Intégration espace-temps local pour les processus de Lévy symétriques

Alexander Walsh
Université Pierre et Marie Curie

Neuvième Colloque "Jeunes Probabilistes et Statisticiens"
Le Mont-Dore, 06-05-2010

Formule d'Itô pour les fonctions $C^{2,1}$

Soit X un processus de Lévy avec fonction caractéristique:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e^{i\xi X_t}) &= e^{-t\psi(\xi)} \text{ où,} \\ \psi(\xi) &:= -ia\xi + \sigma^2 \frac{\xi^2}{2} + \int_{\mathbb{R}\setminus 0} (1 - e^{i\xi y} + i\xi y 1_{\{|y|<1\}}) \nu(\mathrm{d}y)\end{aligned}$$

ν est la mesure de Lévy:

$$\int_{\mathbb{R}\setminus 0} (1 \wedge y^2) \nu(\mathrm{d}y) < \infty$$

Formule d'Itô pour les fonctions $C^{2,1}$

Soit X un processus de Lévy avec fonction caractéristique:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{i\xi X_t}) &= e^{-t\psi(\xi)} \text{ où,} \\ \psi(\xi) &:= -ia\xi + \sigma^2 \frac{\xi^2}{2} + \int_{\mathbb{R}\setminus 0} (1 - e^{i\xi y} + i\xi y 1_{\{|y|<1\}})\nu(\mathrm{d}y) \end{aligned}$$

ν est la mesure de Lévy:

$$\int_{\mathbb{R}\setminus 0} (1 \wedge y^2)\nu(\mathrm{d}y) < \infty$$

Formule d'Itô pour les fonctions $C^{2,1}$

Soit X un processus de Lévy avec fonction caractéristique:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e^{i\xi X_t}) &= e^{-t\psi(\xi)} \text{ où,} \\ \psi(\xi) &:= -ia\xi + \sigma^2\frac{\xi^2}{2} + \int_{\mathbb{R}\setminus 0}(1 - e^{i\xi y} + i\xi y 1_{\{|y|<1\}})\nu(\mathrm{d}y)\end{aligned}$$

ν est la mesure de Lévy:

$$\int_{\mathbb{R}\setminus 0}(1 \wedge y^2)\nu(\mathrm{d}y) < \infty$$

Si $F \in C^{2,1}$,

$$\begin{aligned} F(X_t, t) &= F(0,0) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial t}(X_{s-}, s)\mathrm{d}s \\ &+ \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(X_{s-}, s)\mathrm{d}X_s + \frac{\sigma^2}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(X_{s-}, s)\mathrm{d}s \\ &+ \sum_{s \leq t} \left\{ F(X_s, s) - F(X_{s-}, s) - \frac{\partial F}{\partial x}(X_{s-})\Delta X_s \right\} \end{aligned}$$

$M^c = \sigma B$

Si $F \in C^{2,1}$,

$$
\begin{aligned}
F(X_t, t) &= F(0,0) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial t}(X_{s-}, s)\mathrm{d}s \\
&+ \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(X_{s-}, s)\mathrm{d}X_s + \frac{\sigma^2}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(X_{s-}, s)\mathrm{d}s \\
&+ \sum_{s \le t} \left\{ F(X_s, s) - F(X_{s-}, s) - \frac{\partial F}{\partial x}(X_{s-})\Delta X_s \right\}
\end{aligned}
$$

$M^c = \sigma B$

Si $F \in C^{2,1}$,

$$
\begin{aligned}
F(X_t, t) &= F(0,0) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial t}(X_{s-}, s)\mathrm{d}s \\
&+ \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(X_{s-}, s)\mathrm{d}X_s + \frac{\sigma^2}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(X_{s-}, s)\mathrm{d}s \\
&+ \sum_{s \le t} \left\{ F(X_s, s) - F(X_{s-}, s) - \frac{\partial F}{\partial x}(X_{s-})\Delta X_s \right\}
\end{aligned}
$$

$M^c = \sigma B$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}L_t^a &= (X_t - a)^- - (a)^+ + \int_0^t 1_{\{X_{s-} \leq a\}} \mathrm{d}X_s \\
&\quad - \sum_{s \leq t} 1_{\{X_{s-} > a\}} (X_s - a)^- - \sum_{s \leq t} 1_{\{X_{s-} \leq a\}} (X_s - a)^+
\end{aligned}
$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} L_t^a g(a) \mathrm{d}a = \sigma^2 \int_0^t g(X_s) \mathrm{d}s$$

$t \to L_t^a$ est croissante, $\mathrm{d}L^a$ est à support dans $\{s : X_s = a\}$

$$\frac{1}{2}L_t^a = (X_t - a)^- - (a)^+ + \int_0^t 1_{\{X_{s-} \leq a\}} \mathrm{d}X_s - \sum_{s \leq t} 1_{\{X_{s-} > a\}} (X_s - a)^- - \sum_{s \leq t} 1_{\{X_{s-} \leq a\}} (X_s - a)^+$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} L_t^a g(a) \mathrm{d}a = \sigma^2 \int_0^t g(X_s) \mathrm{d}s$$

$t \to L_t^a$ est croissante, $\mathrm{d}L^a$ est à support dans $\{s : X_s = a\}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}L_t^a &= (X_t - a)^- - (a)^+ + \int_0^t 1_{\{X_{s-} \leq a\}} \mathrm{d}X_s \\ &\quad - \sum_{s \leq t} 1_{\{X_{s-} > a\}} (X_s - a)^- - \sum_{s \leq t} 1_{\{X_{s-} \leq a\}} (X_s - a)^+\end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} L_t^a g(a) \mathrm{d}a = \sigma^2 \int_0^t g(X_s) \mathrm{d}s$$

$t \to L_t^a$ est croissante, $\mathrm{d}L^a$ est à support dans $\{s : X_s = a\}$

Formule d'Itô-Tanaka

Si F est la différence de deux fonctions convexes:

$$\begin{aligned} F(X_t) &= F(0) + \int_0^t F'(X_{s-})\mathrm{d}X_s + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} L_t^x F''(\mathrm{d}x) \\ &+ \sum_{s\leq t}\left\{F(X_s) - F(X_{s-}) - F'(X_{s-})\Delta X_s\right\} \end{aligned}$$

Formule de Bouleau-Yor (1981)

Soit X t.q $\sum_{s\leq t} |\Delta X_s| < \infty$ p.s $\Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} (1 \wedge |x|)\nu(dx) < \infty$

Pour f élémentaire: $f = \sum_{i=1}^{n} f_i 1_{(x_i, x_{i+1}]}$

$$\int f(x) d_x L_t^x := \sum_{i=1}^{n} f_i (L_t^{x_{i+1}} - L_t^{x_i})$$

Cette application se prolonge de façon unique à l'ensemble de fonctions boréliennes localement bornées.

Si $F(x) = \int_0^x f(z)dz$, f localement bornée,

$$\begin{aligned} F(X_t) &= F(0) + \int_0^t F'(X_{s-}) dX_s - \frac{1}{2} \int f(x) d_x L_t^x \\ &+ \sum_{s\leq t} \{F(X_s) - F(X_{s-}) - F'(X_{s-})\Delta X_s\} \end{aligned}$$

Formule de Bouleau-Yor (1981)

Soit X t.q $\sum_{s\leq t}|\Delta X_s| < \infty$ p.s $\Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}}(1\wedge|x|)\nu(\mathrm{d}x) < \infty$

Pour f élémentaire: $f = \sum_{i=1}^{n} f_i 1_{(x_i,x_{i+1}]}$

$$\int f(x)\mathrm{d}_x L_t^x := \sum_{i=1}^{n} f_i(L_t^{x_{i+1}} - L_t^{x_i})$$

Cette application se prolonge de façon unique à l'ensemble de fonctions boréliennes localement bornées.

Si $F(x) = \int_0^x f(z)\mathrm{d}z$, f localement bornée,

$$\begin{aligned} F(X_t) &= F(0) + \int_0^t F'(X_{s-})\mathrm{d}X_s - \frac{1}{2}\int f(x)\mathrm{d}_x L_t^x \\ &+ \sum_{s\leq t}\{F(X_s) - F(X_{s-}) - F'(X_{s-})\Delta X_s\} \end{aligned}$$

Formule de Bouleau-Yor (1981)

Soit X t.q $\sum_{s\leq t}|\Delta X_s| < \infty$ p.s $\Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}}(1\wedge|x|)\nu(\mathrm{d}x) < \infty$

Pour f élémentaire: $f = \sum_{i=1}^{n} f_i 1_{(x_i,x_{i+1}]}$

$$\int f(x)\mathrm{d}_x L_t^x := \sum_{i=1}^{n} f_i(L_t^{x_{i+1}} - L_t^{x_i})$$

Cette application se prolonge de façon unique à l'ensemble de fonctions boréliennes localement bornées.

Si $F(x) = \int_0^x f(z)\mathrm{d}z$, f localement bornée,

$$\begin{aligned} F(X_t) &= F(0) + \int_0^t F'(X_{s-})\mathrm{d}X_s - \frac{1}{2}\int f(x)\mathrm{d}_x L_t^x \\ &+ \sum_{s\leq t}\{F(X_s) - F(X_{s-}) - F'(X_{s-})\Delta X_s\} \end{aligned}$$

Formule de Bouleau-Yor (1981)

Soit X t.q $\sum_{s\leq t}|\Delta X_s| < \infty$ p.s $\Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}}(1\wedge |x|)\nu(dx) < \infty$

Pour f élémentaire: $f = \sum_{i=1}^n f_i 1_{(x_i, x_{i+1}]}$

$$\int f(x)d_x L_t^x := \sum_{i=1}^n f_i(L_t^{x_{i+1}} - L_t^{x_i})$$

Cette application se prolonge de façon unique à l'ensemble de fonctions boréliennes localement bornées.

Si $F(x) = \int_0^x f(z)dz$, f localement bornée,

$$\begin{aligned} F(X_t) &= F(0) + \int_0^t F'(X_{s-})dX_s - \frac{1}{2}\int f(x)d_x L_t^x \\ &+ \sum_{s\leq t}\{F(X_s) - F(X_{s-}) - F'(X_{s-})\Delta X_s\} \end{aligned}$$

Formule de Bouleau-Yor (1981)

Soit X t.q $\sum_{s\leq t} |\Delta X_s| < \infty$ p.s $\Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} (1 \wedge |x|)\nu(\mathrm{d}x) < \infty$

Pour f élémentaire: $f = \sum_{i=1}^n f_i 1_{(x_i, x_{i+1}]}$

$$\int f(x)\mathrm{d}_x L_t^x := \sum_{i=1}^n f_i (L_t^{x_{i+1}} - L_t^{x_i})$$

Cette application se prolonge de façon unique à l'ensemble de fonctions boréliennes localement bornées.

Si $F(x) = \int_0^x f(z)\mathrm{d}z$, f localement bornée,

$$\begin{aligned} F(X_t) &= F(0) + \int_0^t F'(X_{s-})\mathrm{d}X_s - \frac{1}{2}\int f(x)\mathrm{d}_x L_t^x \\ &+ \sum_{s\leq t} \{F(X_s) - F(X_{s-}) - F'(X_{s-})\Delta X_s\} \end{aligned}$$

Formule de Bouleau-Yor (1981)

Soit X t.q $\sum_{s\le t}|\Delta X_s| < \infty$ p.s $\Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}}(1\wedge|x|)\nu(\mathrm{d}x) < \infty$

Pour f élémentaire: $f = \sum_{i=1}^n f_i 1_{(x_i,x_{i+1}]}$

$$\int f(x)\mathrm{d}_x L_t^x := \sum_{i=1}^n f_i(L_t^{x_{i+1}} - L_t^{x_i})$$

Cette application se prolonge de façon unique à l'ensemble de fonctions boréliennes localement bornées.

Si $F(x) = \int_0^x f(z)\mathrm{d}z$, f localement bornée,

$$\begin{aligned} F(X_t) &= F(0) + \int_0^t F'(X_{s-})\mathrm{d}X_s - \frac{1}{2}\int f(x)\mathrm{d}_x L_t^x \\ &+ \sum_{s\le t}\{F(X_s) - F(X_{s-}) - F'(X_{s-})\Delta X_s\} \end{aligned}$$

Formule de Bouleau-Yor (1981)

Soit X t.q $\sum_{s\leq t}|\Delta X_s| < \infty$ p.s $\Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}}(1\wedge|x|)\nu(\mathrm{d}x) < \infty$

Pour f élémentaire: $f = \sum_{i=1}^{n} f_i 1_{(x_i,x_{i+1}]}$

$$\int f(x)\mathrm{d}_x L_t^x := \sum_{i=1}^{n} f_i(L_t^{x_{i+1}} - L_t^{x_i})$$

Cette application se prolonge de façon unique à l'ensemble de fonctions boréliennes localement bornées.

Si $F(x) = \int_0^x f(z)\mathrm{d}z$, f localement bornée,

$$\begin{aligned} F(X_t) &= F(0) + \int_0^t F'(X_{s-})\mathrm{d}X_s - \frac{1}{2}\int f(x)\mathrm{d}_x L_t^x \\ &+ \sum_{s\leq t}\left\{F(X_s) - F(X_{s-}) - F'(X_{s-})\Delta X_s\right\} \end{aligned}$$

Formule de Eisenbaum (2005)

$$f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f_{i,j} 1_{(x_i, x_{i+1}]} 1_{(t_j, t_{j+1}]}$$

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}} f(x,s) \mathrm{d}L_s^x := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f_{i,j} (L_{t_{j+1}\wedge t}^{x_{i+1}} - L_{t_{j+1}\wedge t}^{x_i} - L_{t_j \wedge t}^{x_{i+1}} + L_{t_j\wedge t}^{x_i})$$

Eisenbaum et Kyprianou (2008):

$$L_t^x = \sigma \int_0^t 1_{\{X_{s-} \leq x\}} \mathrm{d}B_s + \sigma \int_{1-t}^1 1_{\{\hat{X}_{s-} \leq x\}} \mathrm{d}\hat{B}_s,\ 0 \leq t \leq 1$$

$\hat{Y}_t := Y_{(1-t)-}$ si $t < 1$ et $\hat{Y}_1 = Y_0$

Formule de Eisenbaum (2005)

$$f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f_{i,j} 1_{(x_i, x_{i+1}]} 1_{(t_j, t_{j+1}]}$$

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}} f(x,s) \mathrm{d}L_s^x := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f_{i,j} (L_{t_{j+1}\wedge t}^{x_{i+1}} - L_{t_{j+1}\wedge t}^{x_i} - L_{t_j \wedge t}^{x_{i+1}} + L_{t_j \wedge t}^{x_i})$$

Eisenbaum et Kyprianou (2008):

$$L_t^x = \sigma \int_0^t 1_{\{X_{s-} \le x\}} \mathrm{d}B_s + \sigma \int_{1-t}^1 1_{\{\hat{X}_{s-} \le x\}} \mathrm{d}\hat{B}_s,\ 0 \le t \le 1$$

$\hat{Y}_t := Y_{(1-t)-}$ si $t < 1$ et $\hat{Y}_1 = Y_0$

Formule de Eisenbaum (2005)

$$f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f_{i,j} 1_{(x_i, x_{i+1}]} 1_{(t_j, t_{j+1}]}$$

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}} f(x,s) \mathrm{d} L_s^x := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f_{i,j} \left(L_{t_{j+1} \wedge t}^{x_{i+1}} - L_{t_{j+1} \wedge t}^{x_i} - L_{t_j \wedge t}^{x_{i+1}} + L_{t_j \wedge t}^{x_i} \right)$$

Eisenbaum et Kyprianou (2008):

$$L_t^x = \sigma \int_0^t 1_{\{X_{s-} \leq x\}} \mathrm{d} B_s + \sigma \int_{1-t}^1 1_{\{\hat{X}_{s-} \leq x\}} \mathrm{d} \hat{B}_s, \ 0 \leq t \leq 1$$

$\hat{Y}_t := Y_{(1-t)-}$ si $t < 1$ et $\hat{Y}_1 = Y_0$

Formule de Eisenbaum (2005)

$$f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f_{i,j} 1_{(x_i, x_{i+1}]} 1_{(t_j, t_{j+1}]}$$

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}} f(x,s) \mathrm{d}L_s^x := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f_{i,j} (L_{t_{j+1}\wedge t}^{x_{i+1}} - L_{t_{j+1}\wedge t}^{x_i} - L_{t_j \wedge t}^{x_{i+1}} + L_{t_j \wedge t}^{x_i})$$

Eisenbaum et Kyprianou (2008):

$$L_t^x = \sigma \int_0^t 1_{\{X_{s-} \leq x\}} \mathrm{d}B_s + \sigma \int_{1-t}^1 1_{\{\hat{X}_{s-} \leq x\}} \mathrm{d}\hat{B}_s, \ 0 \leq t \leq 1$$

$\hat{Y}_t := Y_{(1-t)-}$ si $t < 1$ et $\hat{Y}_1 = Y_0$

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}} f(x,s)\mathrm{d}L_s^x = \sigma \int_0^t f(X_{s-},s)\mathrm{d}B_s + \sigma \int_{1-t}^1 f(\hat{X}_{s-},1-s)\mathrm{d}\hat{B}_s$$

$$\|f\|_* := 2\mathbb{E}\left(\int_0^1 f^2(X_s,s)\mathrm{d}s\right)^{1/2} + \mathbb{E}\left(\int_0^1 \left| f(X_s,s)\frac{B_s}{s}\right| \mathrm{d}s\right)$$

$$\mathbb{E}\left(\left|\int_0^1 \int_{\mathbb{R}} f(x,s)\mathrm{d}L_s^x\right|\right) \leq \sigma \|f\|_*$$

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}} f(x,s)\mathrm{d}L_s^x = \sigma \int_0^t f(X_{s-},s)\mathrm{d}B_s + \sigma \int_{1-t}^1 f(\hat{X}_{s-},1-s)\mathrm{d}\hat{B}_s$$

$$\|f\|_* := 2\mathbb{E}\left(\int_0^1 f^2(X_s,s)\mathrm{d}s\right)^{1/2} + \mathbb{E}\left(\int_0^1 \left|f(X_s,s)\frac{B_s}{s}\right|\mathrm{d}s\right)$$

$$\mathbb{E}\left(\left|\int_0^1 \int_{\mathbb{R}} f(x,s)\mathrm{d}L_s^x\right|\right) \leq \sigma\|f\|_*$$

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}} f(x,s)\mathrm{d}L_s^x = \sigma \int_0^t f(X_{s-},s)\mathrm{d}B_s + \sigma \int_{1-t}^1 f(\hat{X}_{s-},1-s)\mathrm{d}\hat{B}_s$$

$$\|f\|_* := 2\mathbb{E}\left(\int_0^1 f^2(X_s,s)\mathrm{d}s\right)^{1/2} + \mathbb{E}\left(\int_0^1 \left|f(X_s,s)\frac{B_s}{s}\right|\mathrm{d}s\right)$$

$$\mathbb{E}\left(\left|\int_0^1 \int_{\mathbb{R}} f(x,s)\mathrm{d}L_s^x\right|\right) \leq \sigma\|f\|_*$$

-Si f est localement bornée, $\int_0^t \int_{\mathbb{R}} f(x,s) \mathrm{d}L_s^x$ est à variation quadratique zéro
-Si $\partial f / \partial x$ existe comme dérivée de Radon-Nikodym et si elle est localement bornée:

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}} f(x,s) \mathrm{d}L_s^x = -\sigma^2 \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(X_s, s) \mathrm{d}s$$

Soit X t.q $\sum_{s\leq t} |\Delta X_s| < \infty$ p.s

$$\begin{aligned} F(X_t, t) &= F(0,0) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial t}(X_{s-}, s)\mathrm{d}s \\ &+ \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(X_{s-}, s)\mathrm{d}X_s + \frac{\sigma^2}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(X_{s-}, s)\mathrm{d}s \\ &+ \sum_{s\leq t}\left\{F(X_s, s) - F(X_{s-}, s) - \frac{\partial F}{\partial x}(X_{s-})\Delta X_s\right\} \end{aligned}$$

Soit X t.q $\sum_{s\leq t} |\Delta X_s| < \infty$ p.s

Si $\partial F/\partial x$ et $\partial F/\partial t$ existent comme dérivées de Radon-Nikodym et elles sont localement bornées:

$$\begin{aligned} F(X_t, t) &= F(0,0) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial t}(X_{s-}, s)\mathrm{d}s \\ &+ \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(X_{s-}, s)\mathrm{d}X_s - \frac{1}{2}\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial F}{\partial x}(x, s)\mathrm{d}L_s^x \\ &+ \sum_{s\leq t}\left\{F(X_s, s) - F(X_{s-}, s) - \frac{\partial F}{\partial x}(X_{s-})\Delta X_s\right\} \end{aligned}$$

Décomposition de Lévy-Itô

Soit μ la mesure de sauts de X, i.e:

$$\mu((0,t] \times B) = \sum_{s \le t} 1_{\{B \setminus 0\}}(\Delta X_s), \qquad t \in \mathbb{R}_+, B \subset \mathbb{R}$$

$\tilde{\mu}$ est la mesure compensée, i.e:

$$\tilde{\mu}((0,t] \times B) = \mu((0,t] \times B) - t\nu(B), \qquad t \in \mathbb{R}_+, B \subset \mathbb{R}$$

Décomposition de Lévy-Itô

Soit μ la mesure de sauts de X, i.e:

$$\mu((0,t] \times B) = \sum_{s \leq t} 1_{\{B \backslash 0\}}(\Delta X_s), \qquad t \in \mathbb{R}_+, B \subset \mathbb{R}$$

$\tilde{\mu}$ est la mesure compensée, i.e:

$$\tilde{\mu}((0,t] \times B) = \mu((0,t] \times B) - t\nu(B), \qquad t \in \mathbb{R}_+, B \subset \mathbb{R}$$

Décomposition de Lévy-Itô

Soit μ la mesure de sauts de X, i.e:

$$\mu((0,t] \times B) = \sum_{s \leq t} 1_{\{B \setminus 0\}}(\Delta X_s), \qquad t \in \mathbb{R}_+, B \subset \mathbb{R}$$

$\tilde{\mu}$ est la mesure compensée, i.e:

$$\tilde{\mu}((0,t] \times B) = \mu((0,t] \times B) - t\nu(B), \qquad t \in \mathbb{R}_+, B \subset \mathbb{R}$$

Si $H(x,t,\omega) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}$ est $(\mathcal{F}_t)$-adapté ($\mathcal{P}$ est la tribu prévisible) et t.q:

$$\mathbb{E}\int_0^{t\wedge T_n}\int_{\mathbb{R}\setminus 0} H^2(x,t,\omega)\nu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}t < \infty \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

$$T_n := \inf\{t > 0 : |X_t| > n\}$$

$$\int_0^t\int_{\mathbb{R}} H(x,t,\omega)\tilde{\mu}(\mathrm{d}x,\mathrm{d}t) := \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left\{\int_0^t\int_{\{|x|>\varepsilon\}} H(x,t,\omega)\mu(\mathrm{d}x,\mathrm{d}t) - \int_0^t\int_{\{|x|>\varepsilon\}} H(x,t,\omega)\nu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}t\right\}$$

définit une martingale locale

Si $H(x,t,\omega) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}$ est $(\mathcal{F}_t)$-adapté ($\mathcal{P}$ est la tribu prévisible) et t.q:

$$\mathbb{E}\int_0^{t\wedge T_n}\int_{\mathbb{R}\setminus 0} H^2(x,t,\omega)\nu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}t < \infty \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

$$T_n := \inf\{t > 0 : |X_t| > n\}$$

$$\int_0^t\int_{\mathbb{R}} H(x,t,\omega)\tilde{\mu}(\mathrm{d}x,\mathrm{d}t) := \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left\{\int_0^t\int_{\{|x|>\varepsilon\}} H(x,t,\omega)\mu(\mathrm{d}x,\mathrm{d}t) - \int_0^t\int_{\{|x|>\varepsilon\}} H(x,t,\omega)\nu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}t\right\}$$

définit une martingale locale

Si $H(x,t,\omega) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}$ est $(\mathcal{F}_t)$-adapté ($\mathcal{P}$ est la tribu prévisible) et t.q:

$$\mathbb{E}\int_0^{t\wedge T_n}\int_{\mathbb{R}\setminus 0} H^2(x,t,\omega)\nu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}t < \infty \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

$$T_n := \inf\{t > 0 : |X_t| > n\}$$

$$\int_0^t\int_{\mathbb{R}} H(x,t,\omega)\tilde{\mu}(\mathrm{d}x,\mathrm{d}t) := \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left\{\int_0^t\int_{\{|x|>\varepsilon\}} H(x,t,\omega)\mu(\mathrm{d}x,\mathrm{d}t) - \int_0^t\int_{\{|x|>\varepsilon\}} H(x,t,\omega)\nu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}t\right\}$$

définit une martingale locale

$$X_t = at + \sigma B_t + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} x 1_{\{|x|\leq 1\}} \tilde{\mu}(\mathrm{d}x, \mathrm{d}s) + \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} x 1_{\{|x|>1\}} \mu(\mathrm{d}x, \mathrm{d}s)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}F(x,t) \quad := \quad & \frac{\partial F}{\partial t}(x,t) + a\frac{\partial F}{\partial x}(x,t) + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,t) \\ & + \int_{\mathbb{R}} \{F(x+y,t) - F(x,t) - y\frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\} 1_{\{|y|<1\}} \nu(\mathrm{d}y) \end{aligned}$$

$$X_t = at + \sigma B_t + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} x 1_{\{|x| \leq 1\}} \tilde{\mu}(\mathrm{d}x, \mathrm{d}s) + \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} x 1_{\{|x| > 1\}} \mu(\mathrm{d}x, \mathrm{d}s)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}F(x,t) \quad := \quad & \frac{\partial F}{\partial t}(x,t) + a \frac{\partial F}{\partial x}(x,t) + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,t) \\ & + \int_{\mathbb{R}} \{F(x+y,t) - F(x,t) - y \frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\} 1_{\{|y|<1\}} \nu(\mathrm{d}y) \end{aligned}$$

$$F(X_t, t) = F(0,0) + M_t + V_t$$

$$M_t = \sigma \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(X_s, s) \mathrm{d}B_s + \int_0^t \int_{\{|x|<1\}} \{F(X_{s-}+x, s) - F(X_{s-}, s)\} \tilde{\mu}(\mathrm{d}x, \mathrm{d}s)$$

$$V_t = \sum_{s \le t} \{F(X_s, s) - F(X_{s-}, s)\} 1_{\{|\Delta X_s| \ge 1\}} + \int_0^t \mathcal{A}F(X_s, s) \mathrm{d}s$$

$$F(X_t, t) = F(0,0) + M_t + V_t$$

$$M_t = \sigma \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(X_s, s)\mathrm{d}B_s + \int_0^t \int_{\{|x|<1\}} \{F(X_{s-}+x, s) - F(X_{s-}, s)\}\tilde{\mu}(\mathrm{d}x, \mathrm{d}s)$$

$$V_t = \sum_{s\leq t}\{F(X_s, s) - F(X_{s-}, s)\}1_{\{|\Delta X_s|\geq 1\}} + \int_0^t \mathcal{A}F(X_s, s)\mathrm{d}s$$

$$F(X_t, t) = F(0,0) + M_t + V_t$$

$$M_t = \sigma \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(X_s, s)\mathrm{d}B_s + \int_0^t \int_{\{|x|<1\}} \{F(X_{s-}+x, s) - F(X_{s-}, s)\}\tilde{\mu}(\mathrm{d}x, \mathrm{d}s)$$

$$V_t = \sum_{s \le t} \{F(X_s, s) - F(X_{s-}, s)\} 1_{\{|\Delta X_s| \ge 1\}} + \int_0^t \mathcal{A}F(X_s, s)\mathrm{d}s$$

$$F(X_t, t) = F(0,0) + M_t + V_t$$

$$M_t = \sigma \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(X_s, s)\mathrm{d}B_s + \int_0^t \int_{\{|x|<1\}} \{F(X_{s-}+x, s) - F(X_{s-}, s)\}\tilde{\mu}(\mathrm{d}x, \mathrm{d}s)$$

$$V_t = \sum_{s \leq t} \{F(X_s, s) - F(X_{s-}, s)\} 1_{\{|\Delta X_s| \geq 1\}} - \frac{1}{\sigma^2} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \mathcal{I}\mathcal{A}F(x, s)\mathrm{d}L_s^x$$

$$\mathcal{I}G(x, t) := \int_0^x G(z, t)\mathrm{d}z$$

$$F(X_t, t) = F(0,0) + M_t + V_t$$

$$M_t = \sigma \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(X_s, s)\mathrm{d}B_s + \int_0^t \int_{\{|x|<1\}} \{F(X_{s-}+x, s) - F(X_{s-}, s)\}\tilde{\mu}(\mathrm{d}x, \mathrm{d}s)$$

$$V_t = \sum_{s \le t} \{F(X_s, s) - F(X_{s-}, s)\} 1_{\{|\Delta X_s| \ge 1\}} - \frac{1}{\sigma^2} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \mathcal{A}\mathcal{I}F(x, s)\mathrm{d}L_s^x$$

$$\mathcal{I}G(x, t) := \int_0^x G(z, t)\mathrm{d}z$$

Eisenbaum-W. (2009)

Si $\partial F/\partial x$ et $\partial F/\partial t$ existent comme dérivées de Radon-Nikodym et si elles sont localement bornées:

$$F(X_t, t) = F(0,0) + M_t + V_t$$

$$M_t = \sigma \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(X_s, s)\mathrm{d}B_s + \int_0^t \int_{\{|x|<1\}} \{F(X_{s-}+x, s) - F(X_{s-}, s)\}\tilde{\mu}(\mathrm{d}x, \mathrm{d}s)$$

$$V_t = \sum_{s\le t} \{F(X_s, s) - F(X_{s-}, s)\} 1_{\{|\Delta X_s|\ge 1\}} - \frac{1}{\sigma^2}\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \mathcal{A}\mathcal{I}F(x,s)\mathrm{d}L_s^x$$

$$\mathcal{I}G(x,t) := \int_0^x G(z,t)\mathrm{d}z$$

Si $\sigma = 0$, $L^a \equiv 0$ pour tout a

$$\text{Si } \int_{-\infty}^{\infty} Re\left\{\frac{1}{1+\psi(\xi)}\right\} d\xi < \infty$$

Pour tout a, il existe une fonctionnelle additive $l_t^a, t \geq 0$, croissante tq dl^a à support dans $\{s : X_s = a\}$

$$\int_0^t g(X_s) ds = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) l_t^x dx$$

Si $\sigma = 0$, $L^a \equiv 0$ pour tout a

$$\text{Si} \int_{-\infty}^{\infty} Re\left\{\frac{1}{1+\psi(\xi)}\right\} \mathrm{d}\xi < \infty$$

Pour tout a, il existe une fonctionnelle additive $l_t^a, t \geq 0$, croissante tq $\mathrm{d}l^a$ à support dans $\{s : X_s = a\}$

$$\int_0^t g(X_s)\mathrm{d}s = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) l_t^x \mathrm{d}x$$

Si $\sigma = 0$, $L^a \equiv 0$ pour tout a

$$\text{Si } \int_{-\infty}^{\infty} Re\left\{\frac{1}{1+\psi(\xi)}\right\} \mathrm{d}\xi < \infty$$

Pour tout a, il existe une fonctionnelle additive $l_t^a, t \geq 0$, croissante tq $\mathrm{d}l^a$ à support dans $\{s : X_s = a\}$

$$\int_0^t g(X_s)\mathrm{d}s = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) l_t^x \mathrm{d}x$$

Si X est symétrique ($a = 0$, $\nu(B) = \nu(-B)$)

Salminen et Yor (2007)

$$l_t^a = v(X_t - a) - v(a) - \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \{v(X_{s-} - a + y) - v(X_{s-} - a)\} \tilde{\mu}(\mathrm{d}y, \mathrm{d}s)$$

$$v(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 - \cos(\xi x)}{\psi(\xi)} \mathrm{d}\xi$$

Si X est symétrique ($a = 0$, $\nu(B) = \nu(-B)$)

Salminen et Yor (2007)

$$l_t^a = v(X_t - a) - v(a) - \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \{v(X_{s-} - a + y) - v(X_{s-} - a)\} \tilde{\mu}(\mathrm{d}y, \mathrm{d}s)$$

$$v(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 - \cos(\xi x)}{\psi(\xi)} \mathrm{d}\xi$$

On dénote par $\mu_{\hat{X}}$ la mesure de sauts de $\hat{X}$:

$$\mu_{\hat{X}}((0,t] \times B) = \sum_{s \leq t} 1_{B \setminus 0}(\Delta \hat{X}_s)$$

ρ le $(\hat{\mathcal{F}}_t)$-compensateur de $\mu_{\hat{X}}$

Soit $\phi(x,t) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t\psi(x\xi)}\mathrm{d}\xi$

$$\rho(\mathrm{d}t, \mathrm{d}y) = \frac{\phi(1-t, X_{1-t}+y)}{\phi(1-t, X_{1-t})}\nu(\mathrm{d}y)\mathrm{d}t$$

Si $H(x,t,\omega) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}$ est $(\hat{\mathcal{F}}_t)$-adapté et:

$$\mathbb{E}\int_0^{t\wedge \hat{T}_n}\int_{\mathbb{R}\setminus 0} H^2(x,t,\omega)\rho(\mathrm{d}x,\mathrm{d}t) < \infty \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

$$\hat{T}_n := \inf\{t > 0 : |\hat{X}_t| > n\}$$

$$\int_0^t\int_{\mathbb{R}} H(x,t,\omega)(\mu_{\hat{X}} - \rho)(\mathrm{d}x,\mathrm{d}t) :=$$

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left\{\int_0^t\int_{\{|x|>\varepsilon\}} H(x,t,\omega)\mu_{\hat{X}}(\mathrm{d}x,\mathrm{d}t) - \int_0^t\int_{\{|x|>\varepsilon\}} H(x,t,\omega)\rho(\mathrm{d}x,\mathrm{d}t)\right\}$$

définit une $(\hat{\mathcal{F}}_t)$-martingale locale

Si $H(x,t,\omega) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}$ est $(\hat{\mathcal{F}}_t)$-adapté et:

$$\mathbb{E} \int_0^{t \wedge \hat{T}_n} \int_{\mathbb{R} \setminus 0} H^2(x,t,\omega)\rho(\mathrm{d}x, \mathrm{d}t) < \infty \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

$$\hat{T}_n := \inf\{t > 0 : |\hat{X}_t| > n\}$$

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}} H(x,t,\omega)(\mu_{\hat{X}} - \rho)(\mathrm{d}x, \mathrm{d}t) :=$$

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left\{ \int_0^t \int_{\{|x| > \varepsilon\}} H(x,t,\omega)\mu_{\hat{X}}(\mathrm{d}x, \mathrm{d}t) - \int_0^t \int_{\{|x| > \varepsilon\}} H(x,t,\omega)\rho(\mathrm{d}x, \mathrm{d}t) \right\}$$

définit une $(\hat{\mathcal{F}}_t)$-martingale locale

Si $H(x,t,\omega) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}$ est $(\hat{\mathcal{F}}_t)$-adapté et:

$$\mathbb{E} \int_0^{t \wedge \hat{T}_n} \int_{\mathbb{R} \setminus 0} H^2(x,t,\omega) \rho(\mathrm{d}x, \mathrm{d}t) < \infty \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

$$\hat{T}_n := \inf\{t > 0 : |\hat{X}_t| > n\}$$

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}} H(x,t,\omega)(\mu_{\hat{X}} - \rho)(\mathrm{d}x, \mathrm{d}t) :=$$

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left\{ \int_0^t \int_{\{|x| > \varepsilon\}} H(x,t,\omega) \mu_{\hat{X}}(\mathrm{d}x, \mathrm{d}t) - \int_0^t \int_{\{|x| > \varepsilon\}} H(x,t,\omega) \rho(\mathrm{d}x, \mathrm{d}t) \right\}$$

définit une $(\hat{\mathcal{F}}_t)$-martingale locale

$$\psi_*(\xi) := 2\int_0^1 (1-\cos(x\xi))\nu(\mathrm{d}x)$$

$$w(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos(x\xi)}{\psi_*(\xi)}\mathrm{d}\xi$$

$$2l_t^x = -N_t^x - (\hat{N}_1^x - \hat{N}_{(1-t)-}^x) - (\hat{W}_1^x - \hat{W}_{(1-t)-}^x)$$

$$\begin{aligned}
N_t^x &:= \int_0^t \int_{\{|y|\le 1\}} \{w(X_{s-}-x+y) - w(X_{s-}-x)\}\tilde{\mu}(\mathrm{d}y,\mathrm{d}s) \\
\hat{N}_t^x &:= \int_0^t \int_{\{|y|\le 1\}} \{w(X_{1-s}-x+y) - w(X_{1-s}-x)\}(\mu_{\tilde{X}}-\rho)(\mathrm{d}y,\mathrm{d}s) \\
\hat{W}_t^x &:= \int_0^t \int_{\{|y|\le 1\}} \{w(X_{1-s}-x+y) - w(X_{1-s}-x)\}(\rho-\nu)(\mathrm{d}y,\mathrm{d}s)
\end{aligned}$$

$$\psi_*(\xi) := 2\int_0^1 (1-\cos(x\xi))\nu(\mathrm{d}x)$$

$$w(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos(x\xi)}{\psi_*(\xi)}\mathrm{d}\xi$$

$$2l_t^x = -N_t^x - (\hat{N}_1^x - \hat{N}_{(1-t)-}^x) - (\hat{W}_1^x - \hat{W}_{(1-t)-}^x)$$

$$\begin{aligned} N_t^x &:= \int_0^t \int_{\{|y|\leq 1\}} \{w(X_{s-} - x + y) - w(X_{s-} - x)\}\tilde{\mu}(\mathrm{d}y, \mathrm{d}s) \\ \hat{N}_t^x &:= \int_0^t \int_{\{|y|\leq 1\}} \{w(X_{1-s} - x + y) - w(X_{1-s} - x)\}(\mu_{\tilde{X}} - \rho)(\mathrm{d}y, \mathrm{d}s) \\ \hat{W}_t^x &:= \int_0^t \int_{\{|y|\leq 1\}} \{w(X_{1-s} - x + y) - w(X_{1-s} - x)\}(\rho - \nu)(\mathrm{d}y, \mathrm{d}s) \end{aligned}$$

$$\psi_*(\xi) := 2\int_0^1 (1-\cos(x\xi))\nu(\mathrm{d}x)$$

$$w(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos(x\xi)}{\psi_*(\xi)}\mathrm{d}\xi$$

$$2l_t^x = -N_t^x - (\hat{N}_1^x - \hat{N}_{(1-t)-}^x) - (\hat{W}_1^x - \hat{W}_{(1-t)-}^x)$$

$$\begin{aligned}
N_t^x &:= \int_0^t \int_{\{|y|\le 1\}} \{w(X_{s-}-x+y) - w(X_{s-}-x)\}\tilde{\mu}(\mathrm{d}y,\mathrm{d}s) \\
\hat{N}_t^x &:= \int_0^t \int_{\{|y|\le 1\}} \{w(X_{1-s}-x+y) - w(X_{1-s}-x)\}(\mu_{\tilde{X}}-\rho)(\mathrm{d}y,\mathrm{d}s) \\
\hat{W}_t^x &:= \int_0^t \int_{\{|y|\le 1\}} \{w(X_{1-s}-x+y) - w(X_{1-s}-x)\}(\rho-\nu)(\mathrm{d}y,\mathrm{d}s)
\end{aligned}$$

$$\mathfrak{F}f(\xi, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} f(x,t)\mathrm{d}x$$

$$\mathcal{H}f(x,y,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\mathfrak{F}f(\xi,s)\frac{\xi}{\psi_*(\xi)}[\sin(y\xi)+i(\cos(y\xi)-1)]\mathrm{d}\xi$$

$$f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f_{i,j}1_{(x_i,x_{i+1}]}1_{(t_j,t_{j+1}]}$$

$$\int_0^t\int_{\mathbb{R}} f(x,s)\mathrm{d}l_s^x := \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f_{i,j}(l_{t_{j+1}\wedge t}^{x_{i+1}} - l_{t_{j+1}\wedge t}^{x_i} - l_{t_j\wedge t}^{x_{i+1}} + l_{t_j\wedge t}^{x_i}) =$$

$$\mathfrak{F}f(\xi,t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} f(x,t)\mathrm{d}x$$

$$\mathcal{H}f(x,y,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\mathfrak{F}f(\xi,s)\frac{\xi}{\psi_*(\xi)}[\sin(y\xi)+i(\cos(y\xi)-1)]\mathrm{d}\xi$$

$$f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f_{i,j} 1_{(x_i,x_{i+1}]} 1_{(t_j,t_{j+1}]}$$

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}} f(x,s)\mathrm{d}l_s^x := \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f_{i,j}(l_{t_{j+1}\wedge t}^{x_{i+1}} - l_{t_{j+1}\wedge t}^{x_i} - l_{t_j\wedge t}^{x_{i+1}} + l_{t_j\wedge t}^{x_i}) =$$

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}f(X_{s-}, y, s)\tilde{\mu}(\mathrm{d}y, \mathrm{d}s) \\
+ \quad & \frac{1}{2}\int_{[1-t,1]} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}f(X_{1-s}, y, 1-s)(\mu_{\hat{X}} - \rho)(\mathrm{d}y, \mathrm{d}s) \\
+ \quad & \frac{1}{2}\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}f(X_s, y, s) \left(\frac{\phi(X_s + y, s) - \phi(X_s, s)}{\phi(X_s, s)} \right) \nu(\mathrm{d}y)\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq 1}\left|\int_0^t\int_{\mathbb{R}} f(x,s)\mathrm{d}l_s^x\right|\right)\leq k\|f\|$$

Si $f\in L^2(\mathbb{R}\times[0,1])$

$$\|f\|^2:=\int_0^1\beta(t)\int_{\mathbb{R}}\left(1+\frac{\xi^2}{\psi_*(\xi)}\right)|\mathfrak{F}f(\xi,t)|^2\mathrm{d}\xi\mathrm{d}t$$

$$\beta(t):=\left\{\int_0^\infty e^{-2t\psi(\xi)}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi\right\}^{1/2}$$

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq 1}\left|\int_0^t\int_{\mathbb{R}} f(x,s)\mathrm{d}l_s^x\right|\right)\leq k\|f\|$$

Si $f\in L^2(\mathbb{R}\times[0,1])$

$$\|f\|^2 := \int_0^1 \beta(t)\int_{\mathbb{R}}\left(1+\frac{\xi^2}{\psi_*(\xi)}\right)|\mathfrak{F}f(\xi,t)|^2\mathrm{d}\xi\mathrm{d}t$$

$$\beta(t) := \left\{\int_0^\infty e^{-2t\psi(\xi)}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi\right\}^{1/2}$$

$\int_0^1 \beta(t)\mathrm{d}t < \infty$

$$\int_0^1 \beta(t)\mathrm{d}t < \infty \text{ si } |\xi|^\alpha \psi(\xi)^{-1} = O(1)\ |\xi| \to \infty,\ 1 < \alpha < 2$$

$$B := \{f \in L^2(\mathbb{R} \times [0,1]) : \|f\| < \infty\}$$

$f \in B_{loc}$ si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\exists f_n \in B$:
$f(x,t) = f_n(x,t) \forall (x,t) \in [-n,n] \times [0,1]$

$\int_0^1 \beta(t)\mathrm{d}t < \infty$

$$\int_0^1 \beta(t)\mathrm{d}t < \infty \text{ si } |\xi|^{\alpha}\psi(\xi)^{-1} = O(1)\ |\xi| \to \infty,\ 1 < \alpha < 2$$

$$B := \{f \in L^2(\mathbb{R} \times [0,1]) : \|f\| < \infty\}$$

$f \in B_{loc}$ si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\exists f_n \in B$:
$f(x,t) = f_n(x,t) \forall (x,t) \in [-n,n] \times [0,1]$

$\int_0^1 \beta(t)\mathrm{d}t < \infty$

$$\int_0^1 \beta(t)\mathrm{d}t < \infty \text{ si } |\xi|^\alpha \psi(\xi)^{-1} = O(1)\ |\xi| \to \infty,\ 1 < \alpha < 2$$

$$B := \{f \in L^2(\mathbb{R} \times [0,1]) : \|f\| < \infty\}$$

$f \in B_{loc}$ si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\exists f_n \in B$:
$f(x,t) = f_n(x,t) \forall (x,t) \in [-n,n] \times [0,1]$

$\int_0^1 \beta(t)\mathrm{d}t < \infty$

$$\int_0^1 \beta(t)\mathrm{d}t < \infty \text{ si } |\xi|^\alpha \psi(\xi)^{-1} = O(1)\ |\xi| \to \infty,\ 1 < \alpha < 2$$

$$B := \{f \in L^2(\mathbb{R} \times [0,1]) : \|f\| < \infty\}$$

$f \in B_{loc}$ si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\exists f_n \in B$:
$f(x,t) = f_n(x,t) \forall (x,t) \in [-n,n] \times [0,1]$

Soit f localement bornée tq $\partial f/\partial x$ existe comme dérivée de Radon-Nikodym et elle est aussi localement bornée:

$f \in B_{loc}$ et:

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}} f(x,s)\mathrm{d}l_s^x = -\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(X_s, s)\mathrm{d}s$$

$\mathcal{AIF} \in B_{loc}$

Si $f \in B_{loc}$, $\int_0^t \int_{\mathbb{R}} f(x,s)\mathrm{d}l_s^x$ est a variation quadratique zéro.

Soit f localement bornée tq $\partial f / \partial x$ existe comme dérivée de Radon-Nikodym et elle est aussi localement bornée:

$f \in B_{loc}$ et:

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}} f(x,s) \mathrm{d} l_s^x = - \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(X_s, s) \mathrm{d}s$$

$\mathcal{AIF} \in B_{loc}$

Si $f \in B_{loc}$, $\int_0^t \int_{\mathbb{R}} f(x,s) \mathrm{d} l_s^x$ est a variation quadratique zéro.

Soit f localement bornée tq $\partial f/\partial x$ existe comme dérivée de Radon-Nikodym et elle est aussi localement bornée:

$f \in B_{loc}$ et:

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}} f(x,s)\mathrm{d}l_s^x = -\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(X_s,s)\mathrm{d}s$$

$\mathcal{AIF} \in B_{loc}$

Si $f \in B_{loc}$, $\int_0^t \int_{\mathbb{R}} f(x,s)\mathrm{d}l_s^x$ est a variation quadratique zéro.

Soit f localement bornée tq $\partial f/\partial x$ existe comme dérivée de Radon-Nikodym et elle est aussi localement bornée:

$f \in B_{loc}$ et:

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}} f(x,s) \mathrm{d} l_s^x = - \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(X_s, s) \mathrm{d}s$$

$\mathcal{AIF} \in B_{loc}$

Si $f \in B_{loc}$, $\int_0^t \int_{\mathbb{R}} f(x,s) \mathrm{d} l_s^x$ est a variation quadratique zéro.

$$F(X_t, t) = F(0,0) + M_t + V_t$$

$$M_t = \int_0^t \int_{\{|x|<1\}} \{F(X_{s-} + x, s) - F(X_{s-}, s)\} \tilde{\mu}(\mathrm{d}x, \mathrm{d}s)$$

$$V_t = \sum_{s \le t} \{F(X_s, s) - F(X_{s-}, s)\} 1_{\{|\Delta X_s| \ge 1\}} + \int_0^t \mathcal{A}F(X_s, s)\mathrm{d}s$$

$$F(X_t, t) = F(0,0) + M_t + V_t$$

$$M_t = \int_0^t \int_{\{|x|<1\}} \{F(X_{s-} + x, s) - F(X_{s-}, s)\} \tilde{\mu}(\mathrm{d}x, \mathrm{d}s)$$

$$V_t = \sum_{s \le t} \{F(X_s, s) - F(X_{s-}, s)\} 1_{\{|\Delta X_s| \ge 1\}} + \int_0^t \mathcal{A}F(X_s, s)\mathrm{d}s$$

$$F(X_t, t) = F(0,0) + M_t + V_t$$

$$M_t = \int_0^t \int_{\{|x|<1\}} \{F(X_{s-} + x, s) - F(X_{s-}, s)\} \tilde{\mu}(\mathrm{d}x, \mathrm{d}s)$$

$$V_t = \sum_{s \le t} \{F(X_s, s) - F(X_{s-}, s)\} 1_{\{|\Delta X_s| \ge 1\}} + \int_0^t \mathcal{A}F(X_s, s)\mathrm{d}s$$

$$F(X_t, t) = F(0,0) + M_t + V_t$$

$$M_t = \int_0^t \int_{\{|x|<1\}} \{F(X_{s-} + x, s) - F(X_{s-}, s)\} \tilde{\mu}(\mathrm{d}x, \mathrm{d}s)$$

$$V_t = \sum_{s \leq t} \{F(X_s, s) - F(X_{s-}, s)\} 1_{\{|\Delta X_s| \geq 1\}} - \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \mathcal{I}\mathcal{A}F(x,s) \mathrm{d}l_s^x$$

$$F(X_t, t) = F(0,0) + M_t + V_t$$

$$M_t = \int_0^t \int_{\{|x|<1\}} \{F(X_{s-} + x, s) - F(X_{s-}, s)\} \tilde{\mu}(\mathrm{d}x, \mathrm{d}s)$$

$$V_t = \sum_{s \leq t} \{F(X_s, s) - F(X_{s-}, s)\} 1_{\{|\Delta X_s| \geq 1\}} - \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \mathcal{A}\mathcal{I}F(x, s) \mathrm{d}l_s^x$$

Si $\partial F/\partial x$ et $\partial F/\partial t$ existent comme dérivées de Radon-Nikodym et elles sont localement bornées:

$$F(X_t, t) = F(0,0) + M_t + V_t$$

$$M_t = \int_0^t \int_{\{|x|<1\}} \{F(X_{s-} + x, s) - F(X_{s-}, s)\} \tilde{\mu}(\mathrm{d}x, \mathrm{d}s)$$

$$V_t = \sum_{s \le t} \{F(X_s, s) - F(X_{s-}, s)\} 1_{\{|\Delta X_s| \ge 1\}} - \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \mathcal{A}\mathcal{I}F(x, s)\mathrm{d}l_s^x$$