Comportement d'un TASEP sur $\mathbb{N}$ avec une source complexe

Nicky Sonigo

École Normale Supérieure de Lyon

Neuvième Colloque Jeunes Probabilistes et Statisticiens
Le Mont-Dore, 7 mai 2010

Plan

1. TASEP sur $\mathbb{N}$
   - Introduction
   - Construction graphique (Harris)
   - Couplage standard et particules de seconde classe
   - Un théorème ergodique

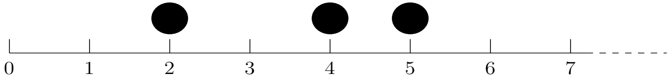
2. TASEP avec taux de création complexe
   - Présentation du modèle
   - Représentation en un processus multi-classes
   - Loi forte des grands nombres

Plan

1. TASEP sur $\mathbb{N}$
   - Introduction
   - Construction graphique (Harris)
   - Couplage standard et particules de seconde classe
   - Un théorème ergodique
2. TASEP avec taux de création complexe
   - Présentation du modèle
   - Représentation en un processus multi-classes
   - Loi forte des grands nombres

TASEP sur $\mathbb{N}$

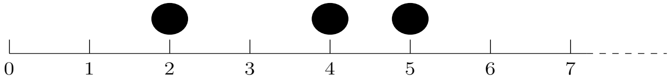
- TASEP = Totally Asymmetric Simple Exclusion Process
- $(\eta_t)_{t\geq 0}$ processus de Markov à temps continu sur $X := \{0,1\}^{\mathbb{N}}$
- $\lambda \in (0,1]$ = taux de création de particule au site 0



TASEP sur $\mathbb{N}$

Transitions possibles du TASEP sur $\mathbb{N}$:

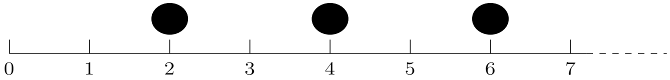
- les particules sautent vers la droite à taux 1 si le site de droite est libre ;
- si le site de droite est occupé, la particule ne peut pas sauter ;
- les particules sont crées en 0 avec un taux λ.



TASEP sur $\mathbb{N}$

Transitions possibles du TASEP sur $\mathbb{N}$:

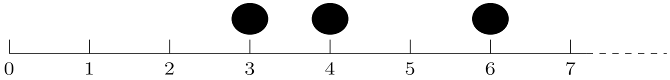
- les particules sautent vers la droite à taux 1 si le site de droite est libre ;
- si le site de droite est occupé, la particule ne peut pas sauter ;
- les particules sont crées en 0 avec un taux λ.



TASEP sur $\mathbb{N}$

Transitions possibles du TASEP sur $\mathbb{N}$:

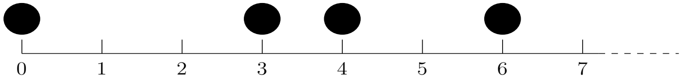
- les particules sautent vers la droite à taux 1 si le site de droite est libre ;
- si le site de droite est occupé, la particule ne peut pas sauter ;
- les particules sont crées en 0 avec un taux λ.



TASEP sur $\mathbb{N}$

Transitions possibles du TASEP sur $\mathbb{N}$:

- les particules sautent vers la droite à taux 1 si le site de droite est libre ;
- si le site de droite est occupé, la particule ne peut pas sauter ;
- les particules sont crées en 0 avec un taux λ.

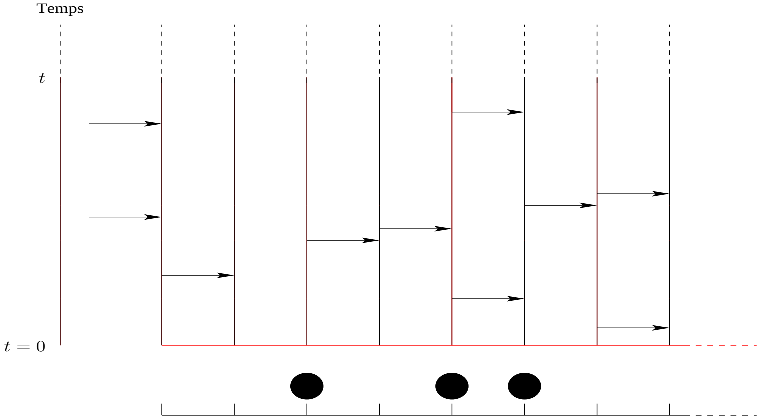


Plan

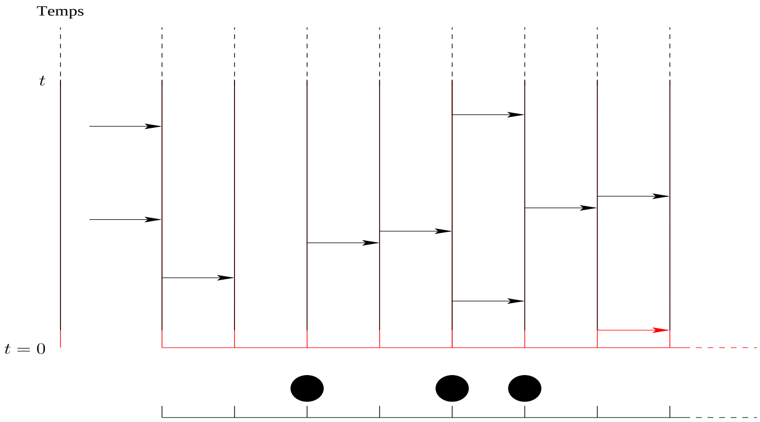
1. TASEP sur ℕ
   - Introduction
   - Construction graphique (Harris)
   - Couplage standard et particules de seconde classe
   - Un théorème ergodique

2. TASEP avec taux de création complexe
   - Présentation du modèle
   - Représentation en un processus multi-classes
   - Loi forte des grands nombres

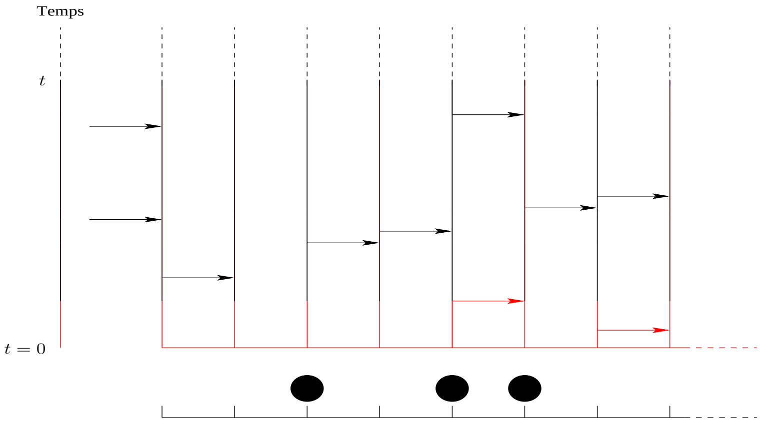
Construction graphique (Harris)



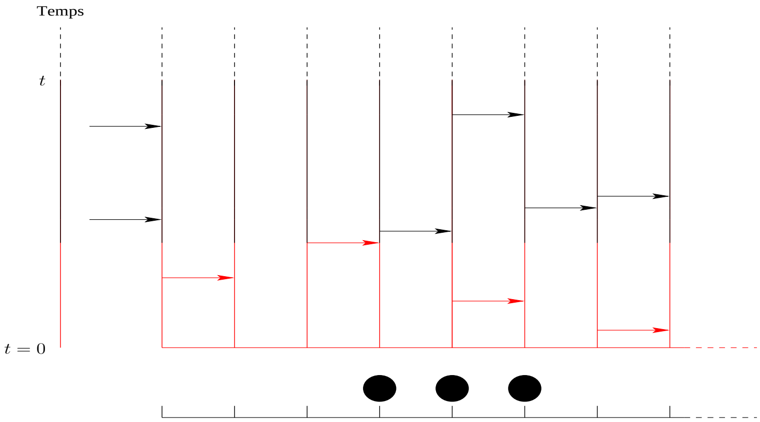
Construction graphique (Harris)



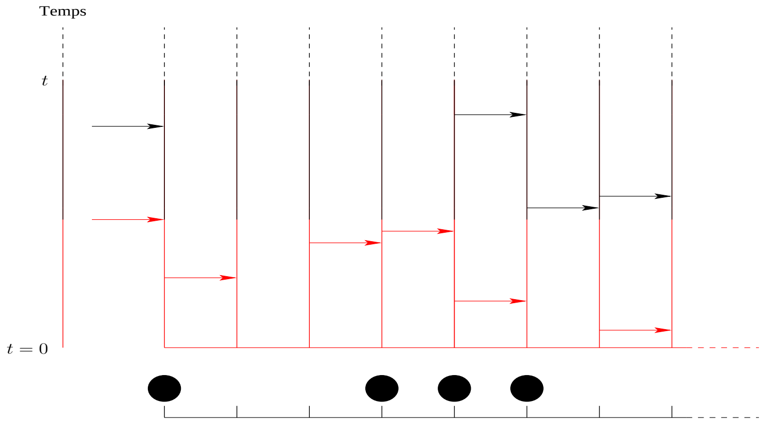
Construction graphique (Harris)



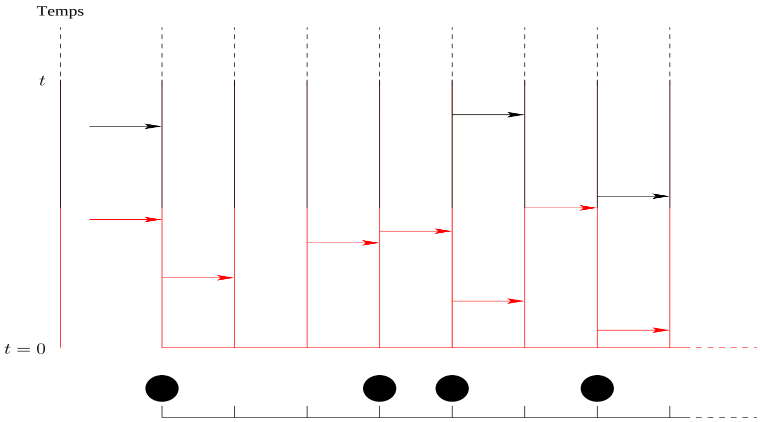
Construction graphique (Harris)



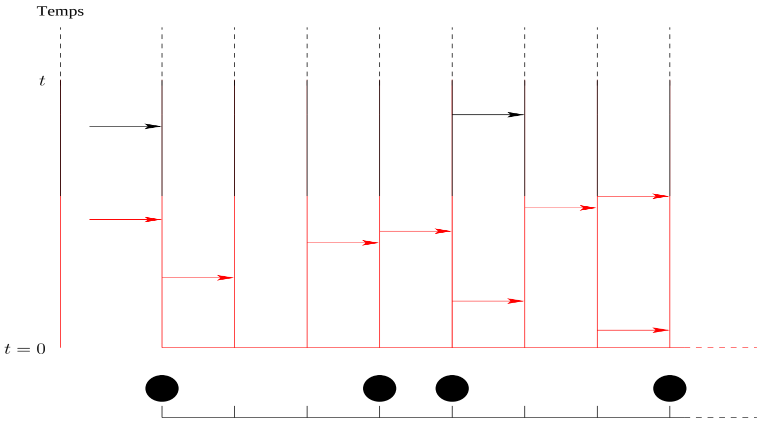
Construction graphique (Harris)



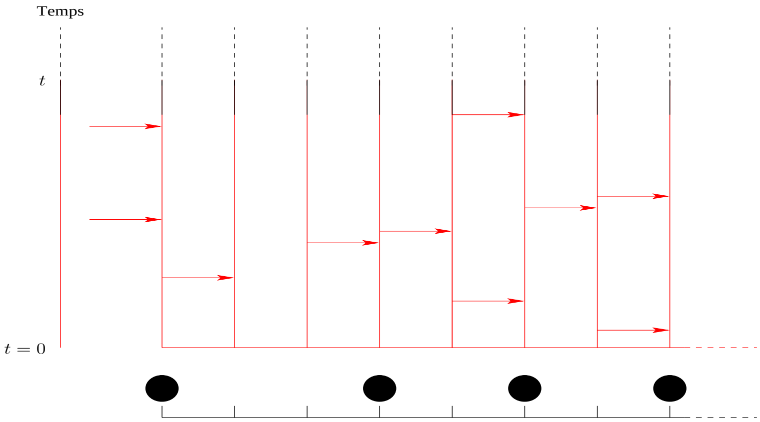
Construction graphique (Harris)



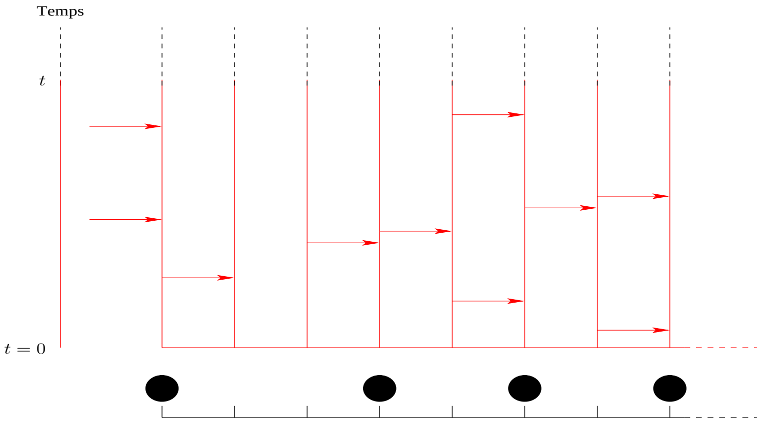
Construction graphique (Harris)



Construction graphique (Harris)



Construction graphique (Harris)



Construction graphique (Harris)

Construction graphique

- $\mathcal{N} := (\mathcal{N}_i, i \geq -1) =$ famille de processus de Poisson indépendants (ou d'horloges exponentielles) sur $\mathbb{R}_+$;
- Si $i \geq 0$, $\mathcal{N}_i$ a pour paramètre 1 ;
- $\mathcal{N}_{-1}$ a pour paramètre λ ;
- η_0 : configuration initiale (déterministe ou aléatoire) ;
- (η_t) construit en fonction de η_0 et $\mathcal{N}$.

Plan

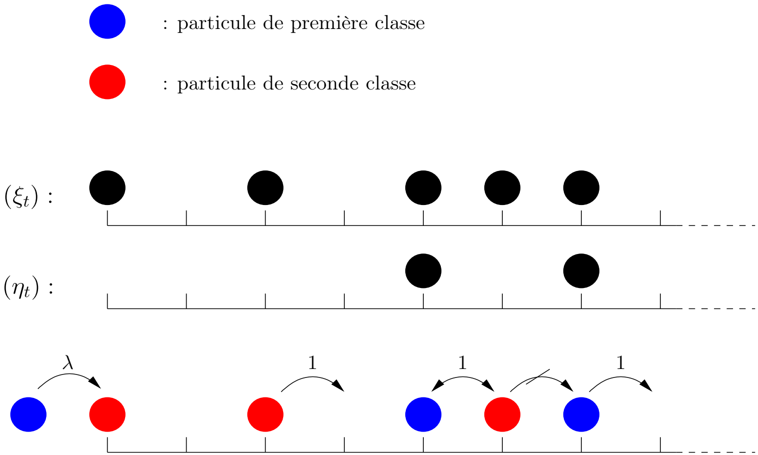
1. TASEP sur $\mathbb{N}$
   - Introduction
   - Construction graphique (Harris)
   - Couplage standard et particules de seconde classe
   - Un théorème ergodique
2. TASEP avec taux de création complexe
   - Présentation du modèle
   - Représentation en un processus multi-classes
   - Loi forte des grands nombres

Couplage standard

Couplage standard. On considère deux configurations initiales η et ξ. On construit les TASEP (η_t) et (ξ_t) partant de η et de ξ respectivement, en utilisant les mêmes horloges exponentielles.

Monotonie. Le couplage standard est monotone : si $\eta \leq \xi$, *i.e.* $\eta(x) \leq \xi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{N}$, alors presque sûrement, pour tout $t \geq 0$, $\eta_t \leq \xi_t$

Particules de seconde classe



Particules de seconde classe

Interprétation

- Les particules de première classe ont priorité sur celles de seconde classe : transtion $12 \longrightarrow 21$ à taux 1 ;
- les particules de seconde classe peuvent reculer, voire même sortir du système : on dit que la particule meurt ;

Plan

Mesures invariantes

Mesures invariantes

- ν^λ la mesure produit de Bernoulli de paramètre λ est invariante pour le TASEP sur $\mathbb{N}$;
- pour tout $\rho \geq \max(\frac{1}{2}, 1-\lambda)$, il existe une mesure invariante μ_ρ^λ qui est asymptotiquement produit de densité ρ.

Mesures invariantes

Mesures invariantes

- ν^λ la mesure produit de Bernoulli de paramètre λ est invariante pour le TASEP sur $\mathbb{N}$;
- pour tout $\rho \geq \max(\frac{1}{2}, 1-\lambda)$, il existe une mesure invariante μ_ρ^λ qui est asymptotiquement produit de densité ρ.

Soit π une mesure produit sur $\mathbb{N}$ pour laquelle $\rho := \lim_{x\to\infty} \langle \eta(x) \rangle_\pi$ existe. Soit (η_t) le processus de mesure initiale π.

Théorème ergodique

Théorème (Liggett 1975)

$$\text{Si } \lambda \geq \frac{1}{2} \text{ alors } \lim_{t\to\infty} \pi S_\lambda(t) = \begin{cases} \mu_\rho^\lambda, & \text{si } \rho \geq \frac{1}{2}, \\ \mu_{\frac{1}{2}}^\lambda, & \text{si } \rho \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$\text{Si } \lambda \leq \frac{1}{2} \text{ alors } \lim_{t\to\infty} \pi S_\lambda(t) = \begin{cases} \mu_\rho^\lambda, & \text{si } \rho > 1-\lambda \\ \nu^\lambda, & \text{si } \rho \leq 1-\lambda. \end{cases}$$

où $S_\lambda(t)$ est le semi-groupe de Markov du TASEP sur $\mathbb{N}$.

Plan

TASEP sur $\mathbb{N}$ avec source complexe

- Taux de création de particules $= \lambda(\eta)$.
- $\lambda(\eta)$ dépend de la configuration actuelle.
- Dépendance à portée finie (ou d'espérance finie) : $\lambda(\eta)$ ne dépend que des $R \geq 1$ premiers sites.

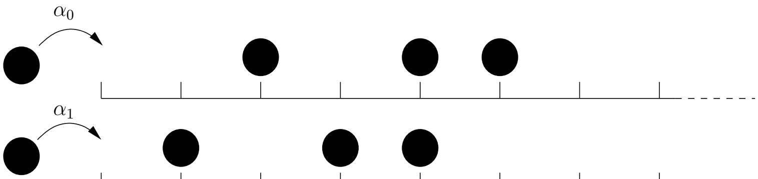
TASEP sur $\mathbb{N}$ avec source complexe

- Taux de création de particules $= \lambda(\eta)$.
- $\lambda(\eta)$ dépend de la configuration actuelle.
- Dépendance à portée finie (ou d'espérance finie) : $\lambda(\eta)$ ne dépend que des $R \geq 1$ premiers sites.

Un exemple.

- $\alpha_0, \alpha_1 \in (0, 1]$;
- $\lambda(\eta) := \alpha_0(1 - \eta(1)) + \alpha_1 \eta(1)$.

TASEP sur $\mathbb{N}$ avec source complexe



TASEP sur $\mathbb{N}$ avec source complexe

Supposons que $\alpha_1 \geq \alpha_0$.

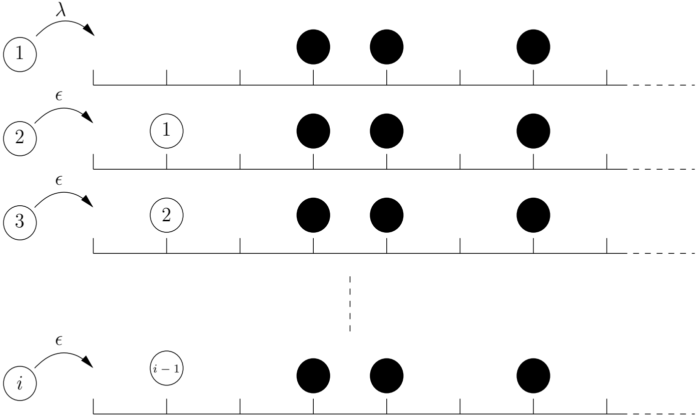
Le processus est encore monotone au sens où l'on peut coupler deux dynamiques issues de configurations ordonées de sorte que cet ordre soit préservé au cours du temps.

On pose $\alpha_0 = \lambda$ et $\alpha_1 = \lambda + \epsilon$ et on suppose que $0 < \lambda < \lambda + \epsilon < \frac{1}{2}$.

Plan

1. TASEP sur $\mathbb{N}$
   - Introduction
   - Construction graphique (Harris)
   - Couplage standard et particules de seconde classe
   - Un théorème ergodique
2. TASEP avec taux de création complexe
   - Présentation du modèle
   - Représentation en un processus multi-classes
   - Loi forte des grands nombres

Représentation en un processus multi-classes



Représentation en un processus multi-classes

- On obtient un processus (ξ_t) sur $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$;
- le processus $\eta_t(x) := \mathbf{1}_{\xi_t(x)\neq 0}$ est un TASEP avec source complexe ;
- le processus $\zeta_t(x) := \mathbf{1}_{\xi_t(x)=1}$ est un TASEP classique.

Plan

Loi forte des grands nombres

Soit $N_t^{(i)}$ le nombre de particules de classe i qui ont été crées entre 0 et t et qui sont toujours en vie au temps t.

Soit N_t le nombre total de particules crées entre 0 et t et qui sont toujours en vie au temps t :

$$N_t = \sum_{i=1}^{\infty} N_t^{(i)}.$$

Loi forte des grands nombres

Théorème (S. 2009)

Pour tous $\lambda, \epsilon > 0$ tels que $\lambda + \epsilon < \frac{1}{2}$, N_t/t converge presque sûrement vers une constante $v(\lambda, \epsilon)$. De plus :

$$v(\lambda, \epsilon) = \lambda(1 - \lambda)(1 + q(\lambda)\varepsilon + o(\varepsilon)).$$

où $q(\lambda)$ est la probabilité de survie de la particule de seconde classe pour un TASEP de mesure initiale $21\nu^\lambda$.

Loi forte des grands nombres

Théorème (S. 2010)

Pour tout $\lambda \in [0, 1]$, $q(\lambda) = (1 - 2\lambda)\mathbf{1}_{\lambda \leq \frac{1}{2}}$.
En particulier, si $\lambda < \frac{1}{2}$, on a presque sûrement :

$$\lim_{t \to \infty} \frac{N_t}{t} = \lambda(1 - \lambda)(1 + \varepsilon(1 - 2\lambda) + o(\varepsilon)).$$

Loi forte des grands nombres

Esquisse de preuve :

- On montre d'abord un lemme donnant des estimées a priori sur le densité de particules de classe i :

Lemme

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{N_t^{(i)}}{t} = O(\epsilon^{i-1}).$$

- Pour calculer la limite à l'ordre 1, il suffit donc de ne considérer que les particules de première et de seconde classe.

Loi forte des grands nombres

- Le théorème ergodique de Liggett nous donne que $N_t^{(1)}$ est de l'ordre de $\lambda(1-\lambda)t$;
- Le nombre de particules de seconde classe entrées entre 0 et t est de l'ordre de $\lambda(1-\lambda)\epsilon t$;
- Si ϵ est suffisamment petit, les particules de seconde classe n'interagissent qu'une fois qu'elles sont loin dans le système donc leur probabilité de survie est approximativement $q(\lambda)$.

T.M. Liggett.
Ergodic theorems for the asymmetric simple exclusion process.
Transactions of the American Mathematical Society, 213 :237–261, 1975.

T.M. Liggett.
Interacting Particle Systems.
Springer, 1985.

N. Sonigo.
Semi-infinite TASEP with a Complex Boundary Mechanism.
Journal of Statistical Physics, 136(6) :1069–1094, September 2009.

N. Sonigo.
Survival Probability of a Second-class Particle in a semi-infinite TASEP.
en cours, 2010.