Simulation d'Équations Différentielles Stochastiques Rétrogrades (EDSRs)

Adrien Richou

IRMAR, Université Rennes 1

Mont-Dore, mai 2010

Équations différentielles stochastiques

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $(W_t)_{t \geqslant 0}$ un mouvement brownien d-dimensionnel. On note $(\mathcal{F}_t)_t$ la filtration du mouvement brownien.

$$X_t^{t_0,x_0} = x_0 + \int_{t_0}^{t} b(s, X_s^{t_0,x_0})ds + \int_{t_0}^{t} \sigma(s, X_s^{t_0,x_0})dW_s.$$

On suppose des hypothèses standard sur b et σ pour avoir une solution forte.

Lien avec les EDPs

On considère l'EDP suivante

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + \mathcal{L}u(t,x) + f(x) = 0 \\ u(T,x) = h(x), \end{cases}$$

avec

$$\mathcal{L}u(t,x) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\sigma(t,x)^t\sigma(t,x)\nabla^2 u(t,x)) +^t b(t,x)\nabla u(t,x).$$

Lien avec les EDPs

Si u est suffisamment régulière on a

$$
\begin{aligned}
du(t, X_t^{t_0,x_0}) &= \partial_t u(t, X_t^{t_0,x_0})dt + \nabla u(t, X_t^{t_0,x_0})dX_t^{t_0,x_0} \\
&\quad + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\sigma^t\sigma(t, X_t^{t_0,x_0})\nabla^2 u(t, X_t^{t_0,x_0}))dt
\end{aligned}
$$

Lien avec les EDPs

Si u est suffisamment régulière on a

$$\begin{aligned} du(t, X_t^{t_0,x_0}) &= \partial_t u(t, X_t^{t_0,x_0})dt + \nabla u(t, X_t^{t_0,x_0})dX_t^{t_0,x_0} \\ &+ \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\sigma^t\sigma(t, X_t^{t_0,x_0})\nabla^2 u(t, X_t^{t_0,x_0}))dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(X_T^{t_0,x_0}) - u(t_0, x_0) &= \int_{t_0}^T \partial_t u(t, X_t^{t_0,x_0}) + \mathcal{L}u(t, X_t^{t_0,x_0})dt \\ &+ \int_{t_0}^T \nabla u(t, X_t^{t_0,x_0})\sigma(t, X_t^{t_0,x_0})dW_t \end{aligned}$$

Lien avec les EDPs

Si u est suffisamment régulière on a

$$
\begin{aligned}
du(t, X_t^{t_0,x_0}) &= \partial_t u(t, X_t^{t_0,x_0})dt + \nabla u(t, X_t^{t_0,x_0})dX_t^{t_0,x_0} \\
&\quad + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\sigma^t\sigma(t, X_t^{t_0,x_0})\nabla^2 u(t, X_t^{t_0,x_0}))dt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
h(X_T^{t_0,x_0}) - u(t_0, x_0) &= \int_{t_0}^{T} -f(X_t^{t_0,x_0})dt \\
&\quad + \int_{t_0}^{T} \nabla u(t, X_t^{t_0,x_0})\sigma(t, X_t^{t_0,x_0})dW_t
\end{aligned}
$$

Lien avec les EDPs

Si u est suffisamment régulière on a

$$\begin{aligned} du(t, X_t^{t_0,x_0}) &= \partial_t u(t, X_t^{t_0,x_0})dt + \nabla u(t, X_t^{t_0,x_0})dX_t^{t_0,x_0} \\ &\quad + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\sigma^t\sigma(t, X_t^{t_0,x_0})\nabla^2 u(t, X_t^{t_0,x_0}))dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(X_T^{t_0,x_0}) - u(t_0, x_0) &= \int_{t_0}^T -f(X_t^{t_0,x_0})dt \\ &\quad + \int_{t_0}^T \nabla u(t, X_t^{t_0,x_0})\sigma(t, X_t^{t_0,x_0})dW_t \end{aligned}$$

$$u(t_0, x_0) = \mathbb{E}\left[h(X_T^{t_0,x_0}) + \int_{t_0}^T f(X_t^{t_0,x_0})dt\right].$$

Formule de Feynman-Kac

Formule de Feynman-Kac :

$$u(t_0, x_0) := \mathbb{E}\left[h(X_T^{t_0,x_0}) + \int_{t_0}^{T} f(X_t^{t_0,x_0})dt\right]$$

est une solution (de viscosité) de l'EDP.

Formule de Feynman-Kac

Formule de Feynman-Kac :

$$u(t_0, x_0) := \mathbb{E}\left[h(X_T^{t_0,x_0}) + \int_{t_0}^{T} f(X_t^{t_0,x_0})dt\right]$$

est une solution (de viscosité) de l'EDP.

Question

Peut-on avoir le même type de formule lorsque f dépend aussi de u et ∇u.

EDSs rétrogrades

On voudrait résoudre l'équation différentielle suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} dY_t = -f(t, X_t, Y_t)dt \\ Y_T = h(X_T), \end{array} \right.$$

en imposant que Y_t soit $\mathcal{F}_t$-adapté, c'est à dire que Y_t ne dépende pas du futur après t.

EDSRs

Prenons l'exemple $f = 0$, i.e. $dY_t = 0$. Un candidat naturel est

$$Y_t = h(X_T)$$

mais il ne convient pas car il n'est pas adapté.

Prenons l'exemple $f = 0$, i.e. $dY_t = 0$. Un candidat naturel est

$$Y_t = h(X_T)$$

mais il ne convient pas car il n'est pas adapté.
Un autre candidat naturel est

$$Y_t = \mathbb{E}[h(X_T)|\mathcal{F}_t].$$

Prenons l'exemple $f = 0$, i.e. $dY_t = 0$. Un candidat naturel est

$$Y_t = h(X_T)$$

mais il ne convient pas car il n'est pas adapté.
Un autre candidat naturel est

$$Y_t = \mathbb{E}[h(X_T)|\mathcal{F}_t].$$

Le théorème de représentation martingale nous donne

$$Y_t = \mathbb{E}[h(X_T)] + \int_0^t Z_s dW_s,$$

que l'on peut réécrire

$$Y_t = Y_T - \int_t^T Z_s dW_s.$$

Revenons au cas général :

Théorème : [Pardoux-Peng(1990)]

Sous des hypothèses standard, l'EDSR

$$Y_t = h(X_T) + \int_t^T f(s, X_s, Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s dW_s$$

possède une unique solution (Y, Z) telle que $\mathbb{E}\left[\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} |Y_t|^2\right] < +\infty$ et $\mathbb{E}\left[\int_0^T |Z_t|^2 \, dt\right] < +\infty$.

Il y a eu depuis de nombreux travaux pour réduire les hypothèses...

Revenons au cas général :

Théorème : [Pardoux-Peng(1990)]

Sous des hypothèses standard, l'EDSR

$$Y_t = h(X_T) + \int_t^T f(s, X_s, Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s dW_s$$

possède une unique solution (Y, Z) telle que
$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|Y_t|^2\right] < +\infty$ et $\mathbb{E}\left[\int_0^T |Z_t|^2\,dt\right] < +\infty$.

Il y a eu depuis de nombreux travaux pour réduire les hypothèses... On note $(Y_t^{t_0,x_0}, Z_t^{t_0,x_0})$ la solution de l'EDSR

$$Y_t^{t_0,x_0} = h(X_T^{t_0,x_0}) + \int_t^T f(s, X_s^{t_0,x_0}, Y_s^{t_0,x_0}, Z_s^{t_0,x_0})ds - \int_t^T Z_s^{t_0,x_0} dW_s.$$

Lien avec les EDPs

Considérons l'EDP suivante

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + \mathcal{L}u(t,x) + f(t,x,u(t,x),{}^t\nabla u(t,x)\sigma(t,x)) = 0 \\ u(T,x) = h(x), \end{cases}$$

avec

$$\mathcal{L}u(t,x) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\sigma(t,x){}^t\sigma(t,x)\nabla^2 u(t,x)) + {}^t b(t,x)\nabla u(t,x).$$

Lien avec les EDPs

Proposition

Si u est suffisamment régulière, le calcul de $du(t, X_t^{t_0,x_0})$ par la formule d'Itô nous montre que $(u(t, X_t^{t_0,x_0}), {}^t\nabla u\sigma(t, X_t^{t_0,x_0}))_t$ est solution de l'EDSR : on a $Y_t^{t_0,x_0} = u(t, X_t^{t_0,x_0})$ et $Z_t^{t_0,x_0} = {}^t\nabla u\sigma(t, X_t^{t_0,x_0})$.

Lien avec les EDPs

Proposition

Si u est suffisamment régulière, le calcul de $du(t, X_t^{t_0,x_0})$ par la formule d'Itô nous montre que $(u(t, X_t^{t_0,x_0}), {}^t\nabla u\sigma(t, X_t^{t_0,x_0}))_t$ est solution de l'EDSR : on a $Y_t^{t_0,x_0} = u(t, X_t^{t_0,x_0})$ et $Z_t^{t_0,x_0} = {}^t\nabla u\sigma(t, X_t^{t_0,x_0})$.

Formule de Feynman-Kac :

La fonction $u(t, x) := Y_t^{t,x}$ est solution de viscosité de l'EDP.

nb : u est bien déterministe.

On pose n le nombre de pas de temps, $h := 1/n$ et $t_k := Tk/n$.
On prend pour simplifier $t_0 = 0$ et $x_0 = x$.

Simulation d'EDSRs

On pose n le nombre de pas de temps, $h := 1/n$ et $t_k := Tk/n$. On prend pour simplifier $t_0 = 0$ et $x_0 = x$.

Schéma d'Euler pour l'EDS

$$X^n_{t_{k+1}} = X^n_{t_k} + b(t_k, X^n_{t_k})h + \sigma(t_k, X^n_{t_k})(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}).$$

On pose n le nombre de pas de temps, $h := 1/n$ et $t_k := Tk/n$.
On prend pour simplifier $t_0 = 0$ et $x_0 = x$.

Schéma d'Euler pour l'EDS

$$X^n_{t_{k+1}} = X^n_{t_k} + b(t_k, X^n_{t_k})h + \sigma(t_k, X^n_{t_k})(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}).$$

Discrétisation temporelle de l'EDSR

$$Y^n_T = h(X^n_T),$$

$$\begin{aligned} Z^n_{t_k} &= h^{-1}\mathbb{E}\left[Y^n_{t_{k+1}}(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})|\mathcal{F}_{t_k}\right], \\ Y^n_{t_k} &= \mathbb{E}\left[Y^n_{t_{k+1}} + hf(t_k, X^n_{t_k}, Y^n_{t_{k+1}}, Z^n_{t_k})|\mathcal{F}_{t_k}\right]. \end{aligned}$$

Simulation d'EDSRs

On pose n le nombre de pas de temps, $h := 1/n$ et $t_k := Tk/n$. On prend pour simplifier $t_0 = 0$ et $x_0 = x$.

Schéma d'Euler pour l'EDS

$$X^n_{t_{k+1}} = X^n_{t_k} + b(t_k, X^n_{t_k})h + \sigma(t_k, X^n_{t_k})(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}).$$

Discrétisation temporelle de l'EDSR

$$Y^n_T = h(X^n_T),$$

$$\begin{aligned} Z^n_{t_k} &= h^{-1}\mathbb{E}\left[Y^n_{t_{k+1}}(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})|\mathcal{F}_{t_k}\right], \\ Y^n_{t_k} &= \mathbb{E}\left[Y^n_{t_{k+1}} + hf(t_k, X^n_{t_k}, Y^n_{t_{k+1}}, Z^n_{t_k})|\mathcal{F}_{t_k}\right]. \end{aligned}$$

Il reste à évaluer les espérances conditionnelles...

Convergence de l'approximation

Théorème :

On suppose b et σ Lipschitz. Alors

$$\sup_{0\leqslant k\leqslant n} \mathbb{E}\left[\left|X_{t_k} - X_{t_k}^n\right|^2\right] \leqslant \frac{C}{n}.$$

Théorème :

On suppose f Lipschitz et h α-Hölder.

$$\sup_{0\leqslant k\leqslant n} \mathbb{E}\left[\left|Y_{t_k} - Y_{t_k}^n\right|^2\right] + \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}\left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} \left|Z_{t_k}^n - Z_{t_k}\right|^2 ds\right] \leqslant \frac{C}{n^\alpha}.$$

Question

A-t-on convergence lorsque f est localement Lipschitz en z ?

$$\left|f(t,x,y,z)-f(t,x,y,z')\right| \leqslant C(1+|z|+\left|z'\right|)\left|z-z'\right|.$$

Si non, peut-on modifier l'algorithme pour avoir convergence ?

Une première idée naïve

On peut approcher f par une fonction Lipschitz en z :

$$f_N(t,x,y,z) = f(t,x,y,\rho_N(z))$$

avec ρ_N la projection sur la boule centrée de rayon N.

Théorème : [Imkeller-dos Reis (2010)]

Pour tout $K \geqslant 1$ l'erreur entre (Y^N, Z^N) et (Y, Z) est en $\frac{C_K}{N^K}$.

Une première idée naïve

On peut approcher f par une fonction Lipschitz en z :

$$f_N(t,x,y,z) = f(t,x,y,\rho_N(z))$$

avec ρ_N la projection sur la boule centrée de rayon N.

Théorème : [Imkeller-dos Reis (2010)]

Pour tout $K \geqslant 1$ l'erreur entre (Y^N, Z^N) et (Y,Z) est en $\frac{C_K}{N^K}$.

L'idée est maintenant d'approcher (Y^N, Z^N) par $(Y^{N,n}, Z^{N,n})$.

Théorème :

l'erreur entre (Y^N, Z^N) et $(Y^{N,n}, Z^{N,n})$ est en $\frac{Ce^{CN^2}}{n}$.

Une première idée naïve

On peut approcher f par une fonction Lipschitz en z :

$$f_N(t,x,y,z) = f(t,x,y,\rho_N(z))$$

avec ρ_N la projection sur la boule centrée de rayon N.

Théorème : [Imkeller-dos Reis (2010)]

Pour tout $K \geqslant 1$ l'erreur entre (Y^N, Z^N) et (Y,Z) est en $\frac{C_K}{N^K}$.

L'idée est maintenant d'approcher (Y^N, Z^N) par $(Y^{N,n}, Z^{N,n})$.

Théorème :

l'erreur entre (Y^N, Z^N) et $(Y^{N,n}, Z^{N,n})$ est en $\frac{Ce^{CN^2}}{n}$.

L'erreur globale est donc en $\frac{C_K}{(\log n)^{K/2}}$.

Une estimation sur Z

Théorème : [Bao-Hu-Delbaen (2010), R. (2010)]

On suppose que σ est indépendante de x, que h est bornée et qu'il existe $\lambda \geqslant 0$ telle que $\forall \eta \in \mathbb{R}^d$

$$\left|{}^t\eta\sigma(s)[{}^t\sigma(s)^t\nabla b(s,x) -^t \sigma'(s)]\eta\right| \leqslant \lambda \left|{}^t\eta\sigma(s)\right|^2.$$

Alors

$$|Z_t| \leqslant \frac{C}{(T-t)^{1/2}}.$$

Convergence de l'approximation

Théorème : [R. (2010)]

Il existe une grille de discrétisation $(t_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ et une puissance explicite K telle que

$$\sup_{0\leqslant k\leqslant n} \mathbb{E}\left[\left|Y_{t_k}-Y_{t_k}^n\right|^2\right]+\sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{E}\left[\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left|Z_{t_k}^n-Z_{t_k}\right|^2 ds\right]\leqslant\frac{C}{n^K}.$$

Si de plus on suppose b bornée alors

$$\sup_{0\leqslant k\leqslant n} \mathbb{E}\left[\left|Y_{t_k}-Y_{t_k}^n\right|^2\right]+\sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{E}\left[\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left|Z_{t_k}^n-Z_{t_k}\right|^2 ds\right]\leqslant\frac{C}{n^{\alpha-\varepsilon}}.$$