Intégrale de Wiener par rapport au mouvement brownien multi-fractionnnaire

Joachim Lebovits

L.P.M.A
Université Paris VI

L.M.A.S
Ecole Centrale Paris

$9^{ème}$ Colloque des jeunes probabilistes et statisticiens
Le Mont-Dore 3-7 mai 2010

6 mai 2010

Plan de l'exposé

Plan de l'exposé

Un processus gaussien "plus souple" que le mouvement brownien standard crée par Kolmogorov (1949)

Definition

Soit $H \in]0;1[$ une constante fixée. Un processus $B^H := (B^H_t ; t \in \mathbb{R}_+)$ est un mouvement bronwnien fractionnaire s'il est gaussien, centré et de covariance donnée par :

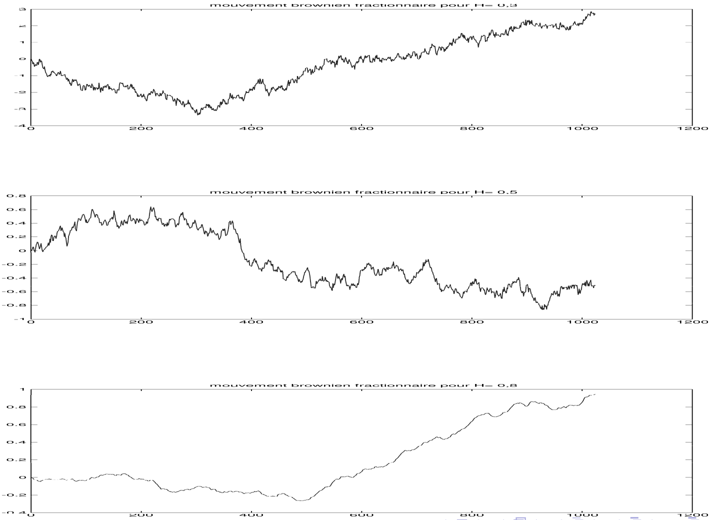
$$\mathbb{E}[B^H_t B^H_s] = 1/2(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}). \ .$$

Propriétés

Le processus B^H vérifie

- $B^H_0 = 0$, *p.s.*
- *Pour tous $t \geq s \geq 0$, $B^H_t - B^H_s$ suit la loi gaussienne $\mathcal{N}(0, t-s)$.*
- *Les trajectoires de B^H sont continues.*

Des trajectoires de régularités différentes



Les propriétés du mouvement brownien fractionnaire

Comme le m.B.s, le m.B.f est p.s non dérivable. Une mesure classique de la régularité est l'exposant de Hölder local, défini en un point t_0 pour un processus X par :

Definition

$$\alpha_X(t_0) := sup\{\alpha : \limsup_{\rho \to 0} \sup_{(s,t)\in B(t_0,\rho)^2} \frac{|X_t - X_s|}{|t-s|^\alpha} < +\infty\}$$

Propriétés

Si B^H est un mouvement brownien fractionnaire, il vérifie les assertions suivantes :

- $X_t = \frac{1}{a^H} B^H_{at}$ *avec* $a > 0$ *est un m.B.f (auto-similarité).*
- *Pour* $H = 1/2$, B^H *est un mouvement brownien standard et ses incréments sont indépendants.*
- *Pour* $H > 1/2$, $B^H_{t+h} - B^H_t$ *et* $B^H_{t+2h} - B^H_{t+h}$ *sont corrélés positivement.*
- *Pour* $H < 1/2$, $B^H_{t+h} - B^H_t$ *et* $B^H_{t+2h} - B^H_{t+h}$ *sont corrélés négativement.*
- *Pour* $H \in]0;1[$, *le m.B.f admet une modification p.s Hölderienne d'ordre* $< H$.
- *P.s, en tout point* t_0 *de* $\mathbb{R}_+$, *la régularité de* B^H *est constante et égale à* H.
- *Le processus* B^H *présente une dépendance de long terme.*

Définition du bruit blanc

Definition

Soit $\mathbb{W}$ *une application telle que :*

$$\begin{array}{cccc} \mathbb{W} : & \Gamma \overset{def}{=} \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N);\ \lambda_N(A) < +\infty\} & \to & \mathcal{G} \subset L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \\ & A & \mapsto & \mathbb{W}(A) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \lambda_N(A)) \end{array}$$

On appelle bruit blanc le processus $\mathbb{W} := \{\mathbb{W}(A); A \in \Gamma\}$ *ainsi défini.*

Remarque

Il vérifie alors :

- $\forall (A, B) \in \Gamma^2$, *disjoints*, $\mathbb{W}(A) \perp\!\!\!\perp \mathbb{W}(B)$.
- $\forall (A, B) \in \Gamma^2$, $\mathbb{W}(A \cup B) = \mathbb{W}(A) + \mathbb{W}(B) - \mathbb{W}(A \cap B)$, *p.s.*
- *Si* $A_1, A_2, ... \in \Gamma$ *sont disjoints et si* $\sum_1^{+\infty} \lambda(A_i) < +\infty$, *alors p.s, on a* $\mathbb{W}(\cup_{i=1}^{+\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{W}(A_i)$.

Définition du processus isonormal associé au bruit blanc

On peut alors définir le processus isonormal $W := \{W(f); f \in L^2(\mathbb{R}^N)\}$ grâce à l'applicaion linéaire suivante

$$\begin{array}{rccl} W : & L^2(\mathbb{R}^N) & \to & \mathcal{G} \subset L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \\ & f & \mapsto & W(f) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, ||f||^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}) \end{array}$$

et telle que pour tous $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(A, B) \in \Gamma^2$, p.s, on ait

$$W(\alpha \mathbb{1}_A + \beta \mathbb{1}_B) = \alpha \mathbb{W}(A) + \beta \mathbb{W}(B).$$

Il est alors possible de définir, pour toute fonction f de $L^2(\mathbb{R}^N)$, $W(f)$ comme étant, au sens p.s :

$$W(f) = \lim_{n \to +\infty} W(f_n)$$

où (f_n) est une suite d'éléments de $L^2(\mathbb{R}^N)$ convergeant vers f.

Le processus isonormal comme intégrale par rapport au bruit blanc

Puisque l'on a $W(\mathbb{1}_A) \overset{\text{p.s}}{=} \mathbb{W}(A)$ pour tout A dans Γ, le processus isonormal W permet de définir une intégrale par rapport au bruit blanc en posant pour toute fonction f de $L^2(\mathbb{R}^N)$:

- $W(\mathbb{1}_A) \overset{\text{p.s}}{=} \mathbb{W}(A) \overset{\text{p.s}}{=}: \int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{1}_A(u)\mathbb{W}(du)$.
- $W(f) \overset{\text{p.s}}{=}: \int_{\mathbb{R}^N} f(u)\mathbb{W}(du)$.

Le mouvement brownien fractionnaire comme intégrale par rapport au bruit blanc

On a le :

Théorème

(Représentation de Centsov's) Le processus $B = (B_t; t \in \mathbb{R}_+^N)$ défini pour tout t par $B_t = \mathbb{W}([0; t])$ est un mouvement brownien.

Propriétés

- *Pour toute $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$, $W(f)$ est l'intégrale de Wiener de f, i.e on a $W(f) = \int_{\mathbb{R}^N} f(u)\mathbb{W}(du) = \int_{\mathbb{R}^N} f(u)dB_u$.*
- *Le mouvement brownien est continu mais, p.s, n'est pas dérivable.*
- *C'est une semi-martingale continue $\Longrightarrow$ construction d'une intégrale stochastique contre le m.B.s....*

Le mouvement brownien fractionnaire comme intégrale par rapport au bruit blanc

Propriétés

Taqqu et Samorodnitsky ont établit que le mouvement brownien fracionnaire pouvait se mettre sous les deux formes intégrales suivantes :

- *Représentation à moyenne mobile :* $B_t^H = \frac{1}{C_1(H)} \int_{\mathbb{R}} [(t-x)_+{}^{H-1/2} - ((-x)_+)^{H-1/2}] \mathbb{W}(dx)$.
- *Représentation harmonisable :* $\forall t \in \mathbb{R},\ \ B_t^H = \frac{1}{C_2(H)} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{itx}-1}{ix} |x|^{-(H-1/2)} \tilde{\mathbb{W}}(dx) \Longrightarrow$ *signification physique et mathématique.* *où l'on a* $\tilde{\mathbb{W}} = \mathbb{W}^1 + i\mathbb{W}^2$ *avec* $\mathbb{W}^1(A) = \mathbb{W}^1(-A)$ *et* $\mathbb{W}^2(A) = -\mathbb{W}^1(-A)$.

Ces deux formes seront utiles pour caractériser l'espace de Cameron-Martin associé au mouvement brownien fractionnaire.

Plan de l'exposé

Un processus gaussien, crée par MM.Peletier et Lévy-Véhel (1995), encore "plus souple" que le mouvement brownien fractionnaire

- Introduit pour modéliser les reliefs montagneux et, ainsi, faciliter le vol des avions furtifs à basse altitude, ce processus est un processus à régularité prescrite.

Definition

Soient α une fonction définie et dérivable sur $(0,1)$, $h : t \mapsto h(t) \in]0;1[$ deux fonctions fixées. Le m.B.m est défini comme une généralisation du m.B.f telle que :

- *Représentation à moyenne mobile :*
  $B_t^{h(t)} = \alpha(h(t)) \int_{\mathbb{R}} [(t-x)_+^{h(t)-1/2} - ((-x)_+)^{h(t)-1/2}] \mathbb{W}(dx)$.
- *Représentation harmonisable :*
  $\forall t \in \mathbb{R}, \quad B_t^{h(t)} = \alpha(h(t)) \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{itx}-1}{ix} |x|^{-(h(t)-1/2)} \tilde{\mathbb{W}}(dx)$.
  où l'on a $\tilde{\mathbb{W}} = \mathbb{W}^1 + i\mathbb{W}^2$ *avec* $\mathbb{W}^1(A) = \mathbb{W}^1(-A)$ *et* $\mathbb{W}^2(A) = -\mathbb{W}^1(-A)$.

Un processus gaussien, crée par MM.Peletier et Lévy-Véhel (1995), encore "plus souple" que le mouvement brownien fractionnaire

- La fonction de covariance $R_{\alpha,h}$ de ce processus vaut, pour tout $(s,t) \in [0;T]^2$,
  $$R_{\alpha,h}(s,t) = \alpha(h(t))\ \alpha(h(s))\ c^2_{H_{t,s}}\ \left[\ \frac{1}{2}\left(|t|^{2H_{t,s}} + |s|^{2H_{t,s}} - |t-s|^{2H_{t,s}}\right)\right].$$
  où $H_{t,s} := \frac{h(t)+h(s)}{2}$ et pour tout x dans $(0;1)$, la constante c_x est définie par
  $c_x := \left(\frac{2\cos(\pi x)\Gamma(2-2x)}{x(1-2x)}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{2\pi}{\Gamma(2x+1)\sin(\pi x)}\right)^{\frac{1}{2}}.$
- On dira que le mBm est normalisé lorsque la fonction α vérifie pour tout $x \in (0,1), \quad \alpha(x) = \frac{1}{c_x}$. On notera dans ce cas R_h la fonction de covariance.

  L'interêt de cette dernière notation est de retrouver un mBf lorsque la fonction h est constante.

Rqs et propriétés du mBm

Remarque

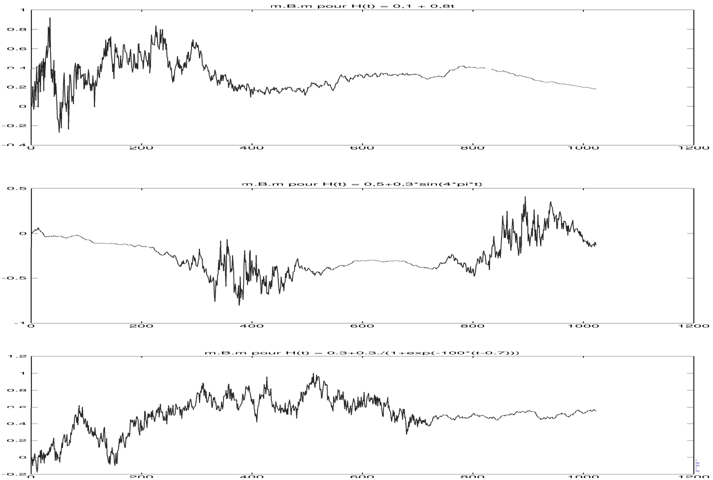
- *Si aucune hypothèse de régularité n'est exigée sur la fonction h, il est nécessaire, pour étudier les propriétés de ce processus, ne serait-ce que l'existence d'une modification continue, de savoir que h est β-höldérienne avec ($\beta > 0$), ce que nous supposerons dans la suite.*

- *La substitution de h par une fonction à valeurs dans $]0;1[$ fait perdre les deux propriétés caractéristiques que sont l'autosimilarité et la stationnarité des accroissements. On garde cependant une forme plus faible de ces deux propriétés nommée auto-similarité asymptotique locale :*

  Dans le cas où $h(t_0) < \beta$, la loi du processus $\frac{X_{t_0+\rho.u} - X_{t_0}}{\rho^{h((t_0)}}$ converge en loi vers un mouvement brownien fractionnaire de coefficient de Hurst égal à $h(t_0)$ lorsque ρ tend vers 0.

- *C'est en 1998 qu'a été établie l'égalité, à un facteur déterministe près, des deux représentations précédentes. Le second processus ayant en effet été défini par Benassi, Jaffard et Roux en 1996.*

Représentations graphiques du m.B.m pour différentes fonctions h



Plan de l'exposé

Le calcul stochastique classique développé pour le mouvement brownien fractionnaire ne s'applique ni au fBm ni au mBm

- Les mouvements fractionnaire et multi-fractionnaire ne sont pas des semi-martingales sauf si $H \neq 1/2$ ou $h \equiv 1/2$.

$\Longrightarrow$ Il faut développer un nouveau calcul stochastique et donc de nouvelles méthodes....

- Comment construire une intégrale par rapport au fBm et au mBm ?

Différentes approches pour obtenir un calcul stochastique respectant le mouvement brownien fractionnaire

Approche probabiliste	Approche déterministe
L.Decreusefoond & S.Ustünel	Zähle, Feyel de la Pradelle
Alos & Mazet & Nualart	Russo & Vallois
	Coutin, Nourdin, Gubinelli,...
	Eliott, Van Ness, Oksendal,...

Plan de l'exposé

Intégrale de Wiener par rapport au fBm (Elliott et Van Der Hoek).

Sur $\Omega := S^{'}(\mathbb{R})$, le théorème de Böchner-Minlos nous dit qu'il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ telle que pour toute $f \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$, l' application

$$\begin{array}{rccc} < f, . >_{L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}), S'(\mathbb{R})} : & (\Omega, F) & \to & (\mathbb{R}, B(\mathbb{R})) \\ & \omega & \mapsto & < f, \omega >_{L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}), S'(\mathbb{R})} \end{array}$$

soit une v.a.r $\mathcal{N}(0, ||f||^2_{L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})})$. De plus, l'application

$$\begin{array}{rccc} \zeta : & (L^2(\mathbb{R}), <,>_{L^2(\mathbb{R})}) & \to & (L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), <,>_{L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})}) \\ & f & \mapsto & \zeta(f) := < f, . >_{L^2(\mathbb{R}), \mathcal{S}'(\mathbb{R})} \end{array} \quad \text{est une isométrie.}$$

Sur l'espace $S(\mathbb{R})$ on défini l'opérateur M_H par

- pour $H \in]0;1/2[$, $M_H(f)(x) := \alpha_1(H) \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x-t)-f(x)}{|t|^{3/2-H}} dt$
- pour $H \in]1/2;1[$, $M_H(f)(x) := \alpha_2(H) \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{|t-x|^{3/2-H}} dt$
- pour $H = 1/2$, $M_H(f)(x) := f(x)$.

L' application

$$\begin{array}{cccc} M_H : & (S(\mathbb{R}), <,>_H) & \to & (L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}), <,>_{L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})}) \\ & f & \mapsto & M_H(f) \end{array}$$

est une isométrie si l'on définit $<,>_H$ par $< f, g >_H := \int_{\mathbb{R}} |x|^{1-2H} \widehat{f}\,(x) \overline{\widehat{g}\,(x)} dx$.

Intégrale de Wiener par rapport au fBm en utilisant la méthode du bruit blanc (Elliott et Van Der Hoek).

Notons, pour toute $f \in S(\mathbb{R})$, notons $\widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixu} f(u) du$ sa tansformée de Fourier. Pour tout H de $]0;1[$, on a l'égalité

$$\widehat{M_H f}(x) = x^{1/2-H}\,\widehat{f}(x).$$

On peut alors étendre l'opérateur M_H à l'espace de Sobolev d'ordre $1/2 - H$ défini par :

$$\mathcal{H}^{1/2-H}(\mathbb{R}) := \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \mid \widehat{u} = T_f; f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \text{ et t.q} ||u||^2{}_{\mathcal{H}^{1/2-H}(\mathbb{R})} < +\infty\}$$

où

$$||u||^2{}_{\mathcal{H}^{1/2-H}(\mathbb{R})} := \int_{\mathbb{R}} |u|^{1-2H} |\widehat{f}(u)|^2 du$$

Pour simplifier, et par analogie avec le cas du mBs, on notera aussi $L^2_H(\mathbb{R})$ l'espace $\mathcal{H}^{1/2-H}(\mathbb{R})$.

On remarque par ailleurs que l'on a $\overline{\varepsilon(\mathbb{R})}^{<>_H} = \mathcal{H}^{1/2-H} = L^2_H(\mathbb{R})$.

Intégrale de Wiener par rapport au fBm en utilisant la méthode du bruit blanc (Elliott et Van Der Hoek).

On définit alors, pour tout réel H de $]0;1[$ et pour tout élément f de $L^2_H(\mathbb{R})$, l'intégrale de Wiener de f par rapport au mouvement brownien fractionnaire B^H, notée $\int_{\mathbb{R}} f(s)dB^H(s)$ comme étant la variable aléatoire $< M_H(f), . >_{L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}), S'(\mathbb{R})}$. Autrement dit, on a

$$\int_{\mathbb{R}} f(s)dB^H(s) := < M_H(f), . >_{L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}), S'(\mathbb{R})}.$$

c'est-à-dire encore :

$$\begin{array}{rccl} \int_{\mathbb{R}} f(s)dB^H(s) : & \mathcal{S}'(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & \omega & \mapsto & \int_{\mathbb{R}} f(s)dB^H(s)(\omega) = < M_H(f), . >_{L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}), S'(\mathbb{R})}(\omega). \end{array}$$

Plan de l'exposé

On considère à présent une fonction γ-Höldérienne $h : [0; T] \rightarrow]0; 1[$ pour laquelle on note $[a; b] := [\max_{t \in [0;T]} h(t); \min_{t \in [0;T]} h(t)]$ et R_h la fonciton de cov. d'un mBm normalisé de fonction de Hurst h. On définit alors :

- sur $\varepsilon(\mathbb{R})^2$, le produit scalaire $< \mathbb{1}_{[0;t]}, \mathbb{1}_{[0;s]} >_h := R_h(t, s)$
- sur $\varepsilon(\mathbb{R})$, l'opérateur

$$\begin{array}{cccc} M_h : & (\varepsilon(\mathbb{R}), <>_h) & \rightarrow & (L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}), <,>_{L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})}) \\ & \mathbb{1}_{[0;t]} & \mapsto & M_h(\mathbb{1}_{[0;t]}) := \frac{\sqrt{2\pi}}{c_{h(t)}} M_{h(t)}(\mathbb{1}_{[0;t]}). \end{array}$$

- le processus $(X^h_t)_{t \in \mathbb{R}}$ par $X^h_t := < M_h(\mathbb{1}_{[0;t]}), . >_{L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}), S'(\mathbb{R})}$.

On a le résultat suivant :

Proposition

L'opétateur M_h est une isométrie. Le processus $(X_t^h)_{t\in\mathbb{R}}$ est un mouvement brownien multi-fractionnaire de fonction de Hurst h.

M_h étant une isométrie, on peut la prolonger à l'espace $\overline{\varepsilon(\mathbb{R})}^{<>_h}$. Soit par ailleurs $\mathcal{J}^h$ l'isométrie $\mathcal{J}^h := \zeta \circ M_h$, i.e

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{J}^h : & (\overline{\varepsilon(\mathbb{R})}^{<>_h}, <,>_h) & \overset{M_h}{\to} & (L^2(\mathbb{R}), <,>_{L^2(\mathbb{R})}) & \overset{\zeta}{\to} & (L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}), <,>_{L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})}) \\ & \mathbb{1}_{[0;t]} & \mapsto & M_h(\mathbb{1}_{[0;t]}) & \mapsto & <M_h(\mathbb{1}_{[0;t]}), .>_{L^2(\mathbb{R}),\mathcal{S}'(\mathbb{R})} \end{array}$$

On peut alors définir l'intégrale de Wiener par rapport au mBm de fonction de Hurst h des éléments de $\overline{\varepsilon(\mathbb{R})}^{<>_h}$ simplement en écrivant que

Pour tout élément f de $\overline{\varepsilon(\mathbb{R})}^{<>_h}$, l'intégrale de Wiener de f par rapport au mouvement brownien multi-fractionnaire B^h, notée $\int_{\mathbb{R}} f(s)dB^h(s)$ est la variable aléatoire $< M_h(f), . >_{L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}), S'(\mathbb{R})}$.

Autrement dit, on a

$$\int_{\mathbb{R}} f(s)dB^h(s) := \mathcal{J}^h(f) = < M_h(f), . >_{L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}), S'(\mathbb{R})}.$$

c'est-à-dire encore :

$$\begin{array}{cccc} \int_{\mathbb{R}} f(s)dB^h(s) : & \mathcal{S}'(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ & \omega & \mapsto & \int_{\mathbb{R}} f(s)dB^h(s)(\omega) = < M_h(f), . >_{L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}), S'(\mathbb{R})}(\omega). \end{array}$$

Il rest alors à expliciter l'espace $\overline{\varepsilon(\mathbb{R})}^{<>_h}$.

Pour $s_1 = 1/2 - b$ et $s_2 = 1/2 - a$, on a le résultat suivant

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{1/2-b}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{H}^{1/2-a}(\mathbb{R}) = \mathcal{H}^{s_1}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{H}^{s_2}(\mathbb{R}) &= \bigcap_{s \in [s_1;s_2] \subset]-1/2;1/2[} \mathcal{H}^{s_1}(\mathbb{R}) \bigcap \mathcal{H}^{s_2}(\mathbb{R}) \\ &= \overline{\varepsilon(\mathbb{R})}^{<>_b} \cap \overline{\varepsilon(\mathbb{R})}^{<>_a} = \bigcap_{H \in [a;b] \subset]0;1[} \overline{\varepsilon(\mathbb{R})}^{<>_H} \\ &= \overline{\varepsilon(\mathbb{R})}^{<>_h}.\end{aligned}$$

Conclusion

L'ensemble des éléments admettant une intégrale de Wiener par rapport au mouvement brownien multi-fractionnaire est donc l'intersection des deux espaces de Sobolev d'ordre
$1/2 -$ *la plus grande régularité du processus* B^h *sur l'intervalle [0 ;T]*
et de celui d'ordre
$1/2 -$ *la plus grande irrégularité du processus* B^h *sur l'intervalle [0 ;T].*

Plan de l'exposé

Applications

En plus des applications que l'on avait déjà pour le mouvement brownien que nous rappelons ici :

- Traitement d'images
- Finance : Banques et assurances (Bachelier (1900), Black-Merton & Scholes (1973), ...)
  $\Longrightarrow$ Donner un prix à des produits dérivés qui sont un droit d'acheter ou vendre une action dans le futur à prix fixé aujourd'hui.....
- Physique : modélisation de la trajectoire de particules
- Biologie : modèles de croissance, modélisation du comportement de catalyseurs...
- Géologie : modélisation de l'érosion, des turbulences, des éruptions volcanique,...

et qui demeurent, certains nouveaux problèmes apparaŝsent....

Plan de l'exposé

Des problèmes liés à la modélisation à l'aide d'un mBm

- Pbms de simulation du mouvement brownien multi-fractionnaire en raison de la "dépendance de long terme" qui découle de l'auto-similarité asymptotique locale (algo de Wood & Chan et de Levinson) $\Longrightarrow$ Fraclab.
- Pbms d'estimation de la fonction $t \mapsto h(t)$ (quelle doit être la taille de l'échantillon si l'on veut estimer correctement la fonction h ?).
- Doit-on la considérer constante par morceaux ? Sur un nombre fini d'intervalles puis passer à la limite ?
- Un estimateur existe mais pas le test associé !
- Pbms en Finance : modèle de sous jacent avec un m.B.m conduit il à un Arbitrage comme dans le cas du m.B.f ?
- Si oui que faire ?

Biagini, F., Hu, Y., Øksendal, B., and Zhang,T.
Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Applications.
Springer Verlag, (2008).

Biagini,F., Sulem, A., Øksendal, B., and N. Wallner, N.
An introduction to white noise theory and malliavin calculus for fractional brownian motion.
Proc. Royal Society, special issue on stochastic analysis and applications, pages 347–372, (2004).

Van der Hoek J. Elliott, R.J.
A general frational white noise theory and applications to finance.
Mathematical Finance, pages 301–330, (2003).

S.G Samko, A.A. Kilbas, and O.I. Marichev.
Fractional Integrals and Derivatives.

Merci pour votre attention