$:

le processus $(W_t^\ell)_{t\in[0,1]}$ converge en loi fini-dimensionnelle vers le méandre brownien,

le processus $(W^{\ell,\downarrow})_{t\in[0,1]}$ converge en loi fini-dimensionnelle vers l'excursion brownienne.

$$m_t = \min_{s<t} W_s, \qquad M_t = \max_{s<t} W_s.$$

Principe de réflection

Soit $a < 0$ et $a < x_1 < x_2$, on a

$$\mathbb{P}\big(W_t \in [x_1, x_2], m_t < a\big) = \mathbb{P}\big(W_t \in [2a - x_2, 2a - x_1]\big).$$

... et conséquences

Soit $a < 0 < b$, $a < x_1 < x_2 < b$,

- $\dfrac{\mathbb{P}(m_t > a, M_t < b, W_t \in dx)}{dx} =$
  $$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\phi_t\big(x + 2k\,(b-a)\big) - \phi_t\big(x - 2a + 2k\,(b-a)\big)\right] \mathbf{1}_{[a,b]}(x),$$
- $\mathbb{P}\big(W_t \in [x_1, x_2], m_t > a, M_t > b\big) \leqslant \mathbb{P}\big(W_t \in [2b - x_2, 2b - x_1], m_t > a\big)$,
- $\mathbb{P}\big(m_t > -m, W_t > a\big) \leqslant m\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\; e^{-\frac{a^2}{2t}}$.

Preuve

Convergence f.d.d. :
Il suffit de montrer la convergence du noyaux de transition.

$$p_\ell(0,0;t;y) = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{\mathbb{P}_{\Lambda^\varepsilon}(W_t^{\Lambda^\varepsilon} \in dy)}{dy} = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{f^\varepsilon_{W_t}(y)\mathbb{P}^y(\Lambda^\varepsilon_{1-t})}{\mathbb{P}(\Lambda^\varepsilon)},$$

avec $f^\varepsilon_{W_t}(y) = \frac{\mathbb{P}(W_t \in dy, \Lambda^\varepsilon_t)}{dy}$.

$$p_\ell(s,x;t;y) = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{\mathbb{P}_{\Lambda^\varepsilon}(W_t^{\Lambda^\varepsilon} \in dy | W_s^{\Lambda^\varepsilon} = x)}{dy} = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{f^{x,\varepsilon}_{W_{t-s}}(y)\mathbb{P}^y(\Lambda^\varepsilon_{1-t})}{\mathbb{P}(\Lambda^\varepsilon_{1-s})},$$

avec $f^{x,\varepsilon}_{W_{t-s}}(y) = \frac{\mathbb{P}^x(W_{t-s} \in dy, \Lambda^\varepsilon_{t-s})}{dy}$.

$$f^{\varepsilon}_{W_t}(y) = 2\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \phi'_t(2k\ell - y)\varepsilon + o(\varepsilon)$$

$$\mathbb{P}\left(\Lambda^{\varepsilon}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\vartheta\left(0, 1 + \frac{\ell^2}{2\pi}i\right)\varepsilon + o(\varepsilon),$$

avec

$$\vartheta\left(z, \tau\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \exp\left(i\pi k^2\tau + 2k\pi iz\right),$$

Triple produit de Jacobi : Pour $x, z \in \mathbb{C}$, $|x| < 1$, $z \neq 0$, on a

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x^{k^2} z^k = \prod_{k=1}^{+\infty} \left[\left(1 - x^{2k}\right) \left(1 + x^{2k-1} z\right) \left(1 + x^{2k-1} z^{-1}\right) \right].$$

En utilisant cette identité avec $x := e^{-\frac{\ell^2}{2}}$, $z := -1$ et en passant au logarithme, la convergence de la série

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\log\left(1 - x^{2k}\right) + 2 \log\left(1 - x^{2k-1}\right) \right),$$

pour $x \in [0, 1[$, assure que

$$\vartheta\left(0, 1 + \frac{\ell^2}{2\pi} i\right) > 0.$$

Tension :
On note $\mathbb{P}_n$ la mesure induite par W^{ℓ,ε_n} sur $C[0,1]$.
On doit montrer que :

$$\lim_{\delta\to 0}\ \limsup_{n\to+\infty}\ \frac{1}{\delta}\mathbb{P}_n\left(x(\cdot)\in C[0,1] : \sup_{s<t<s+\delta}|x\left(t\right)-x\left(s\right)|>\eta\right)=0,$$

$\forall\eta>0$ et $\forall s\in[0,1[$.

Pour $s = 0$. On a :

$$\mathbb{P}_n\left(x(\cdot) \in C[0,1] : \sup_{0<t<\delta} |x(t)| > \eta\right) = \frac{\mathbb{P}\left(\sup\limits_{0<t<\delta} |W_t| > \eta, \Lambda^{\varepsilon_n}\right)}{\mathbb{P}\left(\Lambda^{\varepsilon_n}\right)}.$$

Pour $\varepsilon < \eta$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\sup_{0<t<\delta} |W_t| > \eta, \Lambda^{\varepsilon}\right) &\leqslant \mathbb{P}\big(M_\delta > \eta, m_\delta > -\varepsilon\big) \\
&\leqslant \mathbb{P}\big(M_\delta > \eta, m_\delta > -\varepsilon, W_\delta \in [-\varepsilon, \eta]\big) + \mathbb{P}\big(m_\delta > -\varepsilon, W_\delta > \eta\big) \\
&\leqslant \mathbb{P}\big(m_\delta > -\varepsilon, W_\delta \in [\eta, 2\eta + \varepsilon]\big) + \mathbb{P}\big(m_\delta > -\varepsilon, W_\delta > \eta\big) \\
&\leqslant 2\mathbb{P}\big(m_\delta > -\varepsilon, W_\delta > \eta\big) \\
&\leqslant 2\sqrt{\frac{2}{\pi\delta}}\, \varepsilon\, e^{-\frac{\eta^2}{2\delta}}.
\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{1}{\delta}\mathbb{P}_n\left(x(\cdot) \in C[0,1] : \sup_{0<t<\delta} |x(t) - x(0)| > \eta\right) \leqslant \frac{2}{\vartheta\left(0, 1 + \frac{\ell^2}{2\pi} i\right)\delta^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{\eta^2}{2\delta}} \big(1 + o(1)\big).$$

On fait le même type de calcul pour $s \neq 0$.

C. Choi and D. Nam.
Interpolation for partly hidden diffusion processes.
Stochastic processes and their applications, 2004.

H.G. Kim.
Filtering of hidden diffusion processes.
Stochastics and Stochastics reports, 2000.

H.G. Kim and D. Nam.
Optimal estimation of diffusion processes hidden by general obstacles.
J. Appl. Prob., 2001.

R.T. Durrett, D.L. Iglehart and D.R. Miller
Weak convergence to Brownian Meander and Brownian Excursion
The Annales of Probability, 1977.