

Décorrélations hilbertiennes

Rémi Peyre

Unité de Mathématiques Pures et Appliquées
École Normale Supérieure de Lyon

IX^e colloque « Jeunes Probabilistes et Statisticiens »
Le Mont-Dore, 2010

Plan

1 Problématique

Étude de cas : modèle d'Ising sous-critique

Objectif

2 ρ -mélange

Définition

Exemples

3 Un résultat de tensorisation

Théorème principal

Applications

Plan

1 Problématique

Étude de cas : modèle d'Ising sous-critique

Objectif

2 ρ -mélange

Définition

Exemples

3 Un résultat de tensorisation

Théorème principal

Applications

Le modèle d'Ising

Le modèle d'Ising modélise un matériau ferromagnétique.

- Sur chaque nœud du réseau \mathbb{Z}^d , un spin à valeurs dans $\{\pm 1\}$.
- Deux spins voisins tendent à s'aligner.

L'état du système est noté $\omega \in \{\pm 1\}^{\mathbb{Z}^d}$, où l'état du spin i est ω_i .

$$\text{Énergie : } H(\omega) = \sum_{i \sim j} \mathbf{1}(\omega_i \neq \omega_j).$$

$$\text{Mesure de Gibbs : } \mathbb{P}(\omega) \propto e^{-H(\omega)/T}.$$

Décorrélacion entre spins

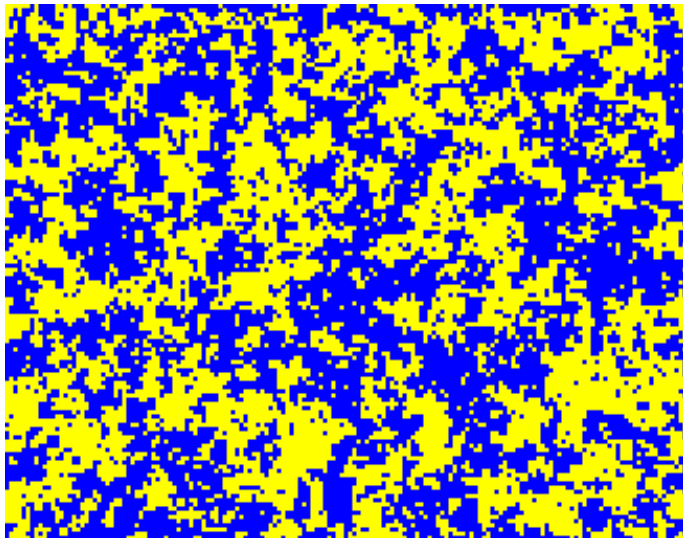
À l'équilibre thermodynamique :

- Il n'y a pas d'aimantation globale¹ ($\mathbb{E}[\omega_i] = 0$);
- *Mais* les spins proches présentent quand même une corrélation ($\mathbb{E}[\omega_i \omega_j] > 0$).

Les corrélations décroissent exponentiellement avec la distance entre spins.

¹ On supposera qu'on se place au-delà de la température de Curie.

Décorrélation entre spins



Décorrélation entre spins

À l'équilibre thermodynamique :

- Il n'y a pas d'aimantation globale¹ ($\mathbb{E}[\omega_i] = 0$);
- *Mais* les spins proches présentent quand même une corrélation ($\mathbb{E}[\omega_i \omega_j] > 0$).

Les corrélations décroissent exponentiellement avec la distance entre spins.

¹ On supposera qu'on se place au-delà de la température de Curie.

Décorrélations entre groupes de spins

Deux spins distants ont donc peu d'information en commun.

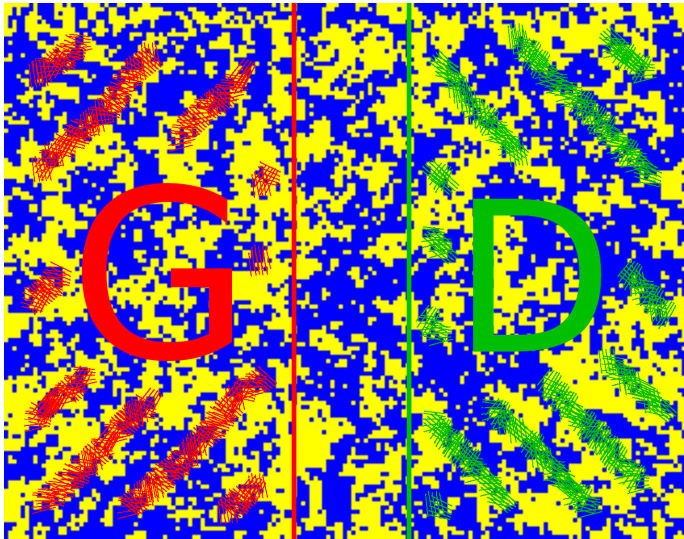
Qu'en est-il pour des *groupes* de spins, p. ex. deux demi-espaces ?

Réponse :

- La loi de (ω_G, ω_D) est étrangère au produit de ses marginales : « le coefficient de β -corrélacion de ω_G et ω_D est maximal ».
- Néanmoins, on peut montrer² que le *coefficient de ρ -corrélacion* de ω_G et ω_D décroît exponentiellement avec la distance entre G et D .

² Avec des techniques d'analyse spectrale très spécifiques

Décorrélations entre groupes de spins



Décorrélations entre groupes de spins

Deux spins distants ont donc peu d'information en commun.

Qu'en est-il pour des *groupes* de spins, p. ex. deux demi-espaces ?

Réponse :

- La loi de (ω_G, ω_D) est étrangère au produit de ses marginales : « le coefficient de β -corrélation de ω_G et ω_D est maximal ».
- Néanmoins, on peut montrer² que le *coefficient de ρ -corrélation* de ω_G et ω_D décroît exponentiellement avec la distance entre G et D .

² Avec des techniques d'analyse spectrale très spécifiques

Décorrélations entre groupes de spins

Deux spins distants ont donc peu d'information en commun.

Qu'en est-il pour des *groupes* de spins, p. ex. deux demi-espaces ?

Réponse :

- La loi de (ω_G, ω_D) est étrangère au produit de ses marginales : « le coefficient de β -corrélacion de ω_G et ω_D est maximal ».
- Néanmoins, on peut montrer² que le *coefficient de ρ -corrélacion* de ω_G et ω_D décroît exponentiellement avec la distance entre G et D .

² Avec des techniques d'analyse spectrale très spécifiques.

Objectifs

- Étudier la ρ -corrélation ;
- Démontrer la propriété de ρ -mélange du modèle d'Ising dans un cadre plus naturel ;
- Généraliser à d'autres modèles.

Plan

1 Problématique

Étude de cas : modèle d'Ising sous-critique

Objectif

2 ρ -mélange

Définition

Exemples

3 Un résultat de tensorisation

Théorème principal

Applications

Définition de base

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et \mathcal{A}, \mathcal{B} deux sous-tribus de \mathcal{F} . Le coefficient de ρ -mélange (ou *corrélacion maximale*, ou *corrélacion hilbertienne*) entre \mathcal{A} et \mathcal{B} est défini par

$$\{\mathcal{A} : \mathcal{B}\} := \sup_{\substack{f \in L^2(\mathcal{A}) \\ g \in L^2(\mathcal{B})}} \frac{\text{Cov}(f, g)}{\text{Var}(f)^{1/2} \text{Var}(g)^{1/2}}.$$

Ou encore :

$$\{\mathcal{A} : \mathcal{B}\} = \sup_{\substack{f \in L^2(\mathcal{A}), \mathbb{E}[f]=0 \\ g \in L^2(\mathcal{B}), \mathbb{E}[g]=0}} \frac{|\mathbb{E}[fg]|}{\mathbb{E}[f^2]^{1/2} \mathbb{E}[g^2]^{1/2}}.$$

Décorrélation subjective

Définition

Soient \mathcal{A}, \mathcal{B} deux sous-tribus et Z une variable aléatoire. On définit la *corrélacion subjective* $\{\mathcal{A} : \mathcal{B}\}_Z$ entre \mathcal{A} et \mathcal{B} par rapport à Z comme le supremum³ des valeurs de $\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\}$ sous les différentes lois conditionnelles $\mathbb{P}(\cdot | Z = z)$.

En termes hilbertiens :

$$\{\mathcal{A} : \mathcal{B}\}_Z = \sup_{\substack{f \in L^2(\mathcal{A} \vee \sigma(Z)), \mathbb{E}[f|Z] \equiv 0 \\ g \in L^2(\mathcal{B} \vee \sigma(Z)), \mathbb{E}[g|Z] \equiv 0}} \frac{|\mathbb{E}[fg]|}{\mathbb{E}[f^2]^{1/2} \mathbb{E}[g^2]^{1/2}}.$$

³ Plus précisément, le supremum essentiel.

Le cas gaussien

Proposition

Pour (X, Y) un vecteur gaussien $(N + M)$ -dimensionnel de matrice de covariance

$$\text{Cov}(X, Y) = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_N & C \\ C^T & \mathbf{I}_M \end{pmatrix},$$

on a $\{X : Y\} = \|C\|$, la norme d'opérateur⁴ de l'application linéaire canoniquement associée à C .

⁴ Pour les normes euclidiennes.

Tensorisation indépendante

Théorème (facile)

Pour I un ensemble au plus dénombrable, soient $(X_i, Y_i)_{i \in I}$ des couples indépendants de variables aléatoires⁵. Notons \vec{X} , resp. \vec{Y} , les variables aléatoires « vectorielles » $(X_i)_{i \in I}$ et $\vec{Y} = (Y_i)_{i \in I}$. Alors :

$$\{\vec{X} : \vec{Y}\} = \sup_{i \in I} \{X_i : Y_i\}.$$

⁵ Nota : X_i et Y_i ne sont pas supposés indépendants.

Plan

1 Problématique

Étude de cas : modèle d'Ising sous-critique

Objectif

2 ρ -mélange

Définition

Exemples

3 Un résultat de tensorisation

Théorème principal

Applications

Théorème de tensorisation

Théorème

Pour I et J des ensembles au plus dénombrables, soient $(X_i)_{i \in I}$ et $(Y_j)_{j \in J}$ des variables aléatoires. Alors :

$$\{\vec{X} : \vec{Y}\} \leq \left\| \left(\left(\{X_i : Y_j\}_* \right) \right)_{i,j} \right\|.$$

Application au modèle d'Ising


Théorème

Soit \mathbb{P} la loi du modèle d'Ising⁶. Il existe des constantes $\psi > 0$ (la même que pour la décorrélation des spins individuels) et $C < \infty$ telles que, pour I et J deux sous-ensembles de \mathbb{Z}^d , on ait

$$\{\omega_I : \omega_J\} \leq C \exp(-\psi \operatorname{dist}(I, J)).$$

En outre, il existe une constante $C < 1$ telle que, pour tous I, J disjoints,

$$\{\omega_I : \omega_J\} \leq C.$$

⁶ À une température arbitraire au-delà de la température de Curie. 

Autres modèles

- La machinerie de tensorisation s'applique dans un cadre très général :
 - Modèles à espace d'états continu.
 - Interactions à portée infinie.
 - Décroissance polynomiale des corrélations.
 - ...
- Exemple d'application « exotique » : contractivité stricte du noyau d'un processus markovien non réversible (hypocoercivité).


Autres modèles


- La machinerie de tensorisation s'applique dans un cadre très général :
 - Modèles à espace d'états continu.
 - Interactions à portée infinie.
 - Décroissance polynomiale des corrélations.
 - ...
- Exemple d'application « exotique » : contractivité stricte du noyau d'un processus markovien non réversible (hypocoercivité).

Résumé

- Le ρ -**mélange** met en évidence certaines décorrélations entre groupe de particules.
- On peut **tensoriser** le ρ -mélange, y compris quand l'indépendance n'est que partielle.

Bibliographie

 Richard C. Bradley.
Introduction to Strong Mixing Conditions.
Kendrick Press, 2007.

 Rémi Peyre.
Hilbertian decorrelations.
arXiv:1004.1602