Conditionnement de diffusions par des observations partielles

Jean-Louis Marchand

IRMAR,
Université Rennes 1

05 Mai 2010

Diffusions

- On se donne une équation différentielle stochastique en dimension n

$$\begin{cases} dx_t = b_t(x_t)dt + \sigma_t(x_t)dw_t \\ x_0 = u \end{cases}$$

  les coefficients ne dépendent pas de tout le passé mais seulement de la variable x_t au temps t.
- Une telle dynamique vérifie la propriété de *Markov*.

Problématique

- Imaginons que j'ai observé, à des temps T_i déterministes, le vecteur x_{T_i}, où x est une diffusion.
- Comment récupérer la loi de la diffusion x conditionnée par ces observations ?

Un exemple "classique" : le pont brownien

On se donne un mouvement brownien unidimensionnel w sur un segment $[0, T]$. La loi du mouvement brownien conditionné par $w_T = v$ coïncide avec la loi de la solution de l'équation suivante

$$\begin{cases} dy_t = \frac{v - y_t}{T - t} dt + dB_t \\ y_0 = 0 \end{cases}$$

où B est un mouvement brownien unidimensionnel.

Equation vérifiée par le processus conditionné

On revient au cas général

$$\begin{cases} dx_t = b_t(x_t)dt + \sigma_t(x_t)dw_t \\ x_0 = u \end{cases}$$

Equation vérifiée par le processus conditionné

On revient au cas général

$$\begin{cases} dx_t = b_t(x_t)dt + \sigma_t(x_t)dw_t \\ x_0 = u \end{cases}$$

La loi de du processus x conditionné par $x_T = v$ coïncide avec la loi du processus y solution de

$$\begin{cases} dy_t = B_t(y_t)dt + \sigma_t(x_t)dw_t \\ y_0 = u \end{cases}$$

où

$$B_t(z) = b_t(z) + \sigma_t(z)\sigma_t^*(z)\nabla_x(\log p_{t,T}(z,v))$$

et $p_{s,t}(u,z)$ est la densité de $x_t^{s,u}$ solution de l'équation de diffusion donnée au début avec pour condition initiale $x_s^{s,u} = u$.

Résultat par absolue continuité

On se donne y solution de l'équation

$$\begin{cases} dy_t = (b_t(y_t) + \frac{v-y_t}{T-t})dt + \sigma_t(y_t)dw_t \\ y_0 = u \end{cases}$$

Résultat par absolue continuité

On se donne y solution de l'équation

$$\begin{cases} dy_t = (b_t(y_t) + \frac{v-y_t}{T-t})dt + \sigma_t(y_t)dw_t \\ y_0 = u \end{cases}$$

Théorème (Delyon & Hu , 2006)

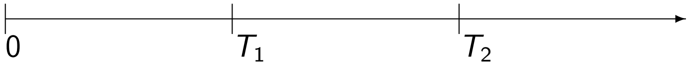
$$\mathcal{L}(x|x_T = v) \ll \mathcal{L}(y)$$

et la densité est connue.

Le cadre

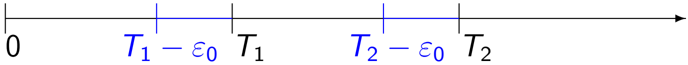
- Peut-on obtenir le même type de résultat pour des observations scalaires ?
- Principal problème : considérer tous les conditionnements simultanément
- les conditions sont de la forme $a_i^* x_{T_i} = v_i$, où les a_i sont des vecteurs unitaires, et les v_i des réels

Le candidat



$$
\begin{aligned}
dy_t = {} & b_t(y_t)dt + \sigma_t(y_t)dw_t \\
& + \left(\frac{v_1 - a_1^* y_t}{T_1 - t} \qquad + \frac{v_1 - a_1^* y_t}{T_1 - t} \qquad \right) dt
\end{aligned}
$$

Le candidat



$$dy_t = b_t(y_t)dt + \sigma_t(y_t)dw_t + \left(\frac{v_1 - a_1^* y_t}{T_1 - t}\beta_1^t(y_t) + \frac{v_1 - a_1^* y_t}{T_1 - t}\beta_2^t(y_t)\right)dt$$

Le résultat

Théorème

$$\mathcal{L}(x | a_1^* x_{T_1} = v_1, a_2^* x_{T_2} = v_2) \ll \mathcal{L}(y)$$

et la densité est connue

Simulation

Modèle d'Heston

$$\begin{cases} dS_t = S_t dt + \sqrt{v_t} dw_t^1 \\ dv_t = (1 - v_t)dt + \sqrt{v_t} dw_t^2 \end{cases}$$

Trajectoire de S

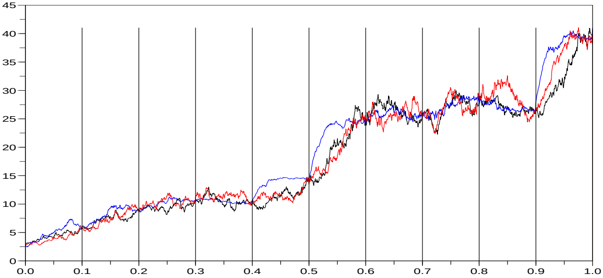


FIG.: Exemple avec 10 points d'observation, 500 lancers, le pas de discrétisation est de 1/5000

Simulation

Modèle d'Heston

$$\begin{cases} dS_t = S_t dt + \sqrt{v_t} dw_t^1 \\ dv_t = (1 - v_t) dt + \sqrt{v_t} dw_t^2 \end{cases}$$

Trajectoire de v

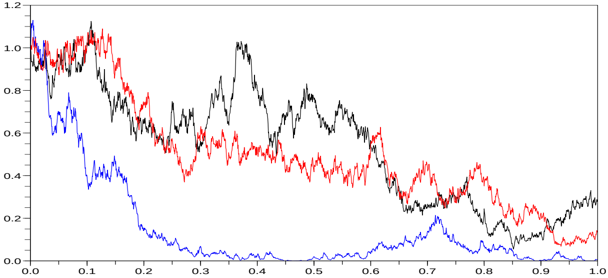


FIG.: Exemple avec 10 points d'observation, 500 lancers, le pas de discrétisation est de 1/5000

Ouvertures ...

- Observations partielles vectorielles
- Observations du type $f(x_T) = v$
- Autres classes de processus
- Applications en filtrage ...

Robert Azencott.
Densité des diffusions en temps petit : développements asymptotiques. I.
In *Seminar on probability, XVIII*, volume 1059 of *Lecture Notes in Math.*, pages 402–498. Springer, Berlin, 1984.

JMC Clark.
The simulation of pinned diffusions.
In *Decision and Control, 1990., Proceedings of the 29th IEEE Conference on*, pages 1418–1420, 1990.

Delyon Bernard et Hu Ying.
Simulation of conditionned diffusions and applications to parameter estimations.
Stochastic Analysis and Their Applications, 116 :1660–1675, 2006.

Daniel W. Stroock.
Diffusion semigroups corresponding to uniformly elliptic divergence form operators.
In *Séminaire de Probabilités, XXII*, volume 1321 of *Lecture Notes in Math.*, pages 316–347. Springer, Berlin, 1988.