Propriétés asymptotiques de diffusions inhomogènes

Mihai Gradinaru, Yoann Offret

IRMAR,
Université de Rennes 1

6 mai 2010

On considère l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dX_t = dB_t + \rho \operatorname{sgn}(X_t) \frac{|X_t|^\alpha}{t^\beta} dt, \quad X_{t_0} = x_0. \tag{E}$$

i) B mouvement Brownien **unidimensionnel**

ii) $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

iii) $\rho, \alpha, \beta, x_0 \in \mathbb{R}, \; t_0 \in (0, \infty)$

$$dX_t = dB_t + \rho \operatorname{sgn}(X_t)|X_t|^\alpha \; / \; t^\beta dt, \quad \text{(E)}$$

Décrire en fonction de ρ, α, β les **propriétés asymptotiques** de X

Exemple $\beta = 0$, $\alpha = 1$

X processus d'**Ornstein-Ulhenbeck**.

i) Si $\rho < 0$ alors X est **récurrent** et satisfait :

$$\lim_{t\to\infty} X_t \overset{\mathcal{L}}{=} \mathcal{N}\left(0, (2|\rho|)^{-1}\right), \quad \limsup_{t\to\infty} \frac{X_t}{\sqrt{\ln t}} \overset{p.s}{=} |\rho|^{-\frac{1}{2}}$$

ii) Si $\rho > 0$ alors X est **transient** et satisfait :

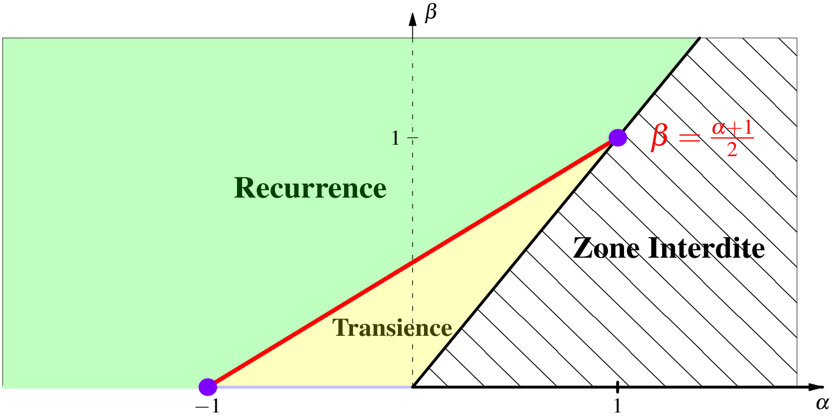
$$\lim_{t\to\infty} \frac{X_t}{e^{\rho t}} \overset{p.s}{=} G, \quad G \sim \mathcal{N}\left(x_0 e^{-\rho t_0}, (2\rho)^{-1} e^{-2\rho t_0}\right)$$

$dX_t = dB_t + \rho \operatorname{sgn}(X_t)|X_t|^\alpha \;/\; t^\beta dt, \quad \text{(E)}$

(E) est un analogue en temps continue du model étudié par **M. Menshikov** et **S. Volkov** (2008) en lien avec le problème d'**urne de Friedmann** pour $\alpha = \beta = 1$. Ils considèrent (X_n) une marche aléatoire sur $\mathbb{R}^+$ dont la dérive satisfait :

$$\mathbb{E}\left(X_{n+1} - X_n \middle| X_n = x\right) = \rho\, \frac{x^\alpha}{n^\beta}$$

Pour $\rho > 0, \beta \geq 0$ la **récurrence** ou la **transience** de X est établie en étudiant certaines martingales associées.



Recurrence pour $\rho \leq \frac{1}{2}$

Transience pour $\rho > \frac{1}{2}$

Question ouverte

$dX_t = dB_t + \rho\,\mathrm{sgn}(X_t)|X_t|^\alpha \,/\, t^\beta dt, \quad \text{(E)}$

Pour $\rho, \beta < 0$ et $\alpha > -1$ on pose : $Y_s := X_{\phi(s)}, \quad \phi(s) = s^{\frac{1}{1-\beta}}$

$$dY_s = \sigma(s)dW_s + \rho\,\mathrm{sgn}(Y_s)|Y_s|^\alpha ds \qquad \text{(E')}$$

W un mouvement Brownien, $\quad \sigma(s) = s^{\frac{\beta}{2(1-\beta)}} \underset{s\to\infty}{\longrightarrow} 0$

(E') équation de **recuit simulé**. On peut montrer que

$$\lim_{s\to\infty} Y_s \underset{p.s.}{=} 0, \quad \text{minimum du } \textbf{potentiel } V(x) = \frac{|\rho|}{\alpha+1}|x|^{\alpha+1}$$

$$dX_t = dB_t + \rho\,\mathrm{sgn}(X_t)|X_t|^\alpha \ / \ t^\beta dt, \quad \text{(E)}$$

(E) Equation **inhomogène** $\beta \neq 0$.

i) Existence/unicité/temps d'explosion pour $\alpha < 0, \alpha > 1$?
ii) Récurrence/Transience ? Mesure invariante ?
iii) Loi du type logarithme itéré ?

$$dX_t = dB_t + \rho \operatorname{sgn}(X_t)|X_t|^\alpha \;/\; t^\beta dt, \quad \text{(E)}$$

(E) Equation **inhomogène** $\beta \neq 0$.

i) Existence/unicité/temps d'explosion pour $\alpha < 0, \alpha > 1$?
ii) Récurrence/Transience ? Mesure invariante ?
iii) Loi du type logarithme itéré ?

Equation **homogène** $\beta = 0$: Les réponses sont données par la **fonction d'échelle** et la **mesure de vitesse**

i) Classification des points singuliers (**A.S. Cherny H.J. Engelbert**, 2004) / Test de **Feller**
ii) Théorème ergodique
iii) Théorème de **Motoo** (1959)

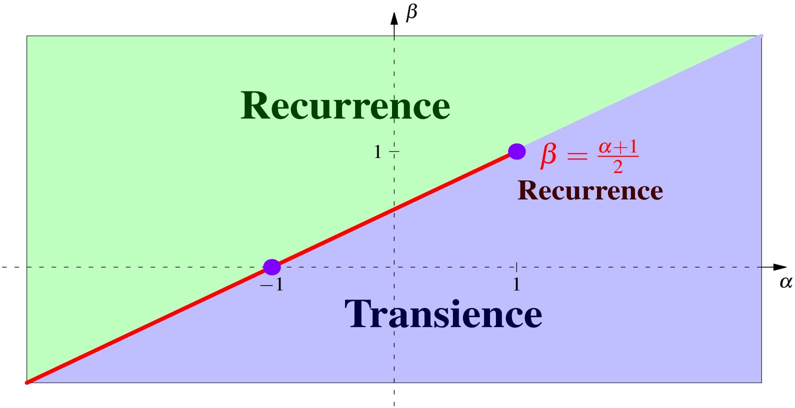
$$dX_t = dB_t + \rho \operatorname{sgn}(X_t)|X_t|^\alpha \ / \ t^\beta dt, \quad \text{(E)}$$

Idée :

Se ramener au cas **homogène** par un **changement de temps** en utilisant la propriété d'**invariance par changement d'échelle du mouvement Brownien** B et l'**homogénité** spatiale et temporelle de la dérive

$$b(\mu t, \lambda x) = \lambda^\alpha \mu^{-\beta} b(t, x)$$

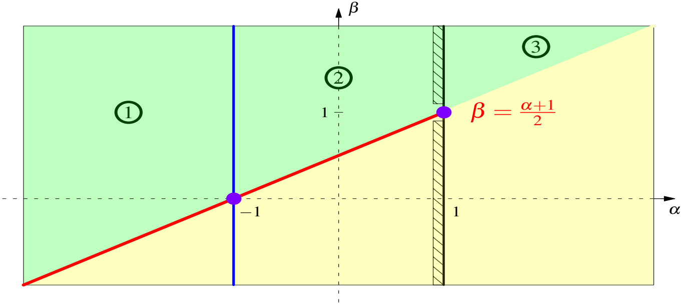
$$dX_t = dB_t + \rho \,\mathrm{sgn}(X_t)|X_t|^\alpha \;/\; t^\beta dt, \quad \text{(E)}$$



Recurrence pour $\rho \leq \frac{1}{2}$

Transience pour $\rho > \frac{1}{2}$

$$dX_t = dB_t + \rho \, \mathrm{sgn}(X_t)|X_t|^\alpha \, / \, t^\beta dt, \qquad (E)$$



$$x_0 \in (0,\infty) \Rightarrow X \in (0,\infty), \ \frac{X_t}{\sqrt{t}} \underset{t\to\infty}{\approx} \mathscr{O}^r_{\ln t}, \, d\mathscr{O}^r_t = dw_t - \tfrac{1}{2}\mathscr{O}^r_t dt, \ \mathscr{O}^r_t \geq 0$$

1

$$x_0 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \exists!\, X \quad \forall t > t_0 \ X_t \in (0,\infty), & \frac{X_t}{\sqrt{t}} \underset{t\to\infty}{\approx} \mathscr{O}^r_{\ln t} \\ \mathscr{S}_E = \{\lambda \mathbb{P}^+ + (1-\lambda)\mathbb{P}^-\}, & \mathbb{P}^\pm \sim \pm X \end{cases}$$

2 $X \in \mathbb{R}, \quad \frac{X_t}{\sqrt{t}} \underset{t\to\infty}{\approx} \mathscr{O}_{\ln t}, \quad d\mathscr{O}_t = dw_t - \frac{1}{2}\mathscr{O}_t dt$

3 $X \in \overline{\mathbb{R}}, \quad \mathbb{P}(\tau_e = \infty) \in (0,1), \quad \frac{X_t}{\sqrt{t}} \underset{t\to\infty}{\approx} \mathscr{O}_{\ln t}, \quad$ under $\mathbb{P}(\,\cdot\,|\tau_e = \infty)$

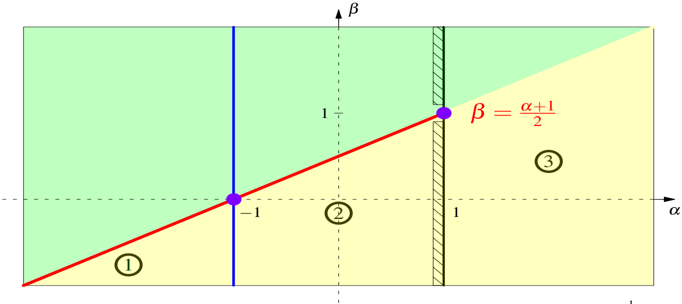
$$dX_t = dB_t + \rho \,\mathrm{sgn}(X_t)|X_t|^\alpha \;/\; t^\beta dt, \quad \text{(E)}$$

Théorème

Au dessus de la droite critique $\beta > \frac{\alpha+1}{2}$ *la diffusion* X *est* **récurrent** *et a un comportement asymptotique type mouvement Brownien (ou mouvement Brownien réfléchie) dans le sens ou :*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{X_t}{\sqrt{t}} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathcal{N}(0,1) \quad (ou\ |\mathcal{N}(0,1)|), \quad \limsup_{t\to\infty} \frac{X_t}{\sqrt{2t \ln \ln t}} \stackrel{p.s.}{=} 1$$

$$dX_t = dB_t + \rho \operatorname{sgn}(X_t)|X_t|^\alpha \,/\, t^\beta dt, \quad \text{(E)}$$



1 $x_0 \in (0,\infty) \Rightarrow X \in (0,\infty)$, $\quad (T) : X_t \underset{t\to\infty}{\overset{p.s.}{\sim}} c\, t^{\frac{1-\beta}{1-\alpha}}$, $\quad c = \left(\frac{\rho(1-\alpha)}{1-\beta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$

$x_0 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \exists!\, X \quad \forall t > t_0\ X_t \in (0,\infty), & (T) \\ \mathscr{S}_E = \{\lambda \mathbb{P}^+ + (1-\lambda)\mathbb{P}^-\}, & \mathbb{P}^\pm \sim \pm X \end{cases}$

2 $X \in \mathbb{R}$, $\quad |X_t| \underset{t\to\infty}{\overset{p.s.}{\sim}} c\, t^{\frac{1-\beta}{1-\alpha}}$

3 $X \in \overline{\mathbb{R}}$, $\quad \mathbb{P}(\tau_e = \infty) = 0$

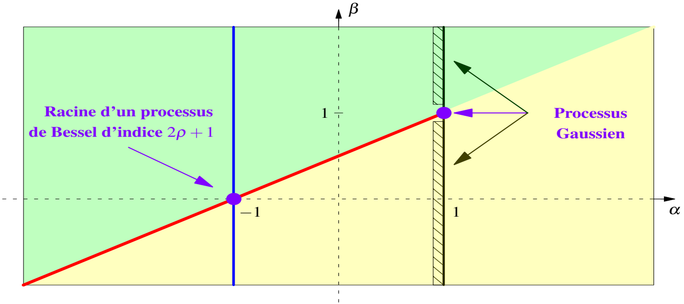
$$dX_t = dB_t + \rho\, \mathrm{sgn}(X_t)|X_t|^\alpha \;/\; t^\beta dt, \quad (E)$$

Théorème

En dessous de la droite critique $\beta < \frac{\alpha+1}{2}$ *la diffusion* X *est* **transiente** *et a le comportement asymptotique de la solution du systeme déterministe :*

$$dx_t = \rho\, \mathrm{sgn}(x_t)\frac{|x_t|^\alpha}{t^\beta}dt$$

$$dX_t = dB_t + \rho \operatorname{sgn}(X_t)|X_t|^\alpha \,/\, t^\beta dt, \quad \text{(E)}$$



$\frac{X_t}{\sqrt{t}} \equiv \zeta_{\ln t}, \quad d\zeta_t = dw_t + (\rho \operatorname{sgn}(\zeta_t)|\zeta_t|^\alpha - \frac{1}{2}\zeta_t)dt$

$x_0 \in [0, \infty) \Rightarrow \exists!\, X \in [0, \infty)$

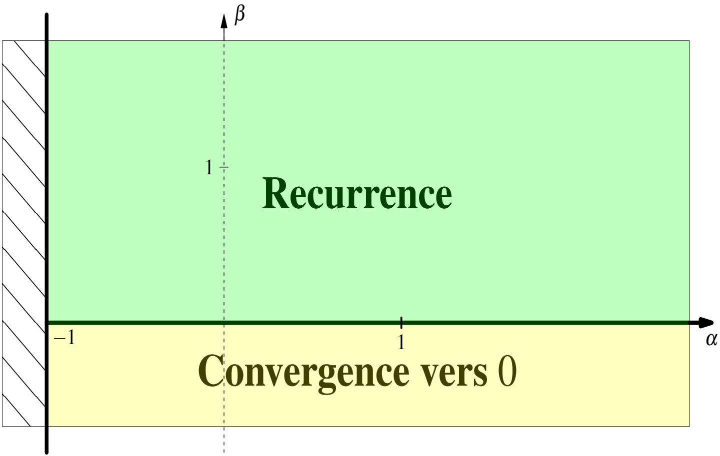
$$dX_t = dB_t + \rho \,\mathrm{sgn}(X_t)|X_t|^\alpha \;/\; t^\beta dt, \quad \text{(E)}$$

Théorème

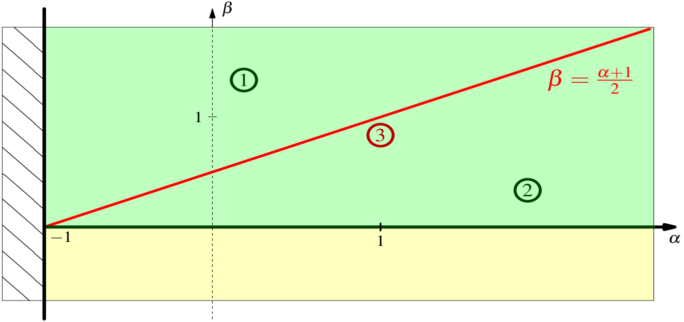
Sur la droite critique $\beta = \frac{\alpha+1}{2}$ la diffusion X est **recurrente** *et*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{X_t}{\sqrt{t}} \overset{\mathcal{L}}{=} \mu, \quad \limsup_{t\to\infty} \frac{X_t}{\sqrt{2t \ln\ln t}} \overset{p.s.}{=} 1$$

$$dX_t = dB_t + \rho \operatorname{sgn}(X_t)|X_t|^\alpha \,/\, t^\beta dt, \quad \text{(E)}$$



$$dX_t = dB_t + \rho\,\mathrm{sgn}(X_t)|X_t|^\alpha \;/\; t^\beta dt, \quad (\mathrm{E})$$



1 $\quad \frac{X_t}{\sqrt{t}} \underset{t\to\infty}{\approx} \mathscr{O}_{\ln t}, \qquad \mathscr{O} \equiv O.U$

2 $\quad \frac{X_t}{t^{\gamma/2}} \underset{t\to\infty}{\approx} y_{\frac{t^{1-\gamma}}{1-\gamma}}, \qquad dy_t = dw_t + \rho\,\mathrm{sgn}(y_t)|y_t|^\alpha dt, \qquad \gamma = \frac{2\beta}{\alpha+1}$

3 $\quad \frac{X_t}{\sqrt{t}} \underset{t\to\infty}{\approx} \zeta_{\ln t}, \qquad d\zeta_t = dw_t + (\rho\,\mathrm{sgn}(\zeta_t)|\zeta_t|^\alpha - \frac{1}{2}\zeta_t)dt$

Théorème

Pour $\beta \geq 0$ la diffusion X est recurrente et

i) *Au dessus de la droite critique X est recurrent et a un comportement asymptotique type mouvement Brownien.*

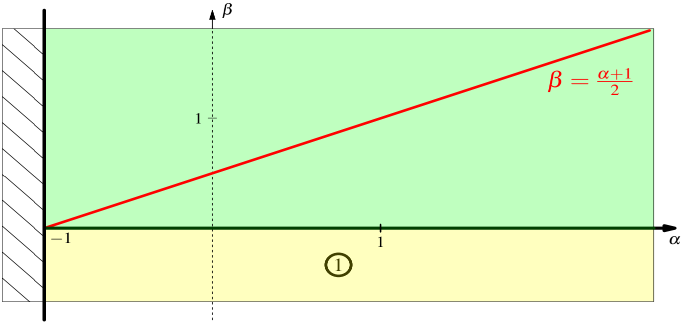
ii) *Sur la droite critique*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{X_t}{\sqrt{t}} \overset{\mathcal{L}}{=} \mu, \quad \limsup_{t\to\infty} \frac{X_t}{(2t \ln \ln t)^{\frac{1}{\alpha\vee 1+1}}} \overset{p.s.}{=} c$$

iii) *Au dessous de la droite critique*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{X_t}{t^{\frac{\beta}{\alpha+1}}} \overset{\mathcal{L}}{=} \nu, \quad \limsup_{t\to\infty} \frac{X_t}{t^{\frac{\beta}{\alpha+1}} (\ln t)^{\frac{1}{\alpha+1}}} \overset{p.s.}{=} c$$

$$dX_t = dB_t + \rho\,\mathrm{sgn}(X_t)|X_t|^\alpha \;/\; t^\beta dt, \quad \text{(E)}$$



$$① \quad \frac{X_t}{t^{\gamma/2}} \underset{t\to\infty}{\approx} y_{\frac{t^{1-\gamma}}{1-\gamma}}, \quad dy_t = dw_t + \rho\,\mathrm{sgn}(y_t)|y_t|^\alpha dt, \quad \gamma = \frac{2\beta}{\alpha+1}$$

Théorème

Pour $\beta < 0$ la diffusion X converge vers 0 et

$$\lim_{t\to\infty} \frac{X_t}{t^{\frac{\beta}{\alpha+1}}} \overset{\mathcal{L}}{=} \nu, \quad \limsup_{t\to\infty} \frac{X_t}{t^{\frac{\beta}{\alpha+1}} (\ln t)^{\frac{1}{\alpha+1}}} \overset{p.s.}{=} c$$

$dX_t = dB_t + \rho\, \mathrm{sgn}(X_t)|X_t|^\alpha \,/\, t^\beta dt, \quad$ (E)

i) Terme de dérive $b(t,x) = g(t)f(x)$, $f(t) \sim \rho t^{-\beta}$ et $f(x) \sim x^\alpha$

ii) Terme diffusion $\varepsilon \leq \sigma \leq K$

iii) En dimension supérieures.

iv) Equation dirigé par un processus h-stable B.

v) Diffusion en **environement aléatoire** avec **potentiel** :

$$V(t,x) = \frac{W(x)}{t^\beta}, \quad \{W(x) | x \in \mathbb{R}\} \quad \alpha + 1 - \text{stable}$$

- A.S. Cherny, H.-J. Engelbert *Singular Stochastic Differential Equations*, LNM 1858, Springer Verlag, 2004.
- D.A. Freedman, Bernard Friedman's urn, Ann. Math. Statist. **36** (1965), 956-970.
- M. Menshikov, S. Volkov Urn-related random walk with drift $\rho\, x^\alpha \,/\, t^\beta$, Elec. J. Probab. **13** (2008), p. 944-960.
- M. Motoo, Proof of the law of iterated logarithm through diffusion equation, Ann. Inst. Statist. Math. **10** (1959), 21-28.
- K. Narita, Remarks on non-explosion theorem for stochastic differential equations, Kodai Math. J. **5** (1982), 395-401.

Merci

$$dX_t = dB_t + \rho\, \mathrm{sgn}(X_t)|X_t|^\alpha \,/\, t^\beta dt, \quad \text{(E)}$$

Soit φ un changement de temps et posons $Y_s := \dfrac{X_{\varphi(s)}}{\sqrt{\varphi'(s)}}$

$$dY_s = dW_s + \rho\, \frac{\varphi'(s)^{\frac{\alpha+1}{2}}}{\varphi(s)^\beta} \mathrm{sgn}(Y_s)|Y_s|^\alpha ds - \frac{1}{2}\frac{\varphi''(s)}{\varphi'(s)} Y_s ds \qquad \text{(E")}$$

$$dX_t = dB_t + \rho \, \mathrm{sgn}(X_t)|X_t|^\alpha \ / \ t^\beta dt, \quad \text{(E)}$$

Soit φ un changement de temps et posons $Y_s := \dfrac{X_{\varphi(s)}}{\sqrt{\varphi'(s)}}$

$$dY_s = dW_s + \rho \, \frac{\varphi'(s)^{\frac{\alpha+1}{2}}}{\varphi(s)^\beta} \mathrm{sgn}(Y_s)|Y_s|^\alpha ds - \frac{1}{2} \frac{\varphi''(s)}{\varphi'(s)} Y_s ds \qquad \text{(E")}$$

Idée : Bien choisir φ dans le but d'étudier (E") et de se ramener au cas **homogène**

Exemples intéressants : $\varphi(s) = e^s$ et $\varphi'(s) = \varphi(s)^\gamma, \ \gamma = \frac{2\beta}{\alpha+1}$

$$dY_s = dW_s + \rho\, \frac{\varphi'(s)^{\frac{\alpha+1}{2}}}{\varphi(s)^{\beta}} \operatorname{sgn}(Y_s)|Y_s|^{\alpha} ds - \frac{1}{2}\frac{\varphi''(s)}{\varphi'(s)} Y_s ds$$

$$\beta = \tfrac{\alpha+1}{2}, \quad \varphi(s) = e^s$$

$$dY_s = dW_s + \rho \operatorname{sgn}(Y_s)|Y_s|^{\alpha} ds - \frac{1}{2} Y_s ds \qquad \text{(E")}$$

$\Longrightarrow$ Description des solutions, du temps d'explosion et du comportement asymptotique (recurrence, transience, convergence en loi, loi du type logarithme itéré...)

$$dY_s = dW_s + \rho\,\frac{\varphi'(s)^{\frac{\alpha+1}{2}}}{\varphi(s)^{\beta}}\operatorname{sgn}(Y_s)|Y_s|^{\alpha}ds - \frac{1}{2}\frac{\varphi''(s)}{\varphi'(s)}Y_s ds$$

$$\varphi'(s) = \varphi(s)^{\gamma},\ \gamma = \frac{2\beta}{\alpha+1}$$

$$\underbrace{dY_s = dW_s + \rho\,\operatorname{sgn}(Y_s)|Y_s|^{\alpha}ds}_{(E")} - \frac{\gamma}{2}\frac{Y_s}{1+(1-\gamma)s}ds \qquad \text{(E")}$$

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Etude de (E")}\\ \text{Girsanov}\end{array}\right. \overset{Description}{\Longrightarrow} \left\{\begin{array}{c}\text{Ensemble des solutions pour } \alpha < 0\\ \text{Temps d'explosion } \tau_e \text{ pour } \alpha > 1\\ \text{Asymptotiques pour } \rho < 0, \beta < \frac{\alpha+1}{2}\end{array}\right.$$

$$dY_s = dW_s + \rho \, \frac{\varphi'(s)^{\frac{\alpha+1}{2}}}{\varphi(s)^{\beta}} \mathrm{sgn}(Y_s)|Y_s|^{\alpha} ds - \frac{1}{2}\frac{\varphi''(s)}{\varphi'(s)} Y_s ds$$

$$\varphi(s) = e^s$$

$$\underbrace{dY_s = dW_s - \frac{1}{2} Y_s ds}_{(E")} + \rho \, e^{\left(\frac{\alpha+1}{2} - \beta\right)} \mathrm{sgn}(Y_s)|Y_s|^{\alpha} ds \qquad \text{(E")}$$

Etude de (E") $\stackrel{Description}{\Longrightarrow}$ Asymptotiques pour $\beta > \frac{\alpha+1}{2}$

$$dX_t = dB_t + \rho \operatorname{sgn}(X_t)|X_t|^\alpha \;/\; t^\beta dt, \quad \text{(E)}$$

Pour la **transience** $\rho > 0, \beta < \frac{\alpha+1}{2}$, l'idée est de considérer

$$S_t := \left(\frac{X_t}{c\ t^{\frac{1-\beta}{1-\alpha}}}\right)^2, \quad c = \left(\frac{\rho(1-\beta)}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

de remarquer que (S_t) est une **surmartingale** (une **sous martingale**) pour $\{S_t > 1\}$ ($\{S_t < 1\}$) et de montrer que

$$\lim_{t\to\infty} S_t \overset{p.s}{=} 1, \quad \alpha < 1$$