

# Approximation particulière pour une loi de conservation scalaire fractionnaire

Raphaël Roux  
Travail en commun avec Benjamin Jourdain

CERMICS - Université Paris-Est

Colloque “Jeunes Probabilistes et Statisticiens”  
Le Mont-Dore - 7 Mai 2010

- 1 Lois de conservation hyperboliques
- 2 Interprétation probabiliste
- 3 Résultats d'existence et unicité
- 4 Schéma d'Euler
- 5 Exemples numériques

1 Lois de conservation hyperboliques

2 Interprétation probabiliste

3 Résultats d'existence et unicité

4 Schéma d'Euler

5 Exemples numériques

On s'intéresse à des lois de conservation hyperboliques en dimension 1. Pour  $(t, x) \in [0, \infty[ \times \mathbb{R}$  :

## Loi de conservation non visqueuse

$$\begin{cases} \partial_t v(t, x) + \partial_x(A(v(t, x))) & = 0 \\ v(0, x) & = v_0(x) \end{cases}, \quad (\text{EDP})$$

où  $A$  désigne une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ , ainsi qu'à des perturbations de celles-ci :

## Loi de conservation fractionnaire

$$\begin{cases} \partial_t v(t, x) + \sigma^\alpha (-\Delta)^{\alpha/2} v(t, x) + \partial_x(A(v(t, x))) & = 0 \\ v(0, x) & = v_0(x) \end{cases}, \quad (\text{EDP}_\sigma^\alpha)$$

où  $-(-\Delta)^{\alpha/2}$  désigne l'opérateur Laplacien fractionnaire ( $0 < \alpha \leq 2$ ).

$$\partial_t v_t + \sigma^\alpha (-\Delta)^{\alpha/2} v_t + \partial_x (A \circ v_t) = 0$$

**Terme régularisant d'ordre  $\alpha$**  : l'information se propage à vitesse  $t^{1/\alpha}$ .  
Comportement diffusif.

**Terme de transport d'ordre 1** : l'information se propage à vitesse  $t$ .  
Création éventuelle de chocs.

On a un cas critique  $\alpha = 1$ .

Pour trouver les solutions de (**EDP**) au sens classique, on cherche des courbes  $t \mapsto x_t$ , appelées *caractéristiques* telles que  $v_t(x_t)$  soit constant. On obtient l'équation

## Équation des caractéristiques

$$\partial_t x_t = A'(v_t(x_t)).$$

Les caractéristiques sont donc les droites  $x_t = x_0 + tA'(v_0(x_0))$ .  
Si les caractéristiques ne se croisent pas, on a une expression de la solution

$$v_t(x) = v_0(x_0)$$

où  $x_0$  est l'origine de la caractéristique passant par  $(t, x)$ .

1 Lois de conservation hyperboliques

**2 Interprétation probabiliste**

3 Résultats d'existence et unicité

4 Schéma d'Euler

5 Exemples numériques

# Opérateur Laplacien fractionnaire

On définit l'opérateur  $(-\Delta)^{\alpha/2}$  en passant en Fourier :

$$\widehat{(-\Delta)^{\alpha/2}\varphi} = |\xi|^\alpha \hat{\varphi},$$

ou bien (pour  $\alpha < 2$ ) en utilisant une formulation intégrale ([Droniou-Imbert - 2005]) :

$$-(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}\varphi(\mathbf{x}) = c_\alpha \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - \varphi(\mathbf{x}) - \mathbf{1}_{|y| \leq r} \varphi'(\mathbf{x})\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|^{1+\alpha}} d\mathbf{y}.$$

On reconnaît le générateur infinitésimal d'un processus de Lévy de mesure  $c_\alpha \frac{d\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|^{1+\alpha}}$ .



# Processus de Lévy $\alpha$ -stable

On tire une réalisation d'un processus ponctuel de Poisson  $(Y_i, T_i)_i$  sur  $\mathbb{R} \times [0, \infty[$  d'intensité  $\frac{dydt}{|y|^{1+\alpha}}$ .

## Processus $\alpha$ -stable

On définit

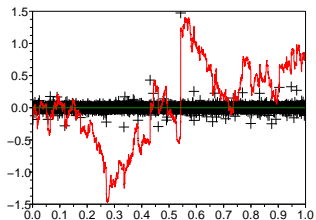
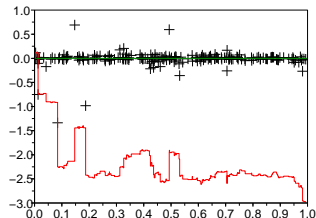
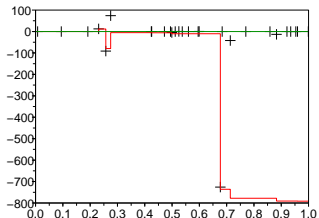
$$L_t = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_i \mathbf{1}_{T_i \leq t, |Y_i| > \varepsilon} Y_i.$$

Le processus  $L_t$  est un *processus de Lévy  $\alpha$ -stable*. C'est un processus de Markov de générateur  $-(-\Delta)^{-\alpha/2}$ . Il vérifie l'égalité en loi

$$L_t \stackrel{\mathcal{L}}{=} h^{1/\alpha} L_{t/h}.$$

# Exemples

Paramètre  $\alpha$  : 0.3, 1, 1.7



# Interprétation comme équation de Fokker-Planck

On cherche une interprétation probabiliste de ( $\mathbf{EDP}_\sigma^\alpha$ ) ([Jourdain - 2000]). L'équation formellement vérifiée par la dérivée spatiale  $u := \partial_x v$  est :

$$\partial_t u = -\sigma^\alpha (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u - \partial_x (A'(H * u)u),$$

(avec  $H = \mathbf{1}_{[0, \infty[}$ ) qui s'interprète, si  $u_0$  est une densité de probabilité, *i.e.*, si  $v_0$  est une fonction de répartition, comme l'équation de Fokker-Planck associée à l'équation différentielle stochastique *non-linéaire au sens de McKean*

$$\begin{cases} dX_t &= \sigma dL_t + A'(H * u_t(X_t))dt \\ u_t &= \text{loi de } X_t \end{cases} \quad (\mathbf{EDS}_\sigma^\alpha)$$

On reconnaît une perturbation de l'équation des caractéristiques.

# Approximation particulière

On veut approcher la solution de (**EDS** $_{\sigma}^{\alpha}$ ) : on en prend plusieurs copies qui interagissent à travers leur fonction de répartition empirique.

## Approximation particulière

Pour  $i \in \{1, \dots, N\}$ , les  $(X_0^{N,i})$  sont i.i.d de loi  $u_0$ , les  $(L^i)$  sont des processus  $\alpha$ -stables indépendants, et

$$dX_t^{N,i} = \sigma dL_t^i + A' \left( \frac{1}{N} \sum_j \mathbf{1}_{X_t^{N,j} \leq X_t^{N,i}} \right) dt.$$

La fonction de répartition empirique  $\frac{1}{N} \sum_j \mathbf{1}_{X_t^{N,j} \leq x}$  devrait être une approximation de la solution de (**EDP** $_{\sigma}^{\alpha}$ ).

# Condition initiale quelconque

Que se passe-t-il si  $v_0$  est seulement supposée à *variation bornée* ?  
A renormalisation près,  $\partial_x v_0 = u_0$  est une mesure signée dont la variation totale  $|u_0|$  est une densité de probabilité. On note  $\gamma(x) = \frac{d|u_0|}{d|x|}(x) \in \{-1, 1\}$ .

L'équation ( $\mathbf{EDP}_\sigma^\alpha$ ) s'interprète alors comme l'équation de Fokker-Planck associée à

$$\begin{cases} dX_t &= \sigma dL_t + A'(H * \tilde{P}_t(X_t))dt \\ P &= \text{loi de } X \end{cases}, \quad (\mathbf{EDS}_\sigma^\alpha)$$

où  $\tilde{P}(dX) = \gamma(X_0)P(dX)$ . ([Jourdain - 2002])

## Lemme ([Jourdain - 2002])

Pour toute condition initiale  $u_0$  dont la variation totale  $|u_0|$  est une mesure de probabilité, si  $P$  est la loi d'une solution de  $(\mathbf{EDS}_\sigma^\alpha)$ , alors la variation totale  $|\tilde{P}_t|$  décroît en  $t$ .

Ce comportement vient d'une compensation des trajectoires de signes opposés qui se "rencontrent".

# Approximation particulière

On doit adapter le système de particule et “tuer” tout couple de particules de signes opposés qui se rencontrent :

$I_t = \{\text{particules vivantes à l'instant } t\}$ .

## Approximation particulière

Pour  $i \in \{1, \dots, N\}$ , les  $(X_0^{N,i})$  sont i.i.d de loi  $|u_0|$ , les  $(L^i)$  sont des processus  $\alpha$ -stables indépendants, et

$$dX_t^{N,i} = \sigma dL_t^{N,i} + A' \left( \frac{1}{N} \sum_{j \in I_t} \mathbf{1}_{X_t^{N,j} \leq X_t^{N,i}} \gamma \left( X_0^{N,j} \right) \right) dt$$

Pour  $\alpha = 2$ , pas (trop) de problèmes, mais si  $\alpha < 2$ , les trajectoires de deux processus  $\alpha$ -stables ne peuvent se rencontrer : l'existence n'est pas claire.

1 Lois de conservation hyperboliques

2 Interprétation probabiliste

**3 Résultats d'existence et unicité**

4 Schéma d'Euler

5 Exemples numériques



On peut définir une bonne notion de solution pour les équations (**EDP**) et (**EDP** $_{\sigma}^{\alpha}$ ), les solution *entropiques*.

## Théorème ([Kruzhkov - 1975], [Alibaud - 2006])

- Pour une condition initiale  $v_0$  bornée, on a existence et unicité de la solution entropique pour les équations (**EDP**) et (**EDP** $_{\sigma}^{\alpha}$ ). De plus ces solutions sont dans  $\mathcal{C}([0, \infty[, \mathbb{L}^1(\frac{dx}{1+x^2}))$ .
- Quand la viscosité  $\sigma$  converge vers 0, la solution entropique de (**EDP** $_{\sigma}^{\alpha}$ ) converge dans  $\mathcal{C}([0, \infty[, \mathbb{L}^1(\frac{dx}{1+x^2}))$  vers celle de (**EDP**).

## Théorème ( [Jourdain-Méléard-Woyczyński - 2006])

Pour une dérive  $b_t$  bornée, on a existence et unicité faible pour les équation du type

$$dX_t = \sigma dL_t + b_t(X_t)dt$$

dès lors que  $\alpha > 1$ .

## Problème

L'existence du système de particules n'est donc pas assurée pour  $\alpha \leq 1$ .

1 Lois de conservation hyperboliques

2 Interprétation probabiliste

3 Résultats d'existence et unicité

**4 Schéma d'Euler**

5 Exemples numériques

# Schéma d'Euler

Pour contourner la non-existence du système de particules en temps continu pour  $\alpha \leq 1$ , on passe en temps discret.

$h_N$  : pas de temps ;  $\varepsilon_N$  : distance d'interaction ;  $L^{N,i}$  processus de Lévy  $\alpha$ -stable.

## Schéma d'Euler

- Pour  $i \in \{1, \dots, N\}$ ,  $(X_0^{N,i})$  est i.i.d. de loi  $|u_0|$ , et pour  $t \in [kh_N, (k+1)h_N[$ ,

$$dX_t^{N,i} = \sigma dL_t^{N,i} + A' \left( \frac{1}{N} \sum_{j \in I_k} \gamma \left( X_0^{N,j} \right) \mathbf{1}_{X_{kh_N}^{N,j} \leq X_{kh_N}^{N,i}} \right) dt.$$

- À chaque pas de temps on tue les particules selon les règles suivantes : en partant de la gauche, on tue les deux premières particules consécutives de signe opposés se trouvant à une distance inférieure à  $\varepsilon_N$ . On continue récursivement.

On peut simuler exactement le schéma d'Euler :

## Propriété

Si  $\Theta$  est de loi uniforme sur  $[-\pi/2, \pi/2]$ , et  $E$  de loi exponentielle de paramètre 1, alors

$$\frac{\sin(\alpha\Theta)}{\cos(\Theta)^{\frac{1}{\alpha}}} \left( \frac{\cos((1-\alpha)\Theta)}{E} \right)^{\frac{1}{\alpha}-1},$$

a même loi que  $L_1$ .

## Théorème ([Jourdain-R. - 2010])

On se place dans le cadre  $\alpha > 1$ . Alors,

$$\mathbb{E} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{1}{N} \sum_{i \in I_t} \gamma(X_0^{N,i}) \mathbf{1}_{X_t^{N,i} \leq x} - v_t(x) \right| \frac{dx dt}{1+x^2} \rightarrow 0,$$

où  $v$  est la solution entropique de  $(\mathbf{EDP}_\sigma^\alpha)$ .

## Théorème ([Jourdain-R. - 2010])

On se place dans le cadre  $\alpha \leq 1$ . Supposons qu'il existe  $\lambda > 0$  tel que

$$N^{-\lambda} \leq 2^+ \sup_{[-1,1]} |A'| h_N \leq \varepsilon_N \text{ et } N^{-1/\alpha} \leq N^{-1/\lambda} \varepsilon_N.$$

Si  $\alpha = 1$ , on suppose également  $h_N \leq \varepsilon_N N^{-1/\lambda}$  Alors,

$$\mathbb{E} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{1}{N} \sum_{i \in I_t} \gamma \left( X_0^{N,i} \right) \mathbf{1}_{X_t^{N,i} \leq x} - v_t(x) \right| \frac{dx dt}{1+x^2} \rightarrow 0,$$

où  $v$  est la solution entropique de  $(\mathbf{EDP}_\sigma^\alpha)$ .

## Théorème ([Jourdain-R. - 2010])

Soit  $\sigma_N$  une suite tendant vers 0. Supposons que

$$N^{-1/\lambda} \leq 2^+ \sup_{[-1,1]} |A'| h_N \leq \varepsilon_N.$$

De plus, si  $\alpha > 1$ , supposons également qu'il existe  $\lambda > 0$  tel que

$$\sigma_N \leq N^{-1/\lambda} \varepsilon_N^{1-1/\alpha}.$$

Alors

$$\mathbb{E} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{1}{N} \sum_{i \in I_t} \gamma \left( X_0^{N,i} \right) \mathbf{1}_{X_t^{N,i} \leq x} - v_t \right| \frac{dx dt}{1+x^2} \rightarrow 0,$$

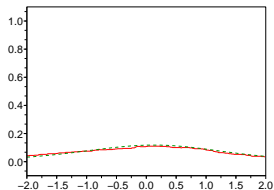
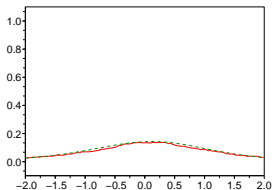
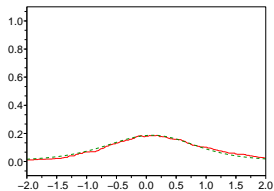
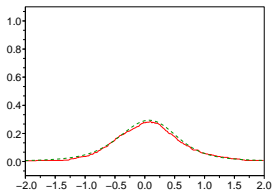
où  $v$  est la solution entropique de **(EDP)**.



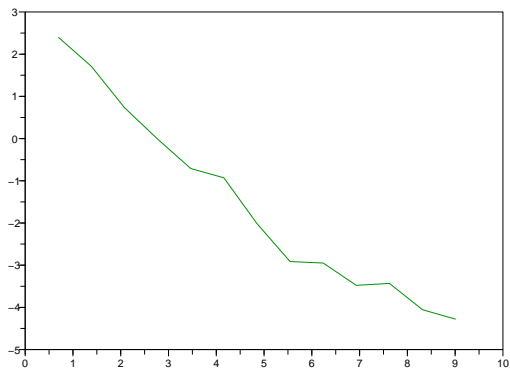
- 1 Lois de conservation hyperboliques
- 2 Interprétation probabiliste
- 3 Résultats d'existence et unicité
- 4 Schéma d'Euler
- 5 Exemples numériques**

# Illustrations

$\alpha = 1.5, \sigma = 1, N = 1000$

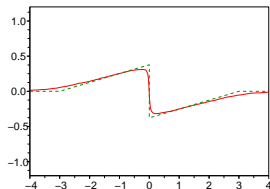
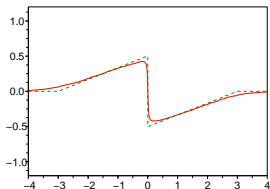
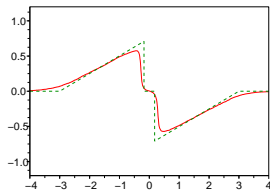
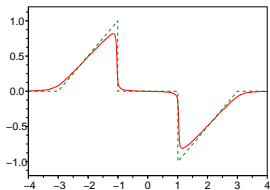


$\alpha = 1.5$ ,  $\sigma = 1$ , erreur en fonction de  $N$ .



# Illustrations

$\alpha = 1.5, \sigma = 0.1$



## Définition ([Alibaud - 2006])

On appelle solution entropique de  $(\mathbf{EDP}_\sigma^\alpha)$  toute fonction bornée  $v$  satisfaisant

$$\begin{aligned} & c_\alpha \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \int_{\{|y|>r\}} \eta'(v_t(x)) \frac{v_t(x + \sigma y) - v_t(x)}{|y|^{1+\alpha}} g_t(x) dy dx dt \\ & + c_\alpha \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \int_{\{|y|\leq r\}} \eta(v_t(x)) \frac{g_t(x + \sigma y) - g_t(x) - \sigma y \partial_x g_t(x)}{|y|^{1+\alpha}} dy dx dt \\ & + \int_0^\infty \eta(v_0) g_0 + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} (\eta(v_t) \partial_t g_t + \psi(v_t) \partial_x g_t) dt \geq 0 \end{aligned}$$

pour tout  $r > 0$ , tout  $g \in C_c^\infty([0, \infty[ \times \mathbb{R})$ , et tout  $\eta$  convexe, avec  $\psi' = \eta' A'$ .

Par convexité de  $\eta$  l'inégalité entropique pour  $r$  implique l'inégalité entropique pour  $r' > r$ .