Lois stables et lois à queue régulière dans un cône convexe

Shuyan LIU

Institut de statistique, biostatistique et sciences actuarielles (ISBA)
Université Catholique de Louvain, Belgium

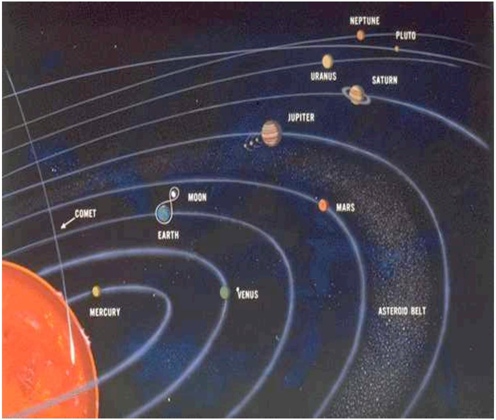
Youri DAVYDOV et Radu STOICA

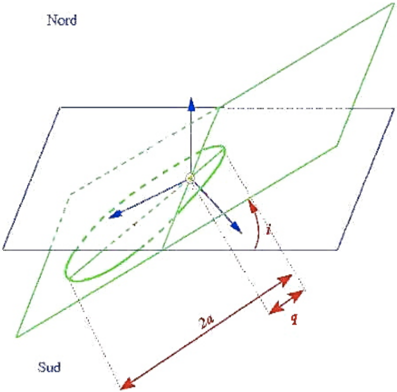
Université Lille 1 - Laboratoire Paul Painlevé

3-7 mai 2010, Jeunes Probabilistes et Statisticiens, Le Mont-Dore

Un jeu de données des perturbations planétaires

Les données sont composées d'un ensemble des triplets $(\cos i, q, \Delta z)$,
$z = 1/a$: l'inverse de demi-grand axe,
$\Delta z = z_f - z_i$: la marque de perturbation.



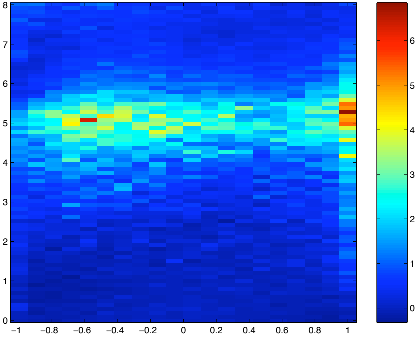


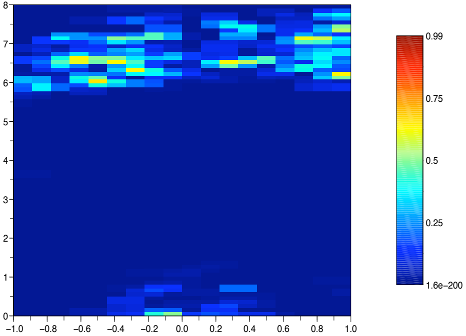
Comportement de type queue lourde autour des orbites des grandes planètes

Calculons dans chaque cellule l'**indicateur de la queue lourde** :

$$\frac{\hat{z}_{0.99}}{\hat{n}_{0.99}} - 1.$$

Effectuons le test de normalité des quantiles empiriques $\hat{z}_{0.95}$.





Lois stables et lois à queue régulière dans un cône convexe

1. Définitions
2. Simulation des v.a. $St\alpha S$ utilisant la série de LePage
3. Transformations des lois à queue régulière

Définition de lois à queue régulière

Un v.a. $X \in \mathbb{R}^d$ a une loi à queue régulière d'indice $\alpha > 0$ si $\exists \sigma$, une mesure finie sur $\mathbb{S}^{d-1} = \{x \mid \|x\| = 1, x \in \mathbb{R}^d\}$, telle que $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{S}^{d-1})$ et $\sigma(\partial B) = 0$,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^\alpha}{L(x)} \mathbf{P}\left\{ \frac{X}{\|X\|} \in B, \|X\| > x \right\} = \sigma(B), \quad ({\color{red} X \in \mathrm{VR}(\alpha, \sigma)})$$

où L est une fonction à variation lente, i.e. $\frac{L(\lambda x)}{L(x)} \to 1$ quand $x \to \infty$, $\forall \lambda > 0$.

Une famille importante des lois à queue régulière est les lois non-gaussiennes stables

Un v.a. $X \in \mathbb{R}^d$ a une loi strictement α-stable si $\forall a, b > 0$

$$a^{1/\alpha} X_1 + b^{1/\alpha} X_2 \stackrel{\mathcal{L}}{=} (a+b)^{1/\alpha} X, \quad (\mathcal{S}t\alpha\mathcal{S})$$

où X_1, X_2 sont des copies indépendantes de X.

Les lois α-stables n'ont pas d'expression explicite pour la densité

Exemple : Lois α-stables dans $\mathbb{R}^1$

Fonction caractéristique :

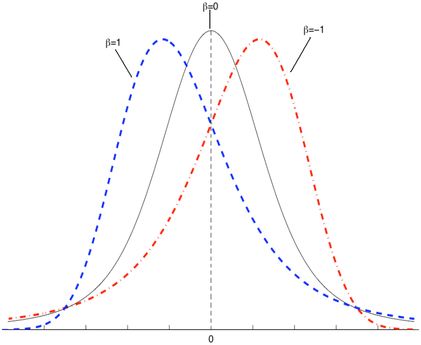
$$\mathbf{E} \exp itX = \begin{cases} \exp\{-\gamma^\alpha |t|^\alpha \left(1 - i\beta(\text{ sign } t) \tan \frac{\pi\alpha}{2}\right) + i\mu t\}, & \alpha \neq 1, \\ \exp\{-\gamma |t| \left(1 + i\beta \frac{2}{\pi}(\text{ sign } t) \ln |t|\right) + i\mu t\}, & \alpha = 1. \end{cases}$$

Paramètres :
$\alpha \in (0, 2], \gamma = \sigma(1) + \sigma(-1) \in (0, \infty), \beta = \frac{\sigma(1) - \sigma(-1)}{\gamma} \in [-1, 1], \mu \in \mathbb{R}^1.$

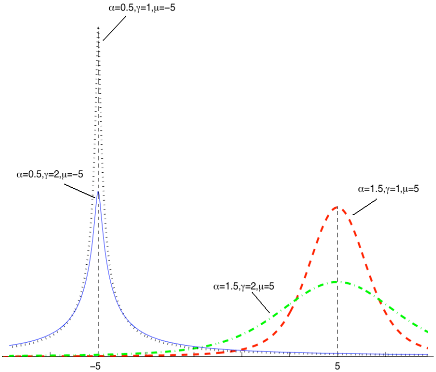
Exemples :
$\alpha = 2$: lois gaussiennes, $p(x) = \frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}}$.
$\alpha = 1$: lois de Cauchy, $p(x) = \frac{\sigma}{\pi(x^2+\sigma^2)}$.
$\alpha = 1/2$: lois de Lévy, $p(x) = \left(\frac{\sigma}{2\pi}\right)^{1/2} \frac{1}{x^{3/2}} \exp\left(-\frac{\sigma}{2x}\right)$.

La densité de lois stables dans $\mathbb{R}^1$ dépend de quatre paramètres

Dépendance de β

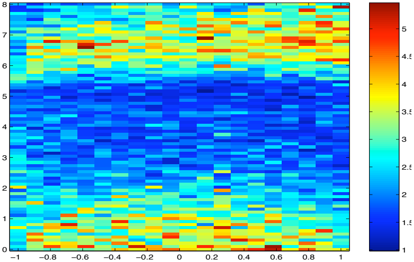


Dépendance de α, γ et μ

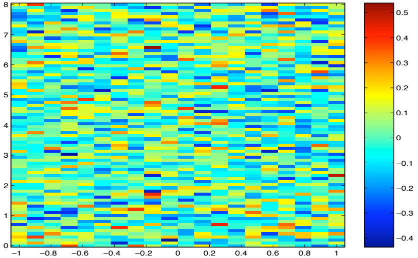


Résultats d'estimation des paramètres pour les perturbations

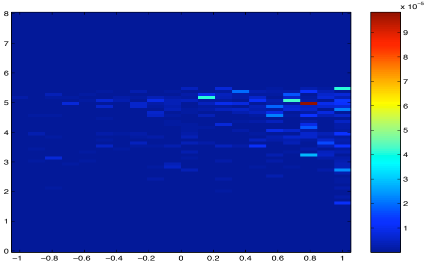
α



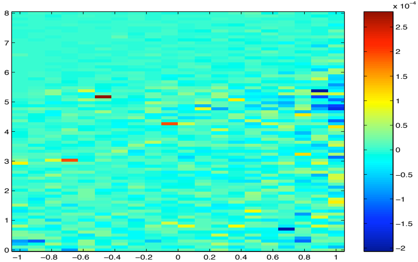
β



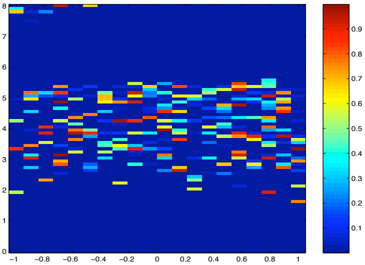
γ

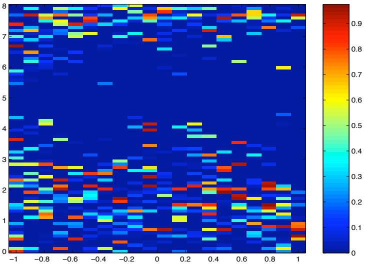


μ



Le modèle de lois à queue régulière donne un meilleur ajustement

a) 

b) 

a) $\alpha < 2$, H_0 : loi stable,

b) $\alpha > 2$, H_0 : loi alternative de densité définie par

$$f(z) = \frac{C_{\kappa,\alpha}}{1 + \kappa|z - \omega|^{\alpha+1}},$$

La définition de lois stables a un sens dans un cône convexe

Un cône convexe $\mathbb{K}$ est un semigroupe abélien topologique, supposé complet et séparable, avec une opération de multiplication par des scalaires positifs, i.e. $(x, a) \to ax$, continue pour $x \in \mathbb{K}$ et $a > 0$ tel que les conditions suivantes sont satisfaites:

$$a(x+y) = ax + ay,\ \ a > 0,\ \ x, y \in \mathbb{K}$$

$$a(bx) = (ab)x,\ \ a, b > 0,\ \ x \in \mathbb{K}$$

$$1x = x,\ \ x \in \mathbb{K}$$

$$a\mathbf{e} = \mathbf{e},\ \ a > 0.$$

Avec différent choix du cône, on obtient différente famille de lois

Exemples :

- $(\mathbb{R}^d, +)$: lois α-stables.
- $(\mathbb{R}_+^d, \vee)$: lois max-stables.
- $([0, \infty), \vee)$: lois de Fréchet, $\Phi_\alpha = \exp(-(x/\sigma)^{-\alpha})$.
- $([0, \infty], \wedge)$: lois de Weibull, $F(x) = 1 - \exp(-(x/\sigma)^{-\alpha})$.
- $(\mathcal{K}, \cup)$: lois union-stables, où $\mathcal{K}$ est une famille des sous-ensembles compacts de $\mathbb{R}^d$.

Lois stables et lois à queue régulière dans un cône convexe

Les lois $\mathcal{S}t\alpha\mathcal{S}$ admettent une décomposition en série

- $\{\lambda_k, k \geq 1\}$: des variables aléatoires i.i.d. de loi exponentielle standard;
- $\Gamma_k = \lambda_1 + \cdots + \lambda_k$, $k = 1, 2, \ldots$;
- $\{\epsilon_k\}$: des e.a. i.i.d. dans $S = \{x \mid \|x\| = 1, x \in \mathbb{K}\}$ issus d'une loi $\tilde{\sigma}$, indépendants de $\{\lambda_k\}$;
- c : une constante positive.

La série suivante

$$\xi_{\alpha,\sigma} := \sum_{k=1}^{\infty} c\Gamma_k^{-1/\alpha}\epsilon_k$$

s'appelle la série de LePage.

Remarque

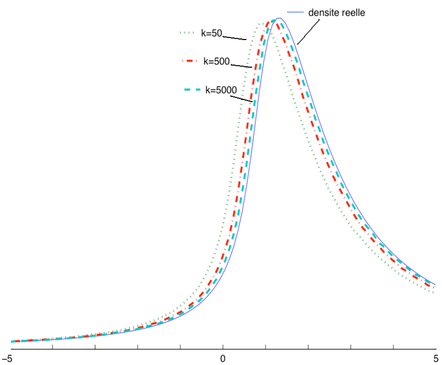
Une série de LePage convergente engendre un e.a. $\mathcal{S}t\alpha\mathcal{S}$ de mesure spectrale $\sigma(\cdot) = c^\alpha\tilde{\sigma}(\cdot)$ dans tous les cônes convexes. [LePage et al. 81] [Davydov et al. 08]

La série de LePage converge plus vite dans le cas symétrique

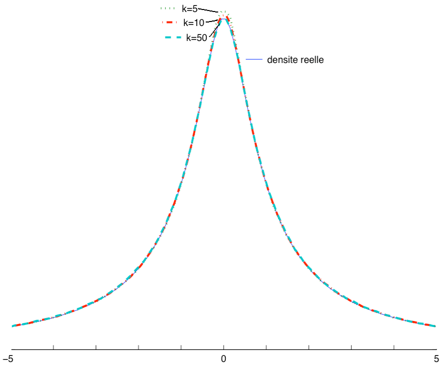
On simule des variables aléatoires stables en utilisant la somme partielle de la série de LePage, i.e.

$$\hat{\xi} \overset{\mathcal{L}}{=} \sum_{i=1}^{k} c\Gamma_i^{-1/\alpha} \left(\mathbb{1}_{\{U_i \le \frac{1+\beta}{2}\}} - \mathbb{1}_{\{U_i > \frac{1+\beta}{2}\}} \right).$$

$\beta = 0.5$



$\beta = 0$



Dans le cas max-stable, la série de LePage converge très vite

La série de LePage, $\xi_{\alpha,\sigma} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \bigvee_{i=1}^{\infty} c\Gamma_i^{-1/\alpha}\epsilon_i$, converge pour tout $\alpha > 0$. On simule des v.a. max-stables en utilisant la somme partielle

$$\hat{\xi} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \bigvee_{i=1}^{k} c\Gamma_i^{-1/\alpha}\epsilon_i = \left(\max_{1\le i\le k} c\Gamma_i^{-1/\alpha}\epsilon_i^{(1)}, \max_{1\le i\le k} c\Gamma_i^{-1/\alpha}\epsilon_i^{(2)} \right).$$

En notant

$$\mathbf{P}\{\epsilon^{(1)} = 1\} = p, \quad \mathbf{P}\{\epsilon^{(2)} = 1\} = 1 - p,$$

on a

$$\mathbf{P}\{\hat{\xi} \neq \xi_{\alpha,\sigma}\} \le (1-p)^k + p^k.$$

La variation régulière est préservée par plusieurs transformations

Soit X un e.a. dans $\mathbb{K}'$ tel que $X \in \mathrm{VR}(\alpha, \sigma)$,
$f : S \to S$, $\mu = \sigma f^{-1}$,
$h : S \to \mathbb{R}_+$, ν une mesure finie sur S telle que $d\nu/d\sigma = h(x)^\alpha$.
Nous considérons l'e.a. $Y = \left(\|X\|, f\left(\frac{X}{\|X\|}\right)\right)$ et $Z = \left(\|X\| h\left(\frac{X}{\|X\|}\right), \frac{X}{\|X\|}\right)$.

- Transformation sphérique :
  Si f est σ-p.p. continue, alors $Y \in \mathrm{VR}(\alpha, \mu)$.

- Transformation radiale, condition forte :
  Si h est σ-p.p. continue et bornée, alors $Z \in \mathrm{VR}(\alpha, \nu)$.

- Transformation radiale, condition moins forte :
  Supposons que les variables $\frac{X}{\|X\|}$ et $\|X\|$ sont indépendantes.
  Si $\int_S h^{\alpha+\varepsilon} d\sigma < \infty$ pour un $\varepsilon > 0$, alors $Z \in \mathrm{VR}(\alpha, \nu)$.

Merci!