

Le modèle de Dothan révisité

Caroline Pintoux – Poitiers
Journées Jeunes probabilistes et statisticiens - Mont-Dore

Directeurs: N. Privault (City University, Hong Kong), Marc Arnaudon (Poitiers)

07 May 2010

1 Introduction

2 Résultats de Dothan

- Formule explicite générale de Dothan
- Discussion sur des courbes

3 Problèmes et solutions

- Résolution de l' EDP de deux façons
- Comparaison avec Dothan

Les fonctionnelles du mouvement Brownien de la forme

$$\mathcal{A}_t^\phi = \int_0^t \phi(s, B_s) ds$$

avec $(B_s)_{s \in \mathbb{R}_+}$ jouent un rôle important en physique statistique (free energy of disordered systems) ainsi qu'en mathématiques financières pour déterminer entre autres des prix de bonds ou d'options Asiatiques.

Les fonctionnelles du mouvement Brownien de la forme

$$\mathcal{A}_t^\phi = \int_0^t \phi(s, B_s) ds$$

avec $(B_s)_{s \in \mathbb{R}_+}$ jouent un rôle important en physique statistique (free energy of disordered systems) ainsi qu'en mathématiques financières pour déterminer entre autres des prix de bonds ou d'options Asiatiques.

La transformée de Laplace

$$F(t, x) = \mathbb{E} [\exp(-x \mathcal{A}_t)]$$

est la solution principale d'une EDP du deuxième ordre.

- L. U. Dothan. *On the Term Structure of Interest Rates* (1978)
- A. Comtet and C. Monthus *On the flux distribution in a one dimensional disordered system* (1994)
- A. N. Borodin and P. Salminen *Handbook of brownian motion - Facts and formulae* (1996)
- V. Linetsky *Spectral expansions for Asian (average price) options* (2004)
- H. Matsumoto and M. Yor *Exponential functionals of Brownian motion. Probability laws at fixed time* (2005)
- C. Pintoux and N. Privault *The Dothan pricing model revisited. To appear in Mathematical Finance* (2010)

Chan-Karolyi-Longstaff-Sanders (1992) *An empirical comparison of alternative models of the short term interest rate.*

Chan-Karolyi-Longstaff-Sanders (1992) *An empirical comparison of alternative models of the short term interest rate.*

$$dr_t = \{\alpha + \beta r_t\} dt + \sigma r_t^\gamma dB_t.$$

Chan-Karolyi-Longstaff-Sanders (1992) *An empirical comparison of alternative models of the short term interest rate.*

$$dr_t = \{\alpha + \beta r_t\} dt + \sigma r_t^\gamma dB_t.$$

- Merton (1973)

$$\beta = 0 \quad \gamma = 0.$$

- Vasicek (1977)

$$\gamma = 0.$$

- CIR(1985)

$$\gamma = \frac{1}{2}.$$

Chan-Karolyi-Longstaff-Sanders (1992) *An empirical comparison of alternative models of the short term interest rate.*

$$dr_t = \{\alpha + \beta r_t\} dt + \sigma r_t^\gamma dB_t.$$

- Merton (1973)

$$\beta = 0 \quad \gamma = 0.$$

- Vasicek (1977)

$$\gamma = 0.$$

- CIR(1985)

$$\gamma = \frac{1}{2}.$$

- Dothan (1978)

$$\alpha = 0 \quad \gamma = 1.$$

EDP pour le prix de bond zero-coupon

Le taux court est un Brownien géométrique donné par

$$dr_t = \sigma r_t dB_t + \frac{\sigma^2}{2} (1 - p) r_t dt,$$

où B_t est un mouvement Brownien standard par rapport à la mesure sans risque et $\sigma, p \in \mathbb{R}$.

EDP pour le prix de bond zero-coupon

Le taux court est un Brownien géométrique donné par

$$dr_t = \sigma r_t dB_t + \frac{\sigma^2}{2} (1 - \rho) r_t dt,$$

où B_t est un mouvement Brownien standard par rapport à la mesure sans risque et $\sigma, \rho \in \mathbb{R}$.

Le prix de l'obligation (Zero-coupon bond) $P(t, T)$ est donné par

$$P(t, T) = \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) \middle| \mathcal{F}_t \right], \quad t \leq T.$$

Le taux court est un Brownien géométrique donné par

$$dr_t = \sigma r_t dB_t + \frac{\sigma^2}{2} (1 - p) r_t dt,$$

où B_t est un mouvement Brownien standard par rapport à la mesure sans risque et $\sigma, p \in \mathbb{R}$.

Le prix de l'obligation (Zero-coupon bond) $P(t, T)$ est donné par

$$P(t, T) = \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) \middle| \mathcal{F}_t \right], \quad t \leq T.$$

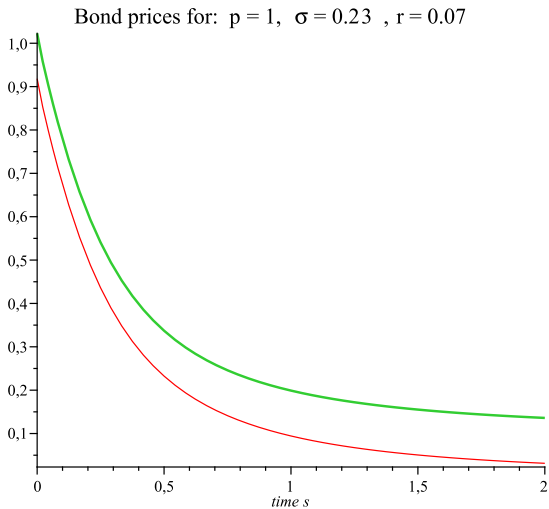
Avec $\tau := T - t$, $P(t, T) := F(\tau, r_t)$, l'absence d'arbitrage implique

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2}{2} r^2 \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{\sigma^2}{2} (1 - p) r \frac{\partial F}{\partial r} - rF.$$

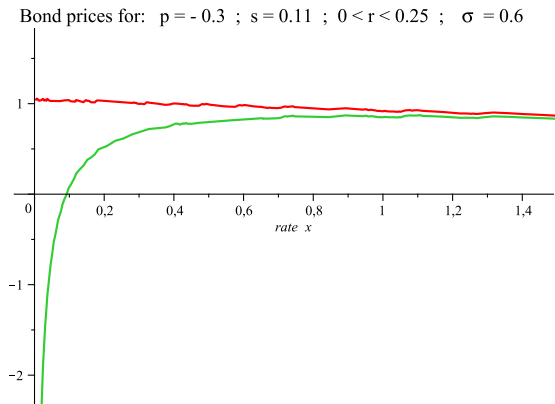
$$\begin{aligned} P(t, T) &= \frac{\sqrt{x}^p}{\pi^2} \int_0^\infty \sin(2\sqrt{x} \sinh a) \int_0^\infty \exp\left(-\frac{(p^2 + u^2)s}{4}\right) f_p(u, a) \, du \, da \\ &+ \frac{2\sqrt{x}^p}{\Gamma(p)} K_p(2\sqrt{x}), \end{aligned}$$

- $f_p(u, a) = u \cosh\left(\frac{\pi u}{2}\right) \left| \Gamma\left(-\frac{p}{2} + \frac{i u}{2}\right) \right|^2 \sin(ua),$
- $x = \frac{2r_t}{\sigma^2},$
- $s = \frac{\sigma^2 \tau}{2}.$

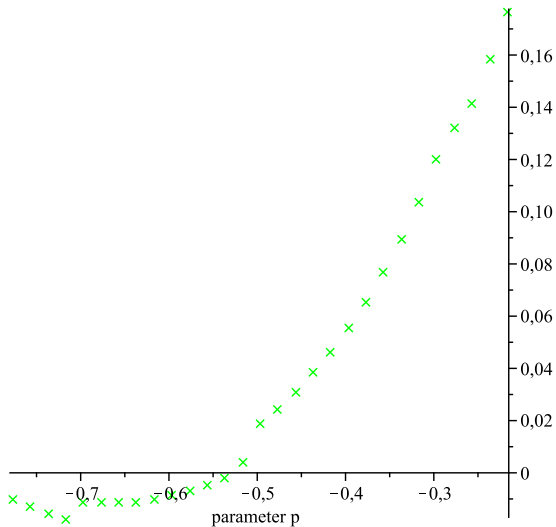
En vert: la formule de Dothan. En rouge: la formule, privée du terme de Bessel.



Forte contribution du terme de Bessel.

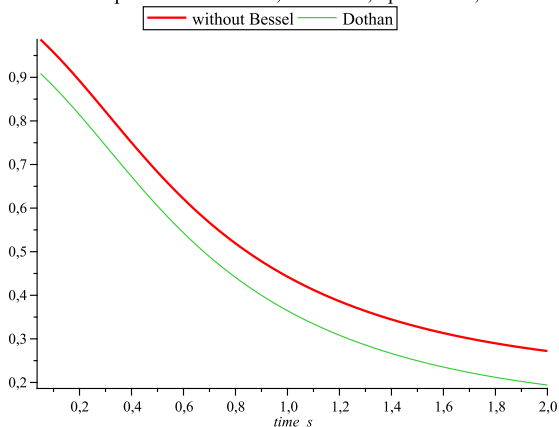


Price of Bond for: $\sigma=0.1$ $r = 0.05$



Comparison graph

Bond prices for: $\sigma = 1/3$; $r = 0.05$; $p = -0.3$;



Proposition

Pour tout $0 \leq t < T$, et $p \in \mathbb{R}$, le prix $P(t, T)$ de l'obligation est donné par

$$\begin{aligned} P(t, T) &= \frac{4^p}{\sigma^{2p}} \exp\left(-\frac{p^2 s}{2}\right) \\ &\times \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-rtu} \exp\left(-\frac{2}{\sigma^2 u} - \frac{\sigma^2 uv^2}{8}\right) \theta(v, s) \frac{du}{u^{p+1}} \frac{dv}{v^{p+1}}, \end{aligned}$$

avec

- $\theta(v, s) := \frac{ve^{\pi^2/2s}}{\sqrt{2\pi^3 s}} \int_0^\infty e^{-\xi^2/2s} e^{-v \cosh(\xi)} \sinh(\xi) \sin\left(\frac{\pi\xi}{s}\right) d\xi$
- et $s = \frac{\sigma^2(T-t)}{4}$.

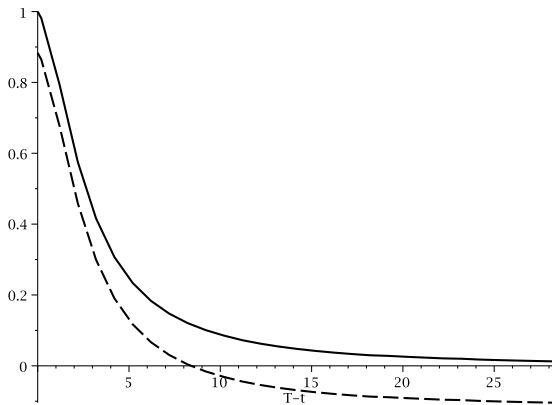
Corollaire

Le prix d'obligation zero-coupon $P(t, T) = F(T - t, r_t)$ est donné pour tout $p < 1$ par

$$F(\tau, r) =$$

$$2e^{-\sigma^2 p^2 \tau / 8} \int_0^{+\infty} \left(v^2 + \frac{8r}{\sigma^2} \right)^{p/2} \theta \left(v, \frac{\sigma^2 \tau}{4} \right) K_p \left(v^2 + \frac{8r}{\sigma^2} \right) \frac{dv}{v^{p+1}}.$$

$$r = 0.06, \sigma = 0.5, \rho = -0.8$$



- *Outils*: Formule de Feynman Kac, Distribution de Hartman-Watson, processus de Bessel

- *Outils*: Formule de Feynman Kac, Distribution de Hartman-Watson, processus de Bessel
- Pour $\sigma, \mu \in \mathbb{R}$, et $t > 0$ on pose

$$A_t^{(\sigma, \mu)} := \int_0^t \exp(\sigma B_s + \mu s) ds.$$

- *Outils*: Formule de Feynman Kac, Distribution de Hartman-Watson, processus de Bessel
- Pour $\sigma, \mu \in \mathbb{R}$, et $t > 0$ on pose

$$A_t^{(\sigma, \mu)} := \int_0^t \exp(\sigma B_s + \mu s) ds.$$

- Pour $0 \leq t \leq T$,

$$P(t, T) = \mathbb{E} \left[\exp \left(-x A_{T-t}^{(\sigma, -\rho\sigma^2/2)} \right) \right]_{r_t=x}.$$

- *Outils*: Formule de Feynman Kac, Distribution de Hartman-Watson, processus de Bessel
- Pour $\sigma, \mu \in \mathbb{R}$, et $t > 0$ on pose

$$A_t^{(\sigma, \mu)} := \int_0^t \exp(\sigma B_s + \mu s) ds.$$

- Pour $0 \leq t \leq T$,

$$P(t, T) = \mathbb{E} \left[\exp \left(-x A_{T-t}^{(\sigma, -\rho\sigma^2/2)} \right) \right]_{r_t=x}.$$

- On obtient

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(A_\tau^{(\sigma, \mu)} \in du, B_\tau \in dy) \\ &= \frac{\sigma}{2} e^{\mu y / \sigma - \mu^2 \tau / 2\sigma} \exp \left(\frac{2(1 + e^{\sigma y})}{\sigma^2 u} \right) \theta \left(\frac{4e^{\sigma y / 2}}{\sigma^2 u}, \frac{\sigma^2 \tau}{4} \right) \frac{du dy}{u}. \end{aligned}$$

Preuve analytique

Outils: Transformée de Laplace, équation de Fokker-Planck, noyaux de Green, développement en série de fonctions propres, nouvelle représentation intégrale pour le module au carré de la fonction Gamma

Outils: Transformée de Laplace, équation de Fokker-Planck, noyaux de Green, développement en série de fonctions propres, nouvelle représentation intégrale pour le module au carré de la fonction Gamma

- Changement de variable pour obtenir une nouvelle EDP

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial s} = (\mathbf{H} - p^2) U \\ U(0, x) = x^{-p} \end{cases}$$

Outils: Transformée de Laplace, équation de Fokker-Planck, noyaux de Green, développement en série de fonctions propres, nouvelle représentation intégrale pour le module au carré de la fonction Gamma

- Changement de variable pour obtenir une nouvelle EDP

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial s} = (\mathbf{H} - p^2) U \\ U(0, x) = x^{-p} \end{cases}$$

- Solution donnée par

$$U(s, x) = e^{-p^2 t} \int q(t, x, y) f(y) dy,$$

avec q le noyau associé à l'opérateur $\exp(\mathbf{H}t)$.

Outils: Transformée de Laplace, équation de Fokker-Planck, noyaux de Green, développement en série de fonctions propres, nouvelle représentation intégrale pour le module au carré de la fonction Gamma

- Changement de variable pour obtenir une nouvelle EDP

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial s} = (\mathbf{H} - p^2) U \\ U(0, x) = x^{-p} \end{cases}$$

- Solution donnée par

$$U(s, x) = e^{-p^2 t} \int q(t, x, y) f(y) dy,$$

avec q le noyau associé à l'opérateur $\exp(\mathbf{H}t)$.

- Développement en série de fonctions propres de la densité de probabilité de \mathcal{A}_t . Pour $p < 0$, spectre continu et pour $p \geq 0$, spectre avec partie continue et partie discrète.

Proposition

Grâce à la représentation intégrale suivante

$$q(t, x, y) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^\infty u e^{-u^2 t/2} \sinh(\pi u) K_{iu}(e^y) K_{iu}(e^x) du,$$

pour tout $p \in \mathbb{R}$, le prix de l'obligation est donné par

$$\begin{aligned} P(t, T) &= \frac{2^{p+1} (\sqrt{2r_t})^p}{\pi^2 \sigma^p} e^{-p^2 \sigma^2 (T-t)/8} \\ &\times \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-py} u \sinh(\pi u) e^{-\frac{u^2 \sigma^2 (T-t)}{8}} K_{iu}(2\sqrt{2r_t}/\sigma) K_{iu}(e^y) du dy, \end{aligned}$$

$$\text{avec } x = \frac{2r_t}{\sigma^2}, \quad s = \frac{\sigma^2 T}{2}.$$

Proposition

Pour $p < 0$, on a

$$P(t, T) = \frac{\sqrt{x}^p}{\pi^2} \int_0^\infty \sin(2\sqrt{x} \sinh a) \int_0^\infty \exp\left(-\frac{(p^2 + u^2)s}{4}\right) f_p(u, a) \, du \, da$$

$$\text{avec } x = \frac{2r_t}{\sigma^2}, \quad s = \frac{\sigma^2 \tau}{2} \text{ et}$$

$$f_p(u, a) = u \cosh\left(\frac{\pi u}{2}\right) \left| \Gamma\left(-\frac{p}{2} + \frac{i u}{2}\right) \right|^2 \sin(ua).$$

Proposition

Pour $p < 0$, on a

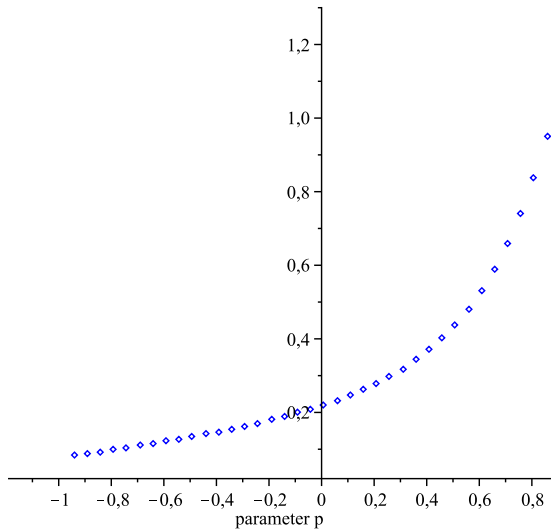
$P(t, T)$

$$= \frac{\sqrt{x}^p}{\pi^2} \int_0^\infty \sin(2\sqrt{x} \sinh a) \int_0^\infty \exp\left(-\frac{(p^2 + u^2)s}{4}\right) f_p(u, a) \, du \, da$$
$$+ \frac{2\sqrt{x}^p}{\Gamma(p)} K_p(2\sqrt{x}),$$

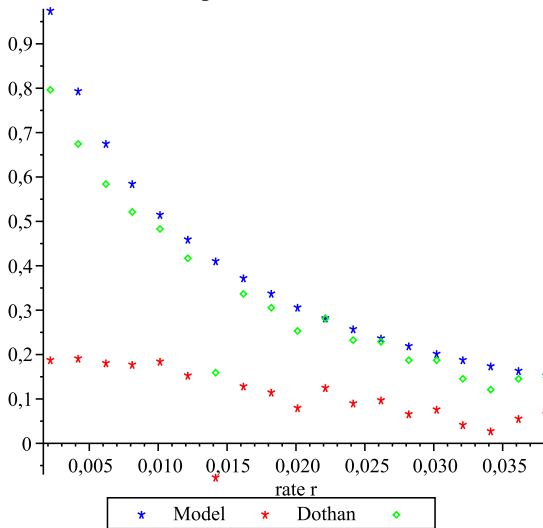
avec $x = \frac{2r_t}{\sigma^2}$, $s = \frac{\sigma^2 \tau}{2}$ et

$$f_p(u, a) = u \cosh\left(\frac{\pi u}{2}\right) \left| \Gamma\left(-\frac{p}{2} + \frac{i u}{2}\right) \right|^2 \sin(ua).$$

$\sigma = 0.66$ $r = 0.06$ $T - t = 10$



$\sigma = 0.2$ $p = 0.6251$ $T - t = 20$



Une extension de formule pour la fonction Γ

Développement en série de fonctions propres de la densité de probabilité de \mathcal{A}_t . Pour $p < 0$, spectre continu et pour $p \geq 0$, spectre avec partie continue et partie discrète.

Proposition

Pour $p + is \in \mathbb{C}$, $p \notin \mathbb{Z}$, on a

$$\begin{aligned} & \left| \Gamma \left(-\frac{p}{2} + i\frac{s}{2} \right) \right|^2 \\ &= 4 \int_0^\infty \left(\frac{2}{x} \right)^p K_{is}(x) \left(1 - \sum_{0 \leq m < p/2} \frac{2^{1-p}(p-2m)}{m!(p-m)!} K_{p-2m}(x) \right) \frac{dx}{x}. \end{aligned}$$

Prolongement analytique.

Corollaire

Pour tout $p \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} F_p(t, x) &= \frac{(2x)^{p/2}}{2\pi^2\sigma^p} \int_0^\infty u e^{-\sigma^2(p^2+u^2)t/8} \sinh(\pi u) \left| \Gamma\left(-\frac{p}{2} + i\frac{u}{2}\right) \right|^2 K_{iu}\left(\frac{\sqrt{8x}}{\sigma}\right) du \\ &\quad + \frac{(2x)^{p/2}}{\sigma^p} \sum_{k=0}^\infty \frac{2(p-2k)^+}{k!(p-k)!} e^{\sigma^2 k(k-p)t/2} K_{p-2k}\left(\frac{\sqrt{8x}}{\sigma}\right), \end{aligned}$$

$x > 0, t > 0.$