

Marches renforcées par arêtes orientées et environnements de Dirichlet

Laurent Tournier

Thèse sous la direction de Christophe Sabot
Institut Camille Jordan, Université Lyon 1

3–7 mai 2010 / Colloque « Jeunes probabilistes et statisticiens », Le Mont-Dore



Marche aléatoire renforcée par arêtes orientées

Graphe orienté $G = (V, E)$; sommet initial $o \in V$

Poids initiaux $\alpha_e > 0$ pour tout $e \in E$.

Marche aléatoire renforcée par arêtes orientées

Graphe orienté $G = (V, E)$; sommet initial $o \in V$

Poids initiaux $\alpha_e > 0$ pour tout $e \in E$.

On définit la marche aléatoire $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et les poids $(\alpha_e^{(n)})_{e \in E, n \in \mathbb{N}}$ par

- $X_0 = o, \quad \alpha_e^{(0)} = \alpha_e$ pour $e \in E$;
- pour tous $n \geq 0, e \in E$,
 - $P((X_n, X_{n+1}) = e | X_0, \dots, X_n) = \frac{\alpha_e^{(n)}}{\sum_{f=X_n} \alpha_f^{(n)}}$
 - si $e = (X_n, X_{n+1}), \quad \alpha_e^{(n+1)} = \alpha_e^{(n)} + 1.$
(et $\alpha_e^{(n+1)} = \alpha_e^{(n)}$ sinon)

Marche aléatoire renforcée par arêtes orientées

Graphe orienté $G = (V, E)$; sommet initial $o \in V$

Poids initiaux $\alpha_e > 0$ pour tout $e \in E$.

On définit la marche aléatoire $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et les poids $(\alpha_e^{(n)})_{e \in E, n \in \mathbb{N}}$ par

- $X_0 = o, \quad \alpha_e^{(0)} = \alpha_e$ pour $e \in E$;
- pour tous $n \geq 0, e \in E$,
 - $P((X_n, X_{n+1}) = e | X_0, \dots, X_n) = \frac{\alpha_e^{(n)}}{\sum_{\underline{f}=X_n} \alpha_f^{(n)}}$
 - si $e = (X_n, X_{n+1}), \quad \alpha_e^{(n+1)} = \alpha_e^{(n)} + 1.$
(et $\alpha_e^{(n+1)} = \alpha_e^{(n)}$ sinon)

Dans \mathbb{Z}^d , on suppose les poids invariants par translation :

$$\alpha_{(x, x \pm e_i)} = \alpha_{\pm i}, \quad i = 1, \dots, d.$$

Urne de Polya

Une urne contient des boules de r couleurs en quantités $\alpha_1, \dots, \alpha_r$.

On pioche une boule au hasard et on la remet avec une nouvelle boule de même couleur.

On répète alors le procédé.

On note $(Y_n)_{n \geq 1}$ la suite des couleurs des boules tirées.

Urne de Polya

Une urne contient des boules de r couleurs en quantités $\alpha_1, \dots, \alpha_r$.

On pioche une boule au hasard et on la remet avec une nouvelle boule de même couleur.

On répète alors le procédé.

On note $(Y_n)_{n \geq 1}$ la suite des couleurs des boules tirées.

On tire un vecteur $p = (p_1, \dots, p_r)$ selon la loi $\mathcal{D}(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$

$$= \frac{\Gamma(\alpha_1 + \dots + \alpha_r)}{\Gamma(\alpha_1) \dots \Gamma(\alpha_r)} \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i - 1} d\lambda(p)$$

sur $\text{Prob}(\{1, \dots, r\})$.

On effectue une suite $(Y_n)_{n \geq 1}$ de tirages indépendants de loi p :

$$P(Y_n = i | p) = p_i.$$

Urne de Polya

Une urne contient des boules de r couleurs en quantités $\alpha_1, \dots, \alpha_r$.

On pioche une boule au hasard et on la remet avec une nouvelle boule de même couleur.

On répète alors le procédé.

On note $(Y_n)_{n \geq 1}$ la suite des couleurs des boules tirées.

On tire un vecteur $p = (p_1, \dots, p_r)$ selon la loi $\mathcal{D}(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$

$$= \frac{\Gamma(\alpha_1 + \dots + \alpha_r)}{\Gamma(\alpha_1) \dots \Gamma(\alpha_r)} \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i - 1} d\lambda(p)$$

sur $\text{Prob}(\{1, \dots, r\})$.

On effectue une suite $(Y_n)_{n \geq 1}$ de tirages indépendants de loi p :

$$P(Y_n = i | p) = p_i.$$

Ces suites $(Y_n)_{n \geq 1}$ ont même loi.

Remarque : le vecteur des proportions de couleurs tirées de l'urne converge p.s. vers p

Renforcement linéaire et milieu de Dirichlet

Retour à $G = (V, E)$, poids $\alpha = (\alpha_e)_{e \in E}$.

$\mathbb{P}^{(\alpha)}$: loi de Dirichlet sur les vecteurs $\rho = (\rho_e)_{e \in E}$:

$$\mathbb{P}^{(\alpha)} = \prod_{x \in V} \mathcal{D}((\alpha_e)_{e \in E, e=x})$$

$P_o^{(\rho)}$: loi de la chaîne de Markov issue de o de transition ρ .

$P_o(\cdot) = \mathbb{E}[P_o^{(\rho)}(\cdot)]$: loi de la m.a. en milieu de Dirichlet

Proposition

La loi d'une marche aléatoire renforcée par arêtes orientées de poids initiaux $\alpha = (\alpha_e)_{e \in E}$ coïncide avec la loi de la marche aléatoire dans un environnement de Dirichlet de paramètre α .

En dimension 1 : marche sur \mathbb{Z}

Paramètres $(\alpha, \beta) = (\alpha_1, \alpha_{-1})$, $\alpha \geq \beta$.

Théorème (Solomon, 1975, KKS 1976)

• Transience/réurrence

- si $\alpha > \beta$, $X_n \xrightarrow[n]{} +\infty P_o\text{-p.s.}$;
- si $\alpha = \beta$, $\liminf_n X_n = -\infty$ et $\limsup_n X_n = +\infty P_o\text{-p.s.}$

• Vitesse

- si $\alpha > \beta + 1$, $\frac{X_n}{n} \xrightarrow[n]{} v = \frac{\alpha + \beta - 1}{\alpha - \beta - 1} P_o\text{-p.s.}$;
- si $\beta < \alpha \leq \beta + 1$, $\frac{X_n}{n} \xrightarrow[n]{} 0 P_o\text{-p.s.}$

• Fluctuations

- si $0 < \alpha - \beta < 1$, $X_n \simeq n^{\alpha - \beta}$,
- si $1 < \alpha - \beta < 2$, $X_n - nv \simeq n^{\frac{1}{\alpha - \beta}}$
- si $\alpha - \beta > 2$, $X_n - nv \simeq \sqrt{n}$.

En dimension 1 : marche sur \mathbb{Z}

Paramètres $(\alpha, \beta) = (\alpha_1, \alpha_{-1})$, $\alpha \geq \beta$.

Théorème (Solomon, 1975, KKS 1976)

• Transience/réurrence

- si $\alpha > \beta$, $X_n \xrightarrow[n]{n} +\infty P_o$ -p.s. ;
- si $\alpha = \beta$, $\liminf_n X_n = -\infty$ et $\limsup_n X_n = +\infty P_o$ -p.s.

• Vitesse

- si $\alpha > \beta + 1$, $\frac{X_n}{n} \xrightarrow[n]{n} v = \frac{\alpha + \beta - 1}{\alpha - \beta - 1} P_o$ -p.s. ;
- si $\beta < \alpha \leq \beta + 1$, $\frac{X_n}{n} \xrightarrow[n]{n} 0 P_o$ -p.s.

• Fluctuations (lois limites explicites)

- si $0 < \alpha - \beta < 1$, $X_n \simeq n^{\alpha - \beta}$,
- si $1 < \alpha - \beta < 2$, $X_n - nv \simeq n^{\frac{1}{\alpha - \beta}}$
- si $\alpha - \beta > 2$, $X_n - nv \simeq \sqrt{n}$.

Pour les MAMA, résultats bien plus incomplets.

- Environnements équilibrés ($p(x, x + e) = p(x, x - e)$ p.s.) : récurrent (transient) si $d \leq 2$ ($d \geq 3$) (Zeitouni)
- Fluctuations isotropes/anisotropes par rapport à la marche simple (Bricmont-Kupiainen, Sznitman)
- Balisticité (vitesse non nulle) : critère de Kalikow, conditions (T),(T') de Sznitman

(souvent sous l'hypothèse d'ellipticité uniforme : $p_e > \varepsilon$ p.s.).

En dimension $d \geq 2$, cas Dirichlet - balisticité

Poids initiaux $\alpha_{(x, x \pm e_i)} = \alpha_{\pm i}$. On note $\Sigma = \sum_{i=1}^d \alpha_i + \alpha_{-i}$, et $d_m = \sum_{i=1}^d \frac{\alpha_i - \alpha_{-i}}{\Sigma} e_i = E_0[X_1]$.

Théorème (Enriquez-Sabot 2006, T. 2008)

Si $\sum_{i=1}^d |\alpha_i - \alpha_{-i}| > 1$, alors il existe $v \neq 0$ tel que, P_0 -p.s.,

$$\frac{X_n}{n} \xrightarrow[n]{} v.$$

Et, alors,
$$\left| v - \frac{\Sigma}{\Sigma - 1} d_m \right|_1 < \frac{1}{\Sigma - 1}.$$

En dimension $d \geq 2$, cas Dirichlet - balisticité

Poids initiaux $\alpha_{(x, x \pm e_i)} = \alpha_{\pm i}$. On note $\Sigma = \sum_{i=1}^d \alpha_i + \alpha_{-i}$, et $d_m = \sum_{i=1}^d \frac{\alpha_i - \alpha_{-i}}{\Sigma} e_i = E_0[X_1]$.

Théorème (Enriquez-Sabot 2006, T. 2008)

Si $\sum_{i=1}^d |\alpha_i - \alpha_{-i}| > 1$, alors il existe $v \neq 0$ tel que, P_0 -p.s.,

$$\frac{X_n}{n} \xrightarrow[n]{} v.$$

Et, alors,
$$\left| v - \frac{\Sigma}{\Sigma - 1} d_m \right|_1 < \frac{1}{\Sigma - 1}.$$

(critère de Kalikow + formule d'« intégration par parties » pour la loi de Dirichlet + intégrabilité des temps de sortie de boîtes)

Éléments de la preuve de la balisticité

U partie finie de \mathbb{Z}^d contenant o . T_U temps de sortie de U .

$N_U(x)$ nombre de visites à x avant T_U . $N_U(x, y)$ nombre de traversées de l'arête (x, y) avant T_U .

Fonction de Green dans U , sous l'environnement p :

$$G_U^{(p)}(o, x) = E_o^{(p)}[N_U(x)].$$

Ainsi, $E_o^{(p)}[N_U(x, x + e)] = G_U^{(p)}(o, x)p(x, x + e)$.

Éléments de la preuve de la balisticité

U partie finie de \mathbb{Z}^d contenant o . T_U temps de sortie de U .

$N_U(x)$ nombre de visites à x avant T_U . $N_U(x, y)$ nombre de traversées de l'arête (x, y) avant T_U .

Fonction de Green dans U , sous l'environnement p :

$$G_U^{(p)}(o, x) = E_o^{(p)}[N_U(x)].$$

Ainsi, $E_o^{(p)}[N_U(x, x + e)] = G_U^{(p)}(o, x)p(x, x + e)$.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^n$, et toute fonction f différentiable sur \mathbb{R}^n , en notant $\mathbb{P} = \mathcal{D}(\alpha)$,

$$\int f d\mathbb{P} = \frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}{\alpha_1} \int x_1 f d\mathbb{P} + \frac{1}{\alpha_1} \int x_1 \left(\sum_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_1} \right) d\mathbb{P}.$$

On utilise aussi : Pour $x_1, x_2, x_3, x_4 \in U$ avec $(x_2, x_3) \in E$,

$$\frac{\partial G_U^{(\rho)}(x_1, x_4)}{\partial \rho(x_2, x_3)} = G_U^{(\rho)}(x_1, x_2) G_U^{(\rho)}(x_3, x_4).$$

On obtient

$$\frac{E_o[N_U(x, x + e_i)]}{E_o[N_U(x)]} = \frac{1}{\Sigma - 1} \left(\alpha_i - \frac{\mathbb{E}[G_U^{(\rho)}(o, x) \tilde{p}(x, x + e_i)]}{\mathbb{E}[G_U^{(\rho)}(o, x)]} \right),$$

où $\tilde{p}(x, x + e_i) = P_x^{(\rho)}(X_1 = x + e_i | T_U < \tilde{H}_x)$.

On utilise aussi : Pour $x_1, x_2, x_3, x_4 \in U$ avec $(x_2, x_3) \in E$,

$$\frac{\partial G_U^{(\rho)}(x_1, x_4)}{\partial \rho(x_2, x_3)} = G_U^{(\rho)}(x_1, x_2) G_U^{(\rho)}(x_3, x_4).$$

On obtient

$$\frac{E_o[N_U(x, x + e_i)]}{E_o[N_U(x)]} = \frac{1}{\Sigma - 1} \left(\alpha_i - \frac{\mathbb{E}[G_U^{(\rho)}(o, x) \tilde{p}(x, x + e_i)]}{\mathbb{E}[G_U^{(\rho)}(o, x)]} \right),$$

où $\tilde{p}(x, x + e_i) = P_x^{(\rho)}(X_1 = x + e_i | T_U < \tilde{H}_x)$.

Si $\alpha_i - \alpha_{-i} > 1$,

$$\frac{E_o[N_U(x, x + e_i) - N_U(x, x - e_i)]}{E_o[N_U(x)]} \geq \eta > 0.$$

En dimension $d \geq 2$, cas Dirichlet - transience

Théorème (Sabot 2009)

Si $d \geq 3$, $(X_n)_n$ est transiente P_o -p.s.

Théorème (Sabot-T., 2009)

S'il existe i tel que $\alpha_i > \alpha_{-i}$, alors $X_n \cdot e_i \xrightarrow[n]{} +\infty$ avec probabilité positive (probabilité 1 si $d \leq 2$).

\Rightarrow Existence d'un régime de transience directionnelle à vitesse nulle.

En dimension $d \geq 2$, cas Dirichlet - transience

Théorème (Sabot 2009)

Si $d \geq 3$, $(X_n)_n$ est transiente P_o -p.s.

Théorème (Sabot-T., 2009)

S'il existe i tel que $\alpha_i > \alpha_{-i}$, alors $X_n \cdot e_i \xrightarrow[n]{+} +\infty$ avec probabilité positive (probabilité 1 si $d \leq 2$).

\Rightarrow Existence d'un régime de transience directionnelle à vitesse nulle.

(propriété de stabilité de la loi de Dirichlet par inversion du temps)

Loi de Dirichlet et environnement "inversé"

Graphe fini connexe $G = (V, E)$, environnement $p = (p_e)_{e \in E}$.
 π : mesure invariante pour la chaîne de Markov de transition p .
 $\check{G} = (V, \check{E})$: graphe formé des arêtes retournées $\check{e} = (\bar{e}, \underline{e})$.
Environnement inversé :

$$\text{pour } (x, y) \in E, \check{p}(y, x) = \frac{\pi(x)}{\pi(y)} p(x, y)$$

Loi de Dirichlet et environnement "inversé"

Graphe fini connexe $G = (V, E)$, environnement $p = (p_e)_{e \in E}$.
 π : mesure invariante pour la chaîne de Markov de transition p .
 $\check{G} = (V, \check{E})$: graphe formé des arêtes retournées $\check{e} = (\bar{e}, \underline{e})$.
Environnement inversé :

$$\text{pour } (x, y) \in E, \check{p}(y, x) = \frac{\pi(x)}{\pi(y)} p(x, y)$$

On note $\check{\alpha}_e = \alpha_{\check{e}}$ pour $e \in \check{E}$ et, pour $x \in V$, $\alpha_x = \sum_{e=x} \alpha_e$.

Propriété

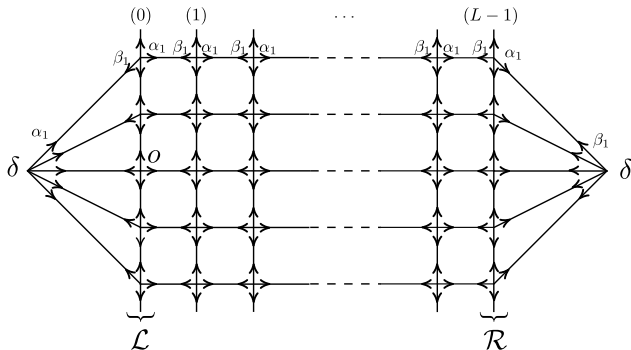
On suppose $\text{div}(\alpha) = 0$: $\alpha_x = \check{\alpha}_x$ pour tout $x \in V$. Alors
Si p suit la loi $\mathbb{P}^{(\alpha)}$, alors \check{p} suit la loi $\mathbb{P}^{(\check{\alpha})}$.

- Condition optimale de balisticité
- Ordre de grandeur dans le cas transient à vitesse nulle
- Récurrence en dimension 2 pour des poids symétriques

- Meilleure compréhension du lien avec le renforcement
- Extension à d'autres milieux aléatoires / d'autres types de renforcement

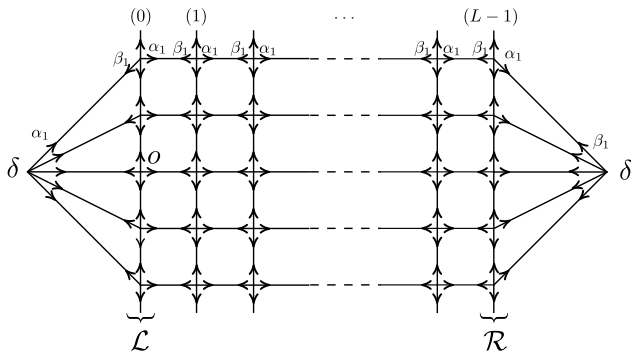
Application à la transience directionnelle

Cylindre fini $C_{N,L} = \{0, \dots, L-1\} \times (\mathbb{Z}_N)^{d-1}$.



Application à la transience directionnelle

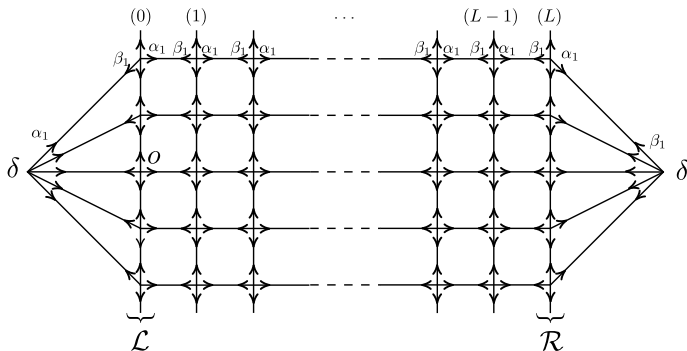
Cylindre fini $C_{N,L} = \{0, \dots, L-1\} \times (\mathbb{Z}_N)^{d-1}$.



$$P_{\delta}^{(\alpha)}(X_1 \in \mathcal{L}, X_{H_{\delta}-1} \in \mathcal{R}) = P_{\delta}^{(\check{\alpha})}(X_{H_{\delta}-1} \in \mathcal{L}, X_1 \in \mathcal{R})$$

Application à la transience directionnelle

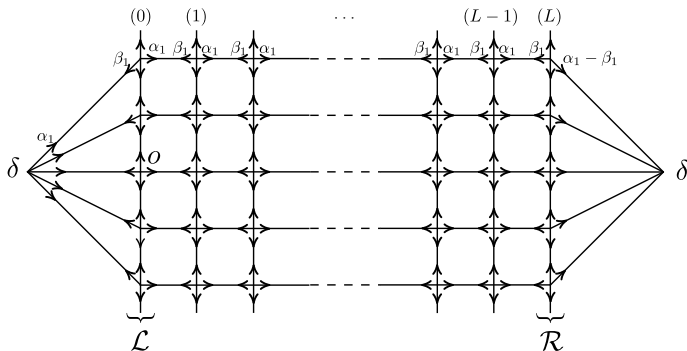
Cylindre fini $C_{N,L} = \{0, \dots, L-1\} \times (\mathbb{Z}_N)^{d-1}$.



$$P_{\delta}^{(\alpha)}(X_1 \in \mathcal{L}, X_{H_{\delta}-1} \in \mathcal{R}) = P_{\delta}^{(\check{\alpha})}(X_{H_{\delta}-1} \in \mathcal{L}, X_1 \in \mathcal{R})$$

Application à la transience directionnelle

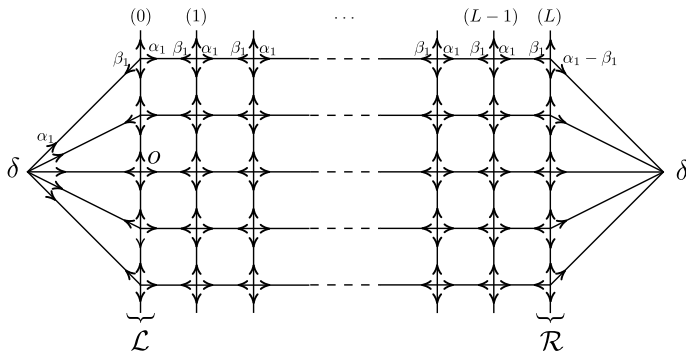
Cylindre fini $C_{N,L} = \{0, \dots, L-1\} \times (\mathbb{Z}_N)^{d-1}$.



$$P_{\delta}^{(\alpha')} (X_{H_{\delta-1}} \in \mathcal{R}) = P_{\delta}^{(\check{\alpha}')} (X_1 \in \mathcal{R}) = \frac{N(\alpha_1 - \beta_1)}{N(\alpha_1 - \beta_1) + N\beta_1}$$

Application à la transience directionnelle

Cylindre fini $C_{N,L} = \{0, \dots, L-1\} \times (\mathbb{Z}_N)^{d-1}$.



$$P_{\delta}^{(\alpha')} (X_{H_{\delta-1}} \in \mathcal{R}) = P_{\delta}^{(\check{\alpha}')} (X_1 \in \mathcal{R}) = \frac{N(\alpha_1 - \beta_1)}{N(\alpha_1 - \beta_1) + N\beta_1}$$

$$P_{\delta}^{(\alpha')} (X_{H_{\delta-1}} \in \mathcal{R}) = P_o^{(\alpha')} (X_{H_{\delta-1}} \in \mathcal{R}) \leq P_o^{(\alpha)} (X_{H_{\delta-1}} \in \mathcal{R})$$

$d \geq 2$ – Intégrabilité des temps de sortie

U partie finie connexe de \mathbb{Z}^d contenant o .

T_U temps de sortie de U .

Proposition (T. 2009)

Les conditions suivantes sont équivalentes :

- 1 $\mathbb{E}_0^{(\alpha)}[T_U] < \infty$;
- 2 pour tout i tel qu'il y a une arête $(x, x + e_i)$ dans U ,
 $2\Sigma - \alpha_i - \alpha_{-i} > 1$.

Remarque : si $\mathbb{E}_0^{(\alpha)}[T_U] = \infty$, alors $\frac{X_n}{n} \rightarrow 0$.

$d \geq 2$ – Intégrabilité des temps de sortie

U partie finie connexe de \mathbb{Z}^d contenant o .

T_U temps de sortie de U .

Proposition (T. 2009)

Les conditions suivantes sont équivalentes :

- 1 $\mathbb{E}_0^{(\alpha)}[T_U] < \infty$;
- 2 pour tout i tel qu'il y a une arête $(x, x + e_i)$ dans U ,
 $2\Sigma - \alpha_i - \alpha_{-i} > 1$.

Remarque : si $\mathbb{E}_0^{(\alpha)}[T_U] = \infty$, alors $\frac{X_n}{n} \rightarrow 0$.

Preuve de 2 \Rightarrow 1 : le temps de sortie de l'arête $\{x, x + e_i\}$ n'est pas intégrable.

Principe de 1 \Rightarrow 2 :

Pour un graphe orienté fini quelconque $U = (V, E)$ avec un sommet cimetière ∂ ,

Proposition (T. 2009)

Les conditions suivantes sont équivalentes :

- 1 $\mathbb{E}_0^{(\alpha)}[T_U] < \infty$;
- 2 pour tout $A \subset E$ connexe, $\sum_{e \in \partial A} \alpha_e > 1$.

Pour un graphe orienté fini quelconque $U = (V, E)$ avec un sommet cimetière ∂ ,

Proposition (T. 2009)

Les conditions suivantes sont équivalentes :

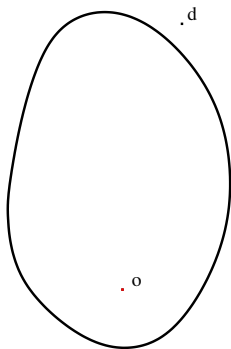
- 1 $\mathbb{E}_0^{(\alpha)}[T_U] < \infty$;
- 2 pour tout $A \subset E$ connexe, $\sum_{e \in \partial A} \alpha_e > 1$.

Preuve : récurrence sur le nombre d'arêtes du graphe, en quotientant par un sous-graphe $C(p)$ autour de o constitué d'arêtes « facilement traversées ».

Construction de $C(p)$

On construit $C(p)$ arête par arête.

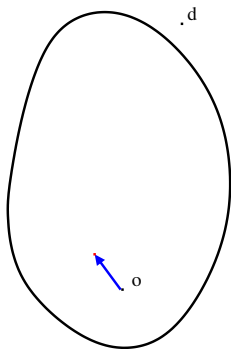
- On part de o ;



Construction de $C(p)$

On construit $C(p)$ arête par arête.

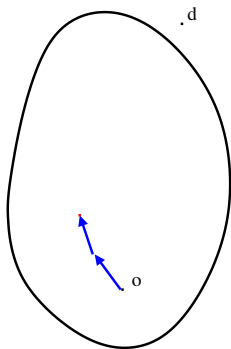
- On part de o ;
- On ajoute l'arête qui maximise, pour une marche partant du dernier point visité, la probabilité de sortie de l'ensemble des arêtes déjà visitées ;



Construction de $C(p)$

On construit $C(p)$ arête par arête.

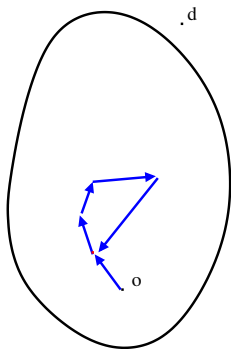
- On part de o ;
- On ajoute l'arête qui maximise, pour une marche partant du dernier point visité, la probabilité de sortie de l'ensemble des arêtes déjà visitées ;



Construction de $C(p)$

On construit $C(p)$ arête par arête.

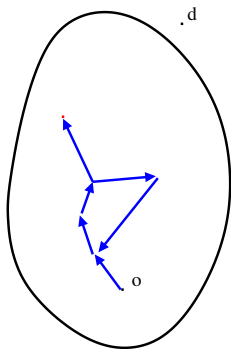
- On part de o ;
- On ajoute l'arête qui maximise, pour une marche partant du dernier point visité, la probabilité de sortie de l'ensemble des arêtes déjà visitées ;



Construction de $C(p)$

On construit $C(p)$ arête par arête.

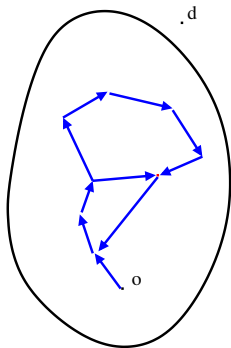
- On part de o ;
- On ajoute l'arête qui maximise, pour une marche partant du dernier point visité, la probabilité de sortie de l'ensemble des arêtes déjà visitées ;



Construction de $C(p)$

On construit $C(p)$ arête par arête.

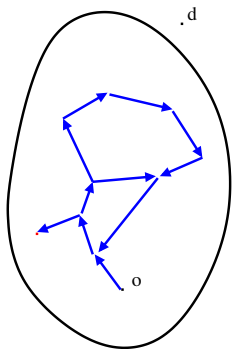
- On part de o ;
- On ajoute l'arête qui maximise, pour une marche partant du dernier point visité, la probabilité de sortie de l'ensemble des arêtes déjà visitées ;



Construction de $C(p)$

On construit $C(p)$ arête par arête.

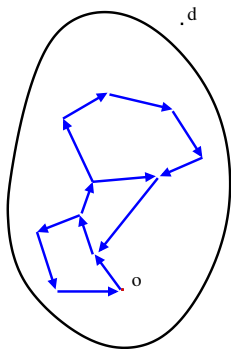
- On part de o ;
- On ajoute l'arête qui maximise, pour une marche partant du dernier point visité, la probabilité de sortie de l'ensemble des arêtes déjà visitées ;



Construction de $C(p)$

On construit $C(p)$ arête par arête.

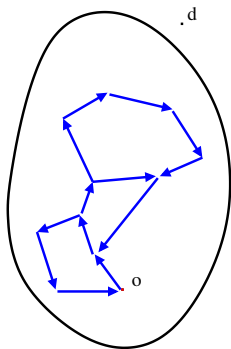
- On part de o ;
- On ajoute l'arête qui maximise, pour une marche partant du dernier point visité, la probabilité de sortie de l'ensemble des arêtes déjà visitées ;
- Jusqu'à aboutir en o ou en ∂ .



Construction de $C(p)$

On construit $C(p)$ arête par arête.

- On part de o ;
- On ajoute l'arête qui maximise, pour une marche partant du dernier point visité, la probabilité de sortie de l'ensemble des arêtes déjà visitées ;
- Jusqu'à aboutir en o ou en ∂ .



Propriété

Il existe $c > 0$ tel que, pour tous $x \in \underline{C(p)}$, $y \in \overline{C(p)}$ distincts,

$$P_x^{(p)}(H_y < \tilde{H}_x \wedge T_{C(p)}) > c.$$

- Si on aboutit en ∂ , $G_U^{(p)}(o, o) \leq \frac{1}{c}$.
- Si on aboutit en o , $C(p)$ est connexe, et
 - Le nombre de visites en o est comparable au nombre de visites dans $C(p)$
 - Le nombre de visites à o dans $C(p)$ est de l'ordre de $1/\Sigma$
où $\Sigma = \sum_{e \in \partial_E C(p)} p_e$

On se place dans ce cas dorénavant.

On note \tilde{G} le graphe quotient de G obtenu en contractant $C(p)$ en un point \tilde{o} . On le munit de l'environnement quotient $\tilde{\rho}$:

$$\text{si } e \in \partial_E C(p), \quad \tilde{\rho}_e = \frac{\rho_e}{\Sigma}.$$

Alors :

$$P_o^{(p)}(H_\partial < \tilde{H}_o) \geq c_{\Sigma} P_{\tilde{o}}^{(\tilde{\rho})}(H_\partial < \tilde{H}_{\tilde{o}}).$$

Passage au quotient

On note \tilde{G} le graphe quotient de G obtenu en contractant $C(p)$ en un point \tilde{o} . On le munit de l'environnement quotient \tilde{p} :

$$\text{si } e \in \partial_E C(p), \quad \tilde{p}_e = \frac{p_e}{\Sigma}.$$

Alors :

$$P_o^{(p)}(H_\partial < \tilde{H}_o) \geq c_{\Sigma} P_{\tilde{o}}^{(\tilde{p})}(H_\partial < \tilde{H}_{\tilde{o}}).$$

Attention : sous $\mathbb{P}(\cdot | C(\omega))$, \tilde{p} n'est pas un environnement de Dirichlet.

Pour un site, on a la propriété de restriction :

Si $(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \sim \mathcal{D}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, alors :

$$\left(\frac{\omega_1}{\omega_1 + \omega_2}, \frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} \right) \sim \mathcal{D}(\alpha_1, \alpha_2)$$

et cette variable est indépendante de $\omega_1 + \omega_2$.

Réduction au cas Dirichlet

Pour un site, on a la propriété de restriction :

Si $(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \sim \mathcal{D}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, alors :

$$\left(\frac{\omega_1}{\omega_1 + \omega_2}, \frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} \right) \sim \mathcal{D}(\alpha_1, \alpha_2)$$

et cette variable est indépendante de $\omega_1 + \omega_2$.

Pour plusieurs sites, cette propriété s'adapte sous forme d'encadrement de la densité des lois des vecteurs $(\Sigma, (\tilde{p}_e)_e)$, ce qui permet de se ramener au cas où \tilde{p} est de Dirichlet.

Hypothèse d'induction

On montre alors :

Théorème

Si G a moins de n arêtes, pour tous paramètres $\alpha_e > 0$, tout $o \in V$, il existe $C, r > 0$ tels que, pour $\varepsilon > 0$ assez petit,

$$\mathbb{P}(P_o^{(\rho)}(H_\partial < \tilde{H}_o) \leq \varepsilon) \leq C\varepsilon^\beta (-\ln \varepsilon)^r,$$

où $\beta = \min\{\beta_A \mid A \text{ fortement connexe et } o \in A\}$.

grâce au :

Lemme

Si $P(X < \varepsilon) \leq C\varepsilon^{\alpha_X}$ et $P(Y < \varepsilon) \leq C'\varepsilon^{\alpha_Y}(-\ln \varepsilon)^r$, alors :

$$P(XY \leq \varepsilon) \leq C''\varepsilon^{\alpha_X \wedge \alpha_Y}(-\ln \varepsilon)^{r+1}$$

(ou r si $\alpha_X \neq \alpha_Y$).

- On a obtenu l'encadrement plus précis :

$$\frac{c}{t^{\min_A \beta_A}} \leq \mathbb{P}(G^{(\rho)}(o, o) > t) \leq C \frac{(\ln t)^r}{t^{\min_A \beta_A}}.$$

- Rôle de l'hypothèse "Dirichlet" : queue de la distribution, et presque-additivité

Marche de Kalikow

Pour $U \subset \mathbb{Z}^d$ connexe tel que $o \in U$, on définit des probabilités de transition : pour $x \in U$ et $e \in \mathcal{V}$,

$$\hat{\omega}_U(x, e) = \frac{\mathbb{E}[G_U^\omega(o, x)\omega(x, e)]}{\mathbb{E}[G_U^\omega(o, x)]}.$$

Lemme de Kalikow

Pour tout $x \in U$,

$$\boxed{G_U^{\hat{\omega}_U}(o, x) = \mathbb{E}[G_U^\omega(o, x)]}.$$

En particulier, $E_o^{\hat{\omega}_U}[T_U] = E_o[T_U]$, et pour $x \in \partial_V U$,

$$P_{o, \hat{\omega}_U}(X_{T_U} = x) = P_o(X_{T_U} = x).$$

Critère de Kalikow

On définit la dérive de la marche de Kalikow :

$$\hat{d}_U(x) = E_x^{\hat{\omega}_U}[X_1 - X_0] = \sum_{e \in \mathcal{V}} \hat{\omega}_U(x, e)e.$$

Critère de Kalikow (Kalikow 81, Sznitman et Zerner 98)

On suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $\ell \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ tels que :

Pour tout $U \subset \mathbb{Z}^d$ borné tel que $o \in U$, et tout $x \in U$,

$$\hat{d}_U(x) \cdot \ell \geq \varepsilon.$$

Alors il existe $v \neq 0$ tel que $\frac{X_n}{n} \xrightarrow[n]{} v$ P_o -p.s.. Et $v \cdot \ell > 0$.

Formule d'intégration par parties

- Pour tout $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}_+^n$, et toute fonction f différentiable sur \mathbb{R}^n , en notant $\mathbb{P} = \mathbb{P}^{\vec{\alpha}}$,

$$\int f d\mathbb{P} = \frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}{\alpha_1} \int x_1 f d\mathbb{P} + \frac{1}{\alpha_1} \int x_1 \left(\sum_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_1} \right) d\mathbb{P}.$$

Formule d'intégration par parties

- Pour tout $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}_+^n$, et toute fonction f différentiable sur \mathbb{R}^n , en notant $\mathbb{P} = \mathbb{P}^{\vec{\alpha}}$,

$$\int f d\mathbb{P} = \frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}{\alpha_1} \int x_1 f d\mathbb{P} + \frac{1}{\alpha_1} \int x_1 \left(\sum_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_1} \right) d\mathbb{P}.$$

- Pour $U \subset \mathbb{Z}^d$, $x_1, x_2, x_4 \in U$, $x_3 \in U \cup \partial_V U$ avec $(x_2, x_3) \in E$,

$$\frac{\partial G_U^\omega(x_1, x_4)}{\partial \omega(x_2, x_3)} = G_U^\omega(x_1, x_2) G_U^\omega(x_3, x_4)$$

Formule d'intégration par parties

- Pour tout $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}_+^n$, et toute fonction f différentiable sur \mathbb{R}^n , en notant $\mathbb{P} = \mathbb{P}^{\vec{\alpha}}$,

$$\int f d\mathbb{P} = \frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}{\alpha_1} \int x_1 f d\mathbb{P} + \frac{1}{\alpha_1} \int x_1 \left(\sum_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_1} \right) d\mathbb{P}.$$

- Pour $U \subset \mathbb{Z}^d$, $x_1, x_2, x_4 \in U$, $x_3 \in U \cup \partial_V U$ avec $(x_2, x_3) \in E$, et $\delta \in (0, 1)$,

$$\frac{\partial G_{U,\delta}^\omega(x_1, x_4)}{\partial \omega(x_2, x_3)} = \delta G_{U,\delta}^\omega(x_1, x_2) G_{U,\delta}^\omega(x_3, x_4)$$

où $G_{U,\delta}^\omega$ est la fonction de Green de la marche tuée, avec probabilité de survie δ .

On trouve alors : pour tout $\mathbf{e} \in \mathcal{V}$,

$$\hat{\omega}_{U,\delta}(z, \mathbf{e}) = \frac{1}{\Sigma - 1} \left(\alpha_{\mathbf{e}} - \frac{\mathbb{E}[G_{U,\delta}^{\omega}(o, z) \rho_{\omega,\delta}(z, \mathbf{e})]}{\mathbb{E}[G_{U,\delta}^{\omega}(o, z)]} \right)$$

où

$$\rho_{\omega,\delta}(z, \mathbf{e}) = \omega(z, \mathbf{e})(G_{U,\delta}^{\omega}(z, z) - \delta G^{\omega}(z + \mathbf{e}, z))$$

On trouve alors : pour tout $\mathbf{e} \in \mathcal{V}$,

$$\hat{\omega}_{U,\delta}(z, \mathbf{e}) = \frac{1}{\Sigma - 1} \left(\alpha_{\mathbf{e}} - \frac{\mathbb{E}[G_{U,\delta}^{\omega}(o, z) \rho_{\omega,\delta}(z, \mathbf{e})]}{\mathbb{E}[G_{U,\delta}^{\omega}(o, z)]} \right)$$

où

$$\begin{aligned} \rho_{\omega,\delta}(z, \mathbf{e}) &= \omega(z, \mathbf{e})(G_{U,\delta}^{\omega}(z, z) - \delta G^{\omega}(z + \mathbf{e}, z)) \\ &= P_{z,\omega}(X_1 = z + \mathbf{e} | H_{\partial} < \tilde{H}_z). \end{aligned}$$

On trouve alors : pour tout $\mathbf{e} \in \mathcal{V}$,

$$\hat{\omega}_{U,\delta}(z, \mathbf{e}) = \frac{1}{\Sigma - 1} \left(\alpha_{\mathbf{e}} - \frac{\mathbb{E}[G_{U,\delta}^{\omega}(o, z) p_{\omega,\delta}(z, \mathbf{e})]}{\mathbb{E}[G_{U,\delta}^{\omega}(o, z)]} \right)$$

où

$$\begin{aligned} p_{\omega,\delta}(z, \mathbf{e}) &= \omega(z, \mathbf{e})(G_{U,\delta}^{\omega}(z, z) - \delta G^{\omega}(z + \mathbf{e}, z)) \\ &= P_{z,\omega}(X_1 = z + \mathbf{e} | H_{\partial} < \tilde{H}_z). \end{aligned}$$

D'où :

$$\hat{\mathbf{d}}_{U,\delta}(z) = \frac{1}{\Sigma - 1} \left(\sum_{i=1}^d (\alpha_i - \alpha_{-i}) \mathbf{e}_i - \tilde{\mathbf{d}} \right),$$

où $\tilde{\mathbf{d}}$ est l'espérance d'une v.a. à valeur dans \mathcal{V} : $|\tilde{\mathbf{d}}|_1 \leq 1$.