Estimation de la dérivée de la densité stationnaire

SCHMISSER Emeline

Université Paris Descartes
Laboratoire MAP5
Emeline.Schmisser@mi.parisdescartes.fr

5 mai 2010

Table des matières

Table des matières

Table des matières

Table des matières

Diffusions

Équation différentielle stochastique

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t \qquad X_0 = \eta$$

Diffusions

Équation différentielle stochastique

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t \qquad X_0 = \eta$$

η variable aléatoire

Diffusions

Équation différentielle stochastique

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t \qquad X_0 = \eta$$

η variable aléatoire $\qquad$ W_t mouvement brownien indépendant de η

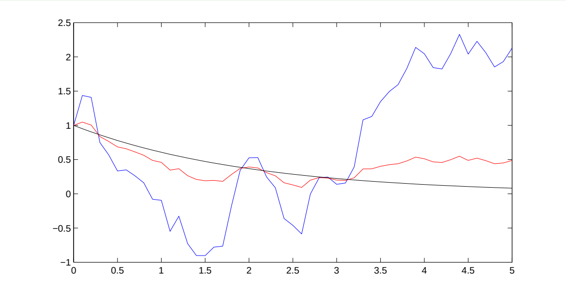
Diffusions

Équation différentielle stochastique

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t \qquad X_0 = \eta$$

η variable aléatoire $\qquad$ W_t mouvement brownien indépendant de η

Exemple de diffusion



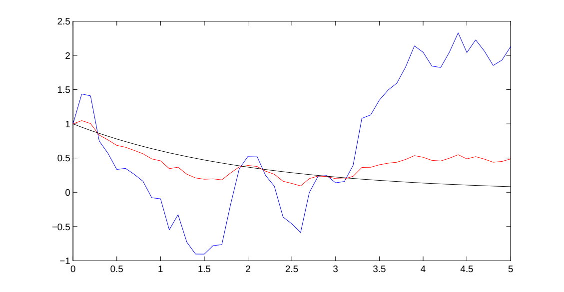
Diffusions

Équation différentielle stochastique

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t \qquad X_0 = \eta$$

η variable aléatoire $\qquad W_t$ mouvement brownien indépendant de η

Exemple de diffusion



$$b(x) = -x/2$$

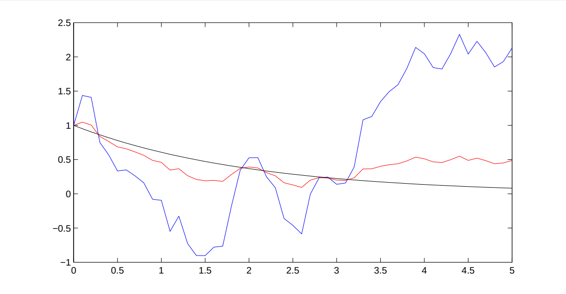
Diffusions

Équation différentielle stochastique

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t \qquad X_0 = \eta$$

η variable aléatoire $\qquad W_t$ mouvement brownien indépendant de η

Exemple de diffusion



$$b(x) = -x/2 \qquad \sigma(x) = \sigma$$

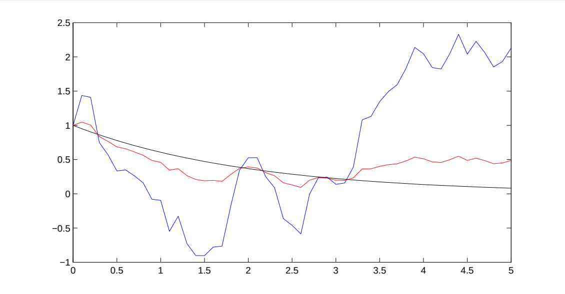
Diffusions

Équation différentielle stochastique

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t \qquad X_0 = \eta$$

η variable aléatoire $\qquad$ W_t mouvement brownien indépendant de η

Exemple de diffusion



$$b(x) = -x/2 \qquad \sigma(x) = \sigma$$

$$\sigma = 0$$

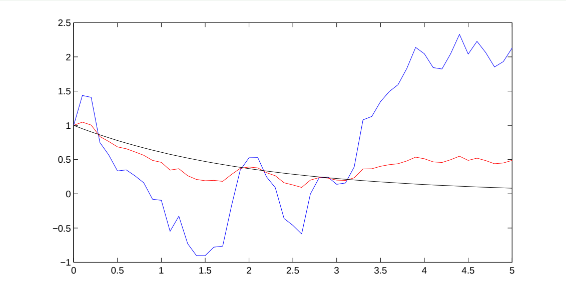
Diffusions

Équation différentielle stochastique

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t \qquad X_0 = \eta$$

η variable aléatoire $\qquad$ W_t mouvement brownien indépendant de η

Exemple de diffusion



$$b(x) = -x/2 \qquad \sigma(x) = \sigma$$

$\sigma = 0$

$\sigma = 0.2$

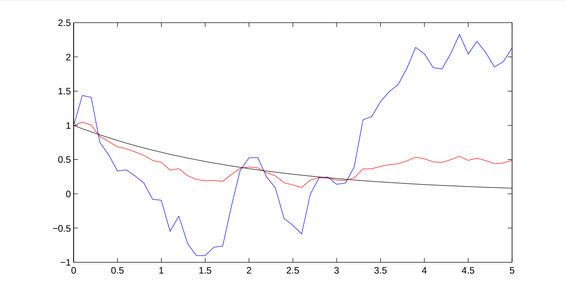
Diffusions

Équation différentielle stochastique

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t \qquad X_0 = \eta$$

η variable aléatoire $\qquad$ W_t mouvement brownien indépendant de η

Exemple de diffusion



$$b(x) = -x/2 \qquad \sigma(x) = \sigma$$

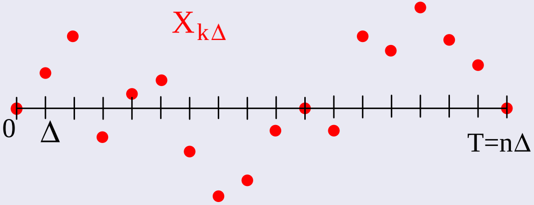
$\sigma = 0$

$\sigma = 0.2$

$\sigma = 1$

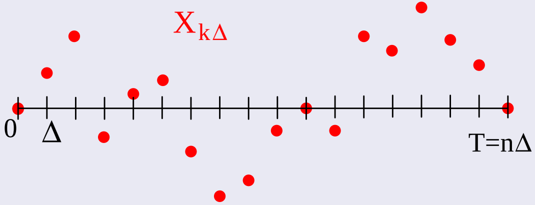
Hypothèses

Données



Hypothèses

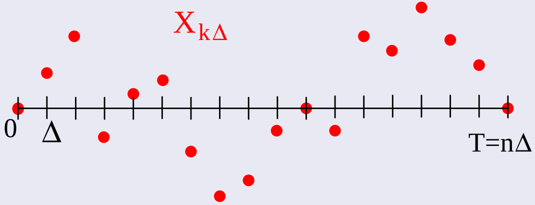
Données



$X_0, X_\Delta, \dots, X_{n\Delta}$

Hypothèses

Données

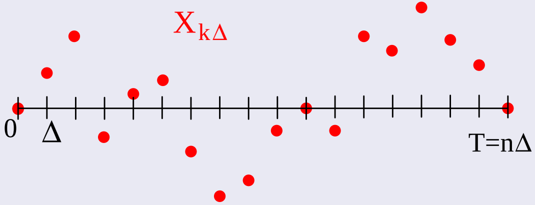


$X_0, X_\Delta, \ldots, X_{n\Delta}$

- strictement stationnaires

Hypothèses

Données

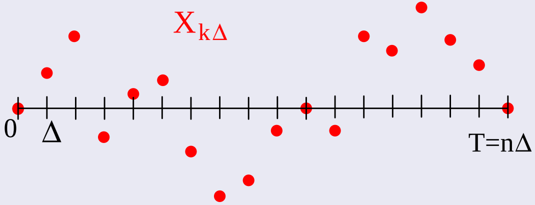


$X_0, X_\Delta, \ldots, X_{n\Delta}$

- strictement stationnaires
- exponentiellement β-mélangeantes

Hypothèses

Données



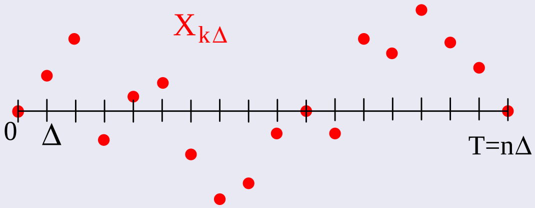
$X_0, X_\Delta, \ldots, X_{n\Delta}$

- strictement stationnaires
- exponentiellement β-mélangeantes

f densité stationnaire

Hypothèses

Données



$X_0, X_\Delta, \ldots, X_{n\Delta}$

- strictement stationnaires
- exponentiellement β-mélangeantes

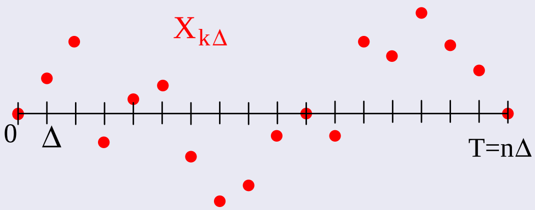
f densité stationnaire

But

Estimation de $g := f'$ sur un compact $[0, 1]$

Hypothèses

Données



$X_0, X_\Delta, \ldots, X_{n\Delta}$

- strictement stationnaires
- exponentiellement β-mélangeantes

f densité stationnaire

But

Estimation de $g := f'$ sur un compact $[0, 1]$

Motivation : estimation de b par quotient

Si σ constante connue :

$$b = \frac{\sigma^2 f'}{2f}$$

Définition du β-mélange

Définition du β-mélange

Coefficient de β-mélange

Définition du β-mélange

Coefficient de β-mélange

Pour un processus X_t stationnaire :

Définition du β-mélange

Coefficient de β-mélange

Pour un processus X_t stationnaire :

$$\beta_X(s) = \frac{1}{2}\|P_{(X_0,X_s)} - P_{X_0} \otimes P_{X_0}\|_{TV}$$

Définition du β-mélange

Coefficient de β-mélange

Pour un processus X_t stationnaire :

$$\beta_X(s) = \frac{1}{2}\|P_{(X_0,X_s)} - P_{X_0} \otimes P_{X_0}\|_{TV}$$

Processus β-mélangeant

Définition du β-mélange

Coefficient de β-mélange

Pour un processus X_t stationnaire :

$$\beta_X(s) = \frac{1}{2}\|P_{(X_0,X_s)} - P_{X_0} \otimes P_{X_0}\|_{TV}$$

Processus β-mélangeant

X_t β-mélangeant si $\beta_X(t) \to 0$

Définition du β-mélange

Coefficient de β-mélange

Pour un processus X_t stationnaire :

$$\beta_X(s) = \frac{1}{2}\|P_{(X_0,X_s)} - P_{X_0} \otimes P_{X_0}\|_{TV}$$

Processus β-mélangeant

X_t β-mélangeant si $\beta_X(t) \to 0$

X_t exponentiellement β-mélangeant si $\beta_X(t) \leq ce^{-\theta t}$

Définition du β-mélange

Coefficient de β-mélange

Pour un processus X_t stationnaire :

$$\beta_X(s) = \frac{1}{2}\|P_{(X_0,X_s)} - P_{X_0} \otimes P_{X_0}\|_{TV}$$

Processus β-mélangeant

X_t β-mélangeant si $\beta_X(t) \to 0$

X_t exponentiellement β-mélangeant si $\beta_X(t) \leq ce^{-\theta t}$

Quasi-indépendance entre X_s et X_{t+s} pour t grand

Définition du β-mélange

Coefficient de β-mélange

Pour un processus X_t stationnaire :

$$\beta_X(s) = \frac{1}{2}\|P_{(X_0,X_s)} - P_{X_0} \otimes P_{X_0}\|_{TV}$$

Processus β-mélangeant

X_t β-mélangeant si $\beta_X(t) \to 0$

X_t exponentiellement β-mélangeant si $\beta_X(t) \leq ce^{-\theta t}$

Quasi-indépendance entre X_s et X_{t+s} pour t grand

Contrôle de la variance

Définition du β-mélange

Coefficient de β-mélange

Pour un processus X_t stationnaire :

$$\beta_X(s) = \frac{1}{2}\|P_{(X_0,X_s)} - P_{X_0} \otimes P_{X_0}\|_{TV}$$

Processus β-mélangeant

X_t β-mélangeant si $\beta_X(t) \to 0$
X_t exponentiellement β-mélangeant si $\beta_X(t) \leq ce^{-\theta t}$

Quasi-indépendance entre X_s et X_{t+s} pour t grand

Contrôle de la variance

$$A = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} h(X_{k\Delta})$$

Définition du β-mélange

Coefficient de β-mélange

Pour un processus X_t stationnaire :

$$\beta_X(s) = \frac{1}{2}\|P_{(X_0,X_s)} - P_{X_0} \otimes P_{X_0}\|_{TV}$$

Processus β-mélangeant

X_t β-mélangeant si $\beta_X(t) \to 0$

X_t exponentiellement β-mélangeant si $\beta_X(t) \leq ce^{-\theta t}$

Quasi-indépendance entre X_s et X_{t+s} pour t grand

Contrôle de la variance

$$A = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} h(X_{k\Delta}) \quad \mathrm{Var}(A) \leq \frac{8c\|h\|_\infty}{n\theta\Delta}$$

Espaces S_m

Algorithme

- Pour $m \leq M$: calcul $\hat{g}_m \in S_m$

Espaces S_m

Algorithme

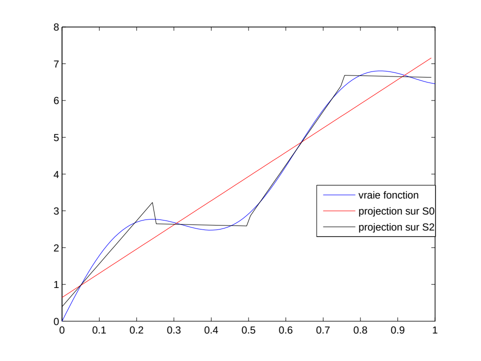
- Pour $m \leq M$: calcul $\hat{g}_m \in S_m$
- sélection meilleur $\hat{g}_m$ grâce à $pen(m)$

Espaces S_m

Algorithme

- Pour $m \leq M$: calcul $\hat{g}_m \in S_m$
- sélection meilleur $\hat{g}_m$ grâce à $pen(m)$

Collection d'espaces S_m

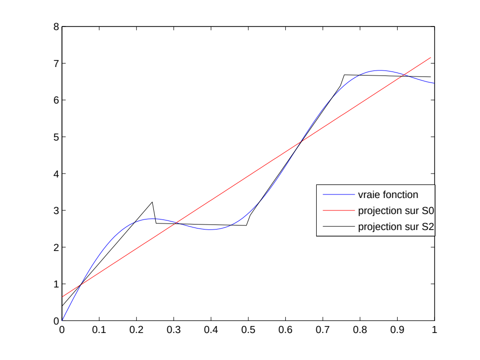


Espaces S_m

Algorithme

- Pour $m \leq M$: calcul $\hat{g}_m \in S_m$
- sélection meilleur $\hat{g}_m$ grâce à $pen(m)$

Collection d'espaces S_m



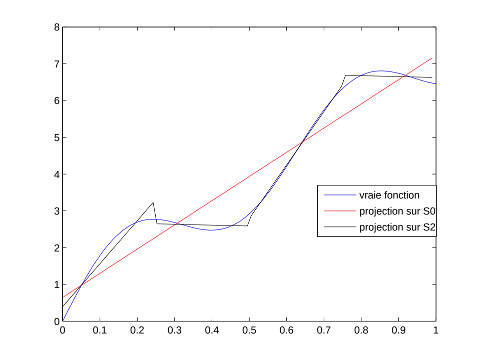
Caractéristiques :

Espaces S_m

Algorithme

- Pour $m \leq M$: calcul $\hat{g}_m \in S_m$
- sélection meilleur $\hat{g}_m$ grâce à $pen(m)$

Collection d'espaces S_m



Caractéristiques :

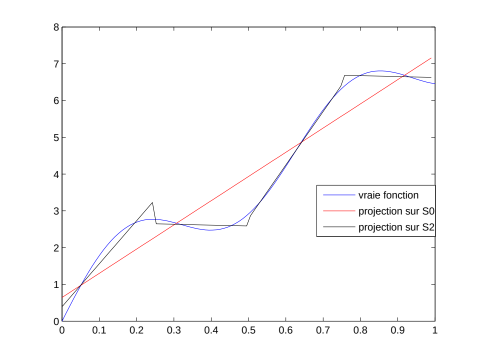
- emboîtés

Espaces S_m

Algorithme

- Pour $m \leq M$: calcul $\hat{g}_m \in S_m$
- sélection meilleur $\hat{g}_m$ grâce à $pen(m)$

Collection d'espaces S_m



Caractéristiques :

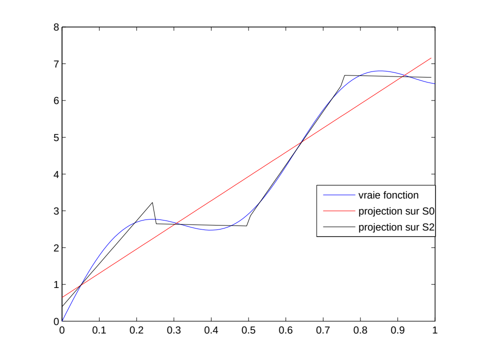
- emboîtés
- denses dans L^2

Espaces S_m

Algorithme

- Pour $m \leq M$: calcul $\hat{g}_m \in S_m$
- sélection meilleur $\hat{g}_m$ grâce à $pen(m)$

Collection d'espaces S_m



Caractéristiques :

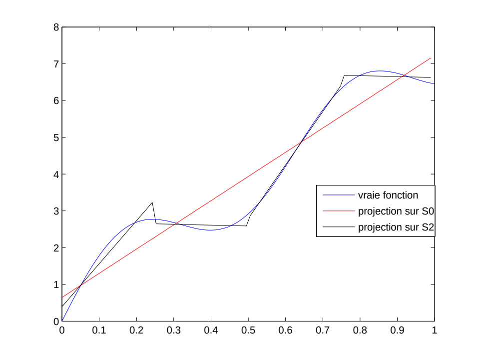
- emboîtés
- denses dans L^2
- équivalence norme L^2 L^∞

Espaces S_m

Algorithme

- Pour $m \leq M$: calcul $\hat{g}_m \in S_m$
- sélection meilleur $\hat{g}_m$ grâce à $pen(m)$

Collection d'espaces S_m



Caractéristiques :

- emboîtés
- denses dans L^2
- équivalence norme L^2 L^∞

Exemples :

- poly trigonométriques
- poly par morceaux

Principe d'estimation non paramétrique

Rappel : $g := f'$

Principe d'estimation non paramétrique

Rappel : $g := f'$

Estimation à m fixé

- contraste γ_n

Principe d'estimation non paramétrique

Rappel : $g := f'$

Estimation à m fixé

- contraste γ_n
- $\hat{g}_m$ minimise $\gamma_n(t)$ sur S_m

Principe d'estimation non paramétrique

Rappel : $g := f'$

Estimation à m fixé

- contraste γ_n
- $\hat{g}_m$ minimise $\gamma_n(t)$ sur S_m
- calcul du risque :
  $R_m = \mathbb{E}\left(\|\hat{g}_m - g\|_{L^2}^2\right)$

Principe d'estimation non paramétrique

Rappel : $g := f'$

Estimation à m fixé

- contraste γ_n
- $\hat{g}_m$ minimise $\gamma_n(t)$ sur S_m
- calcul du risque :
  $R_m = \mathbb{E}\left(\|\hat{g}_m - g\|_{L^2}^2\right)$

$$R_m \leq \|g_m - g\|_{L^2}^2 + \text{Variance} + \text{Reste}$$

Principe d'estimation non paramétrique

Rappel : $g := f'$

Estimation à m fixé

- contraste γ_n
- $\hat{g}_m$ minimise $\gamma_n(t)$ sur S_m
- calcul du risque :
  $R_m = \mathbb{E}\left(\|\hat{g}_m - g\|_{L^2}^2\right)$

$$R_m \leq \|g_m - g\|_{L^2}^2 + \text{Variance} + \text{Reste}$$

Estimateur adaptatif

- pénalité $pen \sim \text{Variance}$

Principe d'estimation non paramétrique

Rappel : $g := f'$

Estimation à m fixé

- contraste γ_n
- $\hat{g}_m$ minimise $\gamma_n(t)$ sur S_m
- calcul du risque :
  $R_m = \mathbb{E}\left(\|\hat{g}_m - g\|_{L^2}^2\right)$

$$R_m \leq \|g_m - g\|_{L^2}^2 + \mathrm{Variance} + \mathrm{Reste}$$

Estimateur adaptatif

- pénalité $pen \sim \mathrm{Variance}$
- choix $\hat{m}$ minimise

$$\inf_{m \leq M} \gamma_n(\hat{g}_m) + pen(m)$$

Principe d'estimation non paramétrique

Rappel : $g := f'$

Estimation à m fixé

- contraste γ_n
- $\hat{g}_m$ minimise $\gamma_n(t)$ sur S_m
- calcul du risque :
  $R_m = \mathbb{E}\left(\|\hat{g}_m - g\|^2_{L^2}\right)$

$$R_m \leq \|g_m - g\|^2_{L^2} + \text{Variance} + \text{Reste}$$

Estimateur adaptatif

- pénalité $pen \sim \text{Variance}$
- choix $\hat{m}$ minimise

$$\inf_{m \leq M} \gamma_n(\hat{g}_m) + pen(m)$$

- risque de $\hat{g}_{\hat{m}}$:
  $R = \mathbb{E}\left(\|\hat{g}_{\hat{m}} - g\|^2_{L^2}\right)$

Principe d'estimation non paramétrique

Rappel : $g := f'$

Estimation à m fixé

- contraste γ_n
- $\hat{g}_m$ minimise $\gamma_n(t)$ sur S_m
- calcul du risque : $R_m = \mathbb{E}\left(\|\hat{g}_m - g\|_{L^2}^2\right)$

$$R_m \leq \|g_m - g\|_{L^2}^2 + \text{Variance} + \text{Reste}$$

Estimateur adaptatif

- pénalité $pen \sim \text{Variance}$
- choix $\hat{m}$ minimise

$$\inf_{m \leq M} \gamma_n(\hat{g}_m) + pen(m)$$

- risque de $\hat{g}_{\hat{m}}$: $R = \mathbb{E}\left(\|\hat{g}_{\hat{m}} - g\|_{L^2}^2\right)$

$$R \leq C \inf_{m \leq M} \left(\|g_m - g\|_{L^2}^2 + pen(m)\right) + \text{Reste} + \text{Autre Reste}$$

En dérivant un estimateur de f

Modèle

- Contraintes : pas besoin diffusion (β-mélange + stationnarité)

En dérivant un estimateur de f

Modèle

- Contraintes : pas besoin diffusion (β-mélange + stationnarité)
- espaces S_m : contraintes fortes au bord

En dérivant un estimateur de f

Modèle

- Contraintes : pas besoin diffusion (β-mélange + stationnarité)
- espaces S_m : contraintes fortes au bord
- Cadre asymptotique : $n \to \infty$, $T = n\Delta \to \infty$
  Δ peut être fixe

En dérivant un estimateur de f

Modèle

- Contraintes : pas besoin diffusion (β-mélange + stationnarité)
- espaces S_m : contraintes fortes au bord
- Cadre asymptotique : $n \to \infty$, $T = n\Delta \to \infty$
  Δ peut être fixe

Estimateur à m fixé

Contraste :

En dérivant un estimateur de f

Modèle

- Contraintes : pas besoin diffusion (β-mélange + stationnarité)
- espaces S_m : contraintes fortes au bord
- Cadre asymptotique : $n \to \infty$, $T = n\Delta \to \infty$
  Δ peut être fixe

Estimateur à m fixé

Contraste :

$$\gamma_n(t) = \|t\|_{L^2}^2 + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} t'(X_{k\Delta})$$

En dérivant un estimateur de f

Modèle

- Contraintes : pas besoin diffusion (β-mélange + stationnarité)
- espaces S_m : contraintes fortes au bord
- Cadre asymptotique : $n \to \infty$, $T = n\Delta \to \infty$
  Δ peut être fixe

Estimateur à m fixé

Contraste :

$$\gamma_n(t) = \|t\|_{L^2}^2 + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} t'(X_{k\Delta})$$

Justification :

En dérivant un estimateur de f

Modèle

- Contraintes : pas besoin diffusion (β-mélange + stationnarité)
- espaces S_m : contraintes fortes au bord
- Cadre asymptotique : $n \to \infty$, $T = n\Delta \to \infty$
  Δ peut être fixe

Estimateur à m fixé

Contraste :

$$\gamma_n(t) = \|t\|^2_{L^2} + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} t'(X_{k\Delta})$$

Justification :

$$\mathbb{E}\left(\gamma_n(t)\right) = \|t\|^2_{L^2} + 2 < t', f >$$

En dérivant un estimateur de f

Modèle

- Contraintes : pas besoin diffusion (β-mélange + stationnarité)
- espaces S_m : contraintes fortes au bord
- Cadre asymptotique : $n \to \infty$, $T = n\Delta \to \infty$
  Δ peut être fixe

Estimateur à m fixé

Contraste :

$$\gamma_n(t) = \|t\|_{L^2}^2 + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} t'(X_{k\Delta})$$

Justification :

$$\mathbb{E}\left(\gamma_n(t)\right) = \|t\|_{L^2}^2 + 2 < t', f > \\ = \|t\|_{L^2}^2 - 2 < t, f' >$$

Résultats

Risque de l'estimateur à m fixé :

$$R_m \leq \|g_m - g\|_{L^2}^2 + D_m^3/(n\Delta)$$

Résultats

Risque de l'estimateur à m fixé :

$$R_m \leq \|g_m - g\|_{L^2}^2 + D_m^3/(n\Delta)$$

Estimateur adaptatif

- pénalité : $pen(m) = D_m^3/(n\Delta)$

Résultats

Risque de l'estimateur à m fixé :

$$R_m \leq \|g_m - g\|_{L^2}^2 + D_m^3/(n\Delta)$$

Estimateur adaptatif

- pénalité : $pen(m) = D_m^3/(n\Delta)$
- risque : $R \leq C min_{m \leq M} \left(\|g_m - g\|_{L^2}^2 + pen(m)\right) + \frac{\ln^4(n\Delta)}{n\Delta}$

Résultats

Risque de l'estimateur à m fixé :

$$R_m \leq \|g_m - g\|_{L^2}^2 + D_m^3/(n\Delta)$$

Estimateur adaptatif

- pénalité : $pen(m) = D_m^3/(n\Delta)$
- risque : $R \leq C min_{m \leq M} \left(\|g_m - g\|_{L^2}^2 + pen(m)\right) + \frac{\ln^4(n\Delta)}{n\Delta}$

Vitesse de convergence si $f' = g$ dans Besov $B_{2,\infty}^{\alpha}$

Résultats

Risque de l'estimateur à m fixé :

$$R_m \leq \|g_m - g\|_{L^2}^2 + D_m^3/(n\Delta)$$

Estimateur adaptatif

- pénalité : $pen(m) = D_m^3/(n\Delta)$
- risque : $R \leq C min_{m \leq M} \left(\|g_m - g\|_{L^2}^2 + pen(m)\right) + \frac{\ln^4(n\Delta)}{n\Delta}$

Vitesse de convergence si $f' = g$ dans Besov $B_{2,\infty}^{\alpha}$

$$\mathscr{R}(\hat{g}_{\hat{m}}) \leq (n\Delta)^{-2\alpha/(3+2\alpha)}$$

Résultats

Risque de l'estimateur à m fixé :

$$R_m \leq \|g_m - g\|_{L^2}^2 + D_m^3/(n\Delta)$$

Estimateur adaptatif

- pénalité : $pen(m) = D_m^3/(n\Delta)$
- risque : $R \leq C min_{m\leq M}\left(\|g_m - g\|_{L^2}^2 + pen(m)\right) + \frac{\ln^4(n\Delta)}{n\Delta}$

Vitesse de convergence si $f' = g$ dans Besov $B_{2,\infty}^{\alpha}$

Estimation de b (Δ fixe, σ connu) :

$$\mathscr{R}(\hat{g}_{\hat{m}}) \leq (n\Delta)^{-2\alpha/(3+2\alpha)}$$

Résultats

Risque de l'estimateur à m fixé :

$$R_m \leq \|g_m - g\|_{L^2}^2 + D_m^3/(n\Delta)$$

Estimateur adaptatif

- pénalité : $pen(m) = D_m^3/(n\Delta)$
- risque : $R \leq C min_{m \leq M} \left(\|g_m - g\|_{L^2}^2 + pen(m)\right) + \frac{\ln^4(n\Delta)}{n\Delta}$

Vitesse de convergence si $f' = g$ dans Besov $B_{2,\infty}^{\alpha}$

$$\mathscr{R}(\hat{g}_{\hat{m}}) \leq (n\Delta)^{-2\alpha/(3+2\alpha)}$$

Estimation de b (Δ fixe, σ connu) :
Gobet, Hoffmann, Reiss (2004) :

Résultats

Risque de l'estimateur à m fixé :

$$R_m \leq \|g_m - g\|_{L^2}^2 + D_m^3/(n\Delta)$$

Estimateur adaptatif

- pénalité : $pen(m) = D_m^3/(n\Delta)$
- risque : $R \leq C min_{m \leq M} \left(\|g_m - g\|_{L^2}^2 + pen(m)\right) + \frac{\ln^4(n\Delta)}{n\Delta}$

Vitesse de convergence si $f' = g$ dans Besov $B_{2,\infty}^{\alpha}$

$$\mathscr{R}(\hat{g}_{\hat{m}}) \leq (n\Delta)^{-2\alpha/(3+2\alpha)}$$

Estimation de b (Δ fixe, σ connu) :
Gobet, Hoffmann, Reiss (2004) :
$\mathscr{R}(\hat{b}) \leq n^{-2\alpha/(3+2\alpha)}$

En utilisant $f' = 2\sigma^{-2}bf$

Modèle

Contraintes :

En utilisant $f' = 2\sigma^{-2}bf$

Modèle

Contraintes : diffusion

En utilisant $f' = 2\sigma^{-2}bf$

Modèle

Contraintes : diffusion + σ constant connu

En utilisant $f' = 2\sigma^{-2}bf$

Modèle

Contraintes : diffusion + σ constant connu + $(X_t \simeq X_{t+h})$ pour h petit

En utilisant $f' = 2\sigma^{-2}bf$

Modèle

Contraintes : diffusion + σ constant connu + $(X_t \simeq X_{t+h})$ pour h petit
cadre asymptotique :

En utilisant $f' = 2\sigma^{-2}bf$

Modèle

Contraintes : diffusion + σ constant connu + $(X_t \simeq X_{t+h})$ pour h petit
cadre asymptotique : $n \to \infty$, $T = n\Delta \to \infty$, $\Delta \to 0$

En utilisant $f' = 2\sigma^{-2}bf$

Modèle

Contraintes : diffusion + σ constant connu + $(X_t \simeq X_{t+h})$ pour h petit
cadre asymptotique : $n \to \infty$, $T = n\Delta \to \infty$, $\Delta \to 0$

Estimation à m fixé

Contraste :

$$\gamma_n(t) = \|t\|_{L^2}^2 - \frac{4}{n\Delta}\sum_{k=1}^{n}\left(X_{(k+1)\Delta} - X_{k\Delta}\right) t(X_{k\Delta})$$

En utilisant $f' = 2\sigma^{-2}bf$

Modèle

Contraintes : diffusion + σ constant connu + $(X_t \simeq X_{t+h})$ pour h petit
cadre asymptotique : $n \to \infty$, $T = n\Delta \to \infty$, $\Delta \to 0$

Estimation à m fixé

Contraste :

$$\gamma_n(t) = \|t\|_{L^2}^2 - \frac{4}{n\Delta} \sum_{k=1}^{n} \left(X_{(k+1)\Delta} - X_{k\Delta}\right) t(X_{k\Delta})$$

Justification : $\Delta^{-1}\left(X_{(k+1)\Delta} - X_{k\Delta}\right) = b(X_{k\Delta}) + I_{k\Delta} + Z_{k\Delta}$

En utilisant $f' = 2\sigma^{-2}bf$

Modèle

Contraintes : diffusion + σ constant connu + $(X_t \simeq X_{t+h})$ pour h petit
cadre asymptotique : $n \to \infty$, $T = n\Delta \to \infty$, $\Delta \to 0$

Estimation à m fixé

Contraste :

$$\gamma_n(t) = \|t\|_{L^2}^2 - \frac{4}{n\Delta} \sum_{k=1}^{n} \left(X_{(k+1)\Delta} - X_{k\Delta}\right) t(X_{k\Delta})$$

Justification : $\Delta^{-1}\left(X_{(k+1)\Delta} - X_{k\Delta}\right) = b(X_{k\Delta}) + I_{k\Delta} + Z_{k\Delta}$

$$\mathbb{E}\left(\gamma_n(t)\right) = \|t\|_{L^2}^2 - 2 < t, 2bf > + O\left(\Delta^{1/2}\right)$$

En utilisant $f' = 2\sigma^{-2}bf$

Modèle

Contraintes : diffusion + σ constant connu + $(X_t \simeq X_{t+h})$ pour h petit
cadre asymptotique : $n \to \infty$, $T = n\Delta \to \infty$, $\Delta \to 0$

Estimation à m fixé

Contraste :

$$\gamma_n(t) = \|t\|^2_{L^2} - \frac{4}{n\Delta} \sum_{k=1}^{n} \left(X_{(k+1)\Delta} - X_{k\Delta}\right) t(X_{k\Delta})$$

Justification : $\Delta^{-1}\left(X_{(k+1)\Delta} - X_{k\Delta}\right) = b(X_{k\Delta}) + I_{k\Delta} + Z_{k\Delta}$

$$\mathbb{E}\left(\gamma_n(t)\right) = \|t\|^2_{L^2} - 2 < t, 2bf > +O\left(\Delta^{1/2}\right) \simeq \|t\|_{L^2} - 2 < t, \sigma^2 f' >$$

Résultats

Risque de l'estimateur à m fixé

$$R_m \leq \|g_m - g\|_{L^2}^2 + D_m/(n\Delta) + \Delta$$

Résultats

Risque de l'estimateur à m fixé

$$R_m \leq \|g_m - g\|_{L^2}^2 + D_m/(n\Delta) + \Delta$$

Estimation adaptative

- pénalité $pen(m) = D_m/(n\Delta)$

Résultats

Risque de l'estimateur à m fixé

$$R_m \leq \|g_m - g\|_{L^2}^2 + D_m/(n\Delta) + \Delta$$

Estimation adaptative

- pénalité $pen(m) = D_m/(n\Delta)$
- Risque : $R \leq C \min_{m \leq M} \left(\|g_m - g\|_{L^2}^2 + pen(m)\right) + \Delta + \frac{\ln^2(n\Delta)}{n\Delta}$

Résultats

Risque de l'estimateur à m fixé

$$R_m \leq \|g_m - g\|_{L^2}^2 + D_m/(n\Delta) + \Delta$$

Estimation adaptative

- pénalité $pen(m) = D_m/(n\Delta)$
- Risque : $R \leq C \min_{m \leq M} \left(\|g_m - g\|_{L^2}^2 + pen(m)\right) + \Delta + \frac{\ln^2(n\Delta)}{n\Delta}$

Vitesse de convergence : si $f' = g$ dans Besov $B_{2,\infty}^{\alpha}$

$$R \leq (n\Delta)^{-2\alpha/(1+2\alpha)} + \Delta$$

Résultats

Risque de l'estimateur à m fixé

$$R_m \leq \|g_m - g\|_{L^2}^2 + D_m/(n\Delta) + \Delta$$

Estimation adaptative

- pénalité $pen(m) = D_m/(n\Delta)$
- Risque : $R \leq C \min_{m \leq M} \left(\|g_m - g\|_{L^2}^2 + pen(m)\right) + \Delta + \frac{\ln^2(n\Delta)}{n\Delta}$

Vitesse de convergence : si $f' = g$ dans Besov $B_{2,\infty}^{\alpha}$

$$R \leq (n\Delta)^{-2\alpha/(1+2\alpha)} + \Delta$$

Dalayan et Kutoyants (2003) : vitesse minimax à temps continu ($\Delta = 0$) :

Résultats

Risque de l'estimateur à m fixé

$$R_m \leq \|g_m - g\|^2_{L^2} + D_m/(n\Delta) + \Delta$$

Estimation adaptative

- pénalité $pen(m) = D_m/(n\Delta)$
- Risque : $R \leq C \min_{m \leq M} \left(\|g_m - g\|^2_{L^2} + pen(m) \right) + \Delta + \frac{\ln^2(n\Delta)}{n\Delta}$

Vitesse de convergence : si $f' = g$ dans Besov $B^{\alpha}_{2,\infty}$

$$R \leq (n\Delta)^{-2\alpha/(1+2\alpha)} + \Delta$$

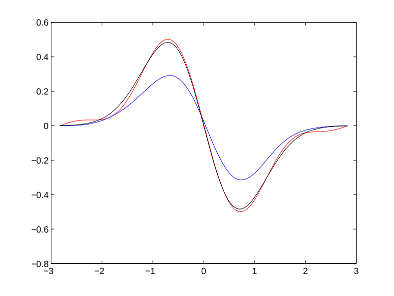
Dalayan et Kutoyants (2003) : vitesse minimax à temps continu $(\Delta = 0)$: $\mathscr{R}(\hat{g}_{\hat{m}}) \simeq T^{-2\alpha/(1+2\alpha)}$

Ornstein Uhlenbeck

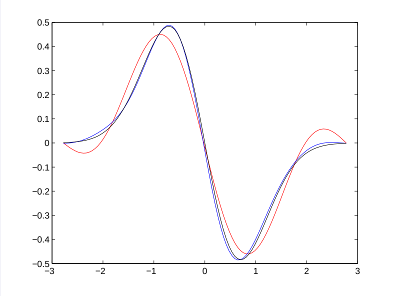
- Paramètres : $b(x) = -x$ et $\sigma(x) = 1$

Graphiques

$N = 10^4$ et $\Delta = 1$



$N = 10^5$ et $\Delta = 10^{-2}$



Vraie dérivée

Dérivée estimée en dérivant un estimateur de f

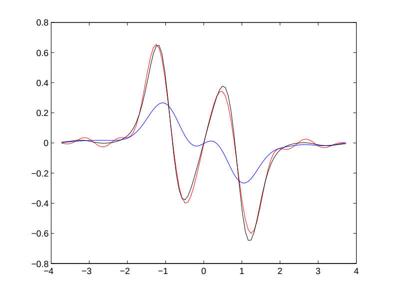
Dérivée estimée par $f' = 2bf$

Fonction sinus

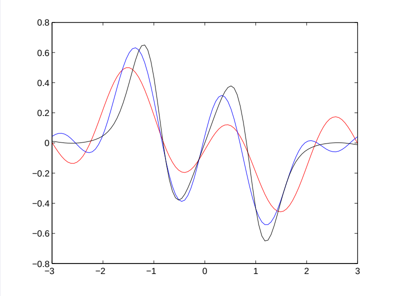
- Paramètres : $b(x) = sin(x) - x/\sqrt{1+x^2}$ et $\sigma(x) = 1$

Graphiques

$N = 10^4$ et $\Delta = 1$



$N = 10^5$ et $\Delta = 10^{-3}$



Vraie dérivée

Dérivée estimée en dérivant un estimateur de f

Dérivée estimée par $f' = 2bf$