

Le modèle de pinning désordonné. Cas des corrélations à portée finie.

Julien Poisat

Institut Camille Jordan, Université Lyon 1

Introduction

Interaction polymère-interface. Transition de phase.

Introduction

Interaction polymère-interface. Transition de phase.

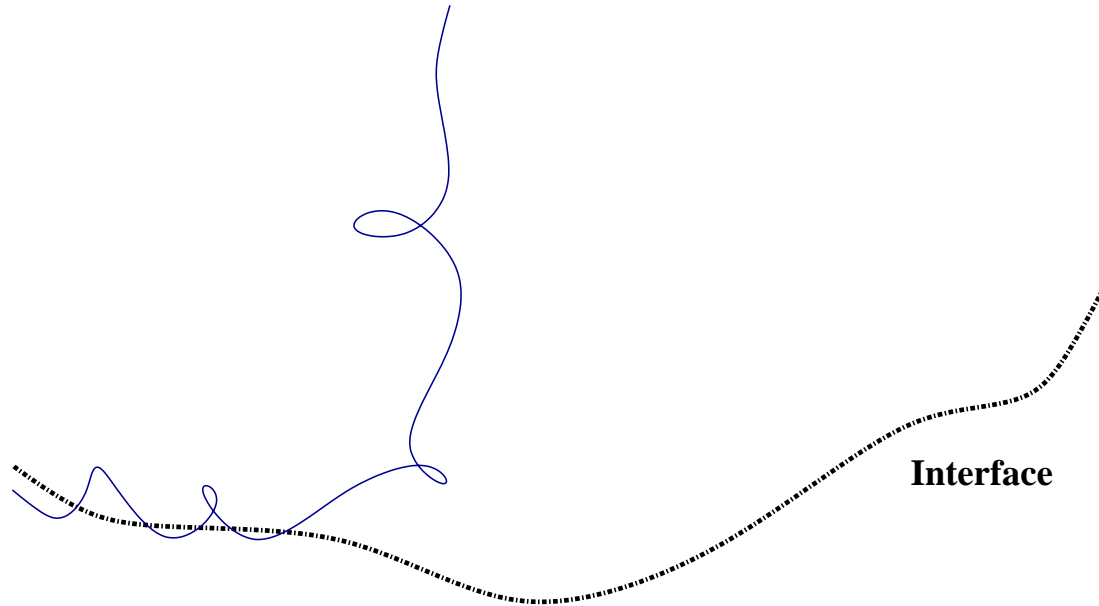


FIGURE 2 – Phase délocalisée

Introduction

Interaction polymère-interface. Transition de phase.

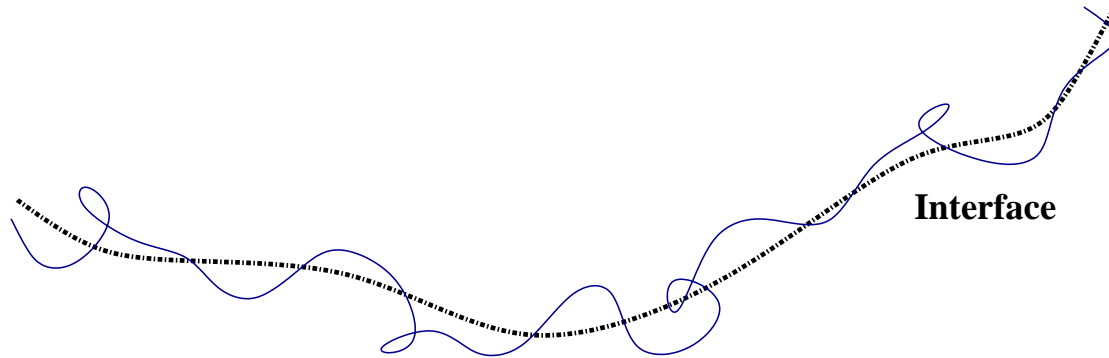


FIGURE 4 – Phase localisée

Introduction

Interaction polymère-interface. Transition de phase.

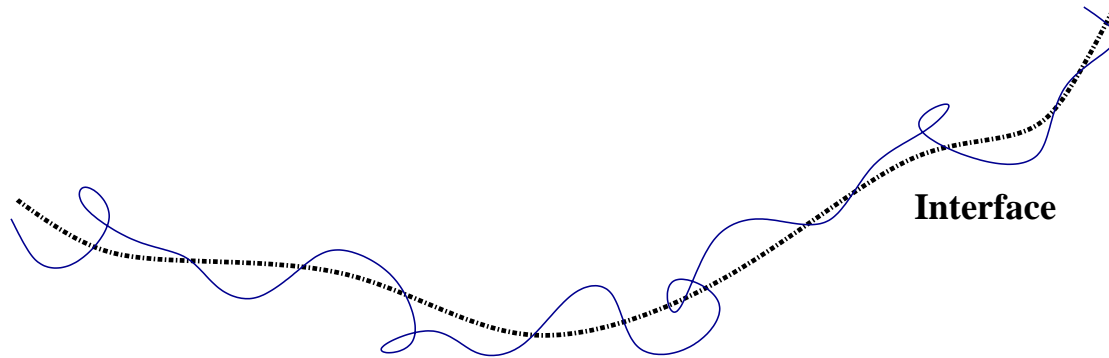
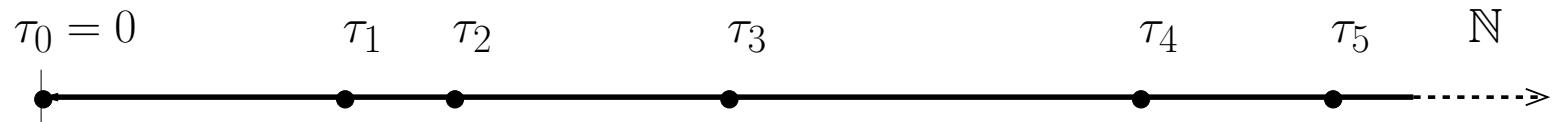


FIGURE 5 – Phase localisée

On s'intéresse aux points de contact.

Modèle discret

Les $(\tau_n)_{n \geq 0}$ sont les points de contact.



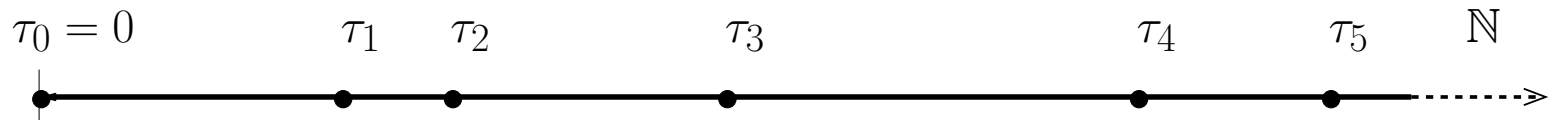
Modèle discret

Les $T_k := \tau_{k+1} - \tau_k$ sont I.I.D, de loi

$$\mathbb{P}(T_0 = n) := K(n) \sim c \times n^{-(1+\alpha)}$$

et

$$\sum_{n \geq 1} K(n) = 1$$



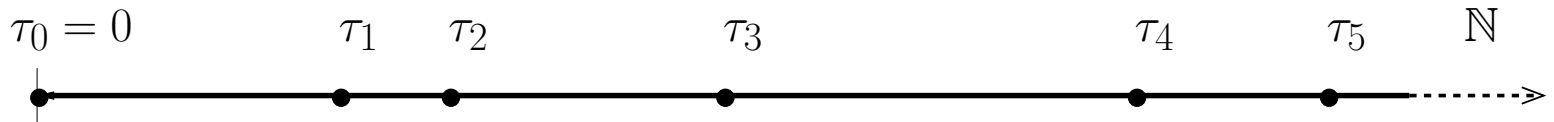
Modèle discret

On note

$$\delta_n := \mathbf{1}_{\{n \in \tau\}}$$

et on appelle **densité de contact** la quantité :

$$\mathbb{E} \left(\frac{\sum_{n=1}^N \delta_n}{N} \right).$$



Modifier la loi de τ

- Nouvelle loi pour τ :

$$\frac{d\mathbb{P}_{N,h}}{d\mathbb{P}} = \frac{1}{Z_{N,h}} \exp \left(h \sum_{n=1}^N \delta_n \right).$$

Modifier la loi de τ

- Nouvelle loi pour τ :

$$\frac{d\mathbb{P}_{N,h}}{d\mathbb{P}} = \frac{1}{Z_{N,h}} \exp \left(h \sum_{n=1}^N \delta_n \right).$$

- Fonction de partition :

$$Z_{N,h} = \mathbb{E} \left(\exp \left(h \sum_{n=1}^N \delta_n \right) \right).$$

Energie libre

- L'énergie libre

$$F(h) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \log Z_{N,h}$$

existe et est positive.

Energie libre

- L'énergie libre

$$F(h) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \log Z_{N,h}$$

existe et est positive.

- Phase localisée = énergie libre > 0 .

Energie libre

- L'énergie libre

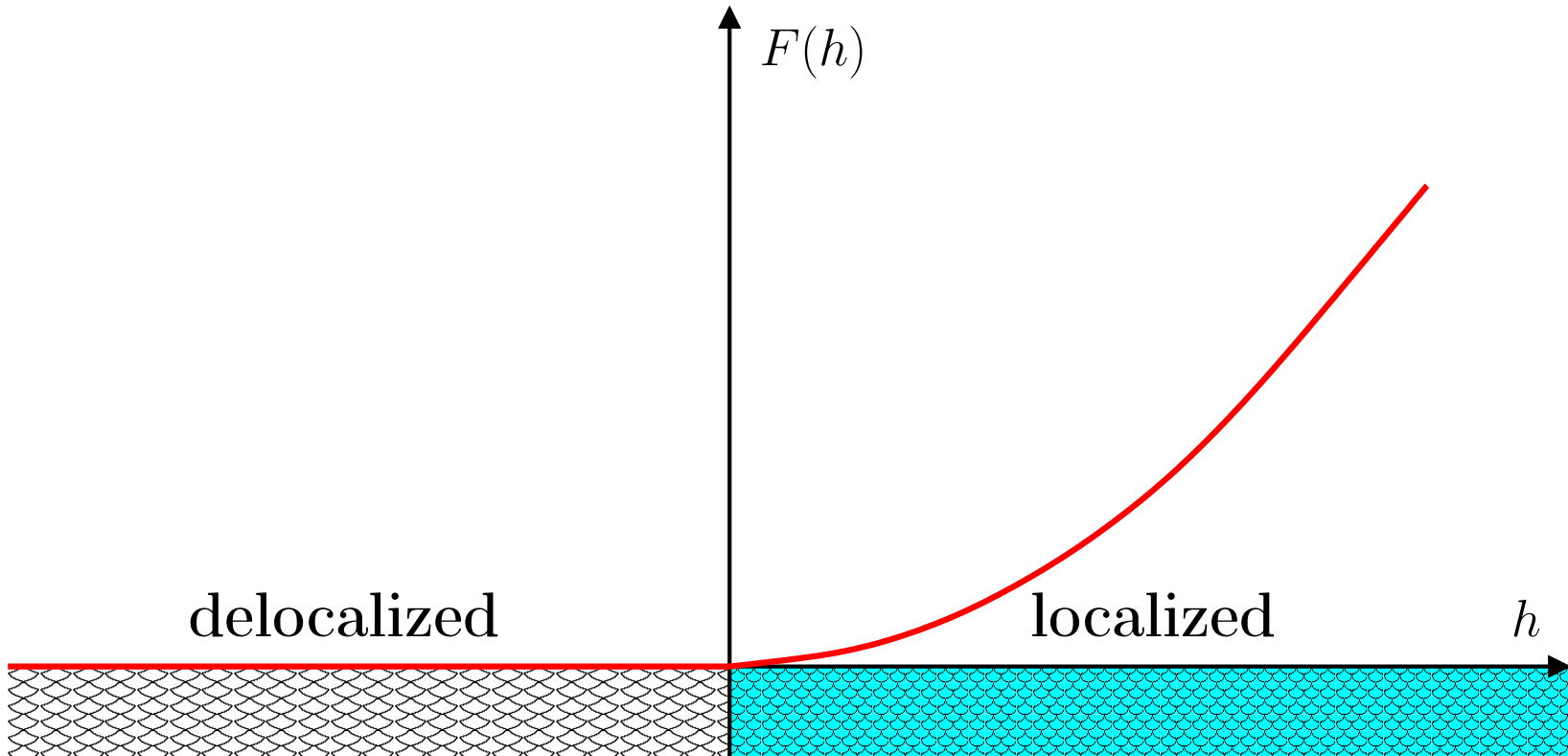
$$F(h) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \log Z_{N,h}$$

existe et est positive.

- Phase localisée = énergie libre > 0 .
- Par convexité,

$$F'(h) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{E}_{N,h} \left(\frac{\sum_{n=1}^N \delta_n}{N} \right).$$

Diagramme de phase



Modèle désordonné

Interface inhomogène : présence de charges $\omega = (\omega_n)_{n \geq 0}$ en chaque point de l'interface. Exemple : ω bruit blanc gaussien.

Modèle désordonné

Interface inhomogène : présence de charges $\omega = (\omega_n)_{n \geq 0}$ en chaque point de l'interface. Exemple : ω bruit blanc gaussien.

$$F_N(\beta, h) = \frac{1}{N} \log \mathbb{E} \left(\exp \left(\sum_{n=1}^N (h + \beta \omega_n) \delta_n \right) \right)$$

Modèle désordonné

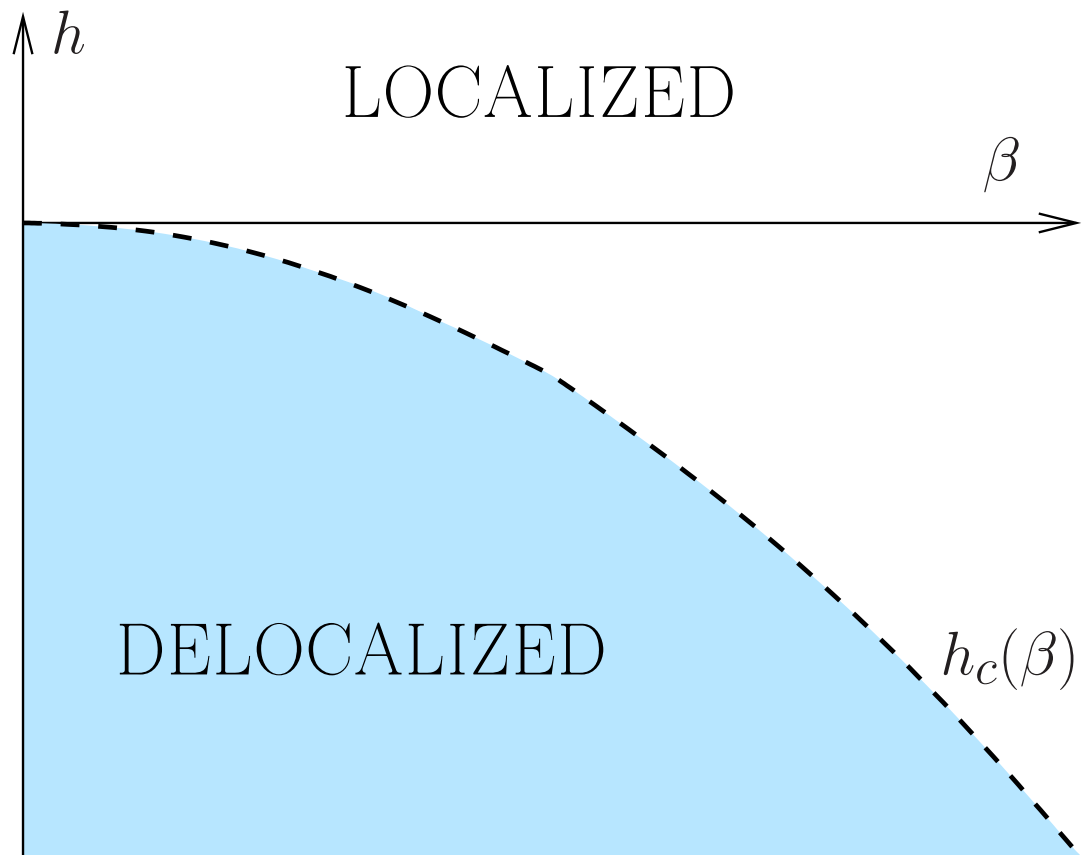
Interface inhomogène : présence de charges $\omega = (\omega_n)_{n \geq 0}$ en chaque point de l'interface. Exemple : ω bruit blanc gaussien.

$$F_N(\beta, h) = \frac{1}{N} \log \mathbb{E} \left(\exp \left(\sum_{n=1}^N (h + \beta \omega_n) \delta_n \right) \right)$$

Self-averaging : pour presque tout ω et dans $L^1(\omega)$,

$$F_N(\beta, h) \rightarrow F(\beta, h) \geq 0.$$

Diagramme de phase



Borne annealed

- Par Jensen : $\mathbb{E}_\omega F_N(\beta, h) \leq \frac{1}{N} \log \mathbb{E} \left(e^{(h+\beta^2/2) \sum_{n=1}^N \delta_n} \right)$

Borne annealed

- Par Jensen : $\mathbb{E}_\omega F_N(\beta, h) \leq \frac{1}{N} \log \mathbb{E} \left(e^{(h+\beta^2/2) \sum_{n=1}^N \delta_n} \right)$
- Donc $F(\beta, h) \leq F(0, h + \beta^2/2)$

Borne annealed

- Par Jensen : $\mathbb{E}_\omega F_N(\beta, h) \leq \frac{1}{N} \log \mathbb{E} \left(e^{(h+\beta^2/2) \sum_{n=1}^N \delta_n} \right)$
- Donc $F(\beta, h) \leq F(0, h + \beta^2/2)$
- On obtient la borne dite "annealed" :

$$h_c(\beta) \geq -\frac{\beta^2}{2} =: h_c^a(\beta)$$

Borne annealed

- Par Jensen : $\mathbb{E}_\omega F_N(\beta, h) \leq \frac{1}{N} \log \mathbb{E} \left(e^{(h+\beta^2/2) \sum_{n=1}^N \delta_n} \right)$
- Donc $F(\beta, h) \leq F(0, h + \beta^2/2)$
- On obtient la borne dite "annealed" :

$$h_c(\beta) \geq -\frac{\beta^2}{2} =: h_c^a(\beta)$$

- "Qualité" de cette borne ?

Pertinence/Non pertinence du désordre

- Réponse : cela dépend de la valeur de α .

Travaux récents :

Alexander, '08 (*grandes déviations et méthode du second moment*)

Toninelli, '08 (*méthode d'interpolation*)

Lacoin, '10 (arxiv) (*martingales*)

Pertinence/Non pertinence du désordre

- Réponse : cela dépend de la valeur de α .
- Si $\alpha < 1/2$ et β assez petit, $h_c(\beta) = h_c^a(\beta)$ (régime non-pertinent)

Travaux récents :

Alexander, '08 (*grandes déviations et méthode du second moment*)

Toninelli, '08 (*méthode d'interpolation*)

Lacoin, '10 (arxiv) (*martingales*)

Corrélations à portée finie

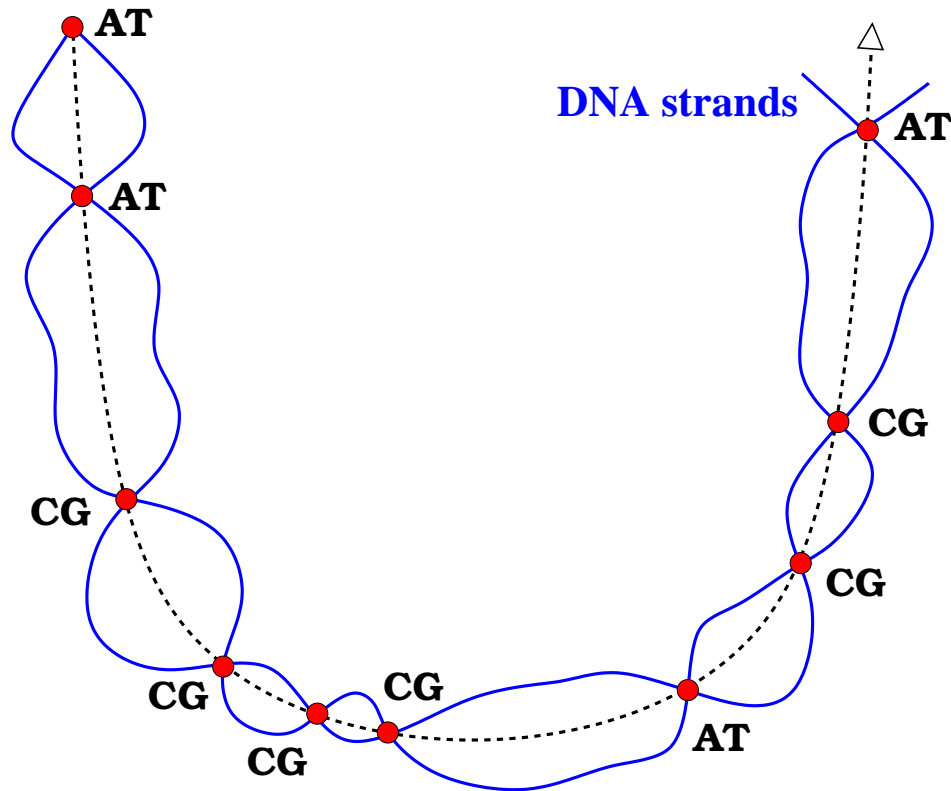


FIGURE 6 – Dégraissage de l'ADN

Corrélations à portée finie

L'existence d'une fonction d'énergie libre quenched reste vraie si ω est seulement supposée **ergodique**.

Corrélations à portée finie

L'existence d'une fonction d'énergie libre quenched reste vraie si ω est seulement supposée **ergodique**.

Nouveau cadre : ω processus gaussien centré, de variance 1, stationnaire, tel que $\rho_n := \text{Cov}(\omega_0, \omega_n) = 0$ si $n > q$

Effet sur la courbe critique annealed

On a

$$h_c(\beta) \geq h_c^a(\beta) = -\frac{\beta^2}{2} - \log \lambda(\beta)$$

où λ est la valeur propre de Perron-Frobenius d'une certaine matrice de transfert (explicite)

Effet sur la courbe critique annealed

On a

$$h_c(\beta) \geq h_c^a(\beta) = -\frac{\beta^2}{2} - \log \lambda(\beta)$$

où λ est la valeur propre de Perron-Frobenius d'une certaine matrice de transfert (explicite)

$$h_c^a(\beta) \stackrel{\beta \rightarrow 0}{\sim} -\left(1 + \sum_{n=1}^q \rho_n \mathbb{P}(n \in \tau)\right) \frac{\beta^2}{2}$$

Effet sur la courbe critique annealed

On a

$$h_c(\beta) \geq h_c^a(\beta) = -\frac{\beta^2}{2} - \log \lambda(\beta)$$

où λ est la valeur propre de Perron-Frobenius d'une certaine matrice de transfert (explicite)

$$h_c^a(\beta) \stackrel{\beta \rightarrow 0}{\sim} -\left(1 + \sum_{n=1}^q \rho_n \mathbb{P}(n \in \tau)\right) \frac{\beta^2}{2}$$

Difficulté : $\mathbb{E}_\omega Z_{N,\beta,h} \simeq$

$$\frac{1}{N} \log \mathbb{E} \left(\exp \left((h + \beta^2/2) \sum \delta_n + \beta^2 \sum_{k=1}^q \rho_k \sum_{n=1}^N \delta_n \delta_{n+k} \right) \right)$$

Ce n'est pas exactement le modèle homogène...

Quelques questions

- A-t-on non pertinence du désordre pour β petit et $\alpha < 1/2$? La même heuristique que dans le cas I.I.D laisse penser que oui.

Quelques questions

- A-t-on non pertinence du désordre pour β petit et $\alpha < 1/2$? La même heuristique que dans le cas I.I.D laisse penser que oui.
- Que se passe-t-il dans le cas où $\rho_n \sim c \times n^{-\gamma}$, $\gamma > 0$?